1. Teoría de la probabilidad

1.1. Teoría de conjuntos

Intro

- Conjuntos A, B, C
- Elementos a, b, c, d, e
- $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, b, e\}$ entonces $a \in A$, $b \in A$, $c \notin A$
- Unión: elementos *en A **o** en B* $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
- Intersección: elementos *en A **y** en B* $A \cap B = \{b\}$
- Inclusión: $A \subset C$ o, equivalentemente $C \supset A$. También, $B \not\subset C$
- Universo $U = \{a, b, c, d, e\}$
- Conjunto vacío: $\emptyset = \{\}$
- Complemento $A^c \equiv U - A = \{c, d, e\}$

Notación

Probabilidades: en lugar de porcentajes, utilizamos números entre 0 y 1 para indicar cuán probable es un resultado:

$$\begin{array}{rcl} 65\,\% & \to & 0{,}65 \\ 50\,\% & \to & 0{,}5 \\ 12{,}3\,\% & \to & 0{,}123 \\ 100\,\% & \to & 1 \\ 0\,\% & \to & 0 \end{array}$$

Libro

Definición: Llamamos *espacio muestral* al conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplos discretos:

- Moneda (H = cara, T = ceca): $S = \{H, T\}$
- Dado: $S = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

- Notas facu: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Ejemplos continuos:

- Alturas de personas: $S = [0cm, 250cm]$
- Precipitaciones anuales: $S = [0mm, +\infty)$
- Estado de cuenta $S = (-\infty, +\infty)$

Definición: Un *evento* es cualquier colección de posibles resultados de un experimento. Es un subconjunto de S.

Definición: Dos eventos son *disjuntos* (mutuamente excluyentes) sii $A \cap B = \emptyset$

1.2. Bases de la teoría de las probabilidades

1.2.1. Fundamentos axiomáticos

Definición: Dado un espacio muestral S, una *función probabilidad* es una función $P : S \to [0, 1]$, tal que:

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset S$
- $P(S) = 1$
- Si A y B son disjuntos, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.2.2. El cálculo de probabilidades

Teorema Si P es una función probabilidad en A, entonces:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) \leq 1$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorema Si P es una función probabilidad en A y B, entonces:

- $P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

Desigualdad de Bonferroni $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$
Ejemplo: Si $P(A) = P(B) = 0{,}95$, entonces $P(A \cap B) \geq 0{,}90$
Desigualdad de Boole $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
Ejemplo: Si $P(A) = P(B) = 0{,}05$, entonces $P(A \cup B) \leq 0{,}10$

1.2.3. Contar

Teorema fundamental del conteo: Si un trabajo consiste de k tareas separadas, cada una de las cuales puede ser hecha en n_i formas, entonces el trabajo entero puede hacerse en $n_1 \times n_2 \times \ldots n_k$ formas.

Cosas a tener en cuenta:

- repetición (reemplazo)
- orden

Ejemplo lotería: 6 números de un total de 44.
Cuatro combinaciones:

Ordenados sin repetición

$$44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39 = \frac{44!}{38!} = 5\ 082\ 517\ 440$$

Ordenados con repetición

$$44 \times 44 \times 44 \times 44 \times 44 \times 4 = 44^6 = 7\ 256\ 313\ 856$$

Desordenados sin repetición

$$\frac{44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{44!}{6!38!} = \binom{44}{6} = 7\ 059\ 052$$

Desordenados con repetición

$$\frac{49!}{6!43!} = \binom{49}{6} = 13\ 983\ 816$$

Definición: el *factorial* $n!$ de un número natural n es el producto de este y todos los anteriores hasta 1, es decir: $n! \equiv n \times (n-1) \times \ldots \times 1$. Además, por definición, $0! = 1$

Definición: dados dos números naturales o cero, tales que $n \geq k$, definimos el *número combinatorio* de n y k (n tomados de a k) como

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En general:

	Sin repetición	Con repetición
Ordenado	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Desordenado	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Ejemplo: 4 tomados de a 2 [12, 16, 6, 10]

1.2.4. Enumerar resultados

Si todos los elementos en un espacio muestral S son equiprobables, entonces la probabilidad de un evento A es

$$P(A) = \frac{\text{\# de configuraciones en que pasa } A}{\text{\# de configuraciones totales en } S} = \frac{\text{\# de elementos en } A}{\text{\# de elementos en } S}$$

Ejemplo: Poker

Manos posibles (desordenado, sin repetición):

$$\text{\# de manos totales} = \text{\# de elementos en } S = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

Probabilidad de poker de ases:

$$P(AAAAX) = \frac{\text{\# de manos } AAAAX}{\text{\# de manos totales}} = \frac{48}{2\,598\,960} \approx 1{,}8 \times 10^{-5} = 0{,}000018 = 0{,}0018\,\%$$

(una en 50 000)

Probabilidad de poker:

$$P(XXXXY) = \frac{\text{\# de manos } XXXXY}{\text{\# de manos totales}} = \frac{13 \times 48}{2\,598\,960} \approx 0{,}00024 = 0{,}024\,\%$$

(una en 4 000)

1.3. Probabilidad condicional e independencia

Ejemplo 1: Dados

Sea un dado justo ($P(\text{cualquier resultado}) = \frac{1}{6}$) y definamos

$$\begin{aligned} S &= \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\} & & \\ I &= \{⚀, ⚂, ⚄\} & & \text{impares} \\ B &= \{⚀, ⚁, ⚂\} & & \text{bajos} \end{aligned}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar (en I)?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número bajo (en B)?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar, dado que sabemos que es bajo?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número bajo, dado que sabemos que es impar?
- ¿Cómo cambian las respuestas anteriores si redefinimos $\tilde{B} = \{⚀, ⚁\}$?

Definición: Dados dos eventos $A, B \subset S$, con $P(B) > 0$, la *probabilidad condicional* de A dado B se nota $P(A \mid B)$ y se define como

$$P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si $P(A \mid B) = P(A)$, entonces también se cumple que $P(B \mid A) = P(B)$. En este caso, se deduce que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, y decimos que A y B son *eventos estadísticamente independientes*.

Ejemplo 2: Cartas de poker

Dado un mazo de 52 cartas de poker (4 palos, 13 números por palo), tomamos una carta al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un trebol?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as, dado que sabemos que la carta es de trebol?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un trebol, dado que sabemos que la carta es un as?
- Hemos comprobado que ambos eventos (as y trebol) son independientes.
- ¿Cómo cambian los resultados si agregamos comodines al mazo?

Teorema de Bayes

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)\ \frac{P(A)}{P(B)}$$

Demostración: Directa, partiendo de

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\ P(B) = P(B \mid A)\ P(A)$$

Referencias

Casella, G. y Berger, R.L., *Statistical Inference*. Wadsworth Group, 2002.