Métodos de inicio, método del polígono:

Wednesday, September 10, 2025   2:47 PM

1 Breve intro:

a lo largo del curso trabajaremos con tres tipos de métodos numéricos:

1. **Metodos de inicio:** Solo necesitan de la EDO $y' = f(x,y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para hallar las siguient. aproximaciones y_{n+1}

2. y 3. los platicaremos más adelante.

2. Metodos de continuación 3. Métodos de corrección

2 análisis de errores:

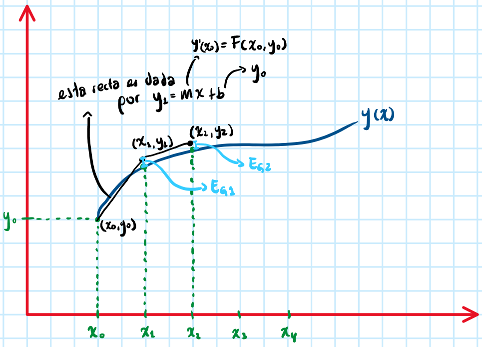
al resolver EDOs con métodos numéricos generalmente trabajamos con 3 tipos de error distinto.

1. Errores de redondeo, cometidos al eliminar decimales de alguna cifra.

2. Errores de formulas: Todos los métodos utilizados son aproximados, y tienen un error.

3. Errores acumulativos: En cada paso de un proceso de las iteraciones se produce un error causado por 2. que se acumula a la siguiente iteración.

2.1) Error del Método de Euler:



Para $y' = F(x,y)$ el método de Euler viene dado por $y_{n+1} \sim F(x_n, y_n)\Delta x + y_n$

que es $y(x_n + \Delta x) \sim F(x_n, y(x_n))\Delta x + y(x_n)$ Notemos que esto es la ec. de la recta tangente al punto (x_n, y_n).

asumimos que $y(x_n)$ proviniente del metodo de Euler es igual al $y(x_n)$ exacto, tal que al restar ambos $y(x+\Delta x)$ nos quede solo E_n

suponemos $y(x)$ es lo suficient. suave: $f(x) \in C^2$

Si expandimos $y(x_n + \Delta x) = y(x_n) + y'(x_n)\Delta x + \frac{1}{2} y''(x_n)\Delta x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_n)\Delta x^n}{n!} + \cdots$

suponemos que llegando hasta acá se cumple la igualdad

x_{n+1}

Error del n-ésimo paso (en comp. a la sol. real)

nuestro método tiene un error $E_{max} = \frac{y''(\xi)\Delta x^2}{2!}$, el método de Euler tiene error de $O(\Delta^2)$.

el error de y_{n+1} es E_{n+1} y dicho error proviene del paso ant.

$E(x_n + \Delta x)$

buena aprox. para $\Delta x \ll 1$

$\xi \in [x_n, x_{n+1}]$

Este es el error introducido en un solo paso del método debido a la aproximación de sol. continua $y(x)$ a discreta. Se calcula asumiendo que la entrada al paso es exacta i.e que no hay errores previos.

Esto sabemos es mentira ya que hay errores que se acumulan en cada paso, por lo que será más revelador calcular el error global, el cual es el error total luego de n pasos. Se puede demostrar que el error global es de orden: $O(\Delta x)$

y simplemente se suman (¿válido para funciones crecientes).

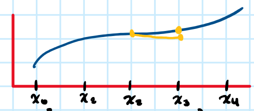
error global del paso n

Una forma intuitiva de ver esto es suponer que los errores acumulados son del mismo tamaño $E_{GN} = \cancel{E_0} + E_1 + E_2 + \cdots + E_n$

αh^2 ya que $E_n = E_{n+1} = E_{n+2}$ $\therefore$ h^2 se puede factorizar

parte de E_n sin Δx^2

$\Rightarrow E_{GN} = n E_n$ notemos que $x_n = n\Delta x$ $\Rightarrow E_{GN} = \frac{x_n}{\Delta x}(\cdot)\Delta x^2$ factorizamos Δx^2 $\Rightarrow E_{GN} \to O(\Delta x)$



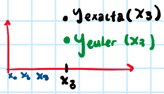
Ejemplo: Hallar el error local en y_3 para la EDO $y' = -y$, $y(0) = 1$ con $\Delta x = 0.01$:

Notemos que la EDO tiene sol. exacta: $y(x) = e^{-x}$ $\Rightarrow$ en lugar de calcular $E_3 = \frac{y''(x_3)\Delta x^2}{2} = \frac{d}{dx}(y')\frac{(0.1)^2}{2} = -y'(x_3)(5\times10^{-3}) = y(x_3)5\times10^{-3}$

Si no tuvieramos $y(x)$ exacta, $y(x)|_{x_3}$ se calcularia haciendo una aprox. con métodos de mayor orden en el error. Para este caso $x_3 = 0.3$

error en el paso 3

$E_3 = e^{-0.3} \cdot 5\times10^{-3} \sim 0.003704091103$ Podemos calcular E_3 exacto



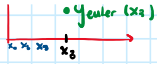
donde recordemos que x_3 no tiene

$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)\Delta x$

$\Rightarrow E_3 = (y_{[illegible]} - y_{[illegible]}) = e^{-0.3} - (e^{-0.2} + (\ldots)0.1) = e^{-0.3} - e^{-0.2} + e^{-0.2}\,0.1 \approx 0.00296[illegible]$

$E_3 = e^{-0.3} \cdot 5\times10^{-3} \sim 0.003704091103$ Podemos calcular E_3 exacto

paso 3

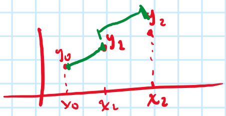


donde recordemos que x_3 no tiene error previo. $\Rightarrow$ $E_3 = \left(y_{exacta}\big|_{x_3} - y_{euler}\big|_{x_3}\right) = e^{-0.3} - \left(e^{-0.2} + (-y(0.2))\,0.1\right) = e^{-0.3} - e^{-0.2} + e^{-0.2}\,0.1 \sim 0.003960542912$

$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)\Delta x$

Hallar E_4:

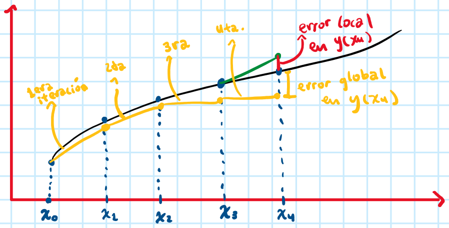
Hallar el error global al llegar a y_2



Recordar que $E_{NG} = \left(y_{exacta} - y_{euler}\right)_{x_n}$ acá si tomamos en cuenta los errores previos del método:

n	$x_{n+1} = x_n + \Delta x$	$y_{n+1} = F(x_n, y_n)\Delta x + y_n = -y_n 0.1 + y_n = y_n(0.9)$
-1	$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
0	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 1(0.9) = 0.9$
1	$x_2 = 0.2$	$y_2 = (0.9)^2 = 0.81$
		¡Cuidado, si usamos $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ $\Rightarrow$ y_2 no cae en $n=2$, ya que iniciamos en $n=-1$

$\Rightarrow E_{G2} = e^{-0.2} - 0.81 = 0.008730755078\times10^{-3}$



2.2)

Sea $E(x_0+h) :=$ error en el calculo de $y(x_0+h)$ $\Rightarrow$ $E(x_0+h) = ch^2$ Vamos ahora a dividir el intervalo h a la mitad y calcular $y(x_0+h)$ en dos pasos. El error de calcular $y(x_0+h/2)$ es $E(x_0+h/2) = c\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{ch^2}{4} = \frac{1}{4}E(x_0+h)$ el error de calcular medio paso es 1/4 del error del paso completo. El error del paso completo es $y[(x_0+h/2)+h/2]$ al hacer $y(x_0+h)$ en dos pasos es aprox.

$y''(x)/2!$

local

local

claramente haciendo la suposición que $c = \frac{y''}{2}$ es el mismo en ambas mitades, i.e y'' no cambia mucho en el intervalo.

$E[(x_0+h/2)+h/2] \sim \frac{1}{4}E(x_0+h) + \frac{1}{4}(x_0+h) = \frac{1}{2}E(x_0+h)$ ▸ Error local acumulado de hacer x_0+h en dos pasos.

Podemos ver entonces que el error de hacer dos sub-pasos de long. $h/2$ es aprox. la mitad del error de hacer un único paso h.