Método de Runge Kutta:

Tuesday, September 16, 2025 1:57 PM

· Listas, diccionarios, tuplas

Sea $y' = f(x,y)$ (I) con condición inicial $y(x_0) = y_0$ la EDO que queremos resolver. (numéricamente) Mostraremos ahora el uso del método de Runge-Kutta que en la práctica es probablemente el método de arranque (que solo necesita condición inicial.) más utilizado.

Sabemos que $y(x_n+h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + \cdots$ (II) (nos quedamos hasta este termino.) Derivando (I) y sustituyendo en (II):

$y'' = \frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, y'(x) \Rightarrow y(x_n+h) = y(x_n) + y'(x_n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_n,y_n) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_n,y_n)\cdot f(x_n,y_n)\right)h^2$ (III)

Suele pasar que $f(x,y)$ es una función no suave, por lo que las derivadas de $f(x,y)$ no están bien definidas, por esto buscaremos escribir (III) como $y(x_n+h) = y(x_n) + Ahf(x_n,y_n) + Bhf(x_n+Ch,\, y_n+Dhf(x_n,y_n))$ (IV) con $A,B,C,D \in \mathbb{R}$

Sabemos que $f(x_n+Ch,\, y_n+Dhf(x_n,y_n)) = f(x_n,y_n) + \partial_x f(x_n,y_n)(Ch) + \partial_y f(x_n,y_n)(Dhf(x_n,y_n)) + O(h^2)$ sustituyendo en (IV):

$y(x_n+h) = y(x_n) + Ahf(x_n,y_n) + Bh[f(x_n,y_n) + \partial_x f(x_n,y_n)(Ch) + \partial_y f(x_n,y_n)(Dhf(x_n,y_n))]$

$= y(x_n) + (A+B)hf(x_n,y_n) + Bh^2[C\partial_x f(x_n,y_n) + Df(x_n,y_n)\partial_y f(x_n,y_n)]$ (V) comparando V con III:

$\Rightarrow (A+B) = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = D = 1$

$\Rightarrow y(x_n+h) = y(x_n) + \frac{1}{2}hf(x_n,y_n) + \frac{1}{2}hf(x_n+h,\, y_n+hf(x_n,y_n))$ Sea $u_1 = hf(x_n,y_n)$, $u_2 = hf(x_n+h, y_n+u_1)$

$\Rightarrow y(x_n+h) = y(x_n) + \frac{1}{2}(u_1+u_2)$ (VI) ▸ Método de R-K de $O(2)$

Si realizamos el mismo proceso anterior pero expandiendo terminos de (II) hasta orden $O(h^3)$ ⇒ nos queda:

$y(x_n+h) = y(x_n) + \frac{1}{6}(v_1+4v_2+v_3)$ con $v_1 = u_1 = hf(x_n,y_n)$, $v_2 = hf(x_n+\frac{1}{2}h,\, y_n+\frac{1}{2}v_1)$, $v_3 = hf(x_0+h,\, y_0+2v_2-v_1)$ ▸ Método de R-K de $O(3)$

Si realizamos el mismo proceso anterior pero expandiendo terminos de (II) hasta orden $O(h^4)$ ⇒ nos queda:

$y(x_n+h) = y(x_n) + \frac{1}{6}(w_1+2w_2+2w_3+w_4)$ con $w_1 = v_1 = u_1 = hf(x_n,y_n)$, $w_2 = v_2 = hf(x_n+\frac{1}{2}h,\, y_n+\frac{1}{2}w_1)$, $w_3 = hf(x_n+\frac{1}{2}h,\, y_n+\frac{1}{2}w_2)$

$w_4 = hf(x_n+h,\, y_n+w_3)$ ▸ Método de R-K de orden $O(h^4)$

Ejemplos: R-K orden (2):

Usando el método de R-K de $O(2)$ hallar un valor aprox. a $y(x=0.2)$ de la EDO $y' = x^2+y$ con $y(0) = 1$ usando $h = 0.1$:

Esta EDO, tiene la sol. $y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y(0.2)_{Real} = 1.224208274$

Por otra parte el método de R-K de orden 2 esta dado por VI. Notemos que $f(x,y) = x^2+y$, debemos hallar $y_{n+2} = y(\underset{0}{x_0} + \underset{0.1}{h} + \underset{0.1}{h})$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(u_1+u_2)$ con $u_1 = h(x_n^2+y_n)$, $u_2 = h[(x_n+h)^2 + (y_n+u_1)]$

n	$x_{n+1} = x_n + h$, $h \to 0.1$	$u_1 = h(x_n^2 + y_n)$	$u_2 = h[(x_n+h)^2 + y_n + u_1]$	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(u_1+u_2)$
-1	$x_0 = 0$	·	·	$y_0 = 1$
0	$x_1 = 0.1$	$u_1 = 0.1(0^2+1) = 0.1$	$u_2 = 0.1[(0+0.1)^2 + 1 + 0.1] = 0.111$	$\underbrace{y_1}_{y(0.1),\ y(x_1)} = 1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.111) = 1.1055$
1	$x_2 = 0.2$	$u_1 = 0.1[(0.1)^2 + 1.1055] = 0.11155$	$u_2 = 0.1[(0.1+0.1)^2 + 1.1055 + 0.11155] = 0.132705$	$y_2 = 1.1055 + \frac{1}{2}(0.11155 + 0.132705) = 1.2276275$

Ejemplo R-K O(4):

Usando el método de R-K de orden 4 Halle el valor de $y(0.2)$ de la EDO anterior.

		$hf(x_n, y_n)$	$hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}w_1)$	$w_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}w_2)$	$w_4 = hf(x_n + h, y_n + w_3)$
n	$x_{n+1} = x_n + h$	$w_1 = h(x_n^2 + y_n)$	$w_2 = h[(x_n + \frac{1}{2}h)^2 + (y_n + \frac{1}{2}w_1)]$	$w_3 = h[(x_n + \frac{1}{2}h)^2 + (y_n + \frac{1}{2}w_2)]$	$w_4 = h[(x_n+h)^2 + (y_n + w_3)]$
-1	$x_0 = 0$	·	·	·	·
0	$x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$	0.1	$0.1[(0 + \frac{1}{2}0.1)^2 + (1 + \frac{1}{2}(0.1))] = 0.10525$	0.1055125	0.11155125
1	$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2$	0.11155127	0.1183788	0.1187202	0.1264233

Nota: si hicieramos el calculo para $h = 0.2$ => solo necesitariamos un paso y el resultado sería 1.2242067

n	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4)$
-1	$y_0 = 1$
0	$y_1 = 1.1055127$
1	$y_2 = 1.2242081$

Ej. R-K O(4):

Sea $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1.2$. Halle $y(1.05)$ con $h = 0.05$:

		$hf(x_n, y_n)$	$hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}w_1)$	$w_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}w_2)$	$w_4 = hf(x_n + h, y_n + w_3)$
n	$x_{n+1} = x_n + \Delta x$	$u_1 = h(x_n^2 + y_n^2)$	$h((x_n + \frac{1}{2}h)^2 + (y_n + \frac{1}{2}w_1)^2)$	$h((x_n + \frac{1}{2}h)^2 + (y_n + \frac{1}{2}w_2)^2)$	$h((x_n+h)^2 + (y_n + w_3)^2)$
-1	$x_0 = 1$				
0	$x_1 = 1 + 0.05 = 1.05$	$u_1 = 0.05((1^2 + (1.2)^2)) = 0.122$	0.1320	0.1326	0.1439

n	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(w_1 + w_2 + 2w_3 + w_4)$
-1	$y_0 = 1.2$
0	$y_1 = y(1.05) = 1.3325$