

Lanzamiento de un proyectil utilizando el método de Euler

Gerson Figueroa (202005839)

Agosto 2024

1. Resumen:

En este documento ahondamos en el movimiento de un proyectil con y sin resistencia del aire. Estudiaremos este movimiento con **el método de Euler**, el cual será programado en Python. Encontrando las gráficas de posición, el alcance máximo, para ambos casos y al comparar con la solución analítica, se podrá concluir la validez del método de Euler para aproximar el tipo de EDOs que describe el movimiento del proyectil .

2. Introducción:

En este trabajo buscamos discutir los resultados obtenidos luego de programar el método de Euler para un proyectil. Analizaremos los resultados del proyectil con y sin resistencia del aire, así como para diferentes ángulos. Debemos tener claro que el método de Euler no es la solución exacta, sino un método numérico para resolver EDOs (aunque no es una forma eficiente de resolver todo el tipo de EDOs). El lenguaje de programación en el cual resolvimos este problema fue Python y las librerías numpy y matplotlib.pyplot.

El objetivo principal de este trabajo es verificar la exactitud del método de Euler para describir sistemas mecánicos sencillos, de tal forma que los resultados de las gráficas deberán coincidir con las soluciones analíticas de dichos problemas. También buscaremos determinar el ángulo que maximizará la trayectoria en x, la altura máxima recorrida en el lanzamiento del proyectil y compararemos los resultados entre los dos problemas (con y sin resistencia del aire).

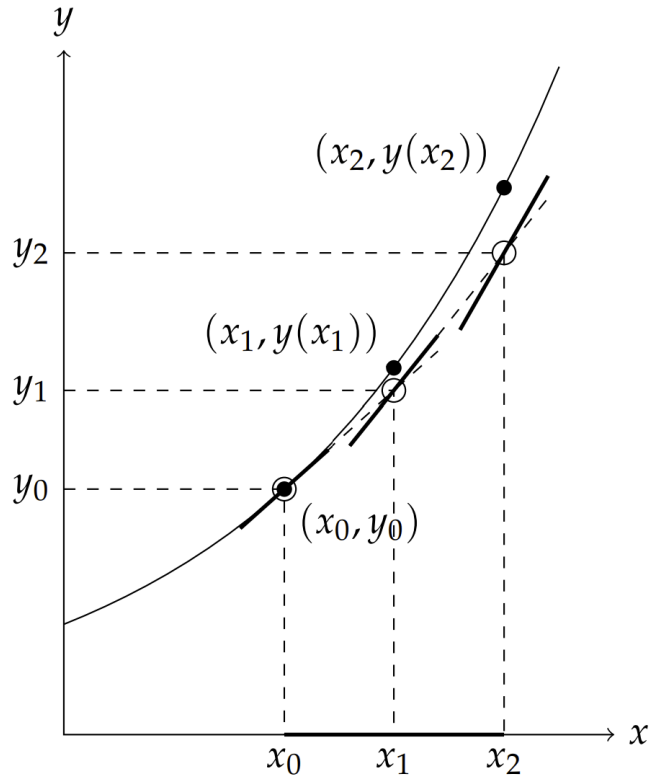
3. Antecedentes:

El método de Euler, nombrado así en honor a Leonhard Euler, es un método de integración numérica utilizado en matemática e informática para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) a partir de un valor inicial predeterminado. El

método de Euler, es el método más sencillos de los tipo Runge-Kutta y en general uno de los mas sencillos para resolver problemas de valor inicial. Justo en esta idea del valor inicial recide la deducción del método de Euler, para emtender este método imaginemos que queremos hallar la pendiente de una curva desconocida en el espacio. El único dato que conocemos de esta curva es su punto incial, al cual podemos llamarle P_0 .

Aunque inicialmente la curva es desconocida, su punto de inicio, llamado P_0 , es conocido. La pendiente de la curva en el punto P_0 y, por lo tanto, la recta tangente a la curva se pueden calcular utilizando la ecuación diferencial.

Ahora podemos tomar un nuevo punto P_1 y suponer que pertenece a la curva al avanzar un poco sobre dicha recta. Luego, seguimos el mismo razonamiento aplicado anteriormente y volvemos a calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P_1 . Una curva discreta formada de los puntos $P_0, P_1, P_2, P_3...$



Al plantear las ecuaciones del método de Euler, resultantes de resolver el problema de el tiro parabólico que viene dado por

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - B_2 v \vec{v} \quad (1)$$

Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + v_{n+1}^x \Delta t \\ v_{n+1}^x &= v_n^x - \frac{B_2 v_n v_{n+1}^x}{m} \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + v_{n+1}^y \Delta t \\ v_{n+1}^y &= v_n^y - g \Delta t - \frac{B_2 v_n v_n^y}{m} \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

Donde $v_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ x_n, y_n se define como la n-ésima iteración del método de Euler, Δt es el tamaño de la iteración, mientras mas pequeño sea este valor, mejor será la aproximación de nuestra solución. Por ultimo B_2 es una cantidad que depende de la resistencia del aire. Los valores con los cuales se trabajo, fueron: $\frac{B_2}{m} = 0.0004s^{-1}$, $v_0 = 700m/s$, $\Delta t = 0.01s$, $\theta = \frac{\pi}{6}rad$

Por otra parte sabemos que la solución analitica de este problema es la siguiente para la componente horizontal:

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{B_2}{m}t}$$

Donde $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ es la componente horizontal de la velocidad inicial. La posición en función del tiempo se obtiene integrando $v_x(t)$:

$$x(t) = \frac{mv_{0x}}{b} \left(1 - e^{-\frac{B_2}{m}t} \right)$$

Componente Vertical:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - B_2 v_y$$

Donde g es la aceleración debida a la gravedad. Resolviendo esta ecuación diferencial:

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{mg}{B_2} \right) e^{-\frac{B_2}{m}t} - \frac{mg}{B_2}$$

Donde $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ es la componente vertical de la velocidad inicial. La posición en función del tiempo se obtiene integrando $v_y(t)$:

$$y(t) = \frac{m}{B_2} \left(v_{0y} + \frac{mg}{B_2} \right) \left(1 - e^{-\frac{B_2}{m}t} \right) - \frac{mgt}{B_2}$$

Por otra parte las ecuaciones del tiro parabólico sin resistencia del aire vienen dadas por

- Posición en el eje horizontal (x):

Dado que no hay resistencia del aire, la velocidad horizontal v_x es constante durante todo el movimiento.

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t$$

Donde v_0 es la velocidad inicial. θ es el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal. t es el tiempo. 2. Posición en el eje vertical (**y**):

La velocidad vertical v_y cambia debido a la aceleración gravitacional g , por lo que la ecuación de la posición vertical incluye un término de aceleración.

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

g es la aceleración debida a la gravedad (aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$).

4. Metodología de la investigación

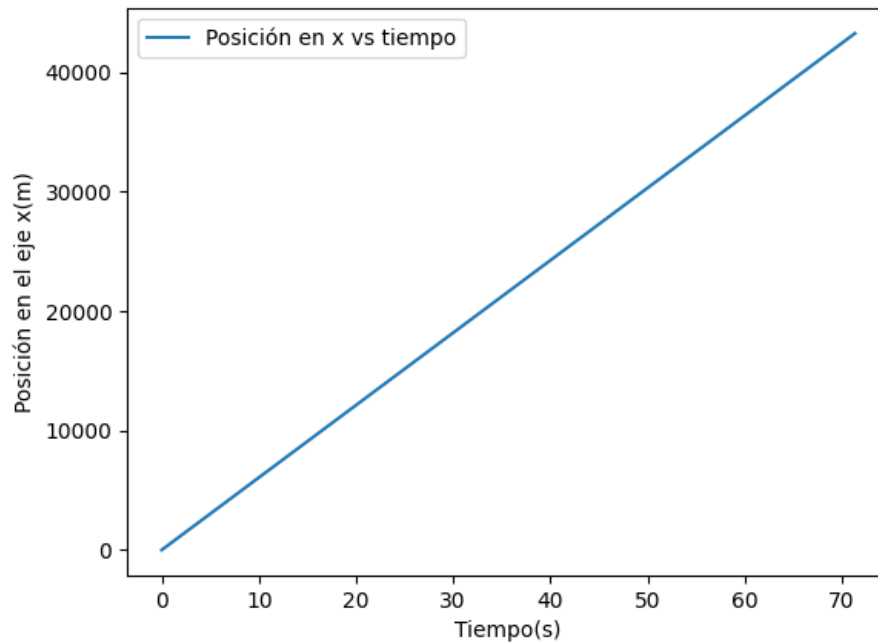
Este trabajo busca recolectar datos numéricos sobre la trayectoria de proyectiles con y sin resistencia del aire. Con estos datos crearemos gráficas las cuales se analizarán de forma cualitativa. Utilizaremos el método de Euler para aproximar la solución de los proyectiles y Python como lenguaje sobre el cual llevaremos a cabo este trabajo,

5. Resultados:

Iniciaremos hablando acerca de los resultados obtenidos para el **CASO SIN RESISTENCIA DEL AIRE**, es decir que $\frac{B_2}{m} = 0$

Para este caso nos quedan las siguientes gráficas:

5.1. Gráfica x vs t sin resistencia del aire:

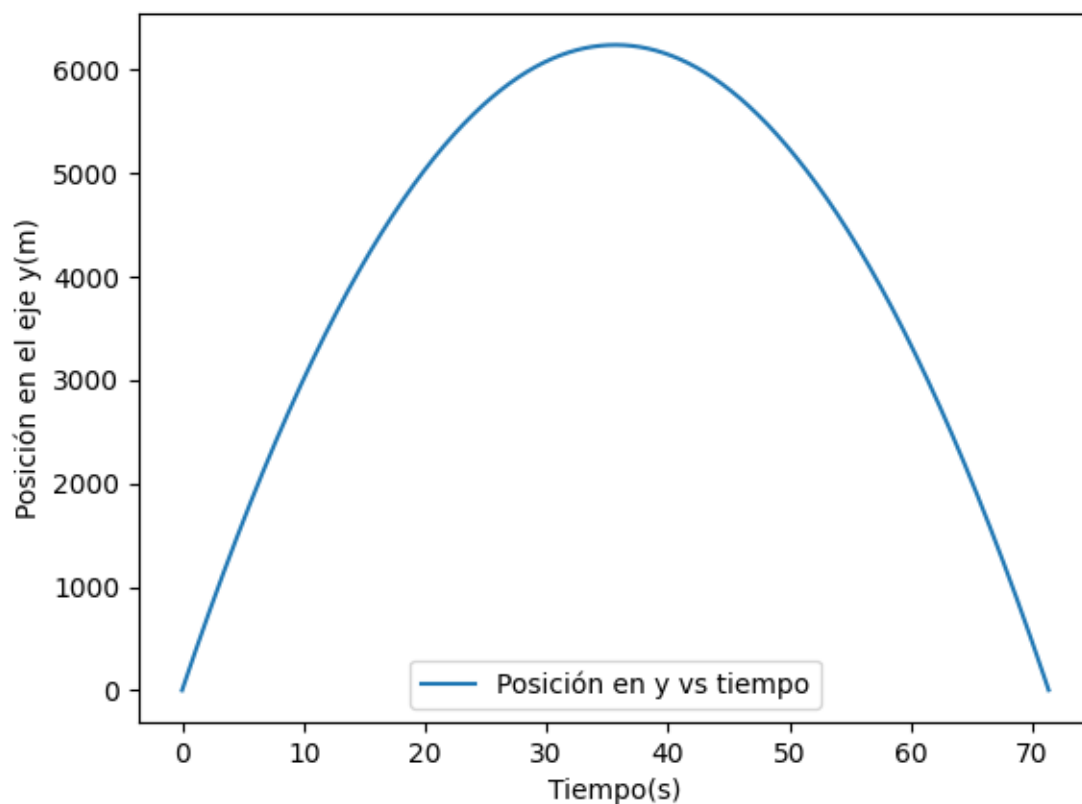


Podemos ver en la gráfica que la velocidad es constante a lo largo del eje x que es justo lo que se esperaría de un movimiento de proyectil sin resistencia del aire. Para este caso la distancia máxima recorrida en el eje x fue de

$$x_{max} = 43247,57$$

Comparando con la solución analítica $x(t) = v_0 \cos(\theta)t$ notamos que la gráfica coincide con la solución exacta del problema.

5.2. Gráfica y vs t sin resistencia del aire:

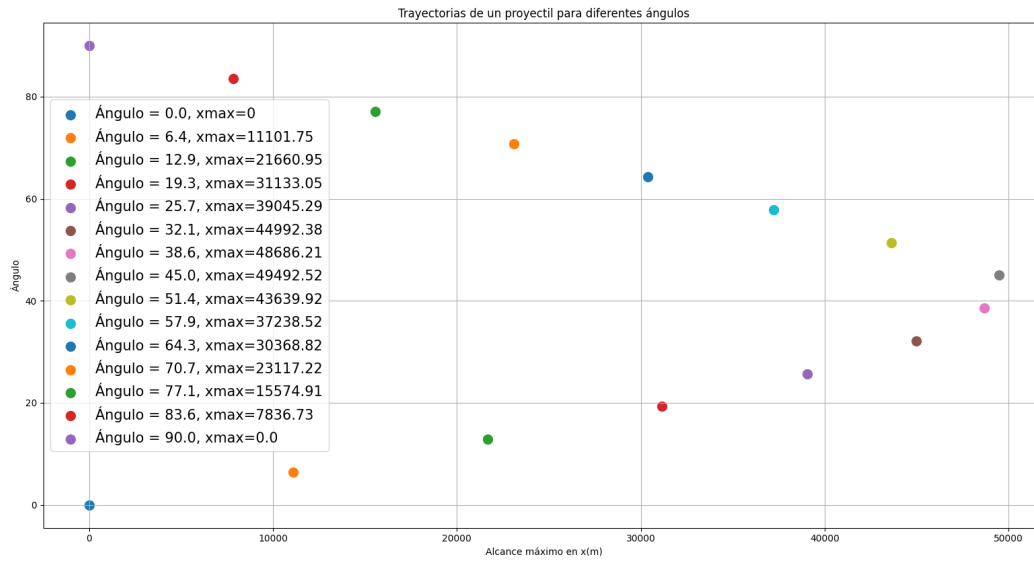


En esta gráfica vemos que al no haber resistencia del aire, el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su punto máximo de altura, es el mismo tiempo que tarda en llegar al suelo. La altura máxima fue:

$$y_{max} = 6241,87$$

Para este caso la gráfica muestra una parábola negativa, lo cual coincide con la solución exacta $y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

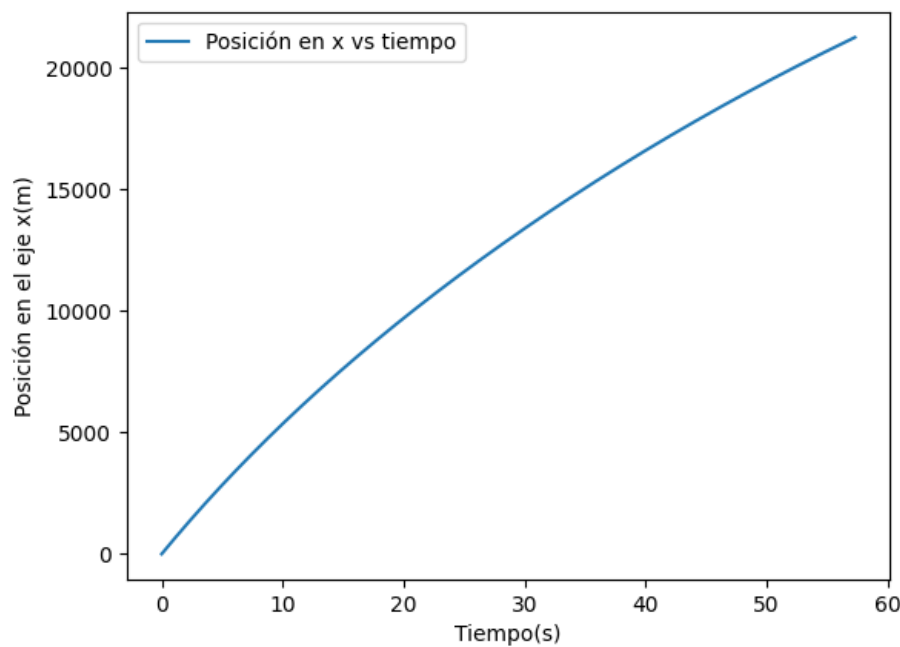
5.3. Gráfica θ vs x_{max} para varios ángulos, sin resistencia del aire:



De esta gráfica notamos que a un ángulo $\theta = 45^\circ$ el proyectil recorre una distancia máxima en x .

Ahora analizaremos el **CASO CON RESISTENCIA DEL AIRE**, para este caso tenemos las siguientes gráficas:

5.4. Gráfica x vs t con resistencia del aire:



Notemos ahora que a medida el tiempo aumenta la velocidad del proyectil en x va disminuyendo. Lo cual es lógico si pensamos que ahora hay una fuerza (la de la resistencia del aire), que se opone al movimiento del proyectil. La distancia máxima recorrida en x fue:

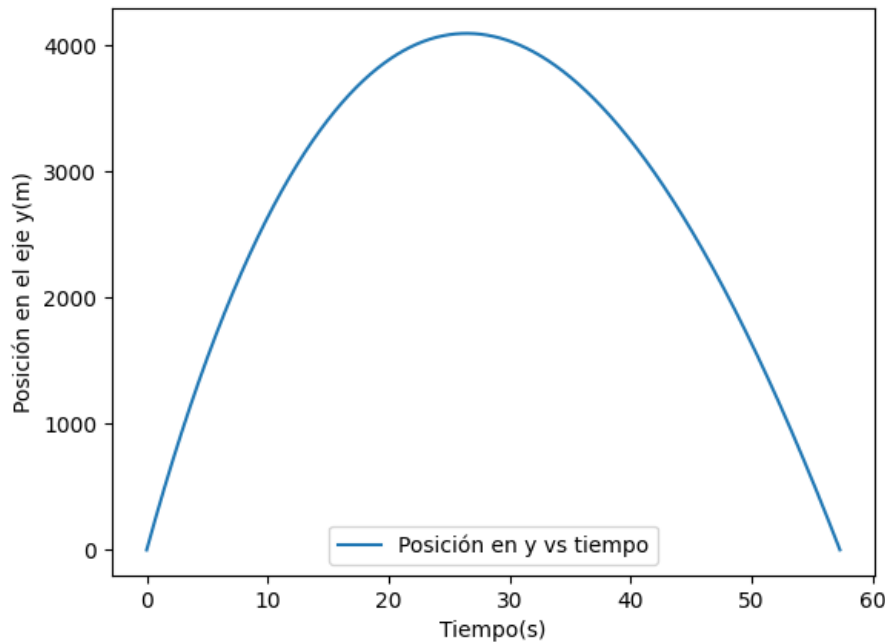
$$x_{max} = 21263,56$$

Lo cual es una disminución considerable respecto al caso sin resistencia del aire.

Notemos que la solución exacta $x(t) = \frac{mv_{0x}}{b} \left(1 - e^{-\frac{B_2}{m}t}\right)$ en efecto puede generar la gráfica que observamos.

5.5. Gráfica y vs t con resistencia del aire:

Por otra parte en el eje y encontramos que se pierde la simetría temporal al subir y bajar de la partícula, que sí aparecía en el caso sin resistencia del aire. También es necesario notar que el vuelo del proyectil tarda menos tiempo que en el otro caso.



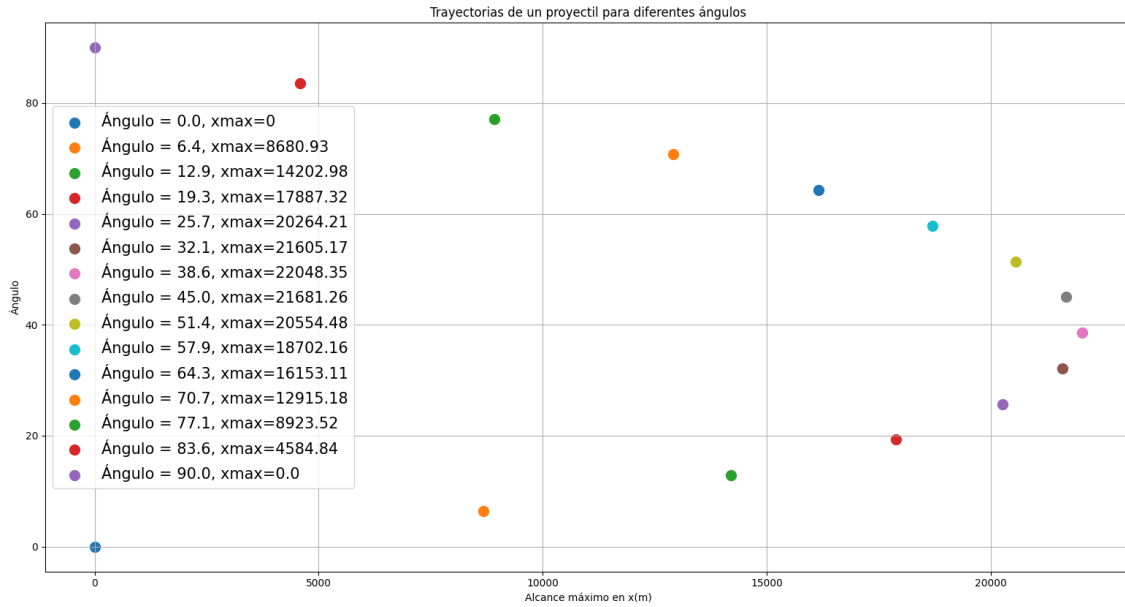
La altura máxima fue:

$$y_{max} = 4097,43$$

Lo cual, nuevamente es una disminución considerable de altura respecto al caso sin resistencia del aire. Esta disminución se explica al ver la solución exacta $y(t) = \frac{m}{B_2} \left(v_{0y} + \frac{mg}{B_2}\right) \left(1 - e^{-\frac{B_2}{m}t}\right) - \frac{mgt}{B_2}$ la cual coincide con la descripción del movimiento que vemos en la gráfica

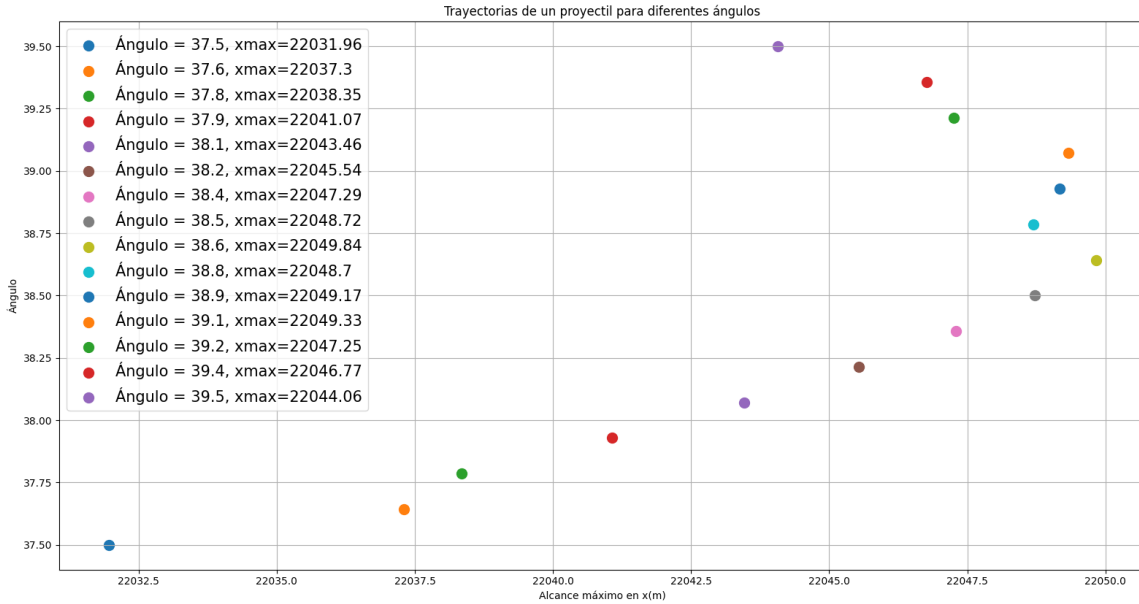
5.6. Gráfica θ vs x_{max} para varios ángulos, con resistencia del aire:

Para el caso donde queremos saber para qué ángulos la distancia recorrida en x es máxima, si consideramos la resistencia del aire tenemos:



Podemos ver que a diferencia del caso sin resistencia del aire, acá el ángulo que máxima la distancia recorrida en x es $\theta = 38,5^\circ$.

Disminuyendo el intervalo de θ , cerca del punto máximo tendríamos:



De esta gráfica podemos notar que el el valor de x_{max} se da en $\theta = 38,6$

6. Conclusiones:

Si la resistencia del aire (u otras fuerzas externas) no afecta al proyectil, el movimiento en el eje x está dado por un MRU, mientras que en el eje y sería un MRUA tanto en la subida como en la bajada. En este caso sin resistencia del aire, la máxima distancia horizontal se alcanza cuando $\theta = 45^\circ$. Sin embargo, al considerar la resistencia del aire, la aceleración en los ejes x y y disminuye a lo largo del tiempo, lo que produce gráficas diferentes respecto al caso sin resistencia. Además, hay una disminución notable en el tiempo de vuelo, velocidad y distancia recorrida, ya que la resistencia del aire se opone al movimiento del proyectil. Al variar los ángulos para determinar cuál maximiza el recorrido en el eje x , se observa que, a diferencia del caso sin resistencia, el ángulo óptimo es $\theta = 38,5^\circ$, lo que sugiere que la ecuación teórica $x(t)$ tal y como mostramos, depende de θ . Se recomienda probar más ángulos cercanos a $38,5^\circ$ para afinar el valor de θ que maximiza el recorrido. Por último podemos concluir que para problemas clásicos de tiro parabólico, el método de Euler demuestra ser efectivo por su sencillez. Se recomienda probar nuevamente este método en problemas de mayor complejidad como el problema de el oscilador armónico con y sin fuerzas externas y comparar nuevamente con las soluciones exactas para determinar la validez de la solución numérica.

Referencias

- [1] Hans Petter Langtangen. *A Primer on Scientific Programming with Python*. Center for Biomedical Computing, Simula Research Laboratory, Aug 21, 2014.

- [2] (s/f). *Tiro parabólico con rozamiento*. <http://www.sc.ehu.es>, Recuperado el 6 de septiembre de 2024.
- [3] Dr. David Tong. *Classical Dynamics*. Cambridge, CB3 OBA, UK, 2004.