Simulacro parcial 3:

Sunday, September 21, 2025 11:32 PM

Problema 2 del simulacro:

1 Resuelva usando triangulización:

$$\begin{cases} (D-2)x + 7y = 0 & (1) \\ -5x \quad (D-10)y - 4z = 0 & (2) \\ -5y + (D-2)z = 0 & (3) \end{cases}$$

Iniciamos fijando una de las 3 EDOs, esta será la EDO a la cual podremos aplicar operaciones, para luego ser sumada por las demás. Antes de esto hallaremos el det. del sistema para corroborar que el sistema tenga solución (caso no degenerado) y para hallar la cantidad de constantes arbitrarias que tendrán nuestras soluciones. Entonces tenemos

$$\begin{vmatrix} D-2 & 7 & 0 \\ -5 & D+10 & -4 \\ 0 & -5 & (D-2) \end{vmatrix}$$

= ∴ tendremos 3 constantes arb. en la solución.

Para este caso elegimos fijar (3) y hacemos la siguiente operación: $\frac{(D-10)}{5}(3) + (2)$

$$-5x + \frac{1}{5}[(D-10)(D-2)-20]z = 0 \quad (IV)$$

ahora haremos el mismo proceso usando la ecuación que falta (la cual es (1)). eliminamos la misma variable que ya eliminamos en (IV).

Elegimos operar $\frac{7}{5}(3) + (1)$: $\frac{7}{5}(D-2)z + (D-2)x = 0 \quad (V)$ ¡Recordar que SOLO OPERAMOS SOBRE LA FIJADA!

ahora tenemos un nuevo sistema compuesto por (IV), (V), (III)

$$\begin{cases} -5y + (D-2)z = 0 & (III) \\ -5x + \frac{1}{5}[(D-10)(D-2)-20]z = 0 & (IV) \\ (D-2)x + \frac{7}{5}(D-2)z = 0 & (V) \end{cases}$$

fijada

Este sistema ya solo depende de x, z.

fijamos ahora (IV) y hacemos $\frac{(D-2)}{5}(IV) + (V)$:

$$\frac{1}{25}(D-2)[(D-10)(D-2)-20 + \tfrac{7 \cdot 25}{5}]z = 0 \quad (VI)$$

nos queda el sistema:

$$\begin{cases} -5y + (D-2)z = 0 & (III) \\ -5x + \frac{1}{5}[(D-10)(D-2)-20]z = 0 & (IV) \\ (D-2)(D-5)(D-7)z = 0 & VI \end{cases}$$

fijadas

el det. de este sistema también es de orden 3.

Este ya es un sistema triangular del cual podemos hallar las soluciones.

2 Triangulación por varios pasos: (Ejemplo)

2.1) Triangulizar
$$\begin{cases} (D^2-1)x + (D^2+1)y = 0 & (1) \\ (D+2)x + (D+2)y = 0 & (2) \end{cases}$$

fijamos (2) y hacemos $-D(2) + (1)$: $(\cancel{-D^2} - 2D)x + (\cancel{-D^2} - 2D)y + (\cancel{D^2} - 1)x + (\cancel{D^2} + 1)y = 0$, $(-2D-1)x + (-2D+1)y = 0 \quad (3)$

Nuestro sistema eq. queda como:
$$\begin{cases} (D+2)x + (D+2)y = 0 & (2) \\ (-2D-1)x + (-2D+1)y = 0 & (3) \end{cases}$$

Fijamos (2) y hacemos $2*(2) + (3)$: también podríamos fijar (3).

$$(\cancel{2D}+4)x + (\cancel{2D}+4)y + (\cancel{-2D}-1)x + (\cancel{-2D}+1)y = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} (D+2)x + (D+2)y = 0 & (2) \\ 3x + 5y = 0 & (4) \end{cases}$$

Por último fijamos (4) y hacemos $-\frac{(D+2)}{3}(4) + (2)$: $-\frac{5}{3}(D+2)y + (D+2)y = 0$, simplificando: $-\frac{2}{3}(D+2)y = 0 \quad (5)$ Nos queda el sistema triangular:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 0 & (4) \\ (D+2)y = 0 & (5) \end{cases}$$

3 Discusión sobre el método de heaviside:

En problemas de transf. de Laplace es muy común tener que realizar fracciones parciales, para ello introducimos el método de heaviside.

Caso 1: Raíces distintas en el denominador:

(I)

Caso 1: Raíces distintas en el denominador:

Si $\overset{(I)}{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ con $Q(x)=(x-r_1)\cdots(x-r_n)$ y cada r_i es distinto. además se cumple que grado (P) < grado (Q) => la descomposición en fracciones parciales de (I) es:

$$\overset{(II)}{\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-r_i}, \quad \text{con} \quad A_i = \frac{P(x)}{\prod_{j\neq i}(x-r_j)}\Bigg|_{x=r_i}}$$

▸ Método de heaviside.

Ejemplo: Descomponer en fracciones parciales la fracción: $\frac{2x+3}{x(x+1)(x-2)}$

Por definición esto es $\frac{\overbrace{2x+3}^{P(x)}}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$ => $r_1 = 0,\ r_2 = -1,\ r_3 = 2$

$A = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}\Big|_{x=0} = -\frac{3}{2}$, $B = \frac{2(-1)+3}{(-1)(-1-2)} = \frac{1}{3}$ $C = \frac{2(2)+3}{(2)(2+1)} = \frac{7}{6}$ => $\frac{2x+3}{x(x+1)(x-2)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{7}{6}\frac{1}{x-2}$

Caso 2: Raiz de multiplicidad m:

Si $Q(x)$ contiene un factor $(x-r)^m$ => $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$ + (otros terminos)

Ejemplo: Descomponer en fracciones parciales $\frac{x^2}{(1+x)^3}$

Por definición sería $\frac{x^2}{(1+x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3}$ con $r=-1$

en este caso, es C

El coef. del exponente más grande se encuentra Multiplicando de ambos lados por el denominador $Q(x)$ y evaluando los x en la raiz, para este caso $x = r = -1$: $\frac{x^2}{\cancel{(1+x)^3}}\cancel{(1+x)^3} = \frac{A}{\cancel{1+x}}(1+x)^{\cancel{3}\,2} + \frac{B}{\cancel{(1+x)^2}}(1+x)^{\cancel{3}\,1} + \frac{C}{\cancel{(1+x)^3}}\cancel{(1+x)^3}$ y evaluando:

$(-1)^2 = A(0) + B(0) + C$ => $C = 1$

Para hallar B derivamos la expresión: $2x = 2A(1+x) + B$ y evaluando en $x=r$: $2(-1) = 2A(0) + B$ => $B = -2$

Por último para C, derivamos nuevamente la anterior expresión y evaluamos $2 = 2A$ => $A = 1$

Caso 3: Combinación de los dos anteriores: Descomponer:

acá usamos el caso 2

esta parte se resuelve con el caso 1

$$\frac{2s^3+4s^2-4s+2}{s^2(s+1)(2s-1)(s-1)} = \boxed{\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2}} + \boxed{\frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{2s-1} + \frac{A_5}{s-1}}$$

Iniciamos hallando A_3, A_4, A_5: $A_3 = \frac{2(-1)^3 + 4(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^2(2(-1)-1)(-1-1)} = \frac{-\cancel{2}+4+4+\cancel{2}}{(-3)(-2)}$ => $A_3 = \frac{4}{3}$

análogamente para A_4 y A_5.

Hallamos ahora A_1 y A_2 usando el caso 2:

$2s^3+4s^2-4s+2 = s^{\cancel{2}}(s+1)(2s-1)(s-1)\frac{A_1}{\cancel{s}} + \cancel{s^2}(s+1)(2s-1)(s-1)\frac{A_2}{\cancel{s^2}}$ y como la raiz en la cual evaluaremos es $r=0$ => los demás

evaluamos acá

de multiplicidad 2

terminos se cancelarán: Evaluando en $s = r = 0$:

$2 = A_2$ ahora derivamos y evaluamos en $s=0$ para hallar A_1:

$6s^2+8s-4 = (8s^3-3s^2-4s+1)A_1 + (6s^2-2s-2)\overbrace{(2)}^{A_2}$ evaluamos $\cancel{-4} = A_1 \cancel{-4}$ $A_1 = 0$

(3) Problemas propuestos:

3.1) Resolver por triangulización los siguientes sistemas:

3.1.1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x \end{cases}$

3.1.2) $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x - \frac{d^2y}{dt^2} - y = -\cos(2t) \end{cases}$

3.1.1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y(t) + x(t) - t \end{cases}$

3.1.2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x - \dfrac{d^2y}{dt^2} - y = -\cos(2t) \\ 2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - y = 0 \end{cases}$

3.2) Resolver usando la T. de Laplace:

Tarea 10.