# Tugas Mandiri-Fisika Statistik

Gesha Mahendra Cunyadha - 1906348214

TA 2021-2022 Semester 5

# Soal

### Tugas 1 (Bab 1)

1. Pandang gerak random $p = q$ dan $m = n_1 - n_2$ menyatakan perpindahan ke kanan. Setelah jumlah total langakh $N$. Hitung:
   (a) Hitung rata-rata $\overline{m}$, dan $\overline{m^3}$
   (b) itung nilai rata-rata $\overline{m^2}$ dan $\overline{m^4}$

2. Probabilitas $W(n)$ dinyatakan dengan probabilitas $p$ terjadi nilai $n$ kali dalam kejadian $N$ dinyatakan dengan distribusi Binomial

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

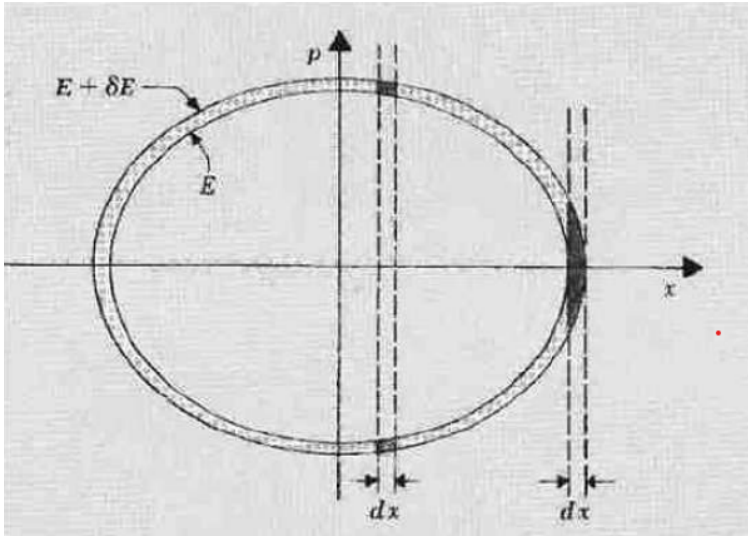
   Perimbangkan kondisi ketika $p \ll 1$ dan $n \ll N$
   (a) Jika $\ln(1-p) \approx -p$. Tunjukkan $(1-p)^{N-n}$
   (b) Tunjukkan bahwa $\dfrac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$
   (c) Tunjukkan bahwa $W(n) = \dfrac{\lambda^n}{(n!)e^{-\lambda}}$ dengan $\lambda = Np$ dikenal sebagai distribusi Poisson.

3. Pandang distribusi Poisson
   (a) Tunjukkan sifat normalisasi $\sum_{n=0}^{N} W_n = 1$
   (b) Hitung nilai $\overline{n}$
   (c) Hitung nilai $\overline{(\Delta n)^2} \equiv \overline{(n - \overline{n})^2}$

### Tugas 2 (Bab 2)

1. Sebuah partikel bermassa $m$ bergerak bebas dalam 1 dimensi. Jika posisi dan momentum masing-masing $x$ dan $p$. Diasumsikan partikel bergerak dalam sebuah kotak pada posisi $x = 0$ dan $x = L$ dan energi $E$ dan $E + \delta E$. Gambarkan ruang fase partikel dalam deksripsi klasik.

2. Pandang sebuah ensembel klasik 1 dimensi bergerak osilasi hamonik.
   (a) Jika $x$ adalah perpindahan sebagai fungsi waktu $t$ yaitu $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ dengan $\varphi$ adalah fase $(0 < \psi < 2\varphi)$. Probabilitas $\omega(\varphi)\, d\varphi$ pada jangkauan $\varphi$ dan $\varphi + d\varphi$ adalah $\omega(\varphi)\, d\varphi = (2\pi)^{-1}\, d\varphi$. Tentukan probabilitas $P(x)\, dx$ pada jangkauan $x$ dan $x + \delta x$ untuk seluruh sudut $\varphi$, nyatakan $P(x)$ dalam variabel $A$ dan $x$.
   (b) Jika ensembel tersebut berada pada energi $E$ dan $E + \delta E$. Tentukan probabilitas $P(x)\, dx$ dan nyatakan $P(x)$ dalam variabel $E$ dan $x$.



Gambar 1: Deskripsi ruang fase partikel pada energi $E$ dan $E + \delta E$

3. Pandang persamaan berikut :

$$A\,dx = B\,dy \equiv đF$$

dengan $A$ dan $B$ masing-masing fungsi $X$ dan $y$

(a) Jika $đF$ adalah diferensial eksak sehingga $F = F(x, y)$. Tunjukkan bahwa $A$ dan $B$ mengikuti

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

(b) Jika $đF$ adalah diferensial eksak, tunjukkan bahwa integral $\int đF$ pada lintasan tertutup pada bidang $xy$ adalah nol.

**Tugas 3 (Bab 3)**

1. Sebuah kotak dipisahkan menjadi dua bagian dengan rasio 3:1. Kotak besar mengandung 1000 molekul gas Ne dan kotak kecil mengandung 100 molekul gas He. Sebuah lubang kecil dibuat antara kotak besar dan kecil dan sistem dalam kesetimbangan.

   (a) Tentukan jumlah rata-rata molekul untuk setiap kotak

   (b) Tentukan probabilitas dari 1000 molekul Ne dan 100 molekul Ne.

2. Pandang ada sejumlah $N$ partikel dengan interaksi antar partikel diabaikan. Masing-masing partikel memiliki spin $\frac{1}{2}$ dan momen magnet $\mu$ dan medan magnet $H$

   (a) Tentukan hubungan antara temperatur absolut $T$ dan energi total sistem $E$ menggunakan bentuk ekspresi $\beta \equiv \dfrac{\partial \ln \Omega}{\partial E}$

   (b) Jika momen magnetik total adalah $M$ berkaitan dengan energi $E$. Tentukan parameter $M$ sebagai fungsi medan magnet $H$ dan temperatur $T$.

3. Suatu sistem $A$ melakukan kontak termal dengan sebuah reservoir $A'$ pada temperatur $T'$. Kemudian sistem $A$ menyerap panas sejumlah $Q$ selama proses tersebut. Tunjukkan bahwa entropi $\Delta S$ pada sistem $A$ adalah $\Delta S \geq \frac{Q}{T'}$.

**Tugas 4 (Bab 6)**

1. Sebuah osilator harmonik 1 dimensi memiliki tingkat energi $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ dengan $n$ adalah bilangan kuantum $(n = 0, 1, 2, \dots)$ dan $\omega$ merupakan frekuesi angular. Jika osilator harmonik melakukan kontak termal dengan sebuah reservoir temperatur cukup rendah $T$ sehingga $\frac{kT}{\hbar\omega} \ll 1$.
   (a) Tentukan perbandingan probabilitas osilator harmonik pada tingkat pertama dengan tingkat dasar.
   (b) Tentukan energi rata-rata dari osilator harmonik sebagai fungsi temperatur $T$ pada kondisi energi pertama dan dasar.
2. Sebuah mineral minyak diletakkan pada medan magnet $H$. Setiap proton dari material memiliki spin $\frac{1}{2}$ dan momen magnet $\mu$. Energi proton memiliki dua keadaan yaitu $\epsilon = \mp\mu H$ dari orientasi spin. Sebuah gelombang radio diaplikasikan pada interval energi tersebut, jika frekuensi $\nu$ memenuhi kondisi Bohr $h\nu = 2\nu H$. Daya yang diserap dari medan radiasi sebanding dengan perbedaan jumlah inti dari dua tingkat energi. Jika diasumsikan proton dari mineral minyak dalam keadaan kesetimbangan termal pada temperatur $T$ atau memenuhi kondisi $\nu H \ll kT$. Tentukan daya penyerapan mineral sebagai fungsi temperatur $T$.
3. Pandang gas ideal dengan temperatur absolut $T$ didalam medan gravitasi yang uniform yang dijelaskan dengan percepatan $g$. Dengan menuliskan syarat kondisi kesetimbangan hidrostatik sebagai titik gas yang terletak diantara ketinggian $z$ dan $z + dz$, turunkan persamaan untuk $n(z)$ dan jumlah molekul per cm$^3$ pada ketinggian $z$.

**Tugas 5 (Bab 7)**

1. Sebuah gas ideal monoatomik terdiri atas $N$ partikel, masing-masing partikel bermassa $m$ berada dalam kesetimbangan pada temperatur $T$. Gas berada dalam sebuah kotak dengan sisi-sisinya berukuran $L$ yang memiliki sisi bawah dan atas sejajar dengan permukaan bumi sehingga efek medan gravitasi $g$ pada partikel perlu diperhatikan
   (a) Tentukan energi kinetik rata-rata partikel
   (b) Tentukan energi potensial rata-rata partikel
2. Sebuah wadah bersifat isolasi termal terdiri atas 2 bagian, masing-masing dipisahkan oleh sebuah bahan insulator. Kedua ruang berisi gas ideal memiliki kapasitas panas tetap $c_v$. Salah satu ruang memiliki jumlah $v_i$ mol dan temperatur $T_1$ dan tekanan $\bar{p}_1$ dan yang lain $v_2$ mol dan tempertaur $T_2$ dan tekanan $\bar{p}_2$. Kemudian pembatas antara 2 ruangan dihilangkan dan gas mencapai kesetimbangan

(a) Tentukan tekanan akhir

(b) Tentukan perubahan entropi $\Delta S$ jika tipe gas berbeda

3. Pandang ada sejumlah $N$ partikel dengan interaksi antar partikel diabaikan. Masing-masing partikel memiliki spin $\frac{1}{2}$ dan momen magnet $mu$ dalam medan magnet $H$. Dengan menuliskan kesetimbangan hidrostatis untuk gas yang terletak antara ketinggian $z$ dan $z + dz$, turunkan persamaan untuk $n(z)$ dan jumlah molekul per $cm^3$ pada ketinggian $z$

# Jawaban

### Tugas 1

1. (a) Probabilitas langkah $n_1$ ke kanan dan $n_2 = N - n_1$ kekiri:

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n1}$$

Sehingga didapatkan persamaan binomial

$$\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) = (p+q)^N = 1$$

Untuk setiap fungsi $f(n_1)$ didapatkan

$$\begin{aligned}\overline{f(n_1)} &= \frac{\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) f(n_1)}{\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1)} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N} f(n_1) W(n_1)\end{aligned}$$

Dengan perpindahan rata-rata dari $m$:

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \overline{n_1 - n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N} (n_1 - n_2) W(n_1) \\ &= \sum_{n_1=0}^{N} \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) W(n_1) \\ &= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) \\ &= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) (p+q)^N\end{aligned}$$

Dengan nilai $p = q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overline{m} &= pN(p+q)^{N-1} - qN(p+q)^{N-1} \\ &= N(p+q)^{N-1}(p-q) \\ &= 0\end{aligned}$$

Untuk mencari nilai rata-rata $m^2$ yang memiliki kemiripan dengan nilai $m$:

$$\begin{aligned}
\overline{m^2} &= \overline{(n_1 - n_2)^2} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N} (n_1 - n_2)^2 W(n_1) \\
&= \sum_{n_1=0}^{N} \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right)^2 W(n_1) \\
&= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) \\
&= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) \left( N(p+q)^{N-2}(p-q) \right)
\end{aligned}$$

Dengan nilai $p = q = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\overline{m^2} &= pN(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}(p-q) \\
&\quad - qN(N-1)(p+1)^{N-2}(p-q) + qN(p+q)^{N-1} \\
&= N(p+q)^N + N(N-1)(p+q)^{N-2}(p-q)^2 \\
&= N \sum_{n_1=0}^{N} W(N_1) + N(N-1)(p+q)^{N-2}(p-q)^2 \\
&= N
\end{aligned}$$

(b) Hitung rata-rata $\overline{m^3}$ dan $\overline{m^4}$. Mencari nilai $\overline{m^3}$

$$\begin{aligned}
\overline{m^3} &= \overline{(n_1 - n_2)^3} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N} (n_1 - n_2)^3 W(n_1) \\
&= \sum_{n_1=0}^{N} \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right)^3 W(n_1) \\
&= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) \overline{m^2} \\
&= \left( p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} \right) \sum W(n_1) + N(N-1)(p+q)^N - 2(p-q)^2 \\
&= N^2(p+q)^{N-1}(p-q) + N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3}(p-q)^3 \\
&\quad + 2N(N-1)(p+q)^{N-1}(p-q) \\
&= [N + 2(N-1)\overline{m}] + N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3}(p-q)^3 \\
&= [3N - 2\overline{m}] + N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3}(p-q)^3
\end{aligned}$$

Kemudian dengan p=q=$\frac{1}{2}$ maka didapat,

$$\overline{m^3} = 0$$

Sehingga nilai $\overline{m^4}$ didapat dengan:

$$\begin{aligned}
\overline{m^4} &= \sum_{n_1=0}^{N} (n_1 - n_2)^4 W(n_1) \\
&= \sum_{n_1=0}^{N} \left(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}\right)^4 W(n_1) \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}\right) \overline{m^3} \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}\right) [3N-2]\,\overline{m} + N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3}(p-q)^3 \\
&= (3N-2)\overline{m^2} + 3N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-2}(p-q)^2 \\
&\quad + N(N-1)(N-2)(N-3)(p+q)^{N-4}(p-q)^4
\end{aligned}$$

dengan

$$N(N-1)(p+q)^{N-2}(p-q)^2 = \overline{m^2} - N\sum W(n_1)$$

maka,

$$\overline{m^4} = (6N-8)\overline{m^2} - (3N-6)N\sum W(n_1) + N(N-1)(N-2)(N-3)(p+q)^{N-4}(p-q)^4$$

Dengan nilai $p = q = \frac{1}{2}$ maka,

$$\overline{m^4} = (3N-2)N$$

2. Dengan

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$$

   (a) Jika $\ln(1-p) \approx -p$. Tunjukkan $(1-p)^{N-n}$

      - Dengan $n \ll N$ sehingga $N - n \approx N$

$$(1-p)^{N-n} = (1-p)^N$$

      - Kemudian meninjau ruas kanan

$$e^{(-Np)}$$

Sehingga didapat:

$$\begin{aligned}(1-p)^N &\approx e^{(-Np)}\\ \ln(1-p)^N &\approx \ln e^{(-Np)}\\ N\ln(1-p) &\approx -Np\end{aligned}$$

Dan dengan $\ln(1-p) \approx -p$, maka

$$-Np \approx -Np$$

Q.E.D.

(b) Tunjukkan bahwa $\dfrac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$

$$\begin{aligned}\frac{N!}{(N-n)!} &= \frac{N\times\cdots\times 3\times 2\times 1}{(N-n)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}\\ &= (N-n+1)\times(N-n+2)\times\cdots\times N\end{aligned}$$

Dengan $n \ll N$, sehingga:

$$\begin{aligned}\frac{N!}{(N-n)!} &= (N-n+1)\times(N-n+2)\times\cdots\times N\\ &= N^n + n^n + \cdots + (1^n - 1)\\ &= N^n\end{aligned}$$

(c) Tunjukkan bahwa $W(n) = \dfrac{\lambda^n}{(n!)e^{-\lambda}}$ dengan $\lambda = Np$ dikenal sebagai distribusi Poisson.

Dengan definisi distribusi Binomial

$$\begin{aligned}W(n) &= \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}\\ &= \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}p^n(1-p)^{N-n}\\ &= \frac{N^n\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}\\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}{n!(N-n)!}(Np)^n\left(1-\frac{Np}{N}\right)\end{aligned}$$

Ketika nilai $p \gg$ dan $N \ll$, maka:

$$W(n) = e^{-Np}\frac{(Np)^n}{n!}$$

Dengan $\lambda = Np$ yang merupakan definisi distribusi Poisson, maka:

$$W(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

3. (a) Mengambil batas distribusi binomial

$$
\begin{aligned}
\sum W_n &= \sum \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= 1 \quad \text{terbukti}
\end{aligned}
$$

(b) Distribusi poisson berasal dari distribusi binomial

$$\bar{n} = np$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\Delta \bar{n}^2 &= n \bar{-} \bar{n}^2 \\
&= n \bar{-} np^2 \\
&= n^2 (1 \bar{-} p)^2 \\
&= \sum_{n=0^N} n^2 (1-p)^2 W(n)
\end{aligned}
$$

**Tugas 2**

1. Hamiltonian: $H(x,p) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}kx^2 = E$

$$\begin{aligned}
\rightarrow\ H(0,p) &= \frac{p^2}{2m} = E \\
p &= \sqrt{2mE} \\
H(L,p) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kL^2 = E \\
p &= \sqrt{\frac{2mE}{p^2 + mkL^2}}
\end{aligned}$$

dengan 1 dimensi $\rightarrow$ 1N

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \int_{E \ll H \ll E\delta E} dx dx = \int_{E \ll H \ll E\delta E} d\omega \\
\omega &= \int_{E \ll H \ll E\delta E} L\, dp \\
&= \int_{\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE/p^2 + mkL^2}} Ldp \\
&= L\left(\sqrt{2mE}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{p^2 + mkL^2}}{\sqrt{p^2 + mkL^2}}\right)
\end{aligned}$$

2. (a) dengan probabilitas ensembel

$$P(x)dx = \sum \frac{W(\varphi)d\varphi}{dx/d\varphi}$$

dengan persamaan gemolmbang osilator harmonik

$$\frac{dx}{d\varphi} = A\sin(\omega t + \varphi)$$

maka,

$$\omega = (\varphi)d\varphi = \frac{d\varphi}{2\pi}$$

sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
P(x)dx &= \sum \frac{W(\varphi)d\varphi}{dx/d\varphi} \\
&= \frac{2dx}{2\pi A\sin(\omega t + \varphi)} \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}dx
\end{aligned}$$

(b) Dengan

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{dx}{d\varphi} = A\sin(\omega t + \varphi)$$

dan dengan

$$\omega(\varphi)\,d\varphi = (2\pi)^{-1}\,d\varphi$$

Sehingga didapatkan

$$p(x)dx = \frac{2\,dx}{2\pi A\sin(\omega t + \varphi)}$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\,dx$$

(c) Energi sebagai fungsi dari amplitudo

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$
$$= \frac{kA^2}{2}$$

Dengan kontur energi pada fase ruang sebanding dengan elips.
Dengan transformasi

$$p\prime^2 = \frac{p^2}{mk}$$

maka didapat lingkaran sebagai kontur energi, sehingga:

$$\rightarrow A^2 = x^2 + p\prime^2$$

dengan fase ruang volume berada diandata $E$ dan $E + \delta E$ yang direpresentasikan dengan luas $a$ diantara $A$ dan $A + \delta A$ dimana $\delta A$ merupakan fungsi

$$\omega(A)\delta A = 2\pi A\delta A$$

Untuk menemukan dimana bagian dari ruang fase diantara $x$ dan $dx$, gunakan koordinat polar

$$\cos\theta = \frac{x}{A}$$
$$d\theta = \frac{dx}{A\sin\theta} = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Sehingga area diantara dua bagian antara $x$ dan $dx$ adalah

$$\omega(x, A)\,dx\delta A = 2A\,d\theta\delta A$$
$$= \frac{2A\,dx\delta A}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

dan probabilitasnya dalah

$$\begin{aligned} P(x)dx &= \frac{\omega(x,A)dx\delta A}{\omega(A)\delta A} \\ &= \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} F &= F(x,y) \\ dF &= \frac{\partial F}{\partial x}\,dy + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy \\ \rightsquigarrow dF &= A\,dx + B\,dy \end{aligned}$$

dengan

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}$$

maka,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

dan

$$B = \frac{\partial F}{\partial y}$$

maka,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

sehingga

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_A^B dF &= F(B) - F(A) \\ &= F(x_N, y_N) - F(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Lintasan tertutup, maka $X_N \rightarrow X_0$ dan $y_N \rightarrow y_0$

$$\begin{aligned} \oint df &= \int_A^B dF \\ &= F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Tugas 3**

1. (a) Jumlah rata-rata molekul untuk setiap kotak
   Pada kotak besar
   - jumlah Ne $= 1000 \times \dfrac{3}{4} = 750$ molekul
   - jumlah He $= 100 \times \dfrac{3}{4} = 75$ molekul

   Pada kotak kecil
   - jumlah Ne $= 1000 \times \dfrac{1}{4} = 250$ molekul
   - jumlah He $= 100 \times \dfrac{1}{4} = 25$ molekul

   (b) Probabilitas dari 1000 molekul Ne dan 100 molekul N
   - molekul Ne pada kotak besar:

   $$P_{Ne} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1000}$$

   - molekul Ne pada kotak besar:

   $$P_{Ne} = \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$$

2. (a) Nilai mikrostate

   $$\Omega(N, n_\uparrow) = \frac{N!}{n_\uparrow!(N - n_\uparrow)}$$

   dengan energi medan magnet

   $$\begin{aligned} E &= (N - 2n_\uparrow)\mu B \quad \rightsquigarrow H = \frac{B}{\mu} \\ &= (N - 2n_\uparrow)\mu^2 B \end{aligned}$$

   dengan entropi

   $$S = k_B \ln \Omega = k_B \ln \left[\frac{N!}{n_\uparrow!(N - n_\uparrow)}\right] \rightsquigarrow n_\uparrow = \frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)$$

   dari formula stirling

   $$S = k_B \left[N \ln N - n_\uparrow \ln n_\uparrow - (N - n_\uparrow) \ln(N - n_\uparrow)\right]$$

   dan dari relasi termodinamik

   $$\begin{aligned} dE &= TdS - mdB \\ dS &= \frac{1}{T} dE + \frac{m}{T} dB \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) &= \frac{1}{T} \\ k_B \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} &= \frac{1}{T} \quad \rightsquigarrow \beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \\ k_B \beta &= \frac{1}{T}\end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} &= k_B \left[-\ln n_\uparrow - 1 + \ln(N - n_\uparrow + 1)\right] \left(-\frac{1}{2\mu^2 H}\right) \\ &= k_B \left[-\ln \left(\frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right) + \ln \left(N - \frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right)\right] \left(-\frac{1}{2\mu^2 H}\right)\end{aligned}$$

(b)

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{M}{T}$$

kemudian didapatkan

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right) = \frac{M}{T}$$

maka,

$$\begin{aligned}\frac{M}{T} &= k_B \left[-\ln \left(\frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right) + \ln \left(N - \frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right)\right] \left(\frac{E}{2\mu^3 H^2}\right) \\ M(H,T) &= k_B T \left[-\ln \left(\frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right) + \ln \left(N - \frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu^2 H}\right)\right)\right] \left(\frac{E}{2\mu^3 H^2}\right)\end{aligned}$$

3. Perubahan entropi diberikan oleh:

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T}$$

Dengan sistem $A$ berada pada temperatur lebih rendah dari sistem $A\prime$, sehingga

$$Q > 0 \quad \text{dan} \quad T \leq T\prime$$

maka didapat:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ}{T} > \int \frac{dQ}{T\prime} \\ &= \frac{Q}{T\prime}\end{aligned}$$

karena $T\prime$ konstan untuk reservoir panas, maka didapat:

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T\prime}$$

**Tugas 4**

1. (a)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_0}} = \frac{e^{-\beta(1+1/2)\hbar\omega}}{e^-\beta(0+1/2)\hbar\omega}$$

(b)

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\sum_r e^{-\beta E_r} E_r}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = \frac{E_o e^{-\beta E_o} + E_1 e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_o} + e^{-\beta E_1}} \\ &= \hbar\omega \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{P_1}{P_0}}{1 + \frac{P_1}{P_0}} = \frac{\hbar\omega}{2}\frac{1+3e^{-\beta\hbar\omega}}{1+e^{-\beta\hbar\omega}}\end{aligned}$$

2. Melabeli proton dengan indeks $i$, dengan $i$ berjalan dari 1 ke $N$, dan spin proton bernilai $s_i\mu$. Dengan energi state $\sum_i(-s_i\mu H)$, maka fungsi partisinya adalah

$$Z(T) = \sum_{s_1,\cdots,s_N} e^{1/kT \sum_i s_i\mu H}$$

dimana

$$\begin{aligned}Z(T) &= (Z_1(T))^N \\ Z_1(T) &= e^{-\mu H/kT} + e^{\mu H/kT}\end{aligned}$$

Energi internal dari sampel $U = -\sum_i s_i\mu H$ sebanding dengan perbedaan populasi. Sehingga didapat:

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\log(Z(T))$$

sehingga didapat

$$U = kT^2 N \frac{e^{+\mu H/kT} - e^{-\mu H/kT}}{e^{+\mu H/kT} + e^{-\mu H/kT}}\left(\frac{-\mu H}{kT^2}\right)$$

Dimana ketika $\mu H \ll kT$ mengganti eksponen dengan $e^x = 1 + x$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}U &\approx -N\mu H \frac{+\mu H/kT - (\mu H/kT)}{2} \\ &= -N\frac{\mu^2 H^2}{kT}\end{aligned}$$

dan daya berbanding terbalik dengan $T$

3. $PV = nRT$ dapat ditulis $P = \frac{\rho}{\mu}RT$ dengan $\mu$ adalah berat molekul

Dengan kesetimbangan hidrostatis: $\frac{dP}{dt} = -q\rho$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dz} &= -\frac{q\mu}{RT}P \\ \rightarrow \frac{dP}{P} &= -\frac{g\mu}{RT}dz\end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\ln P &= -\frac{\mu g}{RT} z \\
\rightarrow \ln P &= P_0 e^{-\dfrac{g\mu}{RT} z} \\
\ln P + z\frac{g\mu}{RT} &= 0 \rightarrow \frac{dN(z)}{dz} = \frac{\mu g}{RT} \\
\ln P + z\frac{g\mu}{RT} &= N(z) + z\frac{dN(z)}{dz}
\end{aligned}$$

**Tugas 5**

1. (a) Dari teorema equipartisi didapatkan

$$\begin{aligned}\langle EK\rangle &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \\ &= \frac{3}{2}k_BT\end{aligned}$$

   (b) Energi potensial rata-rata partikel

$$\langle EP\rangle = \int_0^L \frac{mgze^{-mgz/k_BT}dz}{e^{-mgz/k_BT}dz} = \frac{I_N}{I_D}$$

   dengan

$$\begin{aligned}\to I_D &= \int_0^L e^{-\dfrac{mgz}{k_BT}} dz = \int_0^L e^{-\alpha z}dz = \left(\frac{1-e^{-\alpha z}}{\alpha}\right) \\ \to I_N &= \int_0^L (mgz)e^{-mgz/k_BT}dz = mg\int_0^L ze^{-mgz/k_BT}dz \\ &= -mh\frac{\partial I_D}{\partial \alpha} = \frac{mg}{\alpha}\left[\frac{1-e^{-\alpha L}}{\alpha} - Le^{-\alpha L}\right]\end{aligned}$$

   Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}\langle EK\rangle &= \frac{I_N}{I_D} = mg\left[\frac{1}{\alpha} - Le^{-\alpha L}\right] \\ &= mg\left[\frac{k_BT}{mg} - \frac{L}{e^{mgL/k_BT}-1}\right]\end{aligned}$$

2. (a)

$$\bar{p_f} = \bar{p_1} + \bar{p_2}$$

   (b) Volume fasa ruang

$$\Omega(E) = \frac{1}{N_1!N_2!}\frac{1}{h^{3N}}\int dq \int \prod_{i=1}^{3N_1} dp_i \int \prod_{j=1}^{3N_2} dp_j \theta(E - H(p_i, q_j))$$

   Transformasi momentum

$$\begin{aligned}P_1 \to P_i &= \frac{P_i}{\sqrt{2m_1}} \rightsquigarrow dp_i = \sqrt{2m_1}\, dp_i \\ P_2 \to P_j &= \frac{P_j}{\sqrt{2m_2}} \rightsquigarrow dp_j = \sqrt{2m_2}\, dp_j\end{aligned}$$

maka,

$$\Omega = \frac{V^N (2m_1)^{3N_1/2} (2m_2)^{3N_2/2}}{h^{3N} N_1! N_2!} \int \prod_{i=1}^{3N} dp_i \theta \left( E - \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 \right)$$
$$= \frac{V^N (2m_1)^{3N_1/2} (2m_2)^{3N_2/2}}{h^{3N} N_1! N_2!} \frac{\pi^{3N_1/2} E^{3N_1/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}$$

dengan faktor massa reduksi $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\Omega = \frac{V^N \pi^{3N_1/2} (2\mu E)^{3N_2/2}}{h^{3N} N_1! \left(\frac{3N}{2}\right)!} \frac{N!}{N_1! N_2!} \left(\frac{m_1}{\mu}\right)^{3N_1/2} \left(\frac{m_2}{\mu}\right)^{3N_1/2}$$

Entropinya:

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \Omega \\ &= k_B \left[\ln \Omega_{\text{individu}} + \ln \Omega_{\text{campuran}}\right] \\ &= S_{\text{individu}} + S_{\text{campuran}} \end{aligned}$$

maka:

$$\frac{S_{\text{individu}}}{N k_B} = \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{4\pi \mu E}{3h^2 N} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2}$$

Untuk gas 1 dengan massa tereduksi

$$\frac{S_{N_1}}{N_1 k_B} = \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{4\pi m_1 E}{3h^2 N} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} + \ln \left( \frac{m_1}{\mu}^{3/2} \right)$$

Untuk gas 2

$$\frac{S_{N_1}}{N_1 k_B} = \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{4\pi m_2 E}{3h^2 N} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} + \ln \left( \frac{m_2}{\mu}^{3/2} \right)$$

Dan $\Delta S$ Entropinya

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{\text{individu}} + S_{\text{campuran}} - S_{N_1} - S_{N_2} \\ \frac{\Delta S}{k_B} &= -N_1 \ln \frac{N_1}{N} - N_2 \ln \frac{N_2}{N} \end{aligned}$$

3. $PV = nRT$ dapat ditulis $P = \dfrac{\rho}{\mu} RT$ dengan $\mu$ adalah berat molekul

   Dengan kesetimbangan hidrostatis: $\dfrac{dP}{dt} = -q\rho$, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\frac{q\mu}{RT} P \\ \rightarrow \frac{dP}{P} &= -\frac{g\mu}{RT} dz \end{aligned}$$

sehingga:

$$\ln P = -\frac{\mu g}{RT} z$$
$$\rightarrow \ln P = P_0 e^{-\frac{g\mu}{RT} z}$$
$$\ln P + z\frac{g\mu}{RT} = 0 \rightarrow \frac{dN(z)}{dz} = \frac{\mu g}{RT}$$
$$\ln P + z\frac{g\mu}{RT} = N(z) + z\frac{dN(z)}{dz}$$