

---

# **Der Casimir Effekt in der Geometrie Kugel–Platte**

---

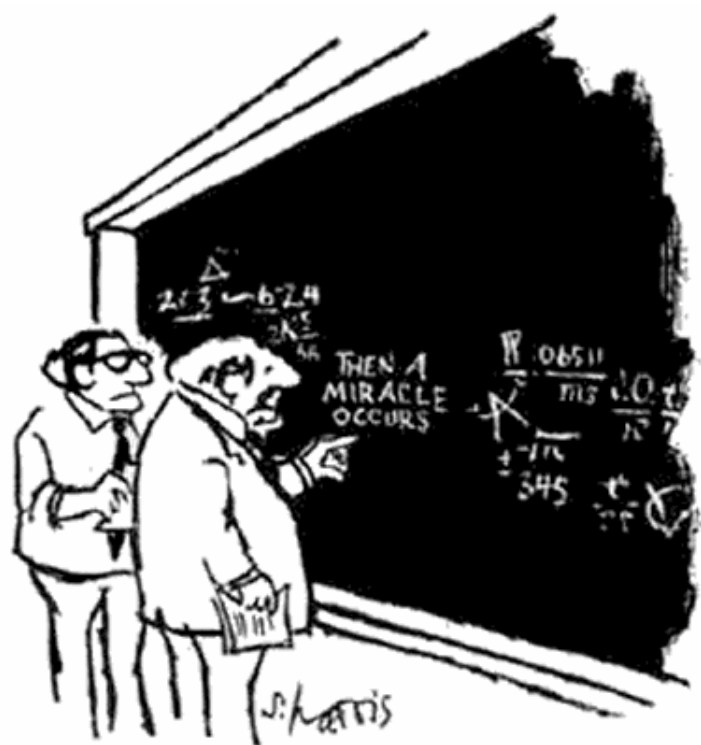
**Fachpraktikumsbericht**

**vorgelegt von  
Michael Hartmann**

**Institut für Physik  
Theoretische Physik I**

**Prof. Dr. Gert-Ludwig Ingold**

**Augsburg, 12. November 2013**



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT  
HERE IN STEP TWO."

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Maxwell-Gleichungen in homogenen dielektrischen Medien</b>	<b>2</b>
<b>3. Ebene Wellen- und Multipol-Basis</b>	<b>4</b>
3.1. Notation . . . . .	4
3.2. Ebene Wellen-Basis . . . . .	5
3.3. Multipol-Basis . . . . .	8
3.4. Matrixelemente für Basiswechsel . . . . .	10
<b>4. Streuformel in der Geometrie Kugel–Platte</b>	<b>11</b>
4.1. Freie Energie . . . . .	11
4.2. Round-Trip–Operator $\mathcal{M}$ . . . . .	12
4.3. Reflexionskoeffizienten . . . . .	19
4.4. Determinante der Streumatrix . . . . .	22
4.5. Matsubara-Frequenz $n = 0$ . . . . .	22
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>25</b>
<b>A. Normierung</b>	<b>27</b>
<b>B. Spezielle Funktionen</b>	<b>29</b>
B.1. Kugelflächenfunktionen . . . . .	29
B.2. Zugeordnete Legendrepolynome . . . . .	30
B.3. Modifizierte Bessel-Funktionen . . . . .	33
B.4. Wigner-D–Symbole . . . . .	34
<b>C. Streuung an einer Kugel und Faktor <math>-2</math></b>	<b>35</b>
<b>D. Rechnungen für <math>\xi \rightarrow 0</math></b>	<b>37</b>
D.1. Integration über $B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$ für $\xi \rightarrow 0$ . . . . .	37
D.2. Determinante von $\mathcal{M}^{(m)}(P, P)$ für $\xi \rightarrow 0$ . . . . .	38
<b>E. Rechnungen und mathematische Umformungen</b>	<b>39</b>
E.1. Determinante einer Blockmatrix . . . . .	39
E.2. Äquivalenz der Matrixelemente mit CANAGUIER–DURAND et. al. . . . .	39



# 1. Einleitung

1948 sagte HENDRIK CASIMIR für zwei unendlich ausgedehnte, parallele und perfekt leitende Platten im Vakuum bei  $T = 0$  eine anziehende Kraft voraus. [8] Diese Kraft wurde erstmals 1956 von DERJAGUIN, ABRIKOSOVA und LIFSHITZ [16], sowie 1958 von SPARNAAY [35] experimentell nachgewiesen. Seitdem wurde die Genauigkeit in Experimenten von Gruppen um MOHIDEEN [18, 26, 34], LAMOREAUX [24, 37] und DECCA [11, 13, 14, 12, 22, 27] immer weiter verbessert, so dass die Messfehler für kleine Abstände teils unter 1% liegen. Diese Experimente werden üblicherweise für die Geometrie Kugel–Platte durchgeführt, um Verkippungen zwischen den Platten in der ursprünglichen Casimir-Geometrie zu vermeiden, die zu Messfehlern führen.

Casimir nahm an, dass virtuelle Teilchen innerhalb der Platten auf Grund der Randbedingungen nur mit quantisierten Wellenlängen auftreten, während im Außenraum Vakuumfluktuationen beliebiger Wellenlänge auftreten. Durch das Einbringen der Platten wird das Vakuum verändert und die Platten ziehen sich an. Dieser Effekt tritt beispielsweise auch für Wasserwellen auf. [15]

Die Casimir-Kraft ist der zugänglichste Effekt von Vakuumfluktuationen. Da Vakuumfluktuationen zu Problemen an den Grenzflächen von Quanten- und Gravitationstheorie führen [10], ist eine genaue experimentelle und theoretische Beschreibung wichtig. Da die Casimir-Kraft die dominierende Kraft im Nano- bis Milimeter-Bereich ist, ist ein genaues Verständnis für Kraftmessungen in diesem Bereich notwendig. Über Messungen in diesem Bereich können experimentelle Grenzen für von vereinheitlichten Theorien vorhergesagte Kräfte oder Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz bestimmt werden. [29]

In dieser Arbeit wird der Streuformalismus auf die Geometrie Kugel–Platte bei endlichen Temperaturen angewendet. Wir folgen dabei in weiten Teilen der Argumentation von CANAGUIER-DURAND et al. [6, 7], versuchen aber die Herleitung stringenter und ausführlicher darzustellen. Insbesondere werden die Ergebnisse für die Matrixelemente des Streuoperators in einer Form präsentiert, die ohne Wigner-D-Symbole auskommt und dessen Symmetrien deutlicher erkennen lässt. Dazu wird gezeigt, dass die Maxwell-Gleichungen für dieses Problem äquivalent mit der vektoriellen Helmholtz-Gleichung sind. Als Lösungen werden die ebene Wellen- und die Multipol-Basis vorgestellt, die für die Darstellung des Streuoperators verwendet werden. Außerdem werden die Symmetrien und Eigenschaften des Streuoperators, sowie dessen Verhalten für die erste Matsubara-Frequenz untersucht. Die vorgestellten Rechnungen dienen somit als Vorbereitung für eine numerische Implementation.

## 2. Maxwell-Gleichungen in homogenen dielektrischen Medien

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass innerhalb eines geschlossenen Bereiches eines homogenen, linearen und zeitunabhängigen Mediums ohne Quellen die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  die vektorielle Helmholtz-Gleichung erfüllen. Das hier vorgestellte Vorgehen wird in [4, 20, 28, 36] diskutiert.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen lauten [20]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Die Größen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  entsprechen den elektrischen und magnetischen Feldern,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  und  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$  bezeichnen die elektrische Flussdichte und die magnetische Feldstärke, wobei  $\mathbf{P}$  der makroskopischen Polarisation und  $\mathbf{M}$  der makroskopischen Magnetisierung entsprechen. In diesem, sowie in allen folgenden Kapiteln, wird ausschließlich das SI-System verwendet.

Für ein lineares, homogenes und zeitunabhängiges dielektrisches Medium ist die makroskopische Polarisation proportional zum elektrischen Feld  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ . Das Medium sei weiter unmagnetisch, so dass die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  verschwindet. Daraus ergibt sich für die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E}$  und für die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ . Somit lassen sich die Maxwell-Gleichungen in diesem Medium in der gleichen Form wie die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen schreiben, wenn man die Ersetzung  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  vornimmt. Somit vereinfachen sich die Gleichungen (2.1)–(2.4) zu

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

wenn außerdem keine freien Ladungsträger und Ströme vorhanden sind.

---

Aus der Anwendung der Rotation auf das Induktionsgesetz (2.7) folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

andererseits gilt auf Grund der Vektoridentität  $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla - \Delta$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}. \quad (2.10)$$

Aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) erhält man somit einen zu (2.5)–(2.8) äquivalenten Satz an Gleichungen:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.12)$$

Hierbei entspricht  $c = (\mu_0 \epsilon)^{-1/2}$  der Lichtgeschwindigkeit im betrachteten Medium.

Auf Grund der Linearität der Wellengleichung (2.11) können Felder beliebiger Zeitabhängigkeit aus harmonischen Lösungen konstruiert werden. Daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die Zeitabhängigkeit den Faktor  $e^{-i\omega t}$  an [4, 20, 36]. Durch Einsetzen in die Wellengleichung (2.11) erhält man die vektorielle Helmholtz-Gleichung, wobei die Lösungen divergenzfrei sein müssen:

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.14)$$

Alle Schritte lassen sich analog für das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  durchführen, so dass die Gleichungen (2.13) und (2.14) auch für dieses gelten. Elektrische und magnetische Felder lassen sich über die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.7) und (2.8) ineinander umrechnen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mu_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{i}{\omega \mu_0 \epsilon} \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Im folgenden Kapitel werden als Lösungen der Helmholtz-Gleichung die ebene Wellen-Basis und die Multipol-Basis vorgestellt.

## 3. Ebene Wellen- und Multipol-Basis

In diesem Kapitel werden die ebene Wellen-Basis und die Multipol-Basis als Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung (2.13) vorgestellt. Beide Basen werden im nächsten Kapitel zur Darstellung des Roundtrip-Operators verwendet.

### 3.1. Notation

Zunächst soll die Notation dem Problem angepasst werden. Wir orientieren uns dabei an CANAGUIER-DURAND et al. [6, 7].

Der bisherige Wellenvektor  $\mathbf{k}$  wird nun mit  $\mathbf{K}$  bezeichnet, mit dem Vektor  $\mathbf{k}$  soll die Komponente des Wellenvektors in der  $xy$ -Ebene bezeichnet werden. Die  $z$ -Komponente des Wellenvektors  $K_z$  ergibt sich dann über die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c^2(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) = c^2(\mathbf{k}^2 + K_z^2), \quad (3.1)$$

aus der Frequenz  $\omega$  und der Propagationsrichtung  $\phi$  in positiver oder negativer  $z$ -Richtung. Mit  $k_z$  wird die vorzeichenlose  $z$ -Komponente des Wellenvektors bezeichnet, diese ist  $K_z = +k_z$ , wenn sich die Welle in  $+z$ -Richtung ausbreitet, und  $K_z = -k_z$ , falls sie sich in  $-z$ -Richtung fortpflanzt. Analog bezeichne  $\mathbf{R}$  nun den Vektor  $(x, y, z)$  und  $\mathbf{r}$  den Vektor  $(x, y)$ .

Zusammengefasst definieren wir:

$$\mathbf{R} = (x, y, z), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K} = (k_x, k_y, \phi k_z), \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.3)$$

$$K_z = \phi k_z = \phi \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2}, \quad \phi = \pm 1, \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2} \quad (3.4)$$

In Kugelkoordinaten lässt sich der Wellenvektor  $\mathbf{K}$  als

$$\mathbf{K} = (k_x, k_y, \pm k_z) = \frac{\omega}{c} (\sin \theta^\pm \cos \varphi, \sin \theta^\pm \sin \varphi, \phi \cos \theta^\pm) \quad (3.5)$$

schreiben,  $\theta^\pm$  und  $\varphi$  entsprechen dem Azimut- und Polarwinkel im  $k$ -Raum. Insbesondere hängt der Winkel  $\theta^\pm$  von der Ausbreitung der Welle in  $\pm z$ -Richtung ab. Sinus und Cosinus des Polarwinkels  $\theta^\pm$



sind mit den Größen  $\omega/c$ ,  $\mathbf{k}$  und  $k_z$  über die Relationen

$$\sin \theta^\pm = \frac{ck}{\omega}, \quad \cos \theta^\pm = \pm \frac{ck_z}{\omega} \quad (3.6)$$

verknüpft.

### 3.2. Ebene Wellen-Basis

Die Helmholtz-Gleichung (2.13) stellt in jeder Komponente von  $\mathbf{E}$  eine Wellengleichung dar. Daher erhält man in kartesischen Koordinaten als Lösung eine Überlagerung von ebenen Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \int d^3\mathbf{K} \mathbf{A}(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}, \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{A}(\mathbf{K})$  eine beliebige komplexe vektorwertige Funktion ist. Auf Grund der Divergenzfreiheit (2.14) sind aber nur zwei Komponenten des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  voneinander unabhängig und der Wellenvektor steht senkrecht auf dem Vektor  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.8)$$

Durch die Dispersionsrelation (3.1) wird die  $z$ -Komponente des Wellenvektors  $K_z = \phi k_z$  bis auf ein Vorzeichen festgelegt. Die Lösung lässt sich somit als

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_p \sum_{\phi=\pm 1} \int d^2\mathbf{k} \alpha_{\phi,p}(\mathbf{k}) A \hat{\mathbf{e}}_p e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\phi k_z z)} \quad (3.9)$$

darstellen, wobei  $\hat{\mathbf{e}}_p$  den beiden orthonormierten Polarisationsvektoren und  $\alpha_{\phi,p}$  den dazugehörigen Entwicklungskoeffizienten entsprechen. Die Basisfunktionen haben dann die Form

$$\langle \mathbf{R} | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle := \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega,\phi,p}(\mathbf{R}) = A \hat{\mathbf{e}}_p e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\phi k_z z)} \quad (3.10)$$

und hängen von der Ausbreitungsrichtung  $\phi$  der Welle in  $\pm z$ -Richtung, dem Polarisationsvektor  $\hat{\mathbf{e}}_p$ , sowie dem Wellenvektor in der  $xy$ -Ebene  $\mathbf{k}$  ab. Die Normierungskonstante  $A$  lässt sich bis auf einen willkürlichen Phasenfaktor aus der Normierungsbedingung

$$\langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle \stackrel{!}{=} \delta_{pp'} \delta_{\phi\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \quad (3.11)$$

bestimmen. Die Rechnung wird in Anhang A ausgeführt, als Ergebnis erhält man

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|}. \quad (3.12)$$

Im Folgenden wird das elektrische Feld in einen transversal-elektrischen (TE) Anteil mit  $E_z = 0$  und einen transversal-magnetischen (TM) Anteil mit  $B_z = 0$  aufgespalten. Somit lassen sich die Polari-

sationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_p$  bestimmen. Durch eine Fourier-Transformation erhält man schließlich die ebene Wellen-Basis im  $k$ -Raum.

#### 3.2.1. TE-Moden

Die Forderung  $E_z = 0$  in Gleichung (3.10) kann nur für  $(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}})_z = 0$  erfüllt werden. Auf Grund der Divergenzfreiheit (3.8) besitzt der Polarisationsvektor  $\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}}$  nur noch eine unabhängige Komponente

$$\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}} \cdot \mathbf{K} = (\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}})_x k_x + (\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}})_y k_y = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}})_y = -\frac{(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}})_x k_x}{k_y}, \quad (3.13)$$

die durch die Normierung von  $\hat{\mathbf{e}}_{\text{TE}}$  festgelegt wird. Durch Einsetzen in (3.10) erhält man

$$\langle \mathbf{R} | \mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TE} \rangle = \frac{A}{k} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi k_z z)} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\left| \frac{\omega}{c k_z} \right|} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi k_z z)}. \quad (3.14)$$

#### 3.2.2. TM-Moden

Die Bestimmung der Basis-Funktionen für TM-Moden verläuft analog zu den TE-Moden. Aus der Forderung  $B_z = 0$  und der Divergenzfreiheit folgt

$$(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TM}})_y = -\frac{(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TM}})_x k_x}{k_y} \quad (3.15)$$

und somit erhält man für das magnetische Feld

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TM}}(\mathbf{R}) = A(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TM}})_x \begin{pmatrix} 1 \\ -k_x/k_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi k_z z)}. \quad (3.16)$$

Daraus lässt sich über Gleichung (2.16) das elektrische Feld berechnen

$$\langle \mathbf{R} | \mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TM} \rangle = \frac{i}{\omega \mu_0 \epsilon} \nabla \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TM}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\left| \frac{\omega}{c k_z} \right|} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi k_z z)}, \quad (3.17)$$

wobei  $(\hat{\mathbf{e}}_{\text{TM}})_x$  aus dem Vergleich mit (3.11) folgt. Der Polarisationsvektor  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  hängt von der Ausbreitungsrichtung  $\phi$  ab.

#### 3.2.3. Fourier-Transformation

Zur Berechnung der Matrixelemente für den Übergang von ebener Wellen-Basis zu Multipol-Basis werden später die Fouriertransformierten der ebenen Wellen-Basis benötigt. Diese ergeben sich nach

kurzer Rechnung zu

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{K} | \mathbf{k}', \omega', \phi', p \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{R} \frac{\hat{\mathbf{e}}_p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \phi' k'_z z)} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \sqrt{\left| \frac{\omega'}{c k'_z} \right|} \\
 &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_p}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{R} \sqrt{\left| \frac{\omega'}{c k'_z} \right|} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} e^{iz(\phi' k'_z - K_z)} \\
 &= \sqrt{\left| \frac{\omega'}{c k'_z} \right|} \hat{\mathbf{e}}_p \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(K_z - \phi' k'_z),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei  $\hat{\mathbf{e}}_p$  dem jeweiligen Vektor für TE- und TM-Polarisation entspricht.

### 3.2.4. Zusammenfassung

Die Basisfunktionen

$$|\mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TE}\rangle, \quad |\mathbf{k}, \omega, \phi, \text{TM}\rangle \tag{3.19}$$

sind normiert und orthogonal

$$\langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle = \delta_{pp'} \delta_{\phi\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right). \tag{3.20}$$

Die divergenzfreien Lösungen der vektoriellen Helmholtz-Gleichung lassen sich über

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_{\phi, p} \int d^2 \mathbf{k} \alpha_{\phi, p}(\mathbf{k}) \langle \mathbf{R} | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle \tag{3.21}$$

und

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}) = \sum_{\phi', p} \int d^2 \mathbf{k}' \beta_{\phi', p}(\mathbf{k}') \langle \mathbf{K} | \mathbf{k}', \omega', \phi', p \rangle \tag{3.22}$$

in dieser Basis entwickeln.

Die Basisfunktionen  $|\mathbf{k}, \omega, \phi, p\rangle$  der ebenen Wellen Basis sind Eigenfunktionen des Energieoperators  $\hat{E}$  und des Impulsoperators  $\hat{p}_i = -i\hbar\partial_i$ ,  $i = x, y, z$ :

$$\hat{E} |\mathbf{k}, \omega, \phi, p\rangle = \hbar\omega |\mathbf{k}, \omega, \phi, p\rangle \tag{3.23}$$

$$\hat{p}_i |\mathbf{k}, \omega, \phi, p\rangle = \hbar K_i |\mathbf{k}, \omega, \phi, p\rangle \tag{3.24}$$

### 3.3. Multipol-Basis

Neben der ebenen Wellen-Basis lässt sich die Multipol-Basis konstruieren, deren Basisfunktionen durch die Frequenz  $\omega$ , dem Gesamtdrehimpuls  $\ell(\ell + 1)$ , der  $z$ -Komponente des Drehimpulses  $\hbar m$  und der Parität eindeutig festgelegt werden.

Im reziproken Raum lauten die Funktionen für die Multipol-Basis [9]:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{K} | \omega', \ell, m, M \rangle &= \frac{c}{\omega'} \delta \left( K - \frac{\omega'}{c} \right) \mathbf{X}_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{c}{\omega'} \delta \left( K - \frac{\omega'}{c} \right) \left( \hat{\mathbf{e}}_\varphi \partial_\theta - \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}\end{aligned}\quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{K} | \omega', \ell, m, E \rangle &= \frac{c}{\omega'} \delta \left( K - \frac{\omega'}{c} \right) \mathbf{Z}_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{c}{\omega'} \delta \left( K - \frac{\omega'}{c} \right) \left( \hat{\mathbf{e}}_\theta \partial_\theta + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Die Vektorkugelflächenfunktionen  $\mathbf{X}_{\ell m}$  und  $\mathbf{Z}_{\ell m}$  bilden ein Orthonormalsystem auf der Kugeloberfläche

$$\int d^2 \hat{\mathbf{K}} \mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{X}_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{K}}) = \int d^2 \hat{\mathbf{K}} \mathbf{Z}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{Z}_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{K}}) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (3.27)$$

$$\int d^2 \hat{\mathbf{K}} \mathbf{X}_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{Z}_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{K}}) = 0 \quad (3.28)$$

und werden in der Literatur üblicherweise mit unterschiedlichen Definitionen als Vector Spherical Harmonics (VSH) bezeichnet. [3, 4, 25, 2] Für  $\ell = 1, m = 0$  und  $\ell = 2, m = 1$  sind die entsprechenden Vektorfelder in Abbildung 3.1 dargestellt.

Die Basisfunktionen der Multipol-Basis sind Eigenfunktionen zu  $\hat{E}$ ,  $\hat{\mathbf{J}}^2$ ,  $\hat{J}_z$  und  $\hat{P}$

$$\hat{E} |\omega, \ell, m, P\rangle = \hbar \omega |\omega, \ell, m, P\rangle \quad (3.29)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 |\omega, \ell, m, P\rangle = \ell(\ell + 1) |\omega, \ell, m, P\rangle \quad (3.30)$$

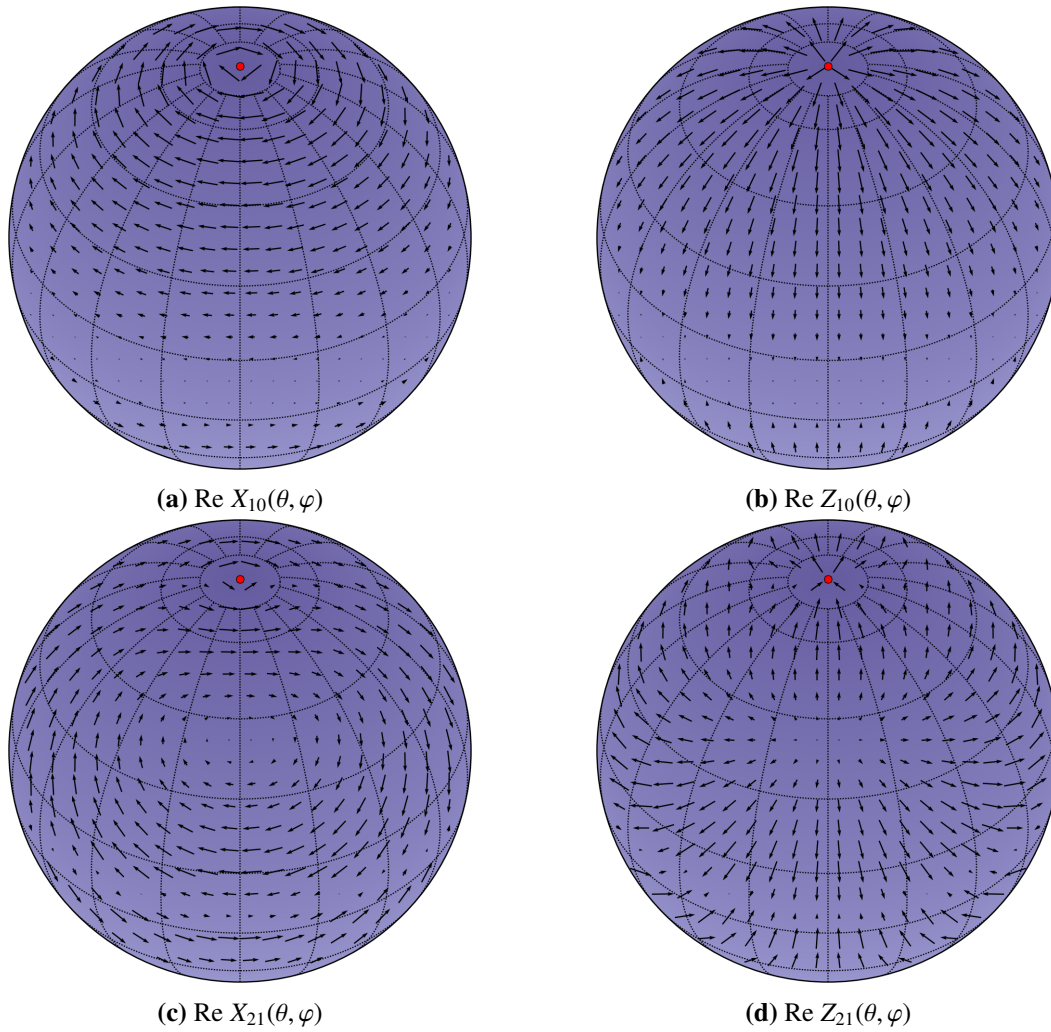
$$\hat{J}_z |\omega, \ell, m, P\rangle = \hbar m |\omega, \ell, m, P\rangle \quad (3.31)$$

$$\hat{P} |\omega, \ell, m, P\rangle = \pm |\omega, \ell, m, P\rangle, \quad (3.32)$$

die divergenzfreien Lösungen der Helmholtz-Gleichung lassen sich über

$$\mathbf{E}(\mathbf{K}) = \sum_{P=E,M} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell, m, P} \langle \mathbf{K} | \omega, \ell, m, P \rangle \quad (3.33)$$

in der Multipol-Basis entwickeln.



**Abbildung 3.1.:** Realteil der Funktionen  $X_{\ell m}$  und  $Z_{\ell m}$  für  $\ell = 1, m = 0$  und  $\ell = 2, m = 1$ . Der rote Punkt entspricht dem Nordpol. Für  $m = 0$  sind die Funktionen  $X_{\ell m}$  und  $Z_{\ell m}$  rein reell.

### 3.4. Matricelemente für Basiswechsel

Die Matricelemente für den Wechsel zwischen ebene Wellen- und Multipol-Basis lassen sich am einfachsten durch die Darstellung der Basen im Fourierraum berechnen. Für den Übergang von TE-polarisierter ebener Wellen zu elektrischer Multipol-Welle erhält man nach Einschieben des Einheitsoperators

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \omega', \ell, m, E \rangle &= \int d^3 \mathbf{K}' \langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \mathbf{K}' \rangle \langle \mathbf{K}' | \omega', \ell, m, E \rangle \\
 &= \int d^3 \mathbf{K}' \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(K'_z \mp k_z) \frac{c}{\omega'} \delta\left(K' - \frac{\omega'}{c}\right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \mathbf{Z}_{\ell m}(\theta', \varphi') \\
 &= \int d^3 \mathbf{K}' \frac{c}{\omega'} \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(K'_z \mp k_z) \delta\left(K' - \frac{\omega'}{c}\right) \frac{\partial_\varphi Y_{\ell m}(\theta', \varphi')}{\sin \theta' \sqrt{\ell(\ell+1)}}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Im letzten Schritt wurde das Skalarprodukt ausgewertet. Hier bietet es sich an das Integral in Kugelkoordinaten umzuschreiben. Die Delta-Funktionen transformieren sich dabei zu

$$\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(K'_z \mp k_z) \delta\left(K' - \frac{\omega'}{c}\right) = \frac{\delta(\theta' - \theta^\pm) \delta(\varphi' - \varphi) \delta\left(K' - \frac{\omega}{c}\right)}{\frac{\omega^2}{c^2} \sin \theta^\pm} \delta\left(K' - \frac{\omega'}{c}\right), \tag{3.35}$$

wobei die Integration nun über  $K', \theta', \varphi'$  erfolgt. Die Integration über den Winkelanteil führt zu den Ersetzungen  $\theta' \rightarrow \theta^\pm$  und  $\varphi' \rightarrow \varphi$ , die Integration über den Radialanteil erzeugt aus den zwei Delta-Funktionen  $\delta(K' - \omega/c)$  und  $\delta(K' - \omega'/c)$  eine Delta-Funktion  $\delta(\omega/c - \omega'/c)$ . Außerdem kürzt sich das Volumenelement der Kugelkoordinaten nach Ausführen der Integration mit dem Nenner von Gleichung (3.35). Mit diesen Überlegungen erhält man für (3.34)

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \omega', \ell, m, E \rangle &= \frac{c}{\omega'} \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|} \delta\left(\frac{\omega'}{c} - \frac{\omega}{c}\right) \frac{\partial_\varphi Y_{\ell m}(\theta^\pm, \varphi)}{\sin \theta^\pm \sqrt{\ell(\ell+1)}} \\
 &= \frac{im}{k} \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|} \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \frac{Y_{\ell m}(\theta^\pm, \varphi)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Im letzten Schritt wurde die Ableitung der Kugelflächenfunktion ausgeführt und die Identität  $k = \omega/c \sin \theta^\pm$  ausgenutzt.

Analog folgt für den Übergang von TE-polarisierter Welle zu magnetischer Multipol-Welle

$$\langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \omega', \ell, m, M \rangle = \frac{c}{\omega} \sqrt{\left| \frac{\omega}{ck_z} \right|} \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \frac{\partial_\theta Y_{\ell m}(\theta^\pm, \varphi)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}},$$

für die beiden verbleibenden Matricelemente findet man

$$\langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TM} | \omega', \ell, m, M \rangle = - \langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \omega', \ell, m, E \rangle \tag{3.37}$$

$$\langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TM} | \omega', \ell, m, E \rangle = \langle \mathbf{k}, \omega, \pm, \text{TE} | \omega', \ell, m, M \rangle. \tag{3.38}$$

## 4. Streuformel in der Geometrie Kugel–Platte

In diesem Kapitel wenden wir den Streuformalismus auf die Geometrie Kugel–Platte an. Zunächst werden die Matrixelemente des Streuoperators in der Multipol-Basis bestimmt. Nach einer Wick-Rotation lässt sich dann in diesem Formalismus die Freie Energie  $\mathcal{F}$  in Abhängigkeit von Temperatur, Reflexionsverhalten von Kugel und Platte, deren Abstand und dem Radius der Kugel berechnen. Kraft  $F$  und Entropie  $S$  sind mit der Freien Energie über

$$F = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}, \quad S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \quad (4.1)$$

verknüpft. Als Modell für die dielektrische Funktion von Kugel und Platte werden das Drude- und das Plasma-Modell, sowie das Modell perfekter Spiegel vorgestellt. Aus der dielektrischen Funktion folgt das Reflexionsverhalten von Kugel und Platte.

Wir folgen in diesem Kapitel in weiten Teilen der Argumentation aus [6, 7], versuchen aber die Herleitung ausführlicher und stringenter darzustellen. Die Matrixelemente für den Round-Trip-Operator werden in einer etwas anderen Form präsentiert, die ohne Wigner-D-Symbole auskommt und dessen Symmetrien deutlicher erkennen lässt. Außerdem wird das Verhalten für die erste Matsubara-Frequenz genauer untersucht.

Zunächst soll die Geometrie festgelegt werden: Die Platte liege bei  $z = 0$ , sei in der  $x$ - $y$ -Ebene unendlich ausgedehnt und so dick, dass keine Wellen vom oberen in den unteren Halbraum gelangen und umgekehrt. Im Abstand  $L$  zur Platte befinde sich die Kugel mit Radius  $R$ . Der Abstand zwischen Platte und Kugelzentrum betrage  $\mathcal{L} = L + R$ . Die Geometrie ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

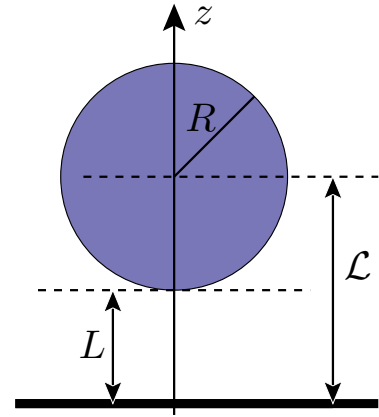


Abbildung 4.1.: Geometrie Kugel–Platte.

### 4.1. Freie Energie

Die Streuformel für die Freie Casimir-Energie bei endlicher Temperatur lautet [6, 7]

$$\mathcal{F} = k_B T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \log \det \mathcal{D}(\omega_n) \quad (4.2)$$

mit den Matsubara Frequenzen

$$\omega_n = \frac{2\pi n k_B T}{\hbar}. \quad (4.3)$$

Der Streuoperator wird mit  $\mathcal{D}$  bezeichnet, das gestrichene Summenzeichen bedeutet, dass der Term für  $n = 0$  mit einem Faktor  $1/2$  gewichtet werden muss. Der Streuformalismus wird in [23, 31] ausführlicher dargestellt.

## 4.2. Round-Trip–Operator $\mathcal{M}$

Der Streuoperator  $\mathcal{D}$  ist mit dem Round-Trip–Operator  $\mathcal{M}$  über

$$\mathcal{D}(\omega) = \mathbb{1} - \mathcal{M}(\omega) \quad (4.4)$$

verknüpft. In der Geometrie Kugel–Platte besteht der Round-Trip–Operator aus dem Translationsoperator von der Kugel zur Platte  $\mathcal{T}_{P \leftarrow S}$ , dem Reflexionsoperator an der Kugel  $\mathcal{R}_P$ , dem Translationsoperator von der Platte zur Kugel  $\mathcal{T}_{S \leftarrow P}$  und dem Reflexionsoperator an der Kugel  $\mathcal{R}_S$ :

$$\mathcal{M}(\omega) = \mathcal{R}_S(\omega) \mathcal{T}_{S \leftarrow P}(\omega) \mathcal{R}_P(\omega) \mathcal{T}_{P \leftarrow S}(\omega) \quad (4.5)$$

Der Round-Trip–Operator entspricht anschaulich einem Durchgang durch das System. Mit Ausnahme der Temperatur steckt die komplette Information über das physikalische System im Round-Trip–Operator  $\mathcal{M}$ : Der Abstand zwischen Kugel und Platte geht in die Translationsoperatoren  $\mathcal{T}_{S \leftarrow P}$  und  $\mathcal{T}_{P \leftarrow S}$  ein, der Radius und die Reflexionseigenschaften der Kugel in den Reflexionsoperator  $\mathcal{R}_S$ , die Reflexionseigenschaften der Platte stecken im Operator  $\mathcal{R}_P$ .

Der Round-Trip–Operator ist nur bis auf zyklische Vertauschungen der Operatoren eindeutig. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass

$$\det(\mathbb{1} - AB) = \det(\mathbb{1} - BA) \quad (4.6)$$

gilt, so dass der Beitrag zur Freien Energie wie erwartet invariant unter zyklischen Vertauschungen der Operatoren des Round-Trip–Operators ist.

### 4.2.1. Round-Trip–Operator in Multipol-Basis

Im Folgenden soll der Round-Trip–Operator in der Multipol-Basis dargestellt werden:

$$\mathcal{M}_{1,2}(\omega) = \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} \mathcal{R}_P \mathcal{T}_{P \leftarrow S} | \ell_2, m, P_2 \rangle \quad (4.7)$$

Da das betrachtete System zeitunabhängig ist, bleibt die Frequenz während der Streuprozesse unverändert. Wegen der Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse kommutiert der Round-Trip–Operator außerdem



mit dem Drehimpulsoperator  $\hat{J}_z$ . Somit ist der Round-Trip-Operator bezüglich  $\omega$  und  $m$  blockdiagonal.

Da die Basisfunktionen der ebenen Wellen-Basis Eigenfunktionen des Impulsoperators sind, sind die Translationsoperatoren und der Reflexionsoperator an der Platte in dieser Basis diagonal. Die Translation ebener Wellen erzeugt einen Phasenfaktor

$$\mathcal{T}_{P \leftarrow S} |\mathbf{k}, p, \phi\rangle = e^{-i\phi k_z \mathcal{L}} |\mathbf{k}, p, \phi\rangle \quad (4.8)$$

$$\mathcal{T}_{S \leftarrow P} |\mathbf{k}, p, \phi\rangle = e^{+i\phi k_z \mathcal{L}} |\mathbf{k}, p, \phi\rangle \quad (4.9)$$

und die Reflexion an der Platte ist ebenfalls diagonal

$$\mathcal{R}_P |\mathbf{k}, p, +\rangle = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathcal{R}_P |\mathbf{k}, p, -\rangle = r_p(\omega, \mathbf{k}) |\mathbf{k}, p, +\rangle \quad (4.11)$$

mit den Fresnel-Koeffizienten  $r_p$ . Da die Platte als beliebig dick angenommen wird, gelangen keine Wellen aus dem unteren in den oberen Halbraum.

Um diese Eigenschaften ausnutzen zu können, wird der Einheitsoperator in ebener Wellen-Basis in den Ausdruck (4.7) eingefügt:

$$\mathcal{M}_{1;2}(\omega) = \sum_{p,\phi} \int d^2\mathbf{k} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} \mathcal{R}_P \mathcal{T}_{P \leftarrow S} | \mathbf{k}, p, \phi \rangle \langle \mathbf{k}, p, \phi | \ell_2, m, P_2 \rangle \quad (4.12)$$

Damit lässt sich die Translation von der Kugel zur Platte mit (4.8) auswerten:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1;2}(\omega) &= \sum_{p,\phi} \int d^2\mathbf{k} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} \mathcal{R}_P \mathcal{T}_{P \leftarrow S} | \mathbf{k}, p, \phi \rangle \langle \mathbf{k}, p, \phi | \ell_2, m, P_2 \rangle \\ &= \sum_{p,\phi} \int d^2\mathbf{k} e^{-\phi i k_z \mathcal{L}} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} \mathcal{R}_P | \mathbf{k}, p, \phi \rangle \langle \mathbf{k}, p, \phi | \ell_2, m, P_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da nur Wellen aus dem oberen Halbraum reflektiert werden, also Wellen, die sich in  $-z$ -Richtung ausbreiten, liefert die Summation über  $\phi$  nur für  $\phi = -1$  einen Beitrag. Wertet man außerdem noch den Translationsoperator von Platte zu Kugel aus, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1;2}(\omega) &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} e^{i k_z \mathcal{L}} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} \mathcal{R}_P | \mathbf{k}, p, - \rangle \langle \mathbf{k}, p, - | \ell_2, m, P_2 \rangle \\ &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} r_p(\omega, \mathbf{k}) e^{i k_z \mathcal{L}} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S \mathcal{T}_{S \leftarrow P} | \mathbf{k}, p, + \rangle \langle \mathbf{k}, p, - | \ell_2, m, P_2 \rangle \\ &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} r_p(\omega, \mathbf{k}) e^{2i k_z \mathcal{L}} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S | \mathbf{k}, p, + \rangle \langle \mathbf{k}, p, - | \ell_2, m, P_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch Einfügen des Einheitsoperators in der Multipol-Basis lässt sich das Matricelement für die

Streuung an der Kugel zu

$$\begin{aligned}\langle \ell, m, P | \mathcal{R}_S | \mathbf{k}, +, p \rangle &= \sum_{\ell'=1}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \sum_{P'=E,M} \langle \ell, m, P | \mathcal{R}_S | \ell', m', P' \rangle \langle \ell', m', P' | \mathbf{k}, +, p \rangle \\ &= \langle \ell, m, P | \mathcal{R}_S | \ell, m, P \rangle \langle \ell, m, P | \mathbf{k}, +, p \rangle\end{aligned}\quad (4.15)$$

vereinfachen. Der Reflexionsoperator  $\mathcal{R}_S$  ist diagonal in der Multipol-Basis [32] mit den Mie-Koeffizienten  $a_\ell$  und  $b_\ell$  als Matrixelemente:

$$\langle \ell, m, E | \mathcal{R}_S | \ell, m, E \rangle = -2a_\ell(\omega) \quad (4.16)$$

$$\langle \ell, m, M | \mathcal{R}_S | \ell, m, M \rangle = -2b_\ell(\omega) \quad (4.17)$$

Eine noch unbefriedigende Diskussion über den Faktor  $-2$  in den oberen Matrixelementen findet sich in Anhang C.

Letztlich erhält man also für den Round-Trip–Operator in der Multipol-Basis

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,2}(\omega) &= \sum_{p=\text{TE, TM}} \int d^2\mathbf{k} r_p(\omega, \mathbf{k}) e^{2ik_z \mathcal{L}} \langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S | \ell_1, m, P_1 \rangle \\ &\quad \times \langle \ell_1, m, P_1 | \mathbf{k}, p, + \rangle \langle \mathbf{k}, p, - | \ell_2, m, P_2 \rangle,\end{aligned}\quad (4.18)$$

den wir in Form der Blockmatrix

$$\mathcal{M}^{(m)}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{(m)}(E, E) & \mathcal{M}^{(m)}(E, M) \\ \mathcal{M}^{(m)}(M, E) & \mathcal{M}^{(m)}(M, M) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

schreiben. Die Formel für die Freie Energie vereinfacht sich zu

$$\mathcal{F} = k_B T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \log \det [\mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(\omega_n)]. \quad (4.20)$$

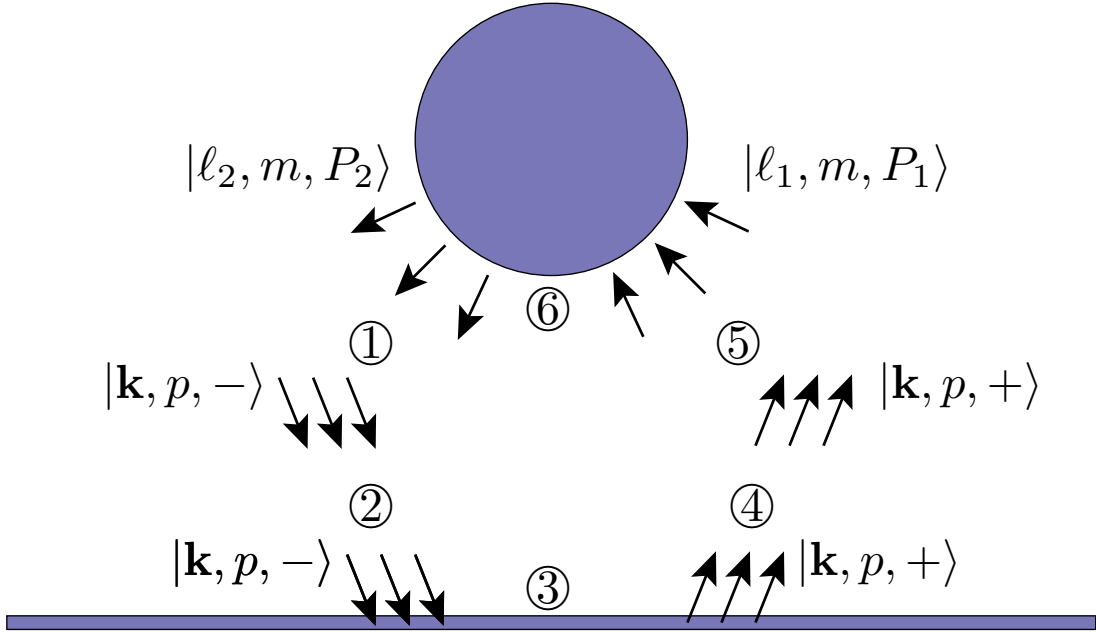
In den nächsten Abschnitten leiten wir für den Round-Trip–Operator explizite Ausdrücke her.

#### 4.2.2. Physikalische Interpretation

Der Ausdruck (4.18) besitzt von rechts nach links gelesen eine einfache physikalische Interpretation, die in Abbildung 4.2 veranschaulicht ist:

$$\textcircled{1} \langle \mathbf{k}, p, - | \ell_2, m, P_2 \rangle$$

Die Multipol-Welle  $|\ell_2, m, P_2\rangle$  wird in ebene Wellen  $|\mathbf{k}, p, -\rangle$  zerlegt, die sich in  $-z$ -Richtung ausbreiten.



**Abbildung 4.2.:** Darstellung der Faktoren des Round-Trip-Operators. Für die Translation und die Reflexion an der Platte werden ebene Wellen verwendet, für die Reflexion an der Kugel Multipol-Wellen. (nach [6])

②  $e^{ik_z \mathcal{L}}$

Die ebenen Wellen  $|\mathbf{k}, -, p\rangle$  werden um die Distanz  $\mathcal{L}$  in  $-z$ -Richtung von der Kugel zur Platte verschoben.

③  $r_p(\omega, \mathbf{k})$

Die ebenen Wellen  $|\mathbf{k}, p, -\rangle$  werden an der Platte reflektiert. Die Reflexion erhält den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  in der  $xy$ -Ebene und die Polarisation  $p$ , kehrt aber die Propagationsrichtung um. Der Reflexionskoeffizient ist durch den Fresnel-Koeffizient  $r_p$  gegeben.

④  $e^{ik_z \mathcal{L}}$

Die ebenen Wellen  $|\mathbf{k}, +, p\rangle$  werden um die Distanz  $\mathcal{L}$  in  $+z$ -Richtung von der Platte zur Kugel verschoben.

⑤  $\langle \ell_1, m, P_1 | \mathbf{k}, p, +\rangle$

Die ebenen Wellen  $|\mathbf{k}, +, p\rangle$  werden in Multipol-Wellen  $|\ell_1, m, P_1\rangle$  zerlegt.

⑥  $\langle \ell_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S | \ell_1, m, P_1\rangle$

Die Multipol-Wellen werden an der Kugel reflektiert; Polarisation, Gesamtdrehimpuls und  $z$ -Komponente des Drehimpulses bleiben dabei erhalten.

### 4.2.3. Matricelemente

Zunächst ist es zweckmäßig die Kugelflächenfunktionen in den Matricelementen für den Basiswechsel durch assoziierte Legendrepolynome zu ersetzen:

$$Y_{\ell m}(\theta^\pm, \varphi) = N_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta^\pm) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = N_{\ell m} P_\ell^m\left(\pm \frac{ck_z}{\omega}\right) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.21)$$

$$\partial_\theta Y_{\ell m}(\theta^\pm, \varphi) = N_{\ell m} P_\ell^{m'}(\cos \theta^\pm)(-\sin \theta^\pm) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{ck}{\omega} N_{\ell m} P_\ell^{m'}\left(\pm \frac{ck_z}{\omega}\right) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.22)$$

Die assoziierten Legendrepolynome, die verwendete Phasenkonvention und der Normierungsfaktor  $N_{\ell m}$  werden in Anhang B.2 vorgestellt.

Nach Übergang in Polarkoordinaten lassen sich die Matricelemente (4.18) ausrechnen. Die Matrixelemente sind unabhängig von  $\varphi$ , so dass die Integration leicht ausgeführt werden kann. Man erhält für die Matricelemente

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1}(\omega) \left[ A_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\omega) + B_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\omega) \right] \quad (4.23)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell_1}(\omega) \left[ A_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\omega) + B_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\omega) \right] \quad (4.24)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, M)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1}(\omega) \left[ C_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\omega) + D_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\omega) \right] \quad (4.25)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, E)_{\ell_1 \ell_2} = -\Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell_1}(\omega) \left[ C_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\omega) + D_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\omega) \right] \quad (4.26)$$

mit dem Vorfaktor

$$\Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} = \frac{-2 N_{\ell_1 m} N_{\ell_2 m}}{\sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1) \ell_2(\ell_2 + 1)}} = -\sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(\ell_1 - m)!(\ell_2 - m)!}{(\ell_1 + m)!(\ell_2 + m)!\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)}}. \quad (4.27)$$

und den Integralen

$$A_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\omega) = \int_0^\infty dk \frac{m^2}{ck} \left| \frac{\omega}{k_z} \right| r_p(\omega, k) e^{2ik_z \mathcal{L}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{ck_z}{\omega}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{ck_z}{\omega}\right) \quad (4.28)$$

$$B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\omega) = \int_0^\infty dk \frac{c^3 k^3}{\omega^4} \left| \frac{\omega}{k_z} \right| r_p(\omega, k) e^{2ik_z \mathcal{L}} P_{\ell_1}^{m'}\left(\frac{ck_z}{\omega}\right) P_{\ell_2}^{m'}\left(-\frac{k_z}{\omega}\right) \quad (4.29)$$

$$C_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\omega) = \int_0^\infty dk \frac{imck}{\omega^2} \left| \frac{\omega}{k_z} \right| r_p(\omega, k) e^{2ik_z \mathcal{L}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{ck_z}{\omega}\right) P_{\ell_2}^{m'}\left(-\frac{ck_z}{\omega}\right) \quad (4.30)$$

$$D_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\omega) = \int_0^\infty dk \frac{imck}{\omega^2} \left| \frac{\omega}{k_z} \right| r_p(\omega, k) e^{2ik_z \mathcal{L}} P_{\ell_1}^{m'}\left(\frac{ck_z}{\omega}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{ck_z}{\omega}\right). \quad (4.31)$$

An dieser Stelle zeigt sich auch formal, dass der Round-Trip–Operator diagonal bezüglich  $m$  ist. Berechnet man den Round-Trip–Operator allgemein in Abhängigkeit von  $m_1$  und  $m_2$ , geht also zunächst davon aus, dass der Operator  $\mathcal{D}$  nicht diagonal bezüglich  $m$  ist, findet man, dass die Matricelemente (4.18) proportional zu  $e^{i(m_2 - m_1)\varphi}$  sind. Die Integration über  $\varphi$  liefert dann nur für  $m_1 = m_2$  einen Beitrag. Mathematisch ist der Round-Trip–Operator also wegen der Orthogonalität der ebenen Wellen diagonal bezüglich  $m$ .

#### 4.2.4. Wick-Rotation

Die Integrale in den Gleichungen (4.28)–(4.31) oszillieren und sind numerisch schwer zu berechnen. Da die Integranden in der oberen komplexen Halbebene analytisch sind [17], kann die Integration nach dem Satz von Cauchy entlang der Achse der imaginären Frequenzen  $\omega = i\xi$  mit  $\xi \in \mathbb{R}$  erfolgen. Da für den longitudinalen Wellenvektor

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = -\frac{\xi^2}{c^2} - k^2 \quad (4.32)$$

gilt, wird  $k_z$  ebenfalls imaginär. Daher definieren wir

$$k_z = i\kappa, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + k^2}. \quad (4.33)$$

Die Wick-Rotation bewirkt die Ersetzungen  $\omega \rightarrow i\xi$  und  $k_z \rightarrow i\kappa$  in den Integranden. Nach der Wick-Rotation erhält man

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1}(i\xi) \left[ A_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\xi) + B_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\xi) \right] \quad (4.34)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell_1}(i\xi) \left[ A_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\xi) + B_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\xi) \right] \quad (4.35)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, M)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1}(i\xi) \left[ C_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\xi) + D_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\xi) \right] \quad (4.36)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, E)_{\ell_1 \ell_2} = -\Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell_1}(i\xi) \left[ C_{\ell_1 \ell_2, \text{TM}}^{(m)}(\xi) + D_{\ell_1 \ell_2, \text{TE}}^{(m)}(\xi) \right] \quad (4.37)$$

für die Matricelemente des Round-Trip-Operators mit den Integralen

$$A_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\xi) = \frac{m^2 \xi}{c} \int_0^\infty dk \frac{1}{kk} r_p(i\xi, k) e^{-2\kappa \mathcal{L}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right) \quad (4.38)$$

$$B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\xi) = \frac{c^3}{\xi^3} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{\kappa} r_p(i\xi, k) e^{-2\kappa \mathcal{L}} P_{\ell_1}^{m'}\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^{m'}\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right) \quad (4.39)$$

$$C_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\xi) = -\frac{imc}{\xi} \int_0^\infty dk \frac{k}{\kappa} r_p(i\xi, k) e^{-2\kappa \mathcal{L}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^{m'}\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right) \quad (4.40)$$

$$D_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(\xi) = -\frac{imc}{\xi} \int_0^\infty dk \frac{k}{\kappa} r_p(i\xi, k) e^{-2\kappa \mathcal{L}} P_{\ell_1}^{m'}\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right). \quad (4.41)$$

Die abfallende Exponentialfunktion sorgt jetzt für eine schnelle numerische Konvergenz und für das Argument der assoziierten Legendrepolynome gilt nun  $\frac{\kappa c}{\xi} \geq 1$ . Da die Mie-Koeffizienten nicht von  $k$  abhängen, können sie vor das Integral gezogen werden.

Die abgeleiteten Matricelemente sind äquivalent zu denen aus [6, 7], wie anhand eines Beispiels in E.2 gezeigt wird. Insbesondere kommen die hier dargestellten Matricelemente ohne Wigner-D-Symbole aus.

#### 4.2.5. Symmetrien

Der in Gleichung (4.27) definierte Normierungsfaktor ist symmetrisch bezüglich Vertauschungen von  $\ell_1$  und  $\ell_2$

$$\Lambda_{\ell_2 \ell_1}^{(m)} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}. \quad (4.42)$$

Mit dieser Symmetrie und der Parität der zugeordneten Legendrepolynome (B.9) lässt sich zeigen:

$$A_{\ell_2 \ell_1, p}^{(m)} = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} A_{\ell_1 \ell_2, p}^{(m)} \quad (4.43)$$

$$B_{\ell_2 \ell_1, p}^{(m)} = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} B_{\ell_1 \ell_2, p}^{(m)} \quad (4.44)$$

$$D_{\ell_1 \ell_2, p}^{(m)} = (-1)^{\ell_1 + \ell_2 + 1} C_{\ell_2 \ell_1, p}^{(m)} \quad (4.45)$$

Unter Ausnutzung dieser Relationen müssen für eine Blockmatrix  $\mathcal{M}^{(m)}(P_1, P_2)$  der Dimension  $N$  nur  $N^2 + N$  anstatt  $2N^2$  Integrale berechnet werden. Für die Reflexionskoeffizienten perfekter Spiegel an der Platte gilt außerdem  $r_{\text{TM}} = -r_{\text{TE}} = 1$ , wie später gezeigt wird. In diesem Fall unterscheiden sich die Integrale für unterschiedliche Polarisation gerade durch ihr Vorzeichen

$$X_{\ell_1, \ell_2, \text{TE}} = -X_{\ell_1, \ell_2, \text{TM}}, \quad (4.46)$$

wobei  $X = A, B, C, D$ . Für perfekte Spiegel müssen also nur  $(N^2 + N)/2$  Integrale berechnet werden.

#### 4.2.6. Negative Werte von $m$

Für negative Werte von  $m$  gilt nach Gleichung (B.3)

$$\Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)} = \frac{(\ell_1 + m)! (\ell_2 + m)!}{(\ell_1 - m)! (\ell_2 - m)!} \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}, \quad (4.47)$$

und mit (B.7) folgt für die Integrale (4.38)–(4.41) mit  $X = A, B, C, D$

$$X_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)} = \frac{(\ell_1 - m)! (\ell_2 - m)!}{(\ell_1 + m)! (\ell_2 + m)!} X_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}. \quad (4.48)$$

Für negative Werte von  $m$  kürzen sich die Vorfaktoren aus den Gleichungen (4.47) und (4.48), so dass man

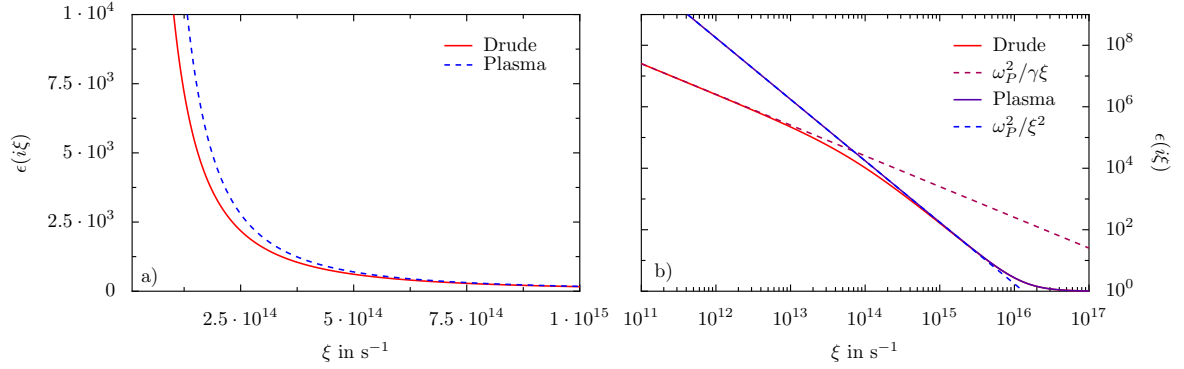
$$\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)}(E, E) = \mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(E, E) \quad (4.49)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)}(M, M) = \mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(M, M) \quad (4.50)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)}(E, M) = -\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(E, M) \quad (4.51)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(-m)}(M, E) = -\mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}(M, E) \quad (4.52)$$

für die Blockmatrizen der Round-Trip–Matrix erhält.



**Abbildung 4.3.:** Drude- und Plasma-Modell am Beispiel von Silber mit  $\omega_P = 1.32 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$  und  $\gamma = 6.90 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . [19] Die dielektrischen Funktionen für Drude- und Plasma-Modell sind in a) mit linearer Skala etwa im sichtbaren Bereich und in b) zusammen mit den Näherungen in logarithmischer Skala aufgetragen.

Somit bleiben die Diagonalblöcke von  $\mathcal{D}^{(m)}$  invariant für  $m \rightarrow -m$ , während die Nebendiagonalblöcke ihr Vorzeichen ändern. Wie in Gleichung (E.3) gezeigt, bleibt dabei der Wert der Determinante unverändert, so dass die Summation in der Formel für die Freie Energie in Gleichung (4.20) nur über nichtnegative Werte von  $m$  durchgeführt werden kann, wobei alle Terme außer für  $m = 0$  mit einem Faktor 2 gewichtet werden müssen:

$$\mathcal{F} = 2k_B T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \log \det \left[ \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(\xi_n) \right] \quad (4.53)$$

### 4.3. Reflexionskoeffizienten

In diesem Abschnitt werden die Fresnel-Koeffizienten  $r_p$  für die Reflexion an der Platte und die Mie-Koeffizienten  $a_\ell$ ,  $b_\ell$  für die Reflexion an der Kugel eingeführt. Die Fresnel- und Mie-Koeffizienten hängen von der dielektrischen Funktion des Metalls ab. Für die dielektrische Funktion werden das Drude- und das Plasma-Modell, sowie das Modell perfekter Spiegel vorgestellt.

#### 4.3.1. Dielektrische Leitfähigkeit für Metalle

Das Drude-Modell ist ein einfaches Modell für die Beschreibung des optischen Verhaltens dissipativer Metalle. Für das Drude-Modell lautet die dielektrische Funktion [20]

$$\epsilon^{\text{Drude}}(i\xi) = 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi(\xi + \gamma)} \quad (4.54)$$

für imaginäre Frequenzen  $\omega = i\xi$  mit der Plasma-Frequenz  $\omega_P$  und der Relaxations-Frequenz  $\gamma$ . Durch den Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  erhält man aus dem Drude-Modell die dielektrische Funktion

$$\epsilon^{\text{Plasma}}(i\xi) = 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi^2} \quad (4.55)$$

des dissipationsfreien Plasma-Modells. Mit dem weiteren Grenzwert  $\omega_P \rightarrow \infty$  folgt daraus das Modell für perfekte Spiegel, das einer dielektrischen Funktion  $\epsilon^{\text{perf}}(i\xi) = \infty$  für beliebige Frequenzen entspricht. Bei niedrigen Frequenzen lassen sich die dielektrischen Funktionen für Drude- und Plasma-Modell durch

$$\epsilon^{\text{Drude}}(i\xi) \simeq \frac{\omega_P^2}{\gamma\xi}, \quad \epsilon^{\text{Plasma}}(i\xi) \simeq \frac{\omega_P^2}{\xi^2} \quad (4.56)$$

nähern und divergieren für  $\xi \rightarrow 0$ . Für große Frequenzen nähern sich die dielektrischen Funktionen von Drude- und Plasma-Modell asymptotisch der 1 an. Metalle werden im Drude- und Plasma-Modell für hochfrequente Strahlung transparent. Abbildung 4.3 zeigt einen Vergleich der dielektrischen Funktionen von Drude- und Plasma-Modell, sowie deren Verhalten bei niedrigen Frequenzen für Silber.

#### 4.3.2. Fresnel-Koeffizienten

Die Fresnel-Koeffizienten für die Reflexion einer ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche lauten [20]

$$r_{\text{TE}}(i\xi, k) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad r_{\text{TM}}(i\xi, k) = \frac{\epsilon(i\xi) - \beta}{\epsilon(i\xi) + \beta} \quad (4.57)$$

mit

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\epsilon(i\xi) - 1}{\cos^2 \theta^\pm}} = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2 k^2} [\epsilon(i\xi) - 1]}, \quad (4.58)$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen (3.6) ausgenutzt wurde. Mit dem Grenzwert  $\epsilon \rightarrow \infty$  vereinfachen sich die Reflexionskoeffizienten zu

$$r_{\text{TM}}^{\text{perf}} = -r_{\text{TE}}^{\text{perf}} = 1 \quad (4.59)$$

für perfekte Spiegel.

Da später das Verhalten der Fresnel-Koeffizienten für  $\xi \rightarrow 0$  benötigt wird, soll dieser Fall hier untersucht werden. Für  $\xi \rightarrow 0$  vereinfacht sich im Plasma-Modell die Wurzel (4.58) zu

$$\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{c^2 k^2} [\epsilon(i\xi) - 1]} = \sqrt{1 + \frac{\omega_P^2}{c^2 k^2}} \quad (4.60)$$



und die Koeffizienten nehmen die Gestalt

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TE}}^{\text{Plasma}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 \kappa^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 \kappa^2}}} \stackrel{\frac{\omega_p \mathcal{L}}{c} \gg 1}{=} -1 \quad (4.61)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TM}}^{\text{Plasma}} = 1 \quad (4.62)$$

an. Durch die Exponentialfunktion  $e^{-2\kappa \mathcal{L}}$  in den Integranden (4.38)–(4.41) trägt nur der Bereich  $0 \leq \kappa \lesssim 1/\mathcal{L}$  zum Wert des Integrals bei. Gilt in diesem Bereich  $\omega_p/c\kappa \gg 1$ , also  $\omega_p \mathcal{L}/c \gg 1$ , vereinfacht sich der Reflexionskoeffizient in Gleichung (4.61) für die TE-Mode weiter zu  $r_{\text{TE}} = -1$ .

Für das Drude-Modell vereinfachen sich die Reflexionskoeffizienten für  $\xi \rightarrow 0$  zu

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TE}}^{\text{Drude}} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TM}}^{\text{Drude}} = 1 \quad (4.63)$$

und sind ohne weitere Näherungen unabhängig von  $\kappa$  und  $\gamma$ . Insbesondere vertauschen die Grenzwerte  $\xi \rightarrow 0$  und  $\gamma \rightarrow 0$  nicht für die TE-Mode:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\gamma \rightarrow 0} r_{\text{TE}}^{\text{Drude}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TE}}^{\text{Plasma}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 \kappa^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 \kappa^2}}} \quad (4.64)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} r_{\text{TE}}^{\text{Drude}} = 0 \quad (4.65)$$

Beim Casimir-Effekt gibt es keinen kontinuierlichen Übergang zwischen Drude- und Plasma-Modell. Die experimentellen Daten bewegen sich gegenwärtig in einem Bereich, wo sich Drude- und Plasma-Modell aber kaum voneinander unterscheiden. [7]

### 4.3.3. Mie-Koeffizienten

Die Mie-Koeffizienten für komplexe Frequenzen lauten [4, 6, 7]

$$a_\ell(i\tilde{\xi}) = \frac{\pi}{2} \frac{n^2 s_\ell^{(a)} - s_\ell^{(b)}}{n^2 s_\ell^{(c)} - s_\ell^{(d)}}, \quad b_\ell(i\tilde{\xi}) = \frac{\pi}{2} \frac{s_\ell^{(a)} - s_\ell^{(b)}}{s_\ell^{(c)} - s_\ell^{(d)}} \quad (4.66)$$

mit den Ausdrücken

$$s_\ell^{(a)} = I_{\ell+1/2}(n\tilde{\xi}) \left[ I_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) - \tilde{\xi} I_{\ell-1/2}(\tilde{\xi}) \right] \quad (4.67)$$

$$s_\ell^{(b)} = I_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) \left[ I_{\ell+1/2}(n\tilde{\xi}) - n\tilde{\xi} I_{\ell-1/2}(n\tilde{\xi}) \right] \quad (4.68)$$

$$s_\ell^{(c)} = I_{\ell+1/2}(n\tilde{\xi}) \left[ K_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) + \tilde{\xi} K_{\ell-1/2}(\tilde{\xi}) \right] \quad (4.69)$$

$$s_\ell^{(d)} = K_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) \left[ I_{\ell+1/2}(n\tilde{\xi}) - n\tilde{\xi} I_{\ell-1/2}(n\tilde{\xi}) \right] \quad (4.70)$$

und dem Brechungsindex der Kugel  $n = \sqrt{\epsilon}$ , sowie  $\tilde{\xi} = \xi R/c$ . Die Eigenschaften der modifizierten Bessel-Funktionen  $I_\nu(x)$  und  $K_\nu(x)$  werden in Anhang B.3 kurz dargestellt. Insbesondere sind die Mie-Koeffizienten unabhängig von  $\mathbf{k}$ , weshalb die Mie-Koeffizienten in den Gleichungen (4.34)–(4.37) vor das Integral gezogen werden konnten.

Für perfekte Spiegel lassen sich die Mie-Koeffizienten vereinfachen, indem man den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow \infty$  ausführt:

$$a_\ell^{\text{perf}}(i\xi) = \frac{\pi}{2}(-1)^{\ell+1} \frac{\ell I_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) - \tilde{\xi} I_{\ell-1/2}(\tilde{\xi})}{\ell K_{\ell+1/2}(\tilde{\xi}) + \tilde{\xi} K_{\ell-1/2}(\tilde{\xi})} \quad (4.71)$$

$$b_\ell^{\text{perf}}(i\xi) = \frac{\pi}{2}(-1)^{\ell+1} \frac{I_{\ell+1/2}(\tilde{\xi})}{K_{\ell+1/2}(\tilde{\xi})} \quad (4.72)$$

#### 4.4. Determinante der Streumatrix

Die Produkte aus assoziierten Legendrepolyomen und deren Ableitungen für gleiche Werte von  $m$  und für  $x \geq 1$  sind entweder rein reell oder imaginär. In Anhang B.2 wird gezeigt, dass

$$P_{\ell_1}^m(x) P_{\ell_2}^m(x), P_{\ell_1}^{m'}(x) P_{\ell_2}^{m'}(x) \in \mathbb{R} \quad (4.73)$$

$$P_{\ell_1}^m(x) P_{\ell_2}^{m'}(x) \in i\mathbb{R} \quad (4.74)$$

gilt. Da alle Größen in den Integranden mit Ausnahme der assoziierten Legendrepolyome rein reell sind, sind wegen (4.73) die Integrale  $A_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$  und  $B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$  ebenfalls rein reell. Daraus folgt, dass die Blockmatrizen  $\mathcal{M}^{(m)}(E, E)$  und  $\mathcal{M}^{(m)}(M, M)$  ebenfalls rein reell sind. Analog folgt mit Gleichung (4.74), dass die Integrale  $C_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$  und  $D_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$ , sowie die Blockmatrizen  $\mathcal{M}^{(m)}(E, M)$  und  $\mathcal{M}^{(m)}(M, E)$  rein imaginär sind. Nach Gleichung (E.2) lässt sich die Streumatrix mit rein reellen Einträgen schreiben:

$$\det \mathcal{D}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(E, E) & -\text{Im}[\mathcal{M}^{(m)}(E, M)] \\ \text{Im}[\mathcal{M}^{(m)}(M, E)] & \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(M, M) \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Insbesondere ist damit klar, dass die Determinante der Streumatrix immer rein reell ist.

#### 4.5. Matsubara-Frequenz $n = 0$

Für die erste Matsubara-Frequenz  $\xi = 0$  divergieren zunächst die Integrale (4.38)–(4.41). Es wird sich aber zeigen, dass der Beitrag zur Freien Energie für den Grenzwert  $\xi \rightarrow 0$  endlich ist. Im Folgenden wird angenommen, dass die Fresnel-Koeffizienten  $r_p$  für  $\xi \rightarrow 0$  unabhängig von  $k$  sind. Diese Annahme ist für perfekte Spiegel und Drude-Spiegel, sowie für Plasma-Spiegel im Grenzfall  $\omega_p \mathcal{L}/c \gg 1$  erfüllt. Da für perfekte, Plasma- und Drude-Spiegel die dielektrische Funktion für  $\xi \rightarrow 0$  divergiert, also  $\epsilon \rightarrow \infty$ , reicht es für die folgende Diskussion, die Mie-Koeffizienten für perfekte Spiegel zu betrachten.

Für  $\xi \rightarrow 0$  lassen sich die Mie-Koeffizienten  $a_\ell$  und  $b_\ell$  durch die Näherungen der Bessel-Funktionen (B.22) zu

$$a_\ell^{\text{perf}} \simeq a_{\ell,0}^{\text{perf}} \left( \frac{\xi R}{2c} \right)^{2\ell+1}, \quad b_\ell^{\text{perf}} \simeq b_{\ell,0}^{\text{perf}} \left( \frac{\xi R}{2c} \right)^{2\ell+1} \quad (4.76)$$

vereinfachen, wobei

$$a_{\ell,0}^{\text{perf}} = \frac{\pi}{2} (-1)^\ell \frac{4\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) - 2\ell\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{\ell\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)} \quad (4.77)$$

$$b_{\ell,0}^{\text{perf}} = \frac{\pi}{2} (-1)^{\ell+1} \frac{2}{\Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)} \quad (4.78)$$

Vorfaktoren darstellen, die von  $\ell$  abhängen.

Die Argumente der assoziierten Legendrepolynome in den Integralen (4.38)–(4.41) werden für  $\xi \rightarrow 0$  groß und lassen sich durch (B.15) und (B.16) nähern. Es zeigt sich, dass die Integrale wie

$$A_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \sim \xi^{-\ell_1-\ell_2+1}, \quad B_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \sim \xi^{-\ell_1-\ell_2-1}, \quad C_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \sim D_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \sim \xi^{-\ell_1-\ell_2} \quad (4.79)$$

und die Matricelemente des Round-Trip-Operators wie

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1\ell_2} \sim \mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1\ell_2} \sim \xi^{\ell_1-\ell_2}, \quad (4.80)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, M)_{\ell_1\ell_2} \sim \mathcal{M}^{(m)}(M, E)_{\ell_1\ell_2} \sim \xi^{\ell_1-\ell_2+1} \quad (4.81)$$

skalieren. Die Integrale  $A_{\ell_1\ell_2}^{(m)}$ ,  $C_{\ell_1\ell_2}^{(m)}$  und  $D_{\ell_1\ell_2}^{(m)}$  sind um mindestens eine Potenz von  $\xi$  größer als  $B_{\ell_1\ell_2}^{(m)}$  und können daher vernachlässigt werden. Somit liefern die Nebendiagonalblöcke  $\mathcal{M}^{(m)}(E, M)$  und  $\mathcal{M}^{(m)}(M, E)$  keinen Beitrag. Die Integrale für die Diagonalblöcke lassen sich für  $\xi \rightarrow 0$  analytisch bestimmen:

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1\ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = r_{\text{TM}}^{\xi \rightarrow 0} \Lambda_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \int_0^\infty dk a_{\ell_1}^{\text{perf}} B_{\ell_1\ell_2}^{(m)} = \Xi_{\ell_1\ell_2}^{(m)} r_{\text{TM}}^{\xi \rightarrow 0} a_{\ell_1,0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1+\ell_2+1} \left( \frac{\xi R}{c} \right)^{\ell_1-\ell_2} \quad (4.82)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1\ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = r_{\text{TE}}^{\xi \rightarrow 0} \Lambda_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \int_0^\infty dk b_{\ell_1}^{\text{perf}} B_{\ell_1\ell_2}^{(m)} = \Xi_{\ell_1\ell_2}^{(m)} r_{\text{TE}}^{\xi \rightarrow 0} b_{\ell_1,0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1+\ell_2+1} \left( \frac{\xi R}{c} \right)^{\ell_1-\ell_2} \quad (4.83)$$

mit dem etwas sperrigen Vorfaktor

$$\Xi_{\ell_1\ell_2}^{(m)} = \Lambda_{\ell_1\ell_2}^{(m)} \frac{(-1)^{\ell_2+1} (2\ell_1)! (2\ell_2)! (\ell_1 + \ell_2)!}{4^{2\ell_1+\ell_2+1} (\ell_1 - 1)! (\ell_2 - 1)! (\ell_1 - m)! (\ell_2 - m)!}. \quad (4.84)$$

Die Rechnung wird in Anhang D.1 ausgeführt.

Es zeigt sich also, dass die Matricelemente unterhalb der Diagonalen verschwinden, auf der Diagonalen endlich sind und oberhalb divergieren. Die Determinante besitzt aber trotzdem einen endlichen Wert, wie in Anhang D.2 gezeigt wird.

#### 4. Streuformel in der Geometrie Kugel-Platte

---

Zusammengefasst erhält man für  $\xi \rightarrow 0$  für die Determinante der Streumatrix

$$\det \mathcal{D}^{(m)} = \det \left[ \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(E, E) \right] \det \left[ \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(M, M) \right] \quad (4.85)$$

mit den Matricelementen

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = \Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} r_{\text{TM}}^{\xi \rightarrow 0} a_{\ell_1, 0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1 + \ell_2 + 1} \quad (4.86)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1 \ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = \Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} r_{\text{TE}}^{\xi \rightarrow 0} b_{\ell_1, 0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1 + \ell_2 + 1}. \quad (4.87)$$

Für perfekte Spiegel und Plasma-Spiegel im Grenzfall  $\omega_P \mathcal{L}/c \gg 1$  gilt  $r_{\text{TM}} = -r_{\text{TE}} = 1$  und somit

$$\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = +\Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1, 0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1 + \ell_2 + 1} \quad (4.88)$$

$$\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1 \ell_2}^{\xi \rightarrow 0} = -\Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell_1, 0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1 + \ell_2 + 1}, \quad (4.89)$$

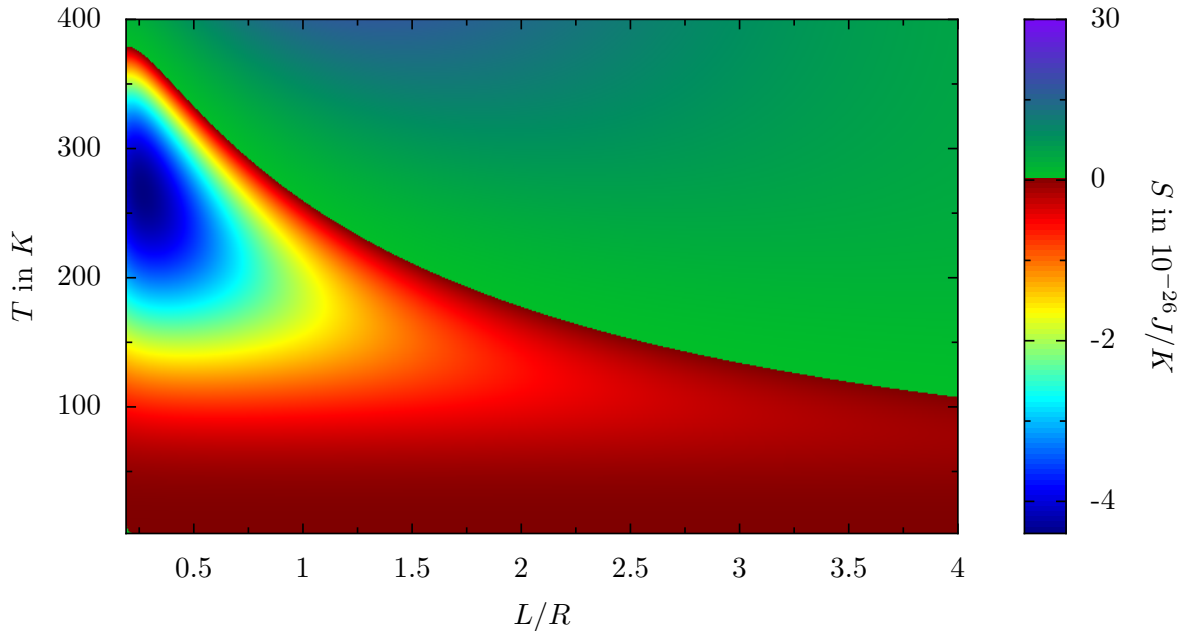
für Drude-Spiegel gilt mit dem Ausdruck für  $\mathcal{M}^{(m)}(E, E)$  aus Gleichung (4.88):

$$\det \mathcal{D}^{(m)} = \det \left( \mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(E, E) \right) \quad (4.90)$$

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Streuformalismus für den Casimir-Effekt auf die Geometrie Kugel–Platte bei endlichen Temperaturen angewendet. Dazu wurde gezeigt, dass die Maxwell-Gleichungen äquivalent zur vektoriellen Helmholtz-Gleichung sind und als Lösungen die ebene Wellen- und die Multipol-Basis vorgestellt. Damit konnten die Matrixelemente des Streuoperators in der Multipol-Basis bestimmt werden. Durch Untersuchung der Symmetrien der Streumatrix ließ sich die Summation auf nichtnegative Werte von  $m$  begrenzen und die Anzahl der Integrale, die für die Streumatrix berechnet werden müssen, verringern. Außerdem wurde gezeigt, dass die Streumatrix mit rein reellen Elementen geschrieben werden kann und daher insbesondere ihre Determinante reell ist. Für die erste Matsubara-Frequenz wurde das Verhalten der Streumatrix und der Beitrag zur Freien Energie genauer untersucht. Für die Matrixelemente der Streumatrix konnte in diesem Fall ein analytischer Ausdruck angegeben werden.

Im Hinblick auf die Master-Arbeit muss das Problem zunächst sinnvoll skaliert und die Numerik für



**Abbildung 5.1.:** Entropie für die Geometrie Kugel–Platte im Bereich  $2K \leq T \leq 400K$  und  $0.19 \leq L/R \leq 4$  für  $R = 1\mu\text{m}$  und perfekte Spiegel. Über weite Bereiche wird die Casimir-Entropie negativ. Aus Gründen der Darstellung wurde für positive und negative Entropien unterschiedliche Farbpaletten und Skalierungen gewählt.

Drude-, Plasma- und perfekte Spiegel implementiert werden. Damit lässt sich dann beispielsweise das Verhalten bei niedrigen Temperaturen oder das Problem negativer Entropien (siehe Abbildung 5.1), sowie das Zusammenspiel zwischen Dissipation, Geometrie und endlicher Leitfähigkeit untersuchen. Außerdem muss die Frage, wieso im Matrixelement  $\langle \ell, m, P | \mathcal{R}_S | \ell, m, P \rangle$  der Faktor 2 auftaucht, noch bis zur Master-Arbeit beantwortet werden.

## A. Normierung

In diesem Abschnitt wird der Normierungsfaktor  $A$  bestimmt, so dass

$$\langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle \stackrel{!}{=} \delta_{pp'} \delta_{\phi\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \quad (\text{A.1})$$

gilt. Durch Einfügen des Einheitsoperators in Ortsbasis erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle &= \int d^3\mathbf{R} \langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{R} \rangle \langle \mathbf{R} | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle \\ &= \int d^3\mathbf{R} A A^* (\hat{\mathbf{e}}_{p'} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi k_z z)} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \phi' k'_z z)} \\ &= |A|^2 \delta_{pp'} \int d^3\mathbf{R} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\phi k_z - \phi' k'_z) \cdot z} \\ &= |A|^2 (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\phi k_z - \phi' k'_z) \\ &= |A|^2 (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} - \frac{\phi'}{\phi} \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

In der letzten Zeile wurde ausgenutzt, dass die Delta-Funktion gerade ist.

Um Gleichung (A.2) auf die Form von Gleichung (A.1) zu bekommen, muss die zweite Delta-Funktion umgeschrieben werden. Dazu wird die Identität

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad (\text{A.3})$$

benutzt, wobei  $x_i$  die Nullstellen von  $f(x)$  bezeichnen. In diesem Fall gilt

$$f\left(\frac{\omega}{c}\right) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} - \frac{\phi'}{\phi} \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2}, \quad (\text{A.4})$$

$$f'\left(\frac{\omega}{c}\right) = \frac{\omega}{c \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}} = \frac{\omega}{c k_z}. \quad (\text{A.5})$$

Da  $\omega$  und  $\omega'$  nichtnegativ sind, hat  $f$  genau eine Nullstelle bei  $\frac{\omega}{c} = \frac{\omega'}{c}$  für  $\phi = \phi'$ . Für  $\phi \neq \phi'$  besitzt

## A. Normierung

---

$f$  keine Nullstelle und das Integral (A.2) verschwindet. Somit lässt sich die Delta-Funktion in

$$\delta\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} - \frac{\phi'}{\phi} \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - k^2}\right) = \delta_{\phi,\phi'} \left|\frac{ck_z}{\omega}\right| \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \quad (\text{A.6})$$

umschreiben.

Mit der umskalierten Delta-Funktion erhält man für die Gleichung (A.2) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', \omega', \phi', p' | \mathbf{k}, \omega, \phi, p \rangle &= |A|^2 (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta_{\phi,\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left|\frac{ck_z}{\omega}\right| \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \\ &= |A|^2 (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta_{\phi,\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left|\frac{ck_z}{\omega}\right| \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \\ &\stackrel{!}{=} \delta_{pp'} \delta_{\phi,\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Durch Vergleich lässt sich nun der Normierungsfaktor  $A$  bis auf einen Phasenfaktor zu

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\left|\frac{\omega}{ck_z}\right|} \quad (\text{A.8})$$

bestimmen.



## B. Spezielle Funktionen

In diesem Kapitel sollen kurz die wichtigsten Eigenschaften verschiedener spezieller Funktionen vorgestellt werden, die für diverse Rechnungen benötigt werden. Die entsprechenden Formeln und Definitionen finden sich u.a. in [1].

### B.1. Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos \theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{B.1})$$

bilden ein vollständiges orthonormales Funktionensystem auf der Kugeloberfläche. Sie hängen von zwei Parametern  $\ell, m$  ab mit  $\ell \geq 0$  und  $-\ell \leq m \leq \ell$ . Dabei entspricht

$$N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}. \quad (\text{B.2})$$

einem Normierungsfaktor und  $P_{\ell}^m$  sind die zugeordneten Legendrepolynome. Der Normierungsfaktor für negative Werte von  $m$  lässt sich durch positive Werte von  $m$  ausdrücken:

$$N_{\ell, -m} = \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} N_{\ell m} \quad (\text{B.3})$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthogonal

$$\int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (\text{B.4})$$

und vollständig

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (\text{B.5})$$

Die ersten Kugelflächenfunktionen bis  $\ell = 3$  sind in Tabelle B.1 aufgelistet.

$Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$m = -3$				$\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{-3i\varphi}$
$m = -2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{-2i\varphi}$
$m = -1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{-i\varphi}$
$m = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
$m = 1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\varphi}$
$m = 2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\varphi}$
$m = 3$				$-\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\varphi}$

**Tabelle B.1.:** Die ersten Kugelflächenfunktionen bis  $\ell = 3$ .

## B.2. Zugeordnete Legendrepolynome

Zugeordnete oder assoziierte Legendrepolynome sind für  $\ell > 0$  und  $-\ell \leq m \leq \ell$  als Ableitungen gewöhnlicher Legendrepolynome definiert

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^{\ell}. \quad (\text{B.6})$$

Im Gegensatz zu assoziierten Legendrepolyomen sind alle gewöhnlichen Legendrepolynome  $P_{\ell}(x)$  tatsächlich auch reine Polynome. Zugeordnete Legendrepolynome für negative Werte von  $m$  sind proportional zu den entsprechenden Funktionen mit positiven  $m$ :

$$P_{\ell}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x) \quad (\text{B.7})$$

Ableitungen nach zugeordneten Legendrepolyomen lassen sich als Linearkombination von zugeordneten Legendrepolyomen schreiben:

$$P_{\ell}^{m'}(x) = \frac{(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(x) - (\ell+1)xP_{\ell}^m(x)}{x^2-1} \quad (\text{B.8})$$

Für die Parität von Legendrepolyomen und deren Ableitungen gilt:

$$P_{\ell}^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_{\ell}^m(x), \quad P_{\ell}^{m'}(-x) = (-1)^{\ell+m+1} P_{\ell}^{m'}(x) \quad (\text{B.9})$$

Für beliebige Argumente  $|x| > 1$  ist der Wert der zugeordneten Legendrepolynome und deren Ableitungen für gerade  $m$  rein reell, für ungerade  $m$  rein imaginär:

$$P_{\ell}^{2m}(x), P_{\ell}^{2m'}(x) \in \mathbb{R}, \quad P_{\ell}^{2m+1}(x), P_{\ell}^{2m+1'}(x) \in i\mathbb{R} \quad (\text{B.10})$$

Daher ist das Produkt aus Legendrepolyomen und deren Ableitungen rein reell oder imaginär:

$$P_{\ell_1}^m(x) P_{\ell_2}^m(x), P_{\ell_1}^{m'}(x) P_{\ell_2}^{m'}(x) \in \mathbb{R} \quad (\text{B.11})$$

$$P_{\ell_1}^m(x) P_{\ell_2}^{m'}(x) \in i\mathbb{R} \quad (\text{B.12})$$

Aus der Definition (B.6) lassen sich für gegebenes  $\ell$  und  $m$  die entsprechenden zugeordneten Legendrepolyome konstruieren:

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} (1-x^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} x^{2\ell-2k} \quad (\text{B.13})$$

Dabei erhält man für die  $\ell + m$ -fache Ableitung:

$$\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} x^{2\ell-2k} = \begin{cases} 0 & \text{für } k > \frac{\ell+m}{2} \\ \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k-m)!} x^{\ell-2k-m} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Insbesondere erhält man damit für  $k = 0$  eine Näherung für große Argumente  $x \gg 1$

$$P_{\ell}^m(x) \simeq \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} (1-x^2)^{m/2} x^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} x^{2\ell} \simeq \frac{(-i)^m (2\ell)!}{2^{\ell} \ell! (\ell-m)!} x^{\ell}, \quad (\text{B.15})$$

und entsprechend für die Ableitungen

$$P_{\ell}^{m'}(x) \simeq \frac{(-i)^m (2\ell)!}{2^{\ell} (\ell-1)! (\ell-m)!} x^{\ell-1}. \quad (\text{B.16})$$

Ableitungen gewöhnlicher Legendrepolyome lassen sich über Gegenbauer-Polynome darstellen

$$\frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x) = \frac{(2m)!}{2^m m!} C_{\ell-m}^{(m+\frac{1}{2})}(x) \quad (\text{B.17})$$

Da die Gegenbauer-Polynome für  $x = 1$  den Wert

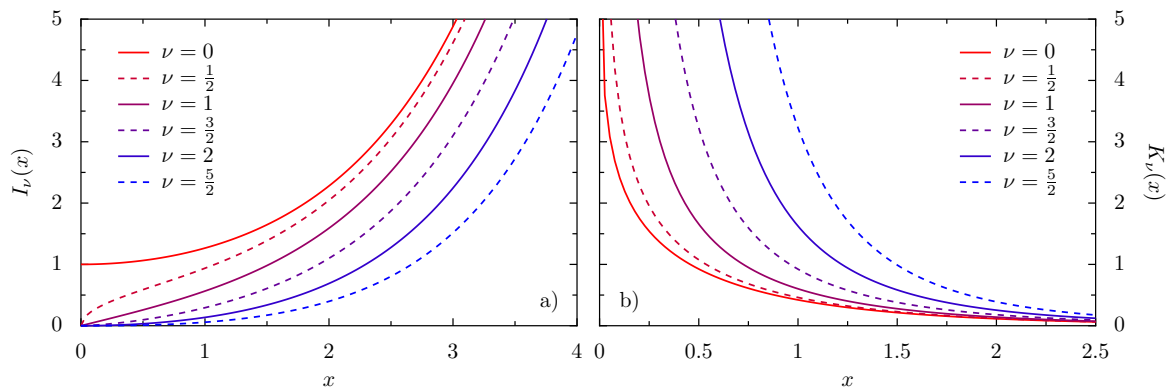
$$C_n^{\alpha}(1) = \binom{n+2\alpha-1}{n} \quad (\text{B.18})$$

besitzen, gilt:

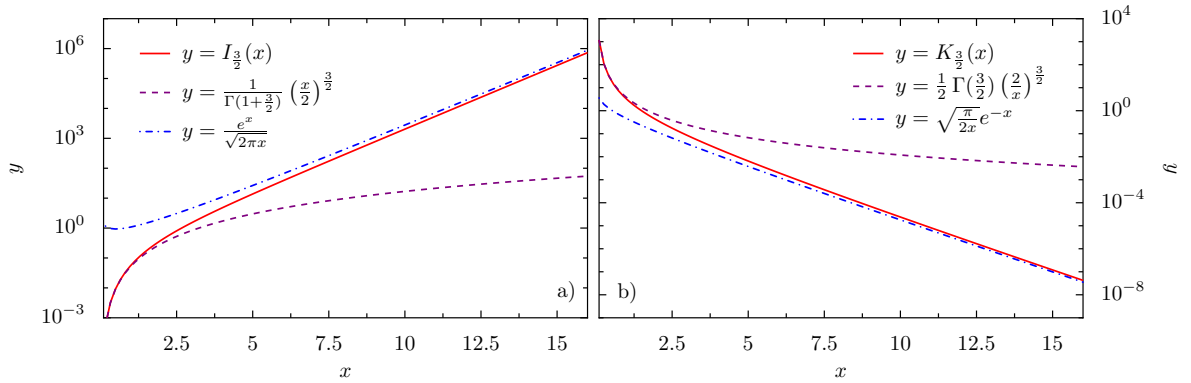
$$\frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(1) = \frac{(\ell+m)!}{2^m m! (\ell-m)!} \quad (\text{B.19})$$

$P_\ell^m(x)$	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$m = -3$				$\frac{1}{48} \sqrt{1-x^2}(1-x^2)$
$m = -2$			$\frac{1}{8}(1-x^2)$	$\frac{1}{8}x(1-x^2)$
$m = -1$		$\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}x \sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{8} \sqrt{1-x^2}(5x^2-1)$
$m = 0$	1	$x$	$-\frac{1}{2}(1-3x^2)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
$m = 1$		$-\sqrt{1-x^2}$	$-3x \sqrt{1-x^2}$	$-\frac{3}{2} \sqrt{1-x^2}(5x^2-1)$
$m = 2$			$3(1-x^2)$	$15x(1-x^2)$
$m = 3$				$-15 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)$

**Tabelle B.2.:** Die ersten assoziierten Legendre-Polynome bis  $\ell = 3$ .



**Abbildung B.1.:** Die ersten modifizierten Bessel-Funktionen erster Gattung a) und zweiter Gattung b) für niedrige halbzahlige Werte.



**Abbildung B.2.:** Vergleich zwischen Funktion und Näherungen für große und kleine Werte von  $x$  für  $I_{3/2}(x)$  (links) und  $K_{3/2}(x)$  (rechts).

### B.3. Modifizierte Bessel-Funktionen

Die modifizierte Bessel-Funktion erster Gattung  $I_\nu(x)$  ist definiert über die Bessel-Funktion erster Gattung  $J_\nu(x)$  für imaginäre Argumente:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (\text{B.20})$$

Die modifizierte Bessel-Funktion zweiter Gattung  $K_\nu(x)$  oder MacDonald-Funktion ist definiert über:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{B.21})$$

Für kleine Werte von  $x$  lassen sich die modifizierten Bessel-Funktionen durch

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad K_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}) \quad (\text{B.22})$$

und für große Argumente  $x \gg 1$  durch

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (\text{B.23})$$

nähern.

## B.4. Wigner-D-Symbole

Mit den Gleichungen (67) und (68) aus [30] lässt sich

$$\begin{aligned}
 d_{m,1}^\ell(\theta) + d_{m,-1}^\ell(\theta) &= (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}} 2\pi_{\ell m}(\theta) \\
 &= (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}} \frac{2m \bar{P}_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \\
 &= \frac{-\sqrt{8} N_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}} \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta}
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

und

$$\begin{aligned}
 d_{m,1}^\ell(\theta) - d_{m,-1}^\ell(\theta) &= (-1)^{m+1} \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}} 2\bar{\pi}_{\ell m}(\theta) \\
 &= -2 \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{\ell(\ell+1)(\ell+m)!}} \frac{dP_\ell^m(\cos \theta)}{d\theta} \\
 &= \frac{\sqrt{8} N_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}} P_\ell^{m'}(\cos \theta) \sin \theta
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

zeigen. Definitionen und Eigenschaften der Wigner-D-Symbole finden sich in [3, 33].

## C. Streuung an einer Kugel und Faktor $-2$

Bei den Matrixelementen

$$\langle \ell, m, E | \mathcal{R}_S | \ell, m, E \rangle = -2a_\ell(\omega) \quad (\text{C.1})$$

$$\langle \ell, m, M | \mathcal{R}_S | \ell, m, M \rangle = -2b_\ell(\omega) \quad (\text{C.2})$$

fällt ein Faktor  $-2$  auf, obwohl man zunächst nur die Mie-Koeffizienten  $a_\ell$  und  $b_\ell$  erwarten würde. Hier soll die Frage nach der Herkunft des Faktors  $-2$  soweit möglich diskutiert werden. Die Streuung ebener Wellen an einer Kugel wird in [20, 21] behandelt, wir beziehen uns aber in der folgenden Diskussion ausschließlich auf [4].

Die Absorption und Streuung elektromagnetischer Wellen an einer Kugel ist ein analytisch lösbares Problem und wird in der Literatur häufig als Mie-Streuung bezeichnet. Üblicherweise betrachtet man eine in  $x$ -Richtung polarisierte ebene Welle mit Ausbreitung in  $z$ -Richtung. Durch eine Drehung des Koordinatensystems mittels Wigner-D-Matrizen [3, 33] lassen sich beliebige Polarisierungen und Einfallsrichtungen auf diesen Fall zurückführen.

Die einfallende Welle lässt sich nach Vektorkugelflächenfunktionen (VSH) entwickeln:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \left( \mathbf{M}_{o,\ell 1}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e,\ell 1}^{(1)} \right), \quad E_\ell = i^\ell E_0 \frac{2\ell + 1}{\ell(\ell + 1)} \quad (\text{C.3})$$

Der Faktor  $E_0$  gibt die Amplitude der einfallenden Welle an,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  entsprechen den VSH, die sich aber von den in Kapitel 3.3 eingeführten VSH unterscheiden: Die VSH  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  sind im Ortsraum definiert und besitzen daher einen Radialanteil. Die hochgestellte „1“ soll verdeutlichen, dass der Radialanteil durch sphärische Bessel-Funktionen  $j_\ell$  gegeben ist. Außerdem sind die VSH  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  in gerade (Index e) und ungerade (Index o) Funktionen zerlegt und die Werte für  $m$  daher nichtnegativ. In der Entwicklung (C.3) verschwinden alle Terme für  $m \neq 1$ .

Die Entwicklung der gestreuten Welle ist

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \left( b_\ell \mathbf{M}_{o,\ell 1}^{(3)} - ia_\ell i\mathbf{N}_{e,\ell 1}^{(3)} \right), \quad (\text{C.4})$$

wobei die Hochstellung „3“ nun bedeutet, dass der Radialanteil durch sphärische Hankel-Funktionen erster Art  $h_\ell^{(1)}$  gegeben ist.

Ein Vergleich von (C.3) und (C.4) zeigt, dass das Vorzeichen in den Matrixelementen (C.1) und (C.2) Folge der Definition der Mie-Koeffizienten ist:

$$\mathcal{R}_S \mathbf{N}_{o,\ell 1}^{(1)} = -a_\ell \mathbf{N}_{o,\ell 1}^{(3)} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{R}_S \mathbf{M}_{o,\ell 1}^{(1)} = -b_\ell \mathbf{M}_{o,\ell 1}^{(3)} \quad (\text{C.6})$$

Damit ist aber noch nicht der Faktor 2 erklärt. Die oberen Gleichungen stellen auch keine Eigenwertgleichung dar, da sich die Radialanteile unterscheiden: Die einlaufenden Wellen werden durch sphärische Bessel-Funktionen  $j_\ell$ , die auslaufenden Wellen durch sphärische Hankel-Funktionen erster Art  $h_\ell^{(1)}$  beschrieben. Die Hankel-Funktionen  $h_\ell^{(1)}$  müssen zuerst wieder in sphärische Besselfunktionen  $j_\ell$  umgerechnet werden. Dies soll für einen unterschiedlichen Ursprung möglich sein [5].

Dem Autor ist aber zu diesem Zeitpunkt nicht klar, wie sich der Faktor 2 genau erklären lässt. Der Faktor wurde für diesen Fachpraktikumsbericht in einer Art Ad-hoc-Ansatz eingeführt, um auf die gleichen Ergebnisse wie CANAGUIER-DURAND et al. [6, 7] zu kommen. Die genaue Argumentation wird in der Master-Arbeit nachgeliefert.



## D. Rechnungen für $\xi \rightarrow 0$

### D.1. Integration über $B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)}$ für $\xi \rightarrow 0$

Für  $\xi \rightarrow 0$  lässt sich das Integral

$$a_{\ell_1}^{\text{perf}} \int_0^\infty dk B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1} \int_0^\infty dk e^{-2k\mathcal{L}} \frac{c^3 k^2}{\xi^3} P_{\ell_1}^m \left( \frac{k c}{\xi} \right) P_{\ell_2}^m \left( -\frac{k c}{\xi} \right) \quad (\text{D.1})$$

analytisch bestimmen. In diesem Fall wird das Argument der assoziierten Legendrepolynome (betragsmäßig) groß und die Funktionen lassen sich durch die Näherung (B.16) ausdrücken:

$$a_{\ell_1}^{\text{perf}} \int_0^\infty dk B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} \simeq \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1}^{\text{perf}} \frac{(-1)^{\ell_2+m+1} (-i)^{2m} (2\ell_1)! (2\ell_2)!}{2^{\ell_1+\ell_2} (\ell_1-1)! (\ell_2-1)! (\ell_1-m)! (\ell_2-m)!} \times \left( \frac{c}{\xi} \right)^{\ell_1+\ell_2+1} \int_0^\infty dk e^{-2k\mathcal{L}} k^{\ell_1+\ell_2} \quad (\text{D.2})$$

Das Integral in Gleichung (D.2) ergibt:

$$\int_0^\infty dk e^{-2k\mathcal{L}} k^{\ell_1+\ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)!}{(2\mathcal{L})^{\ell_1+\ell_2+1}} \quad (\text{D.3})$$

Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man

$$a_{\ell_1}^{\text{perf}} \int_0^\infty dk B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} \simeq \Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell,0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1+\ell_2+1} \left( \frac{\xi R}{c} \right)^{\ell_1-\ell_2} \quad (\text{D.4})$$

mit

$$\Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} \frac{(-1)^{\ell_2+1} (2\ell_1)! (2\ell_2)! (\ell_1 + \ell_2)!}{4^{2\ell_1+\ell_2+1} (\ell_1-1)! (\ell_2-1)! (\ell_1-m)! (\ell_2-m)!}. \quad (\text{D.5})$$

Analog erhält man:

$$b_{\ell_1}^{\text{perf}} \int_0^\infty dk B_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} = \Xi_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} b_{\ell,0}^{\text{perf}} \left( \frac{R}{\mathcal{L}} \right)^{\ell_1+\ell_2+1} \left( \frac{\xi R}{c} \right)^{\ell_1-\ell_2} \quad (\text{D.6})$$

## D.2. Determinante von $\mathcal{M}^{(m)}(P, P)$ für $\xi \rightarrow 0$

Für  $n = 0$  verschwindet die Matsubara-Frequenz  $\xi \rightarrow 0$ . Die Matrixelemente  $\mathcal{M}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2}$  und  $\mathcal{M}^{(m)}(M, M)_{\ell_1 \ell_2}$  unterhalb der Diagonalen verschwindern, auf der Diagonalen sind sie endlich und divergieren oberhalb der Diagonalen. Allgemein gilt für das Matrixelement  $\mathcal{M}^{(m)}(P, P)_{l_1 l_2} \sim \lambda^{\ell_1 - \ell_2}$ , wobei hier

$$\lambda = \frac{\xi R}{c} \quad (\text{D.7})$$

ist.

Die Matrix besitzt also folgende Struktur:

$$\mathcal{M}^{(m)}(P, P) = \begin{pmatrix} a_{11} \lambda^0 & a_{12} \lambda^{-1} & \cdots & a_{1n} \lambda^{-n+1} \\ a_{21} \lambda^1 & a_{22} \lambda^0 & \cdots & a_{2n} \lambda^{-n+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} \lambda^{n-2} & a_{n-1,2} \lambda^{n-3} & \cdots & a_{n-1,n} \lambda^{-1} \\ a_{n1} \lambda^{n-1} & a_{n2} \lambda^{n-2} & \cdots & a_{nn} \lambda^0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Um nun zu zeigen, dass die Determinante weder verschwindet noch divergiert für  $\lambda \rightarrow 0$ , wird die erste Zeile der Matrix mit dem Faktor  $\lambda^{n-1}$ , die zweite Zeile mit dem Faktor  $\lambda^{n-2}$ ,  $\dots$ , und die vorletzte Zeile mit dem Faktor  $\lambda^1$  multipliziert. Damit sich der Wert der Determinanten nicht ändert, muss ein entsprechender Faktor  $\lambda^{-1} \lambda^{-2} \dots \lambda^{-n+1}$  multipliziert werden:

$$\det \mathcal{M}^{(m)}(P, P) = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda^{-k} \det \begin{pmatrix} a_{11} \lambda^{n-1} & a_{12} \lambda^{n-2} & \cdots & a_{1n} \lambda^0 \\ a_{21} \lambda^{n-1} & a_{22} \lambda^{n-2} & \cdots & a_{2n} \lambda^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} \lambda^{n-1} & a_{n-1,2} \lambda^{n-2} & \cdots & a_{n-1,n} \lambda^0 \\ a_{n1} \lambda^{n-1} & a_{n2} \lambda^{n-2} & \cdots & a_{nn} \lambda^0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Multipliziert man die erste Spalte mit dem Faktor  $\lambda^{n-1}$ , die zweite Spalte mit dem Faktor,  $\dots$ , und die vorletzte Spalte mit dem Faktor  $\lambda$ , hebt sich der Vorfaktor genau weg und man erhält:

$$\det \mathcal{M}^{(m)}(P, P) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

Die Determinante ist also unabhängig von  $\lambda$  und somit auch unabhängig von  $\xi$ .

## E. Rechnungen und mathematische Umformungen

### E.1. Determinante einer Blockmatrix

Seien  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & \lambda B \\ \frac{1}{\lambda} C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^n} \det \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\lambda^n}{\lambda^n} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Insbesondere gelten die beiden Spezialfälle

$$\det \begin{pmatrix} A & iB \\ iC & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

und

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

### E.2. Äquivalenz der Matricelemente mit CANAGUIER-DURAND et. al.

Die in dieser Arbeit präsentierten Matricelemente (4.34)–(4.37) unterscheiden sich zwar auf den ersten Blick von denen aus [6, 7], die jeweiligen Ausdrücke lassen sich aber ineinander umformen. Dies wird hier an dem Beispiel für das Matricelement  $\mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2}$  gezeigt.

Für  $\mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2}$  gilt nach [6, 7]:

$$\mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} = \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)\pi}{\ell_2(\ell_2 + 1)}} a_{\ell_1}(-im) \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left[ d_{m,1}^{\ell_1}(\theta^+) + d_{m,-1}^{\ell_1}(\theta^+) \right] Y_{\ell_2, m}(\theta^-, 0) r_{\text{TE}} e^{-2\kappa \mathcal{L}} \quad (\text{E.4})$$

Die Summe der Wigner-D-Symbole lässt sich über Gleichung (B.24) durch ein zugeordnetes Legendrepolynom ersetzen. Außerdem lässt sich die Kugelflächenfunktion als zugeordnetes Legendrepoly-

nom umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} &= im^2 a_{\ell_1} \frac{\sqrt{8} N_{\ell_1 m}}{\sqrt{\ell_2(\ell_1 + 1)(2\ell_1 + 1)}} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)\pi}{\ell_2(\ell_2 + 1)}} \\ &\times \int_0^\infty \frac{dk}{\kappa} \frac{P_{\ell_1}^m(\cos \theta^+)}{\sin \theta^+} \frac{N_{\ell_2 m}}{\sqrt{2\pi}} P_{\ell_2}^m(\cos \theta^+) r_{\text{TE}} e^{-2\kappa \mathcal{L}} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Nach der Wick-Rotation gilt analog zu (3.6) für Sinus und Cosinus des Polarwinkels:

$$\sin \theta^\pm = \frac{-ick}{\xi}, \quad \cos \theta^\pm = \pm \frac{c\kappa}{\xi} \quad (\text{E.6})$$

Nach Einsetzen in (E.5), Kürzen und Umsortieren erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} &= im^2 a_{\ell_1} \frac{-2N_{\ell_1 m} N_{\ell_2 m}}{\sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)}} \\ &\times \int_0^\infty \frac{dk}{\kappa} \frac{\xi}{ick} r_{\text{TE}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right) e^{-2\kappa \mathcal{L}}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

was sich weiter zu

$$\mathcal{M}_{\text{TE}}^{(m)}(E, E)_{\ell_1 \ell_2} = \Lambda_{\ell_1 \ell_2}^{(m)} a_{\ell_1} \frac{m^2 \xi}{c} \int_0^\infty dk \frac{1}{\kappa k} r_{\text{TE}} P_{\ell_1}^m\left(\frac{\kappa c}{\xi}\right) P_{\ell_2}^m\left(-\frac{\kappa c}{\xi}\right) e^{-2\kappa \mathcal{L}} \quad (\text{E.8})$$

umformen lässt. Der Ausdruck (E.8) ist identisch mit (4.34) für die TE-Mode.

# Literatur

- [1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1964.
- [2] R. G. Barrera, G. A. Estevez und J. Giraldo. „Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics“. In: *European Journal of Physics* 6 (4 1985). doi: doi : 10.1088/0143-0807/6/4/014.
- [3] L. C. Biedenharn, J. D. Louck und P. A. Carruthers. *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2009.
- [4] Craig F. Bohren und D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley science paperback series. Wiley, 1983.
- [5] Anders Boström, Gerhard Kristensson und Staffan Ström. „Transformation properties of plane, spherical and cylindrical scalar and vector wave functions“. In: *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering, Field Representations and Introduction to Scattering 1 (1991), S. 165–210.
- [6] Antoine Canaguier-Durand. „Multipolar scattering expansion for the Casimir effect in the sphere-plane geometry.“ Diss. Université Pierre et Marie Curie, 2011.
- [7] Antoine Canaguier-Durand u. a. „Thermal Casimir effect for Drude metals in the plane-sphere geometry“. In: *Phys. Rev. A* 82 (1 2010), S. 012511. doi: 10.1103/PhysRevA.82.012511.
- [8] H. B. G. Casimir. „On the attraction between two perfectly conducting plates“. In: *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 51 (1948), S. 793–795.
- [9] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc und Gilbert Grynberg. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. New York, NY: Wiley, 1989.
- [10] Joseph Cugnon. „The Casimir Effect and the Vacuum Energy: Duality in the Physical Interpretation“. In: *Few-Body Systems* 53 (2012).
- [11] R. S. Decca u. a. „Measurement of the Casimir Force between Dissimilar Metals“. In: *Phys. Rev. Lett.* 91 (5 2003), S. 050402. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.050402.
- [12] R. S. Decca u. a. „Precise comparison of theory and new experiment for the Casimir force leads to stronger constraints on thermal quantum effects and long-range interactions“. In: *Annals of Physics* 318.1 (2005), S. 37–80. doi: 10.1016/j.aop.2005.03.007.
- [13] R. S. Decca u. a. „Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates“. In: *Phys. Rev. D* 75 (7 2007), S. 077101. doi: 10.1103/PhysRevD.75.077101.

- [14] R.S. Decca u. a. „Novel constraints on light elementary particles and extra-dimensional physics from the Casimir effect“. English. In: *The European Physical Journal C* 51.4 (2007), S. 963–975. doi: 10.1140/epjc/s10052-007-0346-z.
- [15] Bruce C. Denardo, Joshua J. Puda und Andrés Larraza. „A water wave analog of the Casimir effect“. In: *American Journal of Physics* 77.12 (2009), S. 1095–1101. doi: 10.1119/1.3211416.
- [16] B. V. Derjaguin, I. I. Abrikosova und E. M. Lifshitz. „Direct measurement of molecular attraction between solids separated by a narrow gap“. In: *Q. Rev. Chem. Soc.* 10 (3 1956), S. 295–329. doi: 10.1039/QR9561000295.
- [17] Cyriaque Genet, Astrid Lambrecht und Serge Reynaud. „Casimir force and the quantum theory of lossy optical cavities“. In: *Phys. Rev. A* 67 (4 2003), S. 043811. doi: 10.1103/PhysRevA.67.043811.
- [18] B. W. Harris, F. Chen und U. Mohideen. „Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces“. In: *Phys. Rev. A* 62 (5 2000), S. 052109. doi: 10.1103/PhysRevA.62.052109.
- [19] I. R. Hooper und J. R. Sambles. „Dispersion of surface plasmon polaritons on short-pitch metal gratings“. In: *Phys. Rev. B* 65 (16 2002), S. 165432. doi: 10.1103/PhysRevB.65.165432.
- [20] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. 3. Aufl. Wiley, Aug. 1998.
- [21] M. Kerker. *The scattering of light, and other electromagnetic radiation*. Physical chemistry. Academic Press, 1969.
- [22] G. L. Klimchitskaya u. a. „Casimir effect as a test for thermal corrections and hypothetical long-range interactions“. In: *International Journal of Modern Physics A* 20.11 (2005), S. 2205–2221. doi: 10.1142/S0217751X05024419.
- [23] Astrid Lambrecht, Paulo Maia Neto und Serge Reynaud. „The Casimir effect within scattering theory“. In: *New Journal of Physics* 8 (10 2006). doi: 10.1088/1367-2630/8/10/243.
- [24] S. K. Lamoreaux. „Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  Range“. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1 1997), S. 5–8. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.5.
- [25] Francois Mignard und Sergei Klioner. „Analysis of astrometric catalogues with vector spherical harmonics“. In: *arxiv* (2012).
- [26] U. Mohideen und Anushree Roy. „Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$ “. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (21 1998), S. 4549–4552. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.4549.
- [27] V. M. Mostepanenko u. a. „Stronger constraints on non-Newtonian gravity from the Casimir effect“. In: *Journal of Physics A* 41 (16 2008).
- [28] Claus Müller. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer-Verlag, 1969.
- [29] Roberto Onofrio. „Casimir forces and non-Newtonian gravitation“. In: *New Journal of Physics* 8 (237 2006).
- [30] J. David Pendleton. „Euler angle geometry, helicity basis vectors, and the Wigner D-function addition theorem“. In: *American Journal of Physics* 71 (2003).

- [31] Sahand Jamal Rahi u. a. „Scattering Theory Approach to Electrodynamic Casimir Forces“. In: *Phys.Rev. D* 80 (2009), S. 085021. doi: 10.1103/PhysRevD.80.085021.
- [32] Pablo Rodriguez-Lopez. „Casimir Energy and Entropy between perfect metal Spheres“. In: *International Journal of Modern Physics: Conference Series* 14 (2012), S. 475–484. doi: 10.1142/S201019451200760X.
- [33] M. E. Rose. *Elementary Theory of Angular Momentum*. Dover books on physics and chemistry. Dover, 1995.
- [34] Anushree Roy, Chiung-Yuan Lin und U. Mohideen. „Improved precision measurement of the Casimir force“. In: *Phys. Rev. D* 60 (11 1999), S. 111101. doi: 10.1103/PhysRevD.60.111101.
- [35] M. J. Sparnaay. „Measurements of attractive forces between flat plates“. In: *Physica* 24.6–10 (1958), S. 751–764. doi: 10.1016/S0031-8914(58)80090-7.
- [36] Julius A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1941.
- [37] A. O. Sushkov u. a. „Observation of the thermal Casimir force“. In: *Nature Physics* 7 (2011), S. 230–233. doi: 10.1038/nphys1909.