

Física computacional

Presección del perihelio de mercurio.

Gerson Figueroa.

USAC-ECFM



1. Resumen:

En este estudio, hemos simulado la trayectoria de Mercurio empleando el método de Runge-Kutta junto a un modelo relativista que incluye una corrección basada en los efectos de la relatividad general en la fuerza de atracción. El propósito principal ha sido analizar la precesión del perihelio de Mercurio, un fenómeno crucial que desde tiempos históricos ha sido uno de los primeros indicios observados que respaldan la teoría de la relatividad general planteada por Albert Einstein.

Introducción:

El perihelio de un planeta se refiere al punto en el que su órbita elíptica se encuentra más próximo al Sol. En una perfecta órbita elíptica, libre de alteraciones externas, este punto debería mantenerse estable. No obstante, en la realidad, todos los planetas sufren un suceso denominado precesión, o sea, una rotación gradual del eje orbital. Según Mercurio, la mecánica newtoniana no podía explicar totalmente esta precesión.

Las observaciones realizadas durante el siglo XIX revelaron que la precesión del perihelio de Mercurio ascendía a cerca de 43 segundos de arco cada siglo, más de lo que se podría justificar únicamente con las alteraciones gravitacionales de otros planetas y la disminución del Sol. Este desequilibrio presentó un tema sumamente fascinante para los astrónomos y físicos de aquel tiempo.

En un principio, los esfuerzos para solucionar la anomalía se fundamentaban en la física clásica newtoniana. Las teorías examinaron diversas alternativas:

- Incorporar el efecto gravitacional de otros planetas, en particular Venus y Júpiter.
- Considerar una repartición no homogénea de la masa solar.
- Sugerir la presencia de un planeta no descubierto, denominado Vulcano, situado entre Mercurio y el Sol.

No obstante, todas estas hipótesis resultaron ser insuficientes o incuestionables, provocando un estancamiento en el avance científico en torno a este misterio. [3]

Este problema no fue resuelto hasta 1915 por Albert Einstein, quien propuso una nueva teoría de gravitación universal (la relatividad general) que predecía con exactitud los resultados observacionales obtenidos de la precesión del perihelio de mercurio.

En este trabajo abordaremos el anterior problema, utilizando las herramientas de la física computacional y se compararán los resultados obtenidos con los resultados teóricos de la mecánica clásica y de la relatividad General.

El objetivo de este texto será calcular la trayectoria de mercurio al rededor del sol y el ángulo de precesión de perihelio de mercurio respecto al tiempo.

Por ultimo, si el lector no está familiarizado con el problema, se recomienda que inicie la lectura del documento por el apéndice, en donde se realizan aclaraciones que serán necesarias para contextualizar el problema.

2. Marco Teórico:

Urbain Jean Joseph Le Verrier, astrónomo francés, descubrió entre 1845 y 1859 que la órbita de Mercurio presentaba una irregularidad ya que no retornaba al mismo punto en su trayectoria orbital. Muchas de estas anomalías pueden atribuirse a un efecto residual, un desplazamiento del perihelio de segundos de arco cada siglo. Le Verrier sostuvo que esta anomalía podría ser provocada por un planeta desconocido (conocido como Vulcano) o por una nube de asteroides, dado que se pudieron explicar otras anomalías en otros planetas (Urano y Neptuno).

2.1. Resultados clásicos para la presección del perihelio de mercurio

Clasicamente la ecuación que describe la posición de mercurio respecto al sol tiene la siguiente forma:

$$r(\phi) = \frac{L^2}{GM_{sol}} \left(\frac{1}{1 + e \cdot \cos(\phi)} \right) \quad (1)$$

Con L :=momento angular.

Esta ecuación es la ecuación polar de una elipse centrada en el origen, lo cual coincide con la ley de Kepler, la cual argumenta que las orbitas de los planetas tienen forma elíptica. Sin embargo, no coincide con las observaciones experimentales.

Aún con la física clásica se puede dar una estimación de la precesión del perihelio de mercurio, si tomamos en cuenta el efecto gravitacional de otros planetas en el sistema Mercurio-Sol.

Los astrónomos y físicos que calcularon estos efectos lograron explicar la mayor parte de la precesión observada en el perihelio de Mercurio, pero había una discrepancia residual de aproximadamente 43 segundos de arco por siglo que no podía explicarse por la física newtoniana. [4]

Este residuo fue particularmente notable porque el movimiento calculado de acuerdo con la gravitación clásica sumaba solo 531 segundos de arco por siglo, mientras que la precesión observada era de 574 segundos de arco por siglo. Por lo tanto, la diferencia no explicada de 43 segundos de arco por siglo fue un problema que persistió hasta la introducción de la teoría general de la relatividad de Einstein en 1915.

2.2. Resultados relativistas para la precesión del perihelio de mercurio:

La solución relativista a este problema fue explicada a la perfección por la teoría de la relatividad general, la cual explica que la precesión de mercurio en su perihelio es debida por la curvatura del espacio tiempo (en lugar de la atracción gravitatoria como una fuerza que propone la teoría clásica).

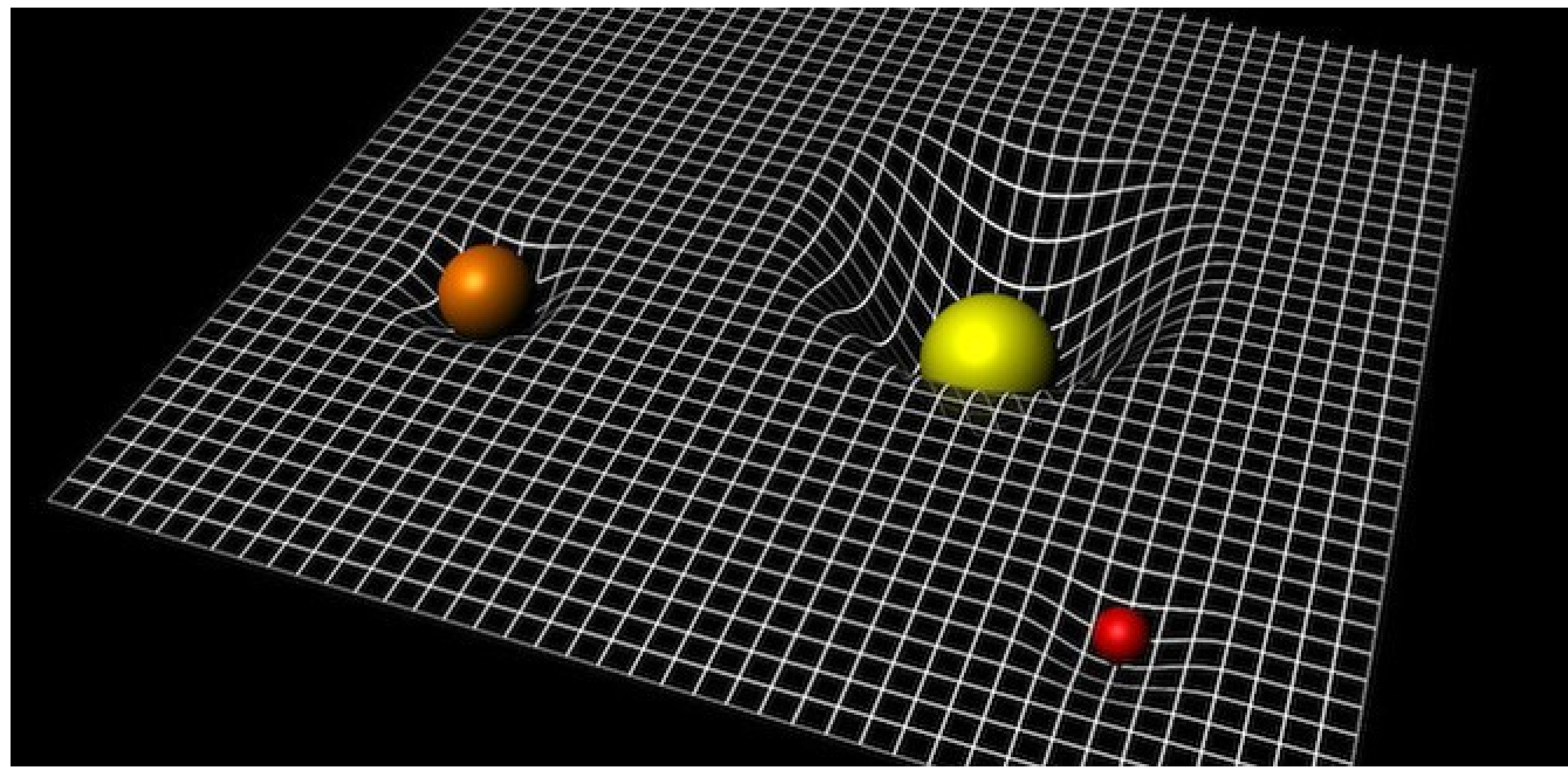


Figura 1: Curvatura del espacio tiempo debido la masa del sol y mercurio.

La solución relativista de la posición de mercurio respecto al sol es:[2]

$$r(\phi) = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{1 + e \cdot \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{A}}\right)} \right) \quad (2)$$

Donde

$$A = 1 + \left(\frac{\sqrt{6}GMm}{cL} \right)^2$$

$$B = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3G^3M^3m^4}{c^2L^4}$$

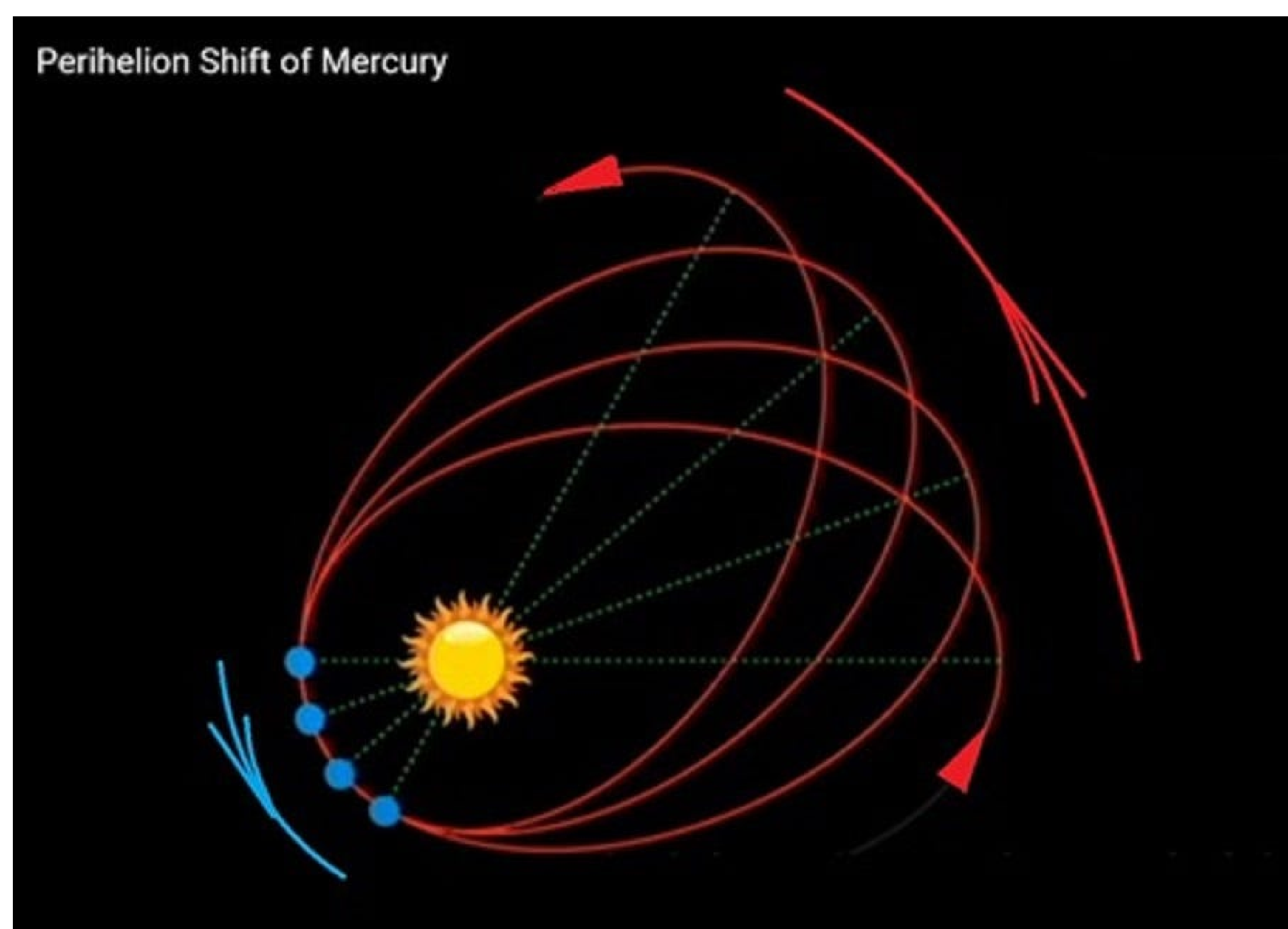


Figura 2: Órbita de mercurio al rededor del sol, deducida con la teoría de la relatividad general.

La ecuación 2, describe una elipse que precesa con una frecuencia \sqrt{A} . Que es justamente lo que se esperaría con nuestras observaciones. Además con la teoría de la relatividad se pudieron explicar esos $\Delta\phi = 43''$ que no se podían explicar clásicamente.

2.3. Planteamiento del problema:

Buscaremos darle solución a este problema utilizando el método de Runge Kutta de orden 2.

Notemos que **tenemos un problema muy grave a resolver**, ya que las ecuaciones de Runge-Kutta dependen de la fuerza, mientras que en relatividad general, la dinamica de las particulas se deduce, partiendo de la geometría del espacio tiempo, la cual viene dada por las ecuaciones geodesicas.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0$$

De tal forma que las ecuaciones de la relatividad general, no son compatibles con el método de Runge-Kutta, para solucionar esto propondremos una corrección a la teoría de la gravitación universal de Newton. Hay que hacer la aclaración que esta corrección no soluciona las inconsistencias de esta teoría clasica, sino que solamente nos ayudará a dar con las soluciones relativistas pero desde un planteamiento clásico del problema.

Dicha ecuación viene dada por:

$$F_g = -\frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \quad (3)$$

Donde $\alpha = 1 \times 10^{-8} AU^2$

Esta será la fuerza que utilizaremos para el método de Runge-Kutta.

Método de Runge-Kutta de segundo orden para la precesión del perihelio de Mercurio

El método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2) se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Para el problema de la órbita de Mercurio con precesión, el método implica dos pasos principales: predicción y corrección. A continuación, se presentan las ecuaciones utilizadas para calcular la posición y la velocidad en cada paso de tiempo.

Calculamos una predicción intermedia para las velocidades y posiciones, utilizando las fuerzas gravitacionales con el término relativista en el tiempo actual:

Sabemos por la segunda ley de Newton que:

$$m_m a = -\frac{GM_s m_m}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

Se cancelan las masas de mercurio, y podemos escribir esto en su forma diferencial:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_s}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \hat{r}$$

Sabiendo que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ nos queda:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \vec{r}$$

en coordenadas cartesianas, sabemos que $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Entonces podemos separar esta ecuación en su componente en \hat{i} y en su componente \hat{j} , lo cual queda como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) y \end{aligned} \right\}$$

Hay que notar ahora que cada una de estas ecuaciones se puede separar de nuevo en dos partes, como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv^x}{dt} &= -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) x \\ \frac{dx}{dt} &= v^x \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dv^y}{dt} &= -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) y \\ \frac{dy}{dt} &= v^y \end{aligned} \right\}$$

Quedando 4 diferentes ecuaciones con las cuales trabajar.

Deducimos ahora las ecuaciones de Runge-Kutta, para estas ecuaciones calcularemos la pendiente de nuestras ecuaciones, en los puntos medios de los intervalos $[t_n, t_{n+1}] = t_n + \Delta t$, $[x_n, x_{n+1}]$ y $[y_n, y_{n+1}]$

Para esto partimos de

$$\frac{dv^x}{dt} = \frac{F(x, y)}{m_m} = -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) x$$

Haremos que $d \rightarrow \Delta$, ya que para nuestro método numérico daremos "saltos" finitos y no infinitesimales.

Entonces Para esto partimos de

$$\frac{\Delta v^x}{\Delta t} \approx a(x(t), y(t))$$

donde $a(x(t), y(t)) = -\frac{GM_s}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) x$

Ademas notemos que $\Delta v^x = v_{n+1}^x - v_n^x$

Entonces nos queda que:

$$v_{n+1}^x = v_n^x + a(x(t), y(t))\Delta t$$

Lo cual corresponde al **Método de Euler**.

Sin embargo para el método de Runge-Kutta calculamos los valores en sus puntos medios, esto sería

$$v_{n+1}^x = v_n^x + a(x_{med}, y_{med})\Delta t$$

Demonos cuenta que no sabemos el valor de x_{med} , pero con el método de Euler podemos estimar estos valores

$$x_{med} = x_n + \frac{v_n^x}{2}\Delta t$$

$$y_{med} = y_n + \frac{v_n^y}{2}\Delta t$$

ya que

$$x_{n+1} = x_n + v_n^x \Delta t$$

Lo que corresponde al metodo de Euler, entonces en el método de Runge Kutta nos queda:

$$x_{n+1} = x_n + v_{med}^x \Delta t$$

donde

$$v_{med}^x = v_n^x + \frac{a(x_n, y_n)}{2}\Delta t$$

Analogamente para el caso de y .

Ecuaciones de Runge-Kutta

Con esto deducimos todas las ecuaciones que vienen dadas por:

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + F_x(x_{medio}, y_{medio}) \Delta t, \quad (4)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} + F_y(x_{medio}, y_{medio}) \Delta t \quad (5)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,medio} dt, \quad y_{i+1} = y_i + v_{y,medio} \Delta t \quad (6)$$

En estas ecuaciones, x_n y y_n son las posiciones actuales de Mercurio en unidades astronómicas (UA), mientras que $v_{x,n}$ y $v_{y,n}$ son las componentes de la velocidad en el paso n -ésimo. $F_x(x_n, y_n)$ y $F_y(x_n, y_n)$ representan las fuerzas gravitacionales con el término relativista. El parámetro dt es el paso de tiempo en años.

3. Metodología:

Simulación numérica de la órbita de Mercurio: Utilizamos un modelo relativista que incorpora una corrección por efectos de la relatividad general en la fuerza gravitatoria de Newton. El parámetro α se introdujo en la ecuación de la fuerza para simular el comportamiento correcto de la órbita. El movimiento de Mercurio se resolvió utilizando el método numérico de Runge-Kutta de segundo orden (RK2), donde se integraron las ecuaciones de movimiento con una pequeña corrección para los efectos relativistas.

Identificación de los puntos de perihelio y afelio: A lo largo de la simulación, se calcularon los puntos de perihelio, es decir, las posiciones de Mercurio en su máxima proximidad al Sol. Además, se rastrearon los afelios, que son las posiciones de Mercurio más alejadas del Sol, para utilizarlos como referencia angular para calcular el ángulo θ_p .

Cálculo del ángulo θ_p : Este ángulo θ_p se define como el ángulo entre el vector que conecta a Mercurio con el afelio (su punto más lejano al Sol) y el eje horizontal. A partir de estos datos, calculamos las diferencias angulares y utilizamos diferencias finitas para determinar la tasa de cambio temporal $\frac{d\theta_p}{dt}$

4. Resultados:

4.1. Calcular la orbita de Mercurio al rededor del sol:

Para este calculo utilizamos las siguientes constantes físicas y condiciones iniciales:

Constantes físicas

```
G = 4 * np.pi**2 # Constante gravitacional en UA^3 / (yr^2 * Ms)
Ms = 1.0 # Masa del Sol en masas solares
alpha = 0.0008 # Efecto relativista (UA^2)
a = 0.39 # Semieje mayor de la órbita de Mercurio (UA)
e = 0.206 # Excentricidad de la órbita de Mercurio
N = 20000 # Número de pasos
dt = 0.0001 # Paso de tiempo en años
```



```
# Condiciones iniciales
x0 = a * (1 + e) # Aphelio
y0 = 0.0
vx0 = 0.0
vy0 = np.sqrt(G * Ms * (1 - e) / (a * (1 + e)))
```

Con estos valores conseguimos los siguientes resultados:

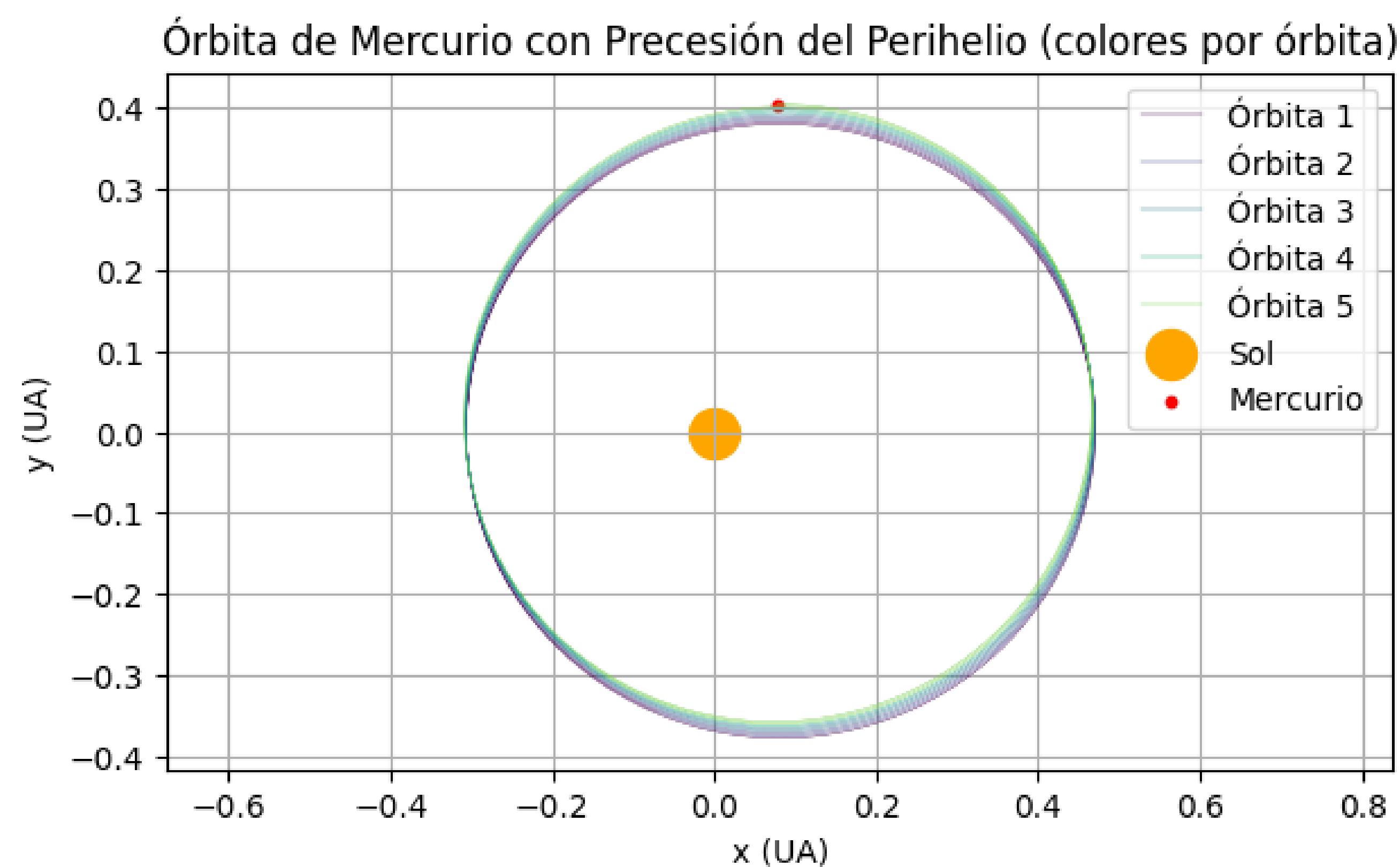


Figura 3: *Órbita de Mercurio al rededor del sol, utilizando el método de Runge Kutta.*

En la figura 3 podemos observar a mercurio (el punto rojo), en una trayectoria circular al rededor del sol (el punto amarillo). Para apreciar de mejor manera la precesión del perihelio de mercurio podemos hacer zoom sobre la figura 3 y también graficaremos los puntos que cumplan que

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

estos valores nos darán $r_{perihelio}$ (puntos azules) y r_{afelio} .

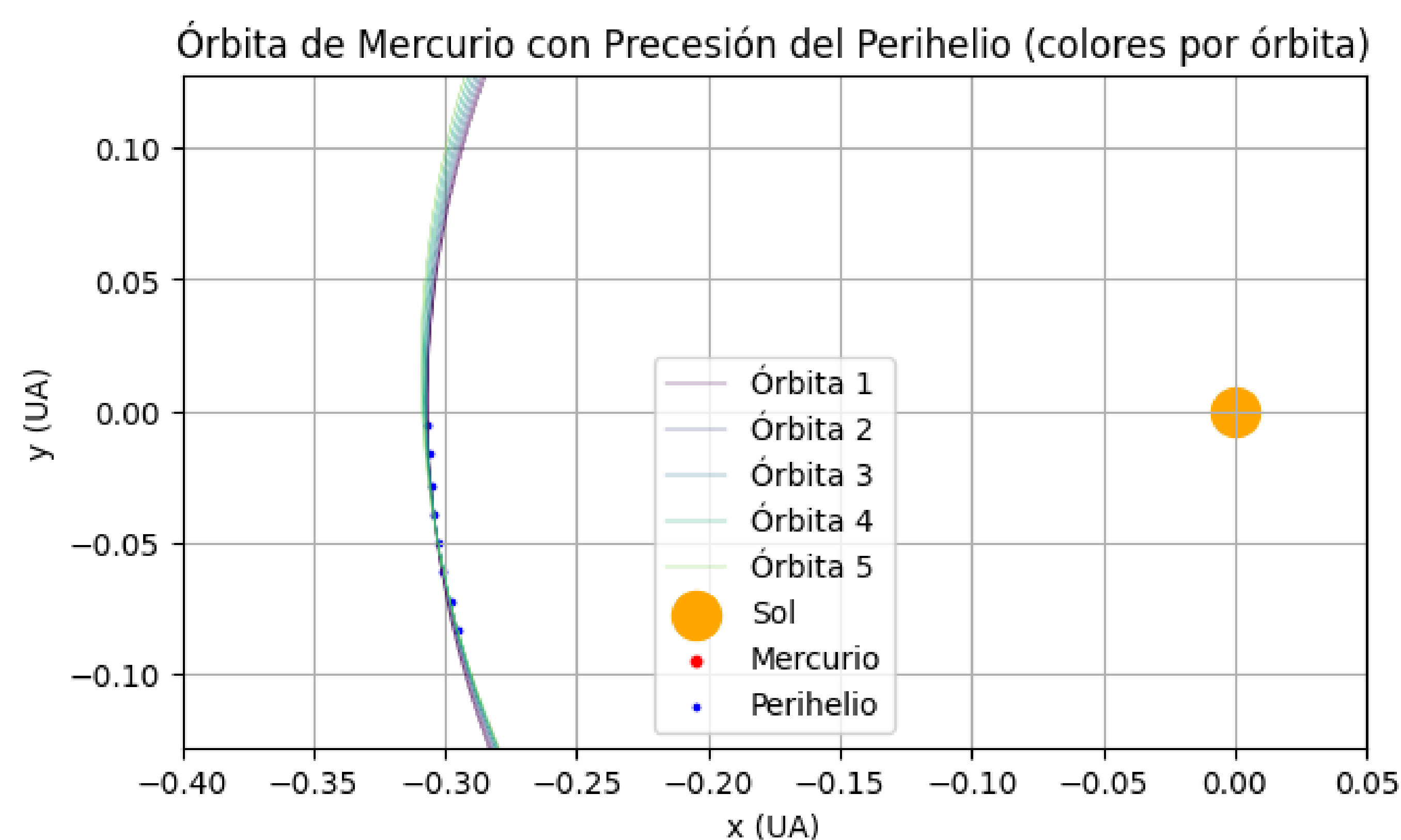


Figura 4: *Zoom sobre la gráfica anterior*

Por razones didacticas en la figura 5 tomaremos $\alpha = 0,008$ para que los efectos relativistas sean más notorios y el lector pueda darse una mejor idea de lo que estamos calculando. Sin embargo seguiremos utilizando $\alpha = 0,0008$ a lo largo del problema

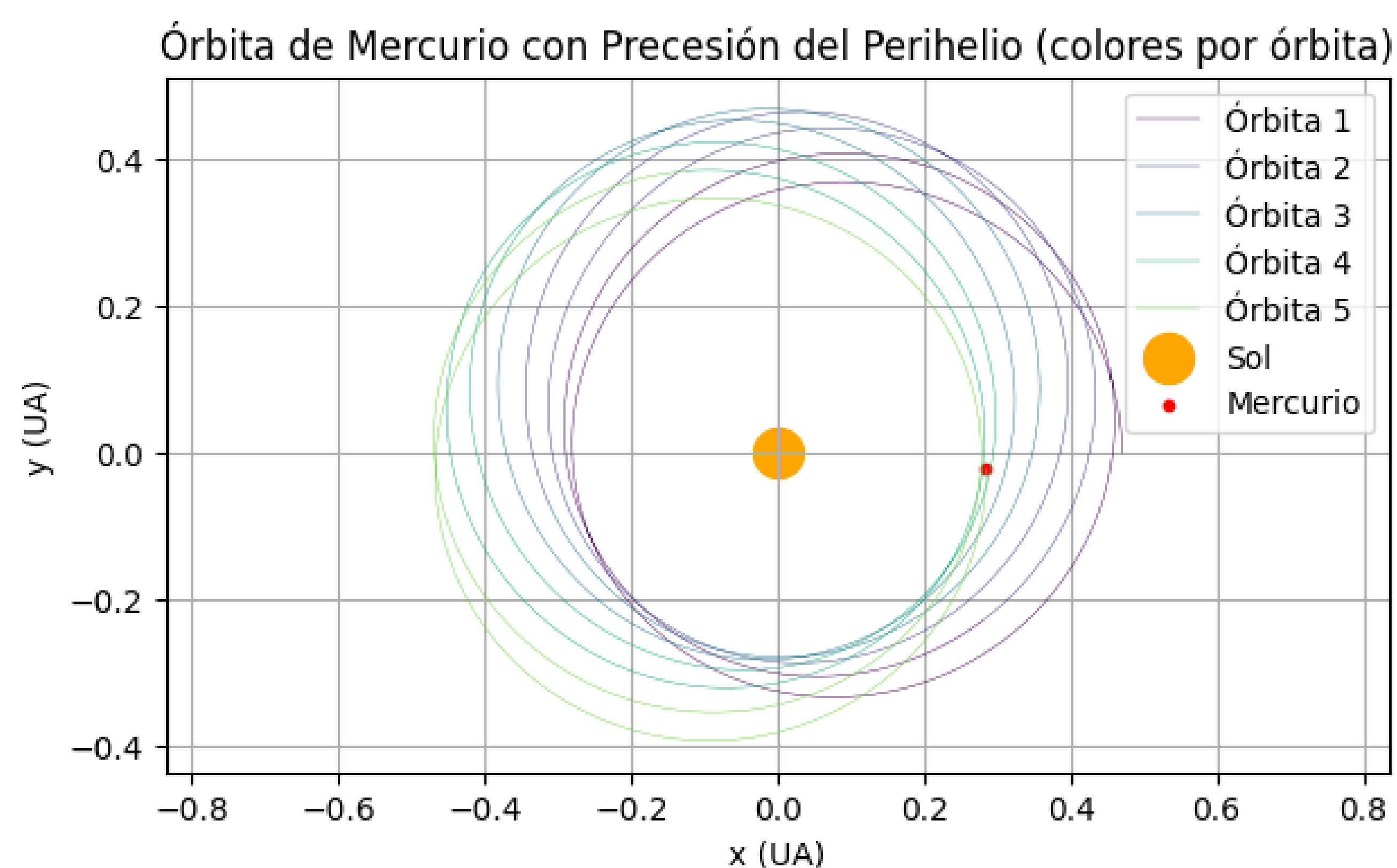


Figura 5: *Órbita de Mercurio al rededor del sol con $\alpha = 0,008$*

4.2. Cálculo del ángulo θ

El ángulo θ se calcula como el angulo en función del tiempo que hay entre el vector posición de mercurio respecto al sol y el eje x .

A continuación se muestra la gráfica de θ vs t , también llamada, gráfica de velocidad angular de mercurio.

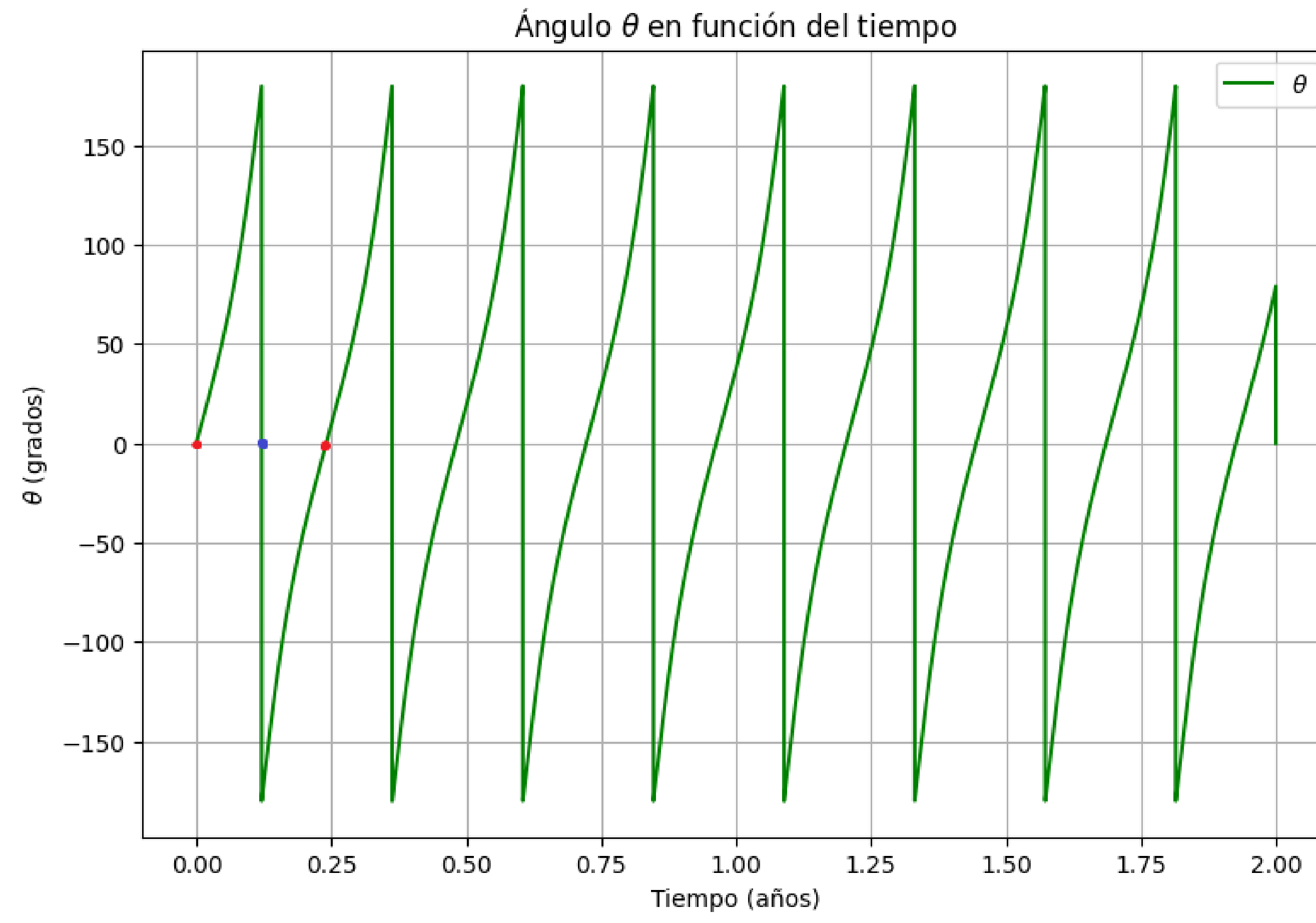


Figura 6: gráfico de θ vs t

Notemos que los puntos rojos de la gráfica representan el afelio y el azul el perihelio, de tal forma que de esta gráfica es sencillo hallar el periodo de mercurio al rededor del sol, el cual sería el tiempo que hay de un afelio a otro. Hallamos que el tiempo entre afelio y afelio es

$$T = 0,242 \text{ años} = 88,330 \text{ días} \quad (7)$$

Para el cálculo del periodo utilizamos el valor $\alpha = 1,1 \times 10^8$

Es decir que el periodo orbital de mercurio es de aproximadamente 88 días, que coincide con el dato teórico. [5]

4.3. Cálculo de $\frac{dr}{dt}$:

Para calcular este valor, tomamos los valores numéricos de x, y que hallamos de la posición de mercurio respecto al sol y sacamos el valor de r haciendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Con esto podemos calcular la derivada de r , que viene dada por:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{xv_x + yv_y}{r}$$

El resultado de este calculo es:

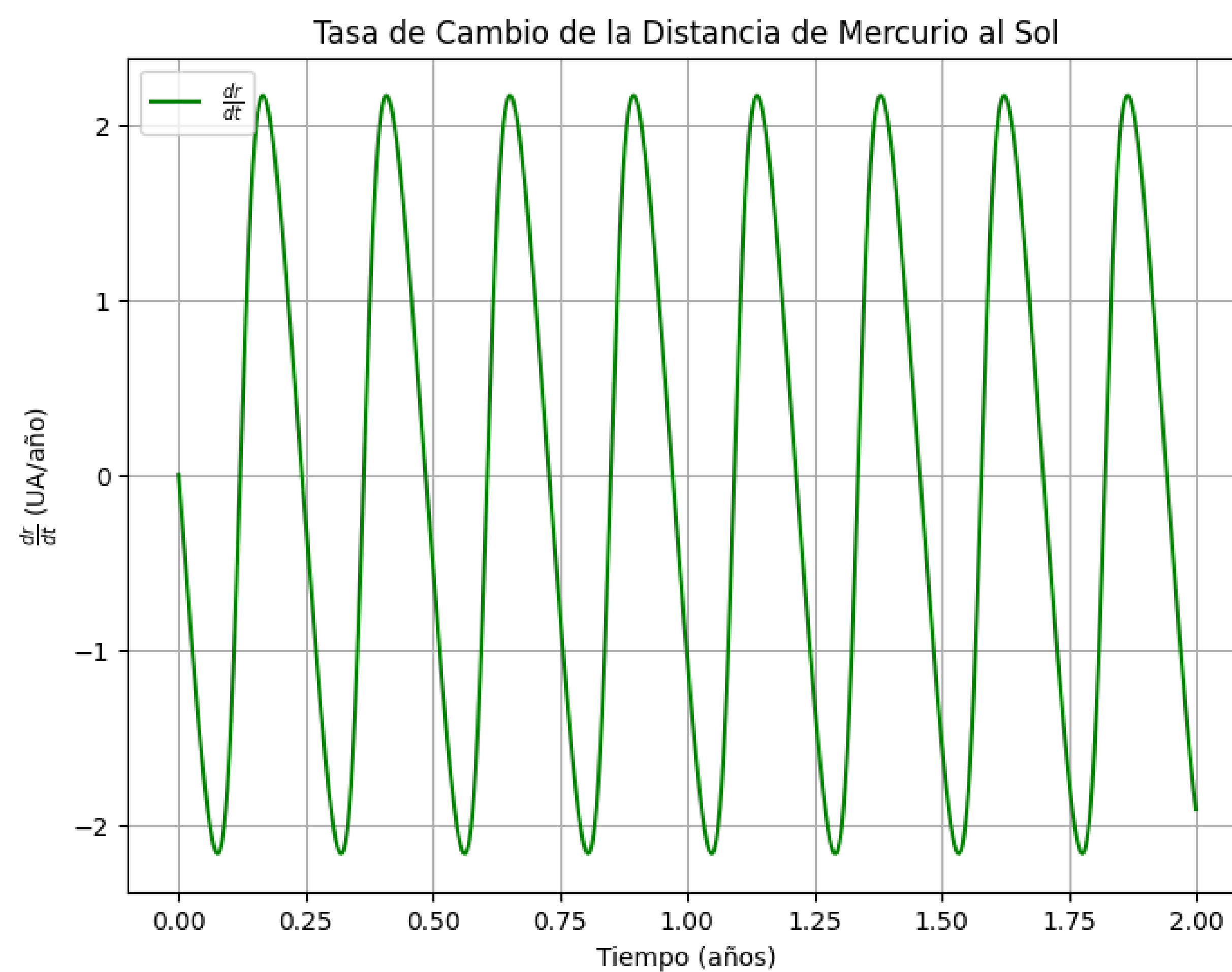


Figura 7: gráfico de $\frac{dr}{dt}$ vs t

Notemos que esta derivada es lo equivalente a la velocidad radial de mercurio por lo que en esta gráfica podemos visualizar las variaciones de velocidad radial de mercurio al rededor del sol.

4.4. Cálculo del ángulo θ_p y su derivada temporal:

El ángulo θ_p es que está formado por el vector de posición que va del afelio a mercurio y el eje x . Empezaremos calculando todas las todas las posiciones del afelio, esto lo haremos definiendo la siguiente función en Python:

```
def encontrar_afelios(x, y, N):
    afelios = []
    distancias = np.sqrt(x**2 + y**2)

    # Recorremos todas las posiciones y buscamos los máximos locales
    for i in range(1, N-1):
```



```

    if distancias[i] > distancias[i-1] and distancias[i] >
        distancias[i+1]:
        afelios.append((x[i], y[i])) # Guardamos la posición del afelio
return afelios

```

En esta parte del código recorre las distancias de mercurio al sol y las va comparando, si la posición anterior y la próxima son menores que la distancia considerada (distancia[i]), entonces la distancia considerada es un máximo, que en este caso sería el afelio.

Teniendo las diferentes posiciones del afelio podemos hallar el vector que va de el afelio hasta la posición de mercurio y con esto hallar el ángulo que hay entre este vector y el eje x , el cual vendría dado por:

$$\theta_p = \arctan(y/x)$$

Teniendo este angulo podemos hallar su derivada temporal como:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{\theta_{p,n+1} - \theta_{p,n}}{\Delta t}$$

El resultado de este valor para $\alpha = 1,1 \times 10^{-8}$ fue:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 16,5667 \text{ grados/año} \quad (8)$$

Mientras que para $\alpha = 0,0008$ obtuvimos:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 67,1334 \text{ grados/año} \quad (9)$$

Debido a que luego de muchos intentos el calculo propuesto en clase no funcionó se decidió hacer este calculo por otro método:

4.5. Método alternativo para hallar θ_p y $\frac{d\theta_p}{dt}$

Notemos que en la figura 4, hicimos los cálculos de como se desplazaba el perihelio en el tiempo (posición del perihelio luego de cada orbita). Entonces lo que hicimos fue realizar el calculo del angulo que hay entre el perihelio 1 y el perihelio 2, luego el perihelio 2 con el 3 y así sucesivamente. Dichos calculos se realizaron de la siguiente forma:

```

# Calcular los ángulos de los perihelio con respecto al Sol
def calcular_angulos_perihelio(x, y, perihelio_indices):
    angulos_perihelio = []
    for i in perihelio_indices:
        angulo = np.mod(np.degrees(np.arctan2(y[i], x[i])), 360) # Convertir
        a grados
        angulos_perihelio.append(angulo)
    return np.array(angulos_perihelio)

# Calcular la diferencia de ángulos entre perihelio consecutivos (en
# valor absoluto)
def calcular_diferencias_angulares(angulos_perihelio):
    diferencias_angulares = np.diff(angulos_perihelio) # Diferencia entre
    ángulos consecutivos
    # Asegurarse de que las diferencias estén dentro del rango [-180, 180]
    para evitar saltos grandes
    diferencias_angulares = np.mod(diferencias_angulares + 180, 360) - 180
    return np.abs(diferencias_angulares) # Tomar el valor absoluto de las
    diferencias

```

También hicimos lo mismo con los tiempos, es decir calculamos el tiempo que le toma al perihelio llegar de su punto inicial a su siguiente punto de perihelio (que por definición sabemos que es un periodo, equivalente a 88 días, sin embargo, por exactitud, hicimos los cálculos), lo cual se realizó de la siguiente manera:

```

# Calcular la media de las diferencias angulares
def calcular_media_diferencias(diferencias_angulares):
    return np.mean(diferencias_angulares)

# Calcular el tiempo entre perihelio consecutivos
def calcular_tiempos_entre_perihelio(tiempos, perihelio_indices):
    tiempos_entre_perihelio = np.diff(tiempos[perihelio_indices]) #
    Diferencia entre tiempos de perihelio consecutivos
    return tiempos_entre_perihelio

```


Luego calculamos las medias de estos valores e hicimos:

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{\text{media de las diferencias de los ángulos entre perihelios}}{\text{media de los tiempos entre perihelios}}$$

Lo cual nos dió los siguientes resultados:

Para $\alpha = 0,0008$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 8,6297 \text{ grados/año}$$

Para $\alpha = 1,1 \times 10^{-8}$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 0,4632 \text{ grados/año}$$

Para $\alpha = 0,001$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 10,7878 \text{ grados/año}$$

Para $\alpha = 0,002$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 22,0955 \text{ grados/año}$$

Para $\alpha = 0,004$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = 46,4481 \text{ grados/año}$$

Lo cual coincide con los valores teóricos:

α	$\frac{d\theta}{dt}$
0,0008	$8,414 \pm 0,019$
0,001	$10,585 \pm 0,018$
0,002	$21,658 \pm 0,019$
0,004	$45,369 \pm 0,017$

Figura 4: Cuadro 2.2 [1]

4.6. Conclusiones:

El modelo numérico construido logró simular la órbita de Mercurio de manera precisa, incluyendo el efecto de la precesión del perihelio. Sin embargo, los valores obtenidos para la precesión angular θ_p y su derivada temporal, realizado con el método propuesto en clase no coincidieron exactamente con el valor esperado teóricamente. Esta simulación logró replicar aspectos cualitativos del fenómeno, pero aún hay discrepancias numéricas en los valores finales. A pesar de estas diferencias en los resultados, el modelo permitió entender mejor los fenómenos gravitacionales relativistas que afectan la órbita de Mercurio, y mostró que la corrección relativista es necesaria para explicar la precesión del perihelio que no puede explicarse únicamente con la mecánica clásica. Por otra parte, utilizando el método propuesto en el punto 4.5 se logran los resultados deseados que se encuentran en el cuadro 2.1.[1] Se recomienda al lector verificar teóricamente y también en el código, el calculo de θ_p , también se puede explorar usando un número de pasos más grande o nuevos métodos numéricos o el método de Runge-Kutta de algún grado mayor.

5. Apéndice:

5.1. Unidades de medidas:

Las unidades que aparecen en el problema del perihelio de Mercurio pueden ser confusas porque combinan diferentes sistemas de medición astronómica y angular. A continuación explicaremos las principales unidades que usaremos y cómo se relacionan:

■ Unidad astronómica:

La Unidad Astronómica (UA o AU en inglés) es la distancia media entre la Tierra y el Sol. Su valor es aproximadamente

$$1AU \approx 1,496 \times 10^8 km$$

En el problema del perihelio de Mercurio, usamos UA como la unidad de distancia porque estamos trabajando con sistemas planetarios y es conveniente trabajar con unidades del tamaño de las órbitas.

■ Segundos de arco:

Un segundo de arco es una subunidad de los grados angulares. Como hay 360° en un círculo completo, un segundo de arco es una pequeña fracción de un grado:

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

Donde $'$:= minuto de arco y $''$:= segundo de arco. Así, un segundo de arco es $1/3600$ de un grado. Los segundos de arco son útiles en astronomía porque los ángulos observados en el cielo suelen ser muy pequeños. Por ejemplo, la precesión del perihelio de Mercurio es un fenómeno muy pequeño que ocurre gradualmente, y su cambio angular por siglo es del orden de segundos de arco.

■ Segundos de arco por siglo:

La precesión del perihelio de Mercurio es un fenómeno en el que el punto más cercano al Sol (perihelio) de la órbita de Mercurio cambia ligeramente con el tiempo. Este cambio es causado por la interacción gravitatoria con otros planetas y la curvatura del espacio-tiempo alrededor del Sol.

Se ha observado que el perihelio de Mercurio precesiona aproximadamente $43''$ (segundos de arco) por siglo. El valor de un segundo de arco por siglo, significa que el ángulo entre el perihelio de Mercurio y un punto de referencia en el espacio cambia en 43 segundos de arco por cada 100 años.

5.2. Notas del autor:

- Si el lector no está familiarizado con el método de Runge-Kutta, se deja a continuación la deducción y explicación del método:
Enlace a Google Drive
- Si el lector tiene conocimientos básicos sobre relatividad y una base sólida de mecánica clásica, puede ver la deducción teórica de la órbita de Mercurio para el caso relativista y el caso clásico. Enlace a Google Drive

Referencias

- [1] Juan Diego Chang. *Física Computacional*. Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de San Carlos de Guatemala, 2024.
- [2] Armónicos Esféricos. Relatividad 29: Cálculo de la precesión del perihelio de Mercurio [vídeo], 2024. URL <https://www.youtube.com/watch?v=hh7TlQmPYV4>.
- [3] Modern Physics Insights. La precesión del perihelio de Mercurio: perspectivas y pruebas de la relatividad general, 2024. URL <https://modern-physics.org/>.
- [4] Zavala López, Fraire Jesús, Elizabeth Bonilla, Pérez Ruiz, Juan Rodríguez, Rodríguez Simón, Jaime Burgos-García, and Jaime. Precesión del perihelio de Mercurio, 03 2024.
- [5] H. Rodríguez. Todo lo que sabemos en 2023 sobre Mercurio., 2023. URL <https://www.nationalgeographic.com.es>.