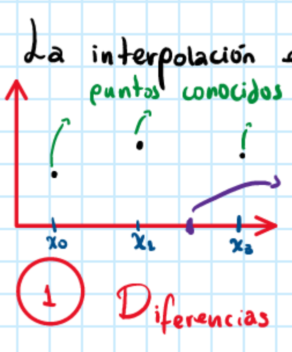
Interpolación:

Tuesday, September 23, 2025 5:17 PM

La interpolación es un método matemático que nos permite estimar valores desconocidos entre puntos de datos conocidos.



si yo quisiera el valor en ese punto, debo interpolar.

En el sig. documento aprenderemos las bases de la interpolación

1 Diferencias finitas:

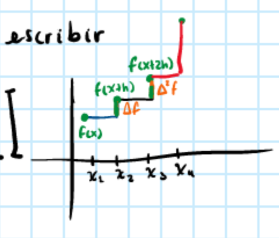
Definimos la **PRIMER DIFERENCIA** de una función $f(x)$ como (I) $\boxed{\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)}$ (h fijo) ▸ Primera diferencia de $f(x)$. Es fácil notar que $\Delta f(x)$ es la diferencia de valores de la función evaluada en dos valores vecinos de x, que estan separados h unidades.

Analogamente, la **SEGUNDA DIFERENCIA** de $f(x)$ es definida como $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$

$= f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \Rightarrow$ (II) $\boxed{\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}$ ▸ Segunda diferencia de $f(x)$. En general podemos escribir

(3) $\boxed{\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]}$ ▸ n-ésima diferencia de $f(x)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

III



1.1) Ejemplo: Si $f(x) = e^x$ y $h = 0.1$ construya una tabla de diferencias de e^x para valores de $x \in [0, 0.5]$

x	$f(x) = e^x$	$\Delta e^x = e^{x+h} - e^x$	$\Delta^2 e^x = \underbrace{e^{x+2h} - e^{x+h}}_{\Delta e^{x+h}} - \Delta e^x$	$\Delta^3 e^x = e^{x+3h} - 2e^{x+2h} + e^{x+h} - \Delta e^x$		
0	$e^0 = 1$	$e^{0+0.1} - e^0 = 0.10517$	$e^{0+0.2} - e^{0.1} - 0.10517 = 0.01106$	$e^{0+0.3} - 2e^{0+0.2} + e^{0.1} - \Delta e^x = 0.00117$		
0.1	$e^{0.1} = 1.10517$	0.11623	0.01223			
0.2	$e^{0.2} = 1.22140$	0.12846				
0.3	$e^{0.3} = 1.34986$					
0.4	$e^{0.4} = 1.49182$					
0.5	$e^{0.5} = 1.64872$					▸ TABLA 1.

Notemos que si queremos hallar la quinta diferencia de $f(x)$, i.e $\Delta^5 f(x)$ cuando $x = a$, necesitamos conocer antes $f(a), f(a+h), \cdots, f(a+5h)$. Y en general si queremos conocer la n-ésima dif. de $f(x)$ en $x = a \Rightarrow$ debemos conocer $f(a), f(a+h), \cdots f(a+nh)$

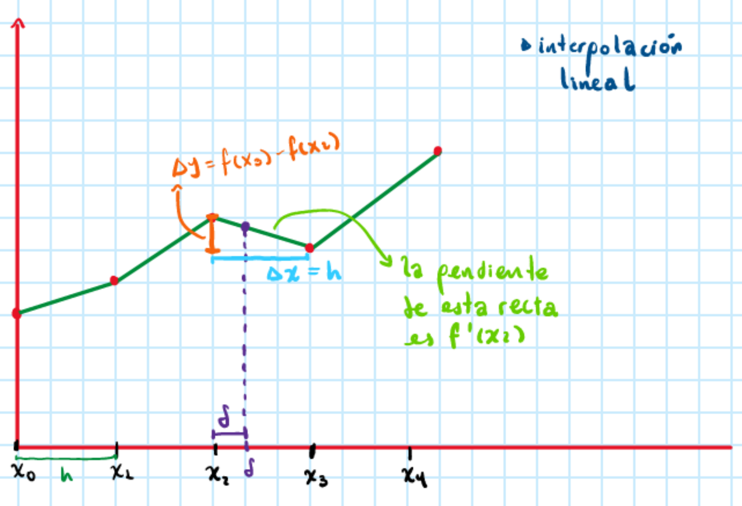
Recordemos de (II) que $\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$, haciendo el mismo procedimiento para $\Delta^3 f(x)$ tenemos:

$\boxed{\Delta^3 f(x) = y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x)}$ Notemos que los coef. de $\Delta f(x)$ coinciden con los de $(x-1)$, los de $(x-1)^2$ con los de $\Delta^2 f(x)$, los de $(x-1)^3$ con los de $\Delta^3 f(x)$ y en general se puede demostrar que los coef. de la expansión de $\Delta^n f(x)$ coinciden con los de la expansión de $(x-1)^n$ $\therefore$ La generalización de la N-ÉSIMA DIFERENCIA de $f(x)$

es $\boxed{\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} f[x_0 + (n-k)h]}$ ▸ n-ésima dif. de $f(x)$. o de forma compacta $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} f_{n-k}$

2 Interpolación polinomial: 2.1) Interpolación lineal

Supongamos ahora que la unica información que tenemos sobre la función son los valores que toma esta en $x_0, x_0+h, \cdots x_0+nh$ y lo que deseamos es hallar un valor de la función en $x = x_0 + dh$ con $d \neq 0, 1, 2, \cdots$ (ya que en estos ya conocemos el valor.)



Imaginemos que tenemos una función f, de la cual solo conocemos sus valores en $\underbrace{x_0, \cdots, x_4}$ (pasos equiespaciados por h unidades.) Pero queremos hallar el valor de $f(x_2+\delta)$ con $\delta \neq h$. Entonces hacemos $f(x_2+\delta) \sim f(x_2) + \delta f'(x_2)$ (pendiente de la recta tangente a $f(x_2)$), sin embargo debemos notar que no tenemos información de la derivada de $f(x)$, para hallar una expresión de $f'(x_2)$ utilizaremos, las diferencias finitas, reescribimos $f(x_2+\delta) \sim f(x_2) + \delta \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$= f(x_2) + \delta \frac{\overbrace{[f(x_3) - f(x_2)]}^{\Delta y}}{\underbrace{h}_{\Delta x}}$. En general si queremos hallar un valor para f, entre los puntos conocidos $[x_n, x_{n+1}]$ hacemos:

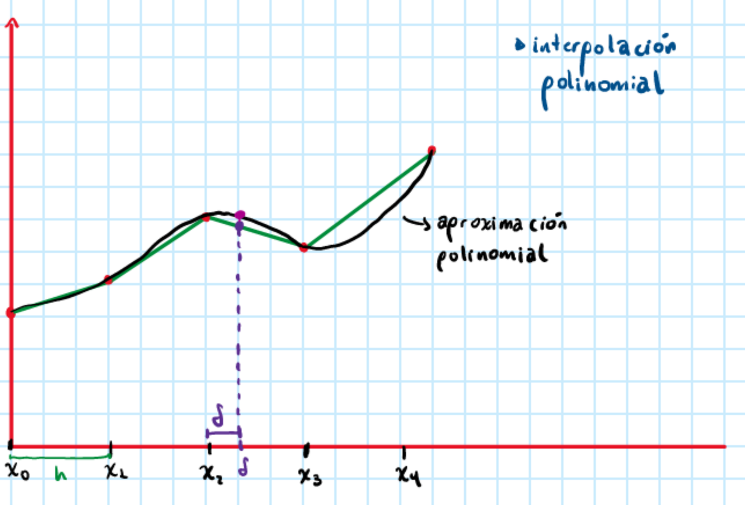
$\boxed{f(x_n+\delta) = f(x_n) + \delta\left[\frac{\overbrace{f(x_n+h) - f(x_n)}^{\Delta f := \text{primer variación de } f}}{h}\right]}$ Donde $\delta \in (x_n, x_{n+1})$ es el valor entre los dos puntos que queremos hallar.

2.2) Interpolación Polinomial:

Un mejor método que el anterior es interpolar, aproximando la función de la cual tenemos puntos conocidos, por medio de un polinomio $P(x)$, cuya gráfica coincide con los puntos que conocemos.

Tarea: demostrar.

En general podemos demostrar que: Dados $m+1$ puntos con valores $y(x_0), y(x_0+h), \cdots, y(x_0+mh)$ $\exists$ un UNICO POLINOMIO $P(x)$: grado$(P) \leq m$ y $P(x_i) = y(x_i)$ $\forall\, i = 0, \dots, m$ a P se le llama: Polinomio de interpolación de $y(x)$.

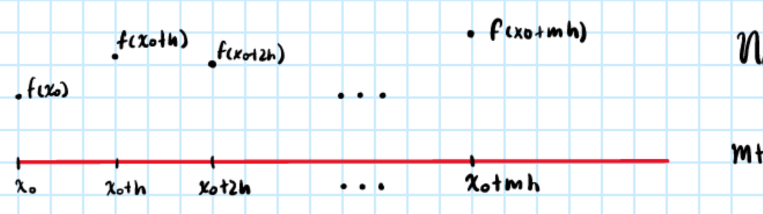


Demostración:

Consideremos $R(x) = \overbrace{P(x) - Q(x)}^{\text{coinciden en } x_i}$. R es de grado $\leq m$ que tiene $m+1$ raices en $x_0, x_1, \dots, x_m$. Pero NINGUN POL. PUEDE TENER más raices que su grado a menos que sea el pol. $0 \Rightarrow$ Necesariamente $R(x) = 0$ $\therefore$ $P = Q$, esto demuestra que el pol. que pasa por los x_i es único.

2.2.1) formula de interpolación (hacia adelante de Newton):

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (x_0, x_0+mh), tal que sus valores solo están definidos en los puntos $x_0, \dots, x_0+mh$.



Nuestro objetivo será encontrar un polinomio $F(x)$, de grado $\leq m$ que concuerde con los $m+1$ valores conocidos (de $f(x_0+nh)$ con $n = 0, 1, 2, \dots, m$). Como ya demostramos, este $F(x)$ es único, procedemos a hallarlo:

Sabemos que la dif. finita de $f(x_0)$ es: $\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) \Rightarrow$ (IV) $\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f(x_0)}$, aplicamos Δ de ambos lados:

(V) $\boxed{\Delta f(x_0+h) = \Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)} = f(x_0+h) - f(x_0) + \Delta(f(x_0+h) - f(x_0)) = f(\cancel{x_0+h}) - \cancel{f(x_0)} + f(x_0+2h) - f(\cancel{x_0+h}) - f(x_0+h) + \cancel{f(x_0)} \Rightarrow$ tenemos que

(VI) $\boxed{\Delta f(x_0+h) = f(x_0+2h) - f(x_0+h)}$ igualando V y VI: $\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0) = f(x_0+2h) - f(x_0+h) \Rightarrow$ (VII) $\boxed{f(x_0+2h) = f(x_0+h) + \Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)}$

sustituyendo IV en VII: (VIII) $\boxed{f(x_0+2h) = f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)}$ aplicando Δ sobre VIII: $\Delta f(x_0+2h) = \Delta f(x_0) + 2\Delta^2 f(x_0) + \Delta^3 f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0+3h) = f(x+2h) + \Delta f(x_0) + 2\Delta^2 f(x_0) + \Delta^3 f(x_0)$ sustituyendo la expresión para $f(x_0+2h)$ nos queda

$f(x_0+3h) = f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0) + \Delta f(x_0) + 2\Delta^2 f(x_0) + \Delta^3 f(x_0) \Rightarrow$ (IX) $\boxed{f(x_0+3h) = f(x_0) + 3\Delta f(x_0) + 3\Delta^2 f(x_0) + \Delta^3 f(x_0)}$. Si comparamos las expresiones de $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$, $f(x_0+3h)$ podemos notar que sus coef. se comportan como los de $(x+1)^n$, en general $f(x_0+nh)$ tendra los coef. de $(x+1)^n$, lo cual podemos demostrar con inducción. Recordemos que el binomio de Newton es:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}^{\text{coef.}} x^{n-k} y^k \Rightarrow \boxed{f(x_0+nh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Delta^k f(x_0)} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{(n-0)!}} f(x_0) + \frac{\overset{n}{\cancel{n!}}}{1!(n-1)!} \Delta f(x_0) + \frac{\overset{n(n-1)}{\cancel{n!}}}{2!\cancel{(n-2)!}} \Delta^2 f(x_0) + \cdots + \frac{\overset{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{\cancel{n!}}}{k!\cancel{(n-k)!}} \Delta^k f(x_0)$

$+ \cdots + \frac{\cancel{n!}}{n!\cancel{(n-n)!}} \Delta^n f(x_0)$, Entonces podemos escribir:

(X) (esta formula esta bien ya que por ejem. para $n=4$, los terminos de orden Δ^5 en adelante se)

$\boxed{f(x_0+nh) = f(x_0) + n\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\Delta^m f(x_0)}$, con $n = 0, 1, 2, \cdots, m$.

Notemos que cuando $n = m \Rightarrow$ el último termino se simplifica a $\Delta^m f(x_0)$ como esperariamos. Hasta el momento hemos hallado que para cada $n = 1, 2, \dots, m$, la ec. anterior nos da una forma de calcular $f(x_0), f(x_0+h), \dots, f(x_0+nh)$ en terminos de $f(x_0)$ y sus diferencias finitas. Sabemos que los valores de $f(x_n)$ son discretos y vale la pena preguntarse ¿Podemos hacer continua a la función f de $[x_0, x_0+nh]$? Notemos que nuestra expresión de $f(x_0+nh)$ sería continua si $n \in \mathbb{R}$.

Notemos que de X no hay nada que nos impida que n sea real.

Si definimos una función continua F: $F(x) = f(x_0) + n\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\Delta^m f(x_0)$ Donde $n \in \mathbb{R}, [0, m]$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_0 + \overset{\in\mathbb{N}}{n}h \xrightarrow{\text{ahora}} x = x_0 + \overset{\mathbb{R}}{n}h \Rightarrow$ (XI) $\boxed{\overset{\mathbb{R}}{n} = \frac{x - x_0}{h}}$, VAMOS A DEMOSTRAR AHORA QUE P(X) ES EL POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN de f.

Notemos que $\underbrace{F(x_0+nh) = f(x_0+nh)}_{\text{coinciden en sus } m+1 \text{ valores}}$ (por def. de F) $\forall\, n = 0, 1, \dots, m$ ✓

Sustituyendo XI en X: $F(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}(x-x_0)(x-x_0-h) + \frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)$

$+ \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)\cdots(x-x_0-(k-1)h)$ De acá es fácil ver que $F(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$. ✓

$\Rightarrow F$ es una función que coincide en los $m+1$ valores de f y es de grado$(P) \leq m$ $\therefore$ P es función de interpolación de f.

Ejemplo: Use los valores de $f(x)$ de la col. dos, de la tabla 1 para hallar $e^{0.14}$.

$e^{0.1} = 1.10517$, $e^{0.2} = 1.22140$, $e^{0.3} = 1.34986$ Notar que los pasos son de $h = 0.1 \Rightarrow n = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.14 - 0.1}{0.1} = 0.4$, Sustituyendo n en X: $F(x_0+nh) = F(0.1 + 0.4(0.1)) = F(0.14) = \overbrace{f(0.1)}^{e^{0.1}} + 0.4\,\Delta f(0.1) + \frac{(0.4)(0.4-1)}{2!}\Delta^2 f(0.1)$ tenemos $m+1 \rightarrow 3$ datos $\therefore$ grad$(F) \leq 2$

$\therefore$ llegamos hasta orden dos, que como demostramos antes está asociada al grado 2 de F.

Sustituyendo valores: $F(0.14) = 1.10517 + (0.11623)(0.4) - (0.01223)(0.12) = 1.1501944$, Valor real $e^{0.14} = 1.15027379$

Ejemplo: En INSIVUMEH se tiene un aparato que mide la calidad del aire (0 → mal aire, 1 → buen aire). Luis la programa para que tome valores automaticamente. Por error se perdieron muchos datos tomados y solamente quedaron $\overset{x_0}{1.1h} \rightarrow \overset{f(x_0)}{0.09531}$, $1.2h \rightarrow 0.18232$, $1.3h \rightarrow 0.26236$

Nos interesa, exactamente el dato en 1.12, ie debemos hallar $f(1.12)$.

Tenemos 3 datos $\therefore$ podremos hallar una función de interpolación de segundo grado $\Rightarrow F(x) = f(x_0) + n\Delta f(x_0) + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 f(x_0)$

Debemos hallar entonces $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0) \longrightarrow \Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$ Donde $h = 0.1$ ya que es la separación entre las horas de los datos tomados. $\boxed{\Delta f(x_0)} = \Delta f(1.1) = f(1.2) - f(1.1) = 0.18232 - 0.09531 = \boxed{0.08701}$, $\boxed{\Delta^2 f(1.1)} = \Delta(\Delta f(1.1)) = \Delta(f(1.2) - f(1.1))$

$= \Delta f(1.2) - \underbrace{\Delta f(1.1)}_{\text{la acabamos de calcular}} = f(1.3) - f(1.2) - 0.08701 = 0.26236 - 0.18232 - 0.08701 = \boxed{-0.00697}$

Finalmente hallamos $n = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.12 - 1.1}{0.1} = 0.2$

$\Rightarrow F(x) = 0.09531 + 0.2(0.08701) + \frac{(0.2)(0.2-1)}{2!}(-0.00697) = \boxed{0.1132696}$