Kräfte im hängenden Seil

Gert-Ludwig Ingold
Institut für Physik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg

In diesen Notizen soll die maximale Kraft hergeleitet werden, die in einem undehnbaren hängenden Seil auftritt. Dazu wird zunächst mit Hilfe der Betrachtung der auf ein kurzes Seilstück wirkenden Kräfte die Seilkurve hergeleitet. Anschließend lässt sich die maximale Seilkraft bestimmen.

I. KRÄFTEGLEICHGEWICHT AN EINEM SEILSTÜCK

Zunächst wird der Seilkurve eines undehnbaren, im Gravitationsfeld hängenden Seils berechnet. Es handelt sich dabei um ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen, in dem die potentielle Energie des Seils bei vorgegebener Seillänge L minimiert werden soll. Dies kann mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren und der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung erfolgen. Da wir uns aber in erster Linie für die Seilkräfte interessieren, ist es angebracht, die Seilkurve stattdessen durch eine Kräftebetrachtung herzuleiten. Dies geschieht in diesem und dem folgenden Abschnitt.

Wir beginnen mit der Betrachtung der in Abb. 1 dargestellten Kräfte auf ein kurzes Seilstück der Länge $\mathrm{d}s$, das sich am Ort x_0 befindet. Auf dieses Seilstück mit der längenbezogenen Dichte μ wirkt die Gewichtskraft, die in die negative y-Richtung zeigt und den Betrag

$$G = \mu g \mathrm{d}s \tag{1}$$

besitzt. Dabei ist g die Erdbeschleunigung. Zudem üben die links und rechts benachbarten Seilstücke die Kräfte $\vec{F}^{(-)}$ bzw. $\vec{F}^{(+)}$ aus. Da das Seil keine Querkräfte zulassen soll, wirken diese Kräfte in Richtung der jeweiligen Seilstücke. Im Gleichgewicht gilt somit

$$\vec{F}^{(+)} + \vec{F}^{(-)} + \vec{G} = 0\,. \tag{2}$$

Diese Gleichgewichtsbedingung wird nun in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten zerlegt, wobei die

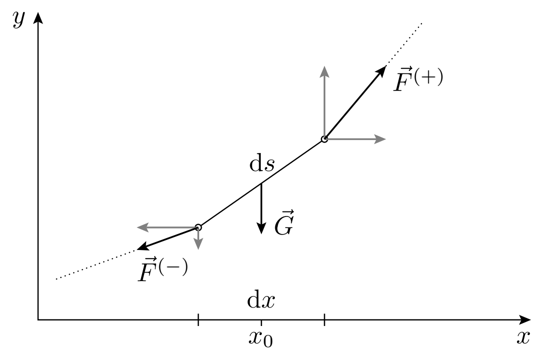

Abbildung 1: Auf ein kurzes Seilstück der Länge $\mathrm{d}s$ wirken die Gewichtskraft $\vec{G}$ sowie die Seilkräfte $\vec{F}^{(-)}$ und $\vec{F}^{(+)}$ von links bzw. von rechts. Die grau dargestellten Vektoren zerlegen die Seilkräfte in die horizontalen und vertikalen Komponenten.

Zerlegung der Seilkräfte in Abb. 1 durch die grauen Vektoren dargestellt ist. Da die Gewichtskraft keine horizontale Komponente besitzt, folgt

$$F_x^{(+)} = -F_x^{(-)} = \mu g a\,. \tag{3}$$

Diese Kraftkomponente ist entlang des gesamten Seils konstant und wird von der Aufhängung aufgebracht. Es ist günstig, die horizontale Kraftkomponente in der angegebenen Form zu schreiben, wobei a eine Konstante mit der Dimension einer Länge ist, deren Bedeutung später noch klar werden wird.

Beschreibt man die Seilkurve durch eine noch zu bestimmende Funktion $y(x)$, so folgt aus der Tatsache, dass die Seilkräfte nur entlang des Seils wirken können, dass das Verhältnis der Seilkraftkomponenten gemäß

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)\,, \tag{4}$$

durch die Ableitung der Seilkurve gegeben ist. Zur Vereinfachung der Notation soll ein Strich die Ableitung nach der Koordinate x bedeuten. Aus (2) erhält man somit zusammen mit (3) für die vertikalen Kraftkomponenten

$$\mu g a\left[y'(x_0 + \mathrm{d}x/2) - y'(x_0 - \mathrm{d}x/2)\right] - \mu g \mathrm{d}s = 0\,. \tag{5}$$

Hier sind wir von dem bisher verwendeten speziellen Ort x_0 des Seilstücks zu einem beliebigen Ort x übergegangen.

Dividiert man durch $\mathrm{d}x$, so wird aus der Differenz der Ableitungen von $y(x)$ eine zweite Ableitung

$$a y''(x) - \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0\,. \tag{6}$$

Den Zusammenhang zwischen den Differentialen $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}x$ erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, der auf unser Problem angewandt als

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,, \tag{8}$$

so dass wir mit (6) die Differentialgleichung der Seilkurve

$$a y''(x) - \sqrt{1 + y'(x)^2} = 0 \tag{9}$$

erhalten.

II. LÖSUNG DER SEILKURVENGLEICHUNG

Die Differentialgleichung (9) lässt sich mit Hilfe der Trennung der Variablen lösen, wenn man die neue Variable $u(x) = y'(x)$ einführt. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{a}\,. \tag{10}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert mit

$$\int \mathrm{d}u \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arsinh}(u)\,, \tag{11}$$

wobei arsinh den inversen hyperbolischen Sinus bedeutet, nach Auflösen nach der Variablen u

$$u = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\,. \tag{12}$$

Eine potentiell auftretende Integrationskonstante haben wir hier zu Null gesetzt und damit festgelegt, dass sich der tiefste Punkt des Seils am Ort $x = 0$ befindet.

Eine weitere Integration nach x liefert schließlich die Seilkurve

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\,. \tag{13}$$

Hier haben wir wiederum die Integrationskonstante zu Null gesetzt und damit den tiefsten Punkt des Seils nach $y = 0$ gelegt.

III. KRÜMMUNGSRADIUS

Der Krümmungsradius r einer durch die Funktion $y(x)$ beschriebenen Kurve ist durch

$$r(x) = \left|\frac{(1+y'(x)^2)^{3/2}}{y''(x)}\right| \tag{14}$$

gegeben. Unter Verwendung der Ableitung der Seilkurve (12) und mit der Beziehung

$$\cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = 1 \tag{15}$$

ergibt sich

$$r(x) = a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\,. \tag{16}$$

Der Parameter a entspricht somit dem Krümmungsradius der Seilkurve bei $x = 0$, also am tiefsten Punkt. Dort ist der Krümmungsradius minimal, die Krümmung also maximal.

Auch wenn sich der Krümmungsradius am tiefsten Punkt gut zur Parametrisierung der Seilkurve eignet, wird er selten in Problemstellungen vorgegeben sein. Wir wollen ihn daher durch geeignete Parameter ausdrücken und betrachten dazu speziell ein Seil, das zwischen den Orten $x = \pm w/2$ auf der gleichen Höhe eingespannt ist. Der Seildurchhang h ergibt sich in diesem Fall mit Hilfe der Seilkurve (13) zu

$$h = y(w/2) - y(0) = a\left[\cosh\left(\frac{w}{2a}\right) - 1\right]\,. \tag{17}$$

Ferner benötigen wir die Länge des Seils, die gleich L sein soll. Wir kennen nach (8) den Zusammenhang zwischen der Länge eines kleinen Seilstücks ds und dem Differential dx, so dass wir durch Aufintegration die Forderung

$$L \stackrel{!}{=} \int_{-w/2}^{w/2} \mathrm{d}x\sqrt{1+y'(x)^2} \tag{18}$$

erhalten. Durch Einsetzen der Ableitung der Seilkurve (12) und Ausführung der Integration finden wir

$$L = 2a\sinh\left(\frac{w}{2a}\right) \tag{19}$$

oder mit Hilfe von (15)

$$\cosh\left(\frac{w}{2a}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{L}{2a}\right)^2}\,. \tag{20}$$

Mit (17) ergibt sich dann der Seildurchhang zu

$$h = \sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}} - a\,. \tag{21}$$

Auflösen nach a erlaubt es, den Krümmungsradius am tiefsten Seilpunkt durch die Seillänge L und den Seildurchhang h gemäß

$$a = \frac{h}{2}\left[\left(\frac{L}{2h}\right)^2 - 1\right] \tag{22}$$

auszudrücken.

IV. MAXIMALE KRAFT IM SEIL

Die im Seil wirkende Kraft können wir nun leicht mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnit I berechnen und mit den Ergebnissen aus dem vorigen Abschnitt durch die Seillänge und den Seildurchhang ausdrücken.

Der Betrag der Kraft am Ort x im Seil ist mit (3) und (4) durch

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ &= \mu g a\sqrt{1+y'(x)^2} \end{aligned} \tag{23}$$

gegeben. Damit ist bereits klar, wo die Kraft im Seil am größten ist, nämlich am Rand. Dort ist gemäß (12) die Ableitung $y'(x) = u(x)$ am größten. Setzt man den Ausdruck (12) an der Stelle $x = w/2$ für die Ableitung der Seilkurve ein, so findet man mit Hilfe des Ergebnisses für den Seildurchhang (17) die maximale Kraft

$$F_{\max} = \mu g(h+a) \tag{24}$$

Um dieses Ergebnis als Funktion der Seillänge L und des Seildurchhangs h auszudrücken, verwendet man (22) und findet damit schließlich

$$F_{\mathrm{max}} = \frac{\mu g}{2}\left[h + \frac{L^2}{4h}\right] . \tag{25}$$

Wie man am zweiten Term sieht, kann diese Kraft bei langen Seilen mit geringem Durchhang sehr groß werden.