Informe Bloque I

Computación Científica

Aingeru García Blas

Índice

1. Introducción

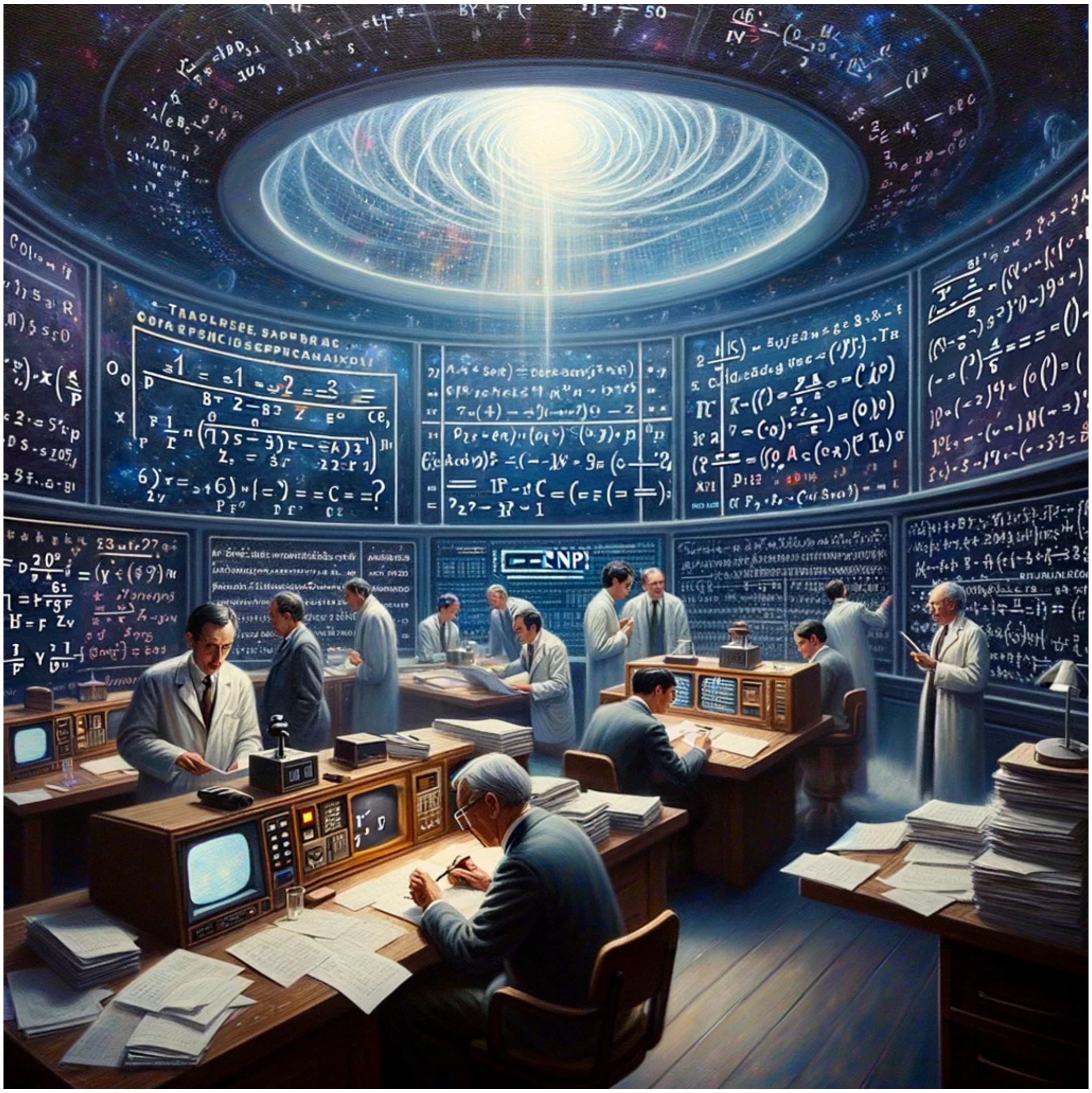


Figura 1: Computación Científica

Hasta ahora, en la asignatura de computación científica, hemos abordado una variedad de temas que son esenciales en el ámbito de las matemáticas y la ciencia aplicada. Desde las aproximaciones de Taylor y Maclaurin, pasando por la representación numérica, la extrapolación de Richardson, y los algoritmos de Horner y punto fijo, hemos explorado herramientas y técnicas que son fundamentales para entender y modelar el mundo que nos rodea. Ha sido particularmente revelador descubrir que las derivadas, algo que podría parecer tan básico, tienen un costo computacional significativo.

Lo que me ha fascinado es ver la aplicabilidad práctica de todo esto. Por ejemplo, gracias a las enseñanzas de la asignatura y la guía del profesor, ahora entiendo el verdadero valor de Taylor. No es solo una técnica matemática, sino una optimización crucial. Aunque no es exacta, Taylor permite a los ordenadores aproximar derivadas de una manera eficiente y rápida. Este punto, en particular, ha sido una revelación y ha sido fascinante de descubrir. Además, al sumergirnos en ejemplos prácticos de campos como la física, hemos podido ver la aplicabilidad real de estos conceptos. Ha sido un viaje educativo y, personalmente, bastante disfrutable. Sin más preámbulos, y con la curiosidad aún encendida, procedamos con los ejercicios que nos aguardan.

2. Desvelando patrones con Maclaurin: El encanto de las series geométricas

Enunciado:

Hallar los primeros 4 términos de la serie de Maclaurin para la función $y = \arctan(x)$.

1. Derivación de la función:

Derivando la función $y(x)$, podemos hacer una ligera modificación en el denominador:

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

Observamos que la derivada tiene una forma geométrica. En particular, se asemeja a la expansión geométrica estándar:

$$\frac{p_0}{1-r}$$

donde: $p_0 = 1$ y $r = -x^2$.

Con lo que, en lugar de seguir derivando para lo que sería el polinomio de Taylor/Maclaurin, vamos a desarrollar ésta idea.

2. Expansión de la función:

Vamos a encontrar los primeros 4 términos de la expansión de esta serie.

$$\frac{p_0}{1-r} = p_0 + p_0 r + p_0 r^2 + p_0 r^3 + \dots$$

3. Expansión hasta el término 4º, $-x^6$:

Dada la relación anterior, la expansión geométrica es:

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

donde, como se ha mencionado anteriormente, $p_0 = 1$ y $r = -x^2$.

4. Expansión de la función original:

Para obtener la expansión de la función original a partir de su derivada, podemos "deshacer"la derivada mediante la integración. Es una técnica útil que nos permite recuperar la función a partir de su expansión en series de Taylor, integrando término a término.

Considerando la expansión derivada:

$$y'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Integrando término a término obtenemos:

$$\int y'(x)\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6)\,dx$$

Lo que nos da el polinomio que aproxima la función `y = arctan(x)`:

$$y_{\text{expandida}}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C$$

Donde C es una constante de integración.

`Observaciones`

La expansión de $y(x)$ está centrada en $x = 0$. Al analizar $y_{\text{expandida}}(x)$, podemos observar que su comportamiento se asemeja al de una expansión geométrica. Tras investigar, encontré que la fórmula $\frac{p_0}{1-r}$ se expande alrededor de 0 por definición.

3. Descifrando curvas con Taylor: transformando lo intrincado en intuitivo

Enunciado:

Desarrolla el polinomio de Taylor de la función $\mathbf{y = ln(1 + x)}$ centrado en $\boldsymbol{a = 1}$. A continuación, utiliza el polinomio desarrollado para aproximar $\boldsymbol{y = \ln(1{,}25)}$.

0. *Super* Taylor:

El Polinomio de Taylor nos permite reemplazar una función compleja, o partes de ella, por una versión más simple y equivalente. Esta simplificación facilita el cálculo y nos brinda un valor aproximado con precisión controlable.

Para una función y, el polinomio de Taylor centrado en a hasta el término n es:

$$P_n(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1. Derivación de la función:

Calculemos las primeras derivadas de $y = \ln(1+x)$ y sus valores en $a = 1$:

$$\begin{aligned}
y &= \ln(1+x) && \Rightarrow \quad y(1) = \ln(2) \\
y' &= \frac{1}{1+x} && \Rightarrow \quad y'(1) = \frac{1}{2} \\
y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2} && \Rightarrow \quad y''(1) = -\frac{1}{4} \\
y''' &= \frac{2}{(1+x)^3} && \Rightarrow \quad y'''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. Particularización del polinomio:

Usando la fórmula del polinomio de Taylor y los valores anteriores, el polinomio de Taylor hasta el término de grado 3 es:

$$P_3(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-1)^3}{3!}$$

3. Aproximación:

Utilizando $P_3(x)$, la aproximación de $y = \ln(1{,}25)$ es: $y \approx P_3(1{,}25)$, entonces, dado el polinomio de Taylor hallado - la aproximación de $y = \ln(1{,}25)$ es:

$$y \approx P_3(1{,}25) = \ln(2) + \frac{1}{2}(0{,}25) - \frac{1}{4}\frac{(0{,}25)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(0{,}25)^3}{3!}$$
$$y \approx P_3(1{,}25) = 0,693 + 0,125 + 0,0078 + 0,00065 = \mathbf{0,82645}$$

Este valor será la aproximación de $y(1{,}25)$ usando el polinomio de Taylor de tercer grado.

4. Refinando derivadas: La magia de la extrapolación de Richardson

Enunciado:

Usando la fórmula de diferencia central para la función $f(x) = \ln(x)$ y dado $x = 0{,}5$ con un paso $h = 0{,}2$:

1. Aproxima la primera derivada de f y utilice la **extrapolación de Richardson** para mejorar la aproximación dos veces.

2. Aproxima la segunda derivada de f con $x = 2$ y extrapola la aproximación una vez utilizando Richardson.

Para la función $f(x) = \ln(x)$ y usando un paso o etapa $h = 0{,}2$, la fórmula de diferencia central para la primera derivada es:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Y para la segunda derivada:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

La fórmula general de extrapolación de Richardson es:

$$D(h) = \frac{2^k D\left(\frac{h}{2}\right) - D(h)}{2^k - 1}$$

1. Aproximación y extrapolación de Richardson de la primera derivada

1.1 Cálculo de $N_0(h)$ con $h = 0,2$ Para la diferencia central tenemos:

$$N_0(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Para $x = 0,5$ y $h = 0,2$:

$$N_0(0{,}2) = \frac{f(0{,}7) - f(0{,}3)}{0{,}4} = \frac{\ln(0{,}7) - \ln(0{,}3)}{0{,}4} = 2,11$$

1.2 Cálculo de $N_0\left(\frac{h}{2}\right)$ con $\frac{h}{2} = 0,1$

$$N_0\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f(0{,}6) - f(0{,}4)}{0{,}2} = \frac{\ln(0{,}6) - \ln(0{,}4)}{0{,}2} = 2,02$$

1.3 Extrapolación de Richardson para $N_1(h)$

Utilizando la fórmula de extrapolación:

$$N_1(h) = N_0\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_0\left(\frac{h}{2}\right) - N_0(h)}{4-1}$$

Sustituimos los valores previamente calculados:

$$N_1(0{,}2) = N_0(0{,}1) + \frac{N_0(0{,}1) - N_0(0{,}2)}{3} = \mathbf{1,99}$$

El *output* de esta operación se puede expresar tal y como el profesor mencionó en clase: «**Valor nuevo = valor anterior + término adicional**» donde $N_1(h)$ representa el valor mejorado a partir de valores previos y la corrección introducida por la extrapolación.

1.4 Segunda extrapolación.

Para calcular la segunda extrapolación, $N_2(h)$, necesitamos el valor de $N_1\left(\frac{h}{2}\right)$. Ya disponemos de $N_1(h)$, pero para obtener $N_1\left(\frac{h}{2}\right)$, necesitamos $N_0\left(\frac{h}{4}\right)$. Esto se puede apreciar en las dependencias entre las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
N_0(h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\
N_1(\frac{h}{2}) &= N_0\left(\frac{h}{2^2}\right) + \frac{N_0\left(\frac{h}{2^2}\right) - N_0(\frac{h}{2})}{4^1 - 1} \\
N_2(h) &= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{4^2 - 1}
\end{aligned}$$

1.5 Cálculo de $N_0\left(\frac{h}{4}\right)$ Utilizando la fórmula de la diferencia central:

$$N_0\,(0{,}05) = \frac{f(0{,}55) - f(0{,}45)}{0{,}1} = \frac{\ln(0{,}55) - \ln(0{,}45)}{0{,}1} = 2{,}0006$$

1.6 Obtenemos $N_1\left(\frac{h}{2}\right)$

$$N_1(\frac{h}{2}) = N_0\left(\frac{h}{2^2}\right) + \frac{N_0\left(\frac{h}{2^2}\right) - N_0(\frac{h}{2})}{4^1 - 1}$$

Con la fórmula general de N_1 y sustituyendo los valores previamente calculados:

$$N_1\,(0{,}1) = 2{,}0006 + \frac{2{,}0006 - 2{,}02}{3} = 2{,}0013$$

1.7 Finalmente, ¡volvemos con todo lo recolectado a por $N_2(h)$**!**

Entonces, usando la fórmula general de $N_2(h)$ mencionada anteriormente, sustituimos los valores apropiados:

$$N_2(0{,}2) = 2{,}0013 + \frac{2{,}0013 - 1{,}99}{15} = \mathbf{2{,}002}$$

`Observaciones`

Esto demuestra cómo la extrapolación de Richardson puede mejorar la aproximación de la derivada, aún cuando partimos de diferencias centrales básicas.

2. Aproximación y extrapolación de Richardson de la segunda Derivada

Para la aproximación de la segunda derivada mediante diferencias centradas, la fórmula general es:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Aplicando esta fórmula para $f(x) = \ln(x)$ y $x = 2$ con $h = 0{,}4$:

$$f''(2) = \frac{\ln(2{,}4) - 2\ln(2) + \ln(1{,}6)}{0{,}4^2}$$

Este cálculo nos proporciona el valor $N_0(0{,}4) = -0{,}255$.

Para refinar la aproximación, reducimos la etapa por la mitad, con lo que nuestro nuevo h será $h = 0{,}2$ y aplicamos de nuevo la fórmula:

$$N_0(0{,}2) = \frac{\ln(2{,}2) - 2\ln(2) + \ln(1{,}8)}{0{,}2^2} = -0{,}251$$

Con los valores calculados, procedemos a realizar la extrapolación. La fórmula general para $N_1(h)$ en la extrapolación de Richardson es:

$$N_1(h) = N_0\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_0\left(\frac{h}{2}\right) - N_0(h)}{4-1}$$

Sustituimos los valores obtenidos:

$$N_1(0{,}4) = -0{,}251 + \frac{-0{,}251 + 0{,}255}{3} = -0{,}2497$$

`Observaciones`

Al reducir el valor de h hemos refinado la aproximación inicial. Richardson nos permite mejorar estas estimaciones iniciales al agregar correcciones basadas en diferencias de aproximaciones a diferentes etapas. Es decir, primero hacemos una aproximación básica de la función y luego, mediante la extrapolación de Richardson, refinar dicha aproximación.

5. Armonizando modelos: autenticidad de un PVI

Enunciado: Se propone determinar si la función $y(x) = x^3 + 2x^2$ es solución exacta del siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' - 2\dfrac{y}{x} = x^2, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

1. Validación de la condición inicial

Para comprobar la validez de la condición inicial, evaluamos $y(1)$:

$$y(1) = (1)^3 + 2(1)^2 = 1 + 2 = 3.$$

Esta evaluación coincide con $y(1) = 3$, por lo que la condición inicial se cumple.

2. Verificación de la ecuación diferencial

A continuación, sustituiremos $y = x^3 + 2x^2$ y su derivada en la ecuación diferencial:

Derivamos y:

$$y'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Incorporamos y e y' en la ecuación:

$$3x^2 + 4x - 2\left(x^3 + 2x^2\right)\frac{1}{x} = x^2.$$

Esto se simplifica a:

$$3x^2 + 4x - 2x^2 - 4x = x^2.$$

Lo que resulta en:

$$x^2 = x^2.$$

Dado que esta igualdad es válida para todo x, podemos afirmar que $y(x) = x^3 + 2x^2$ es solución exacta del PVI presentado.

6. Polinomios en transición: la deflación hacia la base de Taylor

Enunciado: Se nos presenta el polinomio expresado en base estándar:

$$P(x) = -6x^4 + 3x^2 - 2x + 1$$

Nos interesa hallar $p'(2)$ y $p^{(IV)}(2)$.

La base de Taylor es especialmente útil porque nos permite representar una función en términos de polinomios que son más fáciles de manejar. Transformar el polinomio a esta base simplifica el cálculo de las derivadas y nos da un acceso directo a los valores deseados.

Para llevar a cabo esta transformación, se puede hacer uso de la división sintética o mediante el algoritmo de deflación (reducción de grado), también conocido como el método de Horner. A través de estos métodos, conseguimos *deflar* o reducir el grado del polinomio original, permitiéndonos obtener sus coeficientes en la base de Taylor.

1. División Sintética

Dado el polinomio $P(x) = -6x^4 + 3x^2 - 2x + 1$, vamos a dividirlo usando división sintética para $a = 2$, es decir, lo dividimos entre $x - 2$.

El resto de la primera división nos da $P(2)$, de la segunda $P'(2)$, y así sucesivamente. La fórmula general es:

$$P^{(n)}(a) = \frac{\text{resto de la n-ésima división}}{(n-1)!}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -6 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ \hline 2 & & -12 & -24 & -42 & -88 \\ \hline & -6 & -12 & -21 & -44 & \mathbf{-87} \end{array}$$

- $P(2) \approx$ Resto = -87

$$\begin{array}{c|cccc} & -6 & -12 & -21 & -44 \\ \hline 2 & & -12 & -48 & -138 \\ \hline & -6 & -24 & -69 & \mathbf{-182} \end{array}$$

- $P'(2) \approx$ Resto = -182

$$\begin{array}{c|ccc} & -6 & -24 & -69 \\ \hline 2 & & -12 & -72 \\ \hline & -6 & -36 & \mathbf{-141} \end{array}$$

- $\frac{P''(2)}{2!} \approx$ Resto = -141

$$\begin{array}{c|cc} & -6 & -36 \\ \hline 2 & & -12 \\ \hline & -6 & \mathbf{-48} \end{array}$$

- $\frac{P'''(2)}{3!} \approx$ Resto = -48
- $\frac{P^{(IV)}(2)}{4!} \approx$ Coeficiente líder = -6

Estos resultados nos ofrecen una perspectiva más profunda de la función y demuestran la utilidad y la belleza de trabajar con la base de Taylor. Veamos el polinomio en su base (en negrita, los términos $p'(2)$ y $p^{(IV)}(2)$ requeridos por el enunciado):

$$P(2) \approx -\mathbf{6}(x-2)^4 - 48(x-2)^3 - 141(x-2)^2 - \mathbf{182}(x-2) - 87$$

7. Entre bits y decimales: la sutileza de la precisión en coma flotante

Enunciado:

Dado el estándar de representación numérica `IEEE 754` en su formato `DOUBLE`, que utiliza 64 bits divididos en signo, exponente y mantisa:

1. Determina cuántos decimales en base 10 es posible expresar de manera precisa.

2. Identifica cuál es el valor más pequeño representable en esta norma, excluyendo el cero.

Fundamenta su respuesta teniendo en cuenta que el bit de menor peso en la mantisa tiene un valor de 2^{-52} y desarrolla los cálculos pertinentes para llegar a una conclusión.

La representación `IEEE 754` en punto flotante es una norma estándar utilizada para la representación numérica en computadoras. Para el formato `DOUBLE`, se usan 64 bits divididos en tres partes principales: el bit de signo, el exponente y la mantisa. Su distribución es la siguiente:

Bit de Signo (1 bit)	**Exponente (11 bits)**	**Mantisa (52 bits)**
S	E	M

El bit de menor peso en la mantisa tiene un valor de 2^{-52}. Una pregunta interesante surge al considerar la precisión decimal de este formato: ¿cuántos decimales se pueden expresar en base 10 con el tipo DOUBLE? Además, ¿cuál es el valor más pequeño que se puede representar?

1. Conversión de Precisión Binaria a Decimal

Para determinar la precisión decimal de 2^{-52}, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$2^{-52} = 10^{(1-x)}$$

Tomando el logaritmo en base 10 de ambos lados:

$$\log(2^{-52}) = \log(10^{(1-x)})$$

Usando las propiedades de los logaritmos, podemos bajar los exponentes:

$$-52 \times \log(2) = 1 - x$$

Resolviendo para x:

$$x = 1 + 52 \times \log(2)$$

Ahora, usando los valores conocidos de los logaritmos:

$$x \approx 1 + 52 \times 0{,}3010$$

$$x \approx 16{,}65$$

Por lo tanto, la precisión decimal es de aproximadamente **16 decimales.**

2. Valor Más Pequeño Representable

Un número en coma flotante `IEEE 754` de doble precisión se representa como:

$$(-1)^{\text{bit de signo}} \times (1 + \text{mantisa}) \times 2^{\text{exponente}-1023}$$

Donde:

- **bit de signo** es 0 para positivo y 1 para negativo.
- **mantisa** se representa con 52 bits.
- **exponente** se obtiene a partir de 11 bits.

El valor mínimo representable (en valor absoluto) tiene:

- **bit de signo** $= 0$.
- **exponente** más bajo sin estar denormalizado es 1 (que tras ajustar con el sesgo da -1022).
- **mantisa** $= 0$.

Por lo tanto, el número es:

$$1{,}0 \times 2^{-1022}$$

8. La discreta inmensidad de los intervalos numéricos

Enunciado:

Dada la función $f(x) = -\frac{10}{x}$, con $x = 2{,}653$, $B = 10$ y $p = 4$, determine en qué intervalo se encontrará el valor de $f(x)$.

1. Cálculo de $f(x)$ en $x = 2{,}653$, y el error absoluto usando la fórmula.

$$f(2{,}653) = -\frac{10}{2{,}653} \approx -3{,}76932$$

$$E_a = |B \times 10^{-p}|$$

Donde:

- B es la base (en este caso 10).
- p es el número de cifras significativas (en este caso 4).

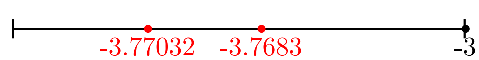
$$E_a = |10 \times 10^{-4}| = 0{,}001$$

2. Establecemos p=4 y calculamos el intervalo en el que se encontrará $f(x)$ usando el error absoluto:

$$\text{Intervalo} = [f(2{,}653) - E_a, f(2{,}653) + E_a]$$

$$\text{Intervalo} = [-3{,}7693 - 0{,}001, -3{,}7693 + 0{,}001]$$

$$\text{Intervalo} = [-3{,}7703, -3{,}7683]$$



Por lo tanto, el valor de $f(x)$ se encontrará en el intervalo $[-3{,}7703, -3{,}7683]$.

9. Comentarios

A lo largo de este primer bloque en Computación Científica, hemos abordado conceptos y técnicas fundamentales que nos permiten entender y optimizar cálculos complejos. Desde las aproximaciones de Taylor hasta la representación numérica, hemos visto cómo la teoría se traduce en soluciones prácticas para desafíos reales. Aunque hemos cubierto mucho terreno, este es solo el comienzo. Con lo aprendido hasta ahora, estamos bien equipados para enfrentar los próximos desafíos y temas que este curso tiene para ofrecer.

Después de explorar diversas áreas de las matemáticas y comprender el poder intrínseco de Taylor, me gustaría reafirmar la perspicaz observación de nuestro profesor:

> *«Los polinomios son guays»*

«Las matemáticas, consideradas correctamente, poseen no solo verdad, sino también suprema belleza.»

–Bertrand Russell

23 de Octubre de 2023