

Vorlesungsmitschrift

Experimentalphysik III (Wellen und Quanten)

im WS2015/16 bei Prof. Dr. Christian Back

gesetzt von Hedwig Werner und Gesina Schwalbe

Stand: 14. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Historischer Überblick	4
1.2	Hierarchie der Beschreibung optischer Phänomene	4
1.3	Licht als elektromagnetische Welle	4
1.4	Das elektromagnetische Spektrum	4
2	Elektromagnetische Wellen	5
2.1	Wiederholung	5
2.2	Licht als elektromagnetische Welle	5
2.3	Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit	8
2.4	Lösung der Wellengleichung	9
2.5	Energie von Licht, Poynting-Vektor	10
2.6	Impuls von Licht	10
2.7	Wellenpakete	11
2.8	Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten	12
3	Dispersion von Licht	13
3.1	Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ϵ	13
3.2	Der Brechungsindex	14
3.3	Absorption von Licht	14
3.4	Detailbetrachtung	15
3.5	Das elektromagnetische Feld eines oszillierenden Dipols	15
3.6	Die Dispersion von dichten Medien	18
3.7	Brechungsindex und Absorption von Metallen	18
4	Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen	20
4.1	Randbedingungen der elektromagnetischen Welle	20
4.2	Reflexions- und Brechungsgesetz	20
4.3	Die Fresnel'schen Formeln	22
4.3.1	Linear Polarisiertes Licht	22
4.3.2	Zirkular polarisiertes Licht	22
4.3.3	Elliptisch polarisiertes Licht	22
4.3.4	Fresnel'sche Formeln	23
4.3.5	Senkrechter Lichteinfall	23
4.3.6	Beliebige Einfallswinkel	24
4.3.7	Totalreflexion und evaneszente Welle	28
4.3.8	Absorbierende Medien	28

5	Polarisation	30
5.1	Mathematische Formulierung	30
5.2	Polarisatoren	31
5.3	Doppelbrechung	32
5.3.1	Anwendungen anisotroper Materialien (natürliche Doppelbrechung)	35
5.3.2	Induzierte Doppelbrechung	36
6	Nichtlineare Optik	38
7	Geometrische Optik	39
7.1	Fermat'sches Prinzip	39
7.2	Die optische Abbildung	40
7.2.1	Paraxiale Objekte	40
7.2.2	Abbildungen mit Kugelspiegel	41
7.2.3	Abbildung durch brechende Kugelflächen	41
7.3	Optische Geräte	42
7.3.1	Sammel- und Zerstreuungslinsen	42
7.3.2	Lupe	43
7.3.3	Das Teleskop bzw. Fernrohr	43
7.3.4	Mondaufgang	44
7.4	Abbildungsfehler	45
7.4.1	Chromatische Aberration	45
7.4.2	Sphärische Aberration (Öffnungsfehler)	45
7.4.3	Koma	45
7.4.4	Astigmatismus	46
7.4.5	Bildfeldwölbung und -verzerrung	46
8	Wellenoptik	47
8.1	Fourier-Transformation	47
8.2	Beugung	51
8.2.1	Das Huygen'sche Prinzip	51
8.2.2	Die Fresnel'sche Beugung	51
8.2.3	Die Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungstheorie	52
	Symbolverzeichnis	55
	Index	59

1 Einführung

1.1 Historischer Überblick

siehe Folien

Versuche: Messung der Lichtgeschwindigkeit

1.2 Hierarchie der Beschreibung optischer Phänomene

- geometrische Optik
- Wellenoptik
- Elektromagnetismus
- Quantenoptik

1.3 Licht als elektromagnetische Welle

Eine wichtige Frage vorab ist: Was ist Licht? Teilchen oder Welle?

pro elektromagnetische Welle

- Licht transportiert Energie, auch im Vakuum
- Licht wechselwirkt mit Atomen/Materie (z.B. Absorption)
- Licht zeigt Brechungserscheinungen

Daraus folgt: **Licht ist elektromagnetische Welle**

pro Korpuskel

- Licht zeigt „Körnigkeit“, es besteht aus Energiequanten (Photonen) mit $E = h\nu$
- Licht stößt wie ein Teilchen (Compton-Effekt)

1.4 Das elektromagnetische Spektrum

Die Vorlesung „Wellen und Quanten“ beschäftigt sich mit den Eigenschaften elektromagnetischer (Hertzscher) Wellen über einem breiten Wellenlängenbereich von $10^{-15} \text{ m} \leq \lambda \leq 10^3 \text{ m}$. Zum Vergleich: Sichtbares Licht hat Wellenlängen im Bereich $350 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$.

2 Elektromagnetische Wellen

2.1 Wiederholung

Im Folgenden wird ein Überblick über die häufig gebrauchten Operatoren Gradient (grad), Rotation (rot), Divergenz (div), den Nabla-Operator ($\vec{\nabla}$) und den Laplace-Operator (Δ) gegeben.

Vektorableitungen: Für 3-dimensionale Vektoren verwendet man den *Nabla*-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Der *Gradient* einer skalaren Funktion $f = f(x, y, z)$ zeigt in die Richtung des größten Anstiegs.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Die *Divergenz* einer Vektorfunktion ist

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Die Divergenz ist ungleich null, wenn es Quellen oder Senken gibt (vgl. elektr. Ladung).

Der *Laplace-Operator* einer skalaren Funktion ist die *Divergenz des Gradienten*.

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Der Laplace einer Vektorfunktion wird komponentenweise gebildet.

$$\Delta \vec{f} = \vec{\nabla}^2 \vec{f} = \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} + \dots \right)$$

Die *Rotation* einer Vektorfunktion \vec{f} ist

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

Funktionen, die sich stark „winden“, haben eine starke Rotation.

2.2 Licht als elektromagnetische Welle

In dieser Vorlesung behandeln wir Lichtausbreitung in nicht-magnetischen Medien, d.h. man kann die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ setzen. Für nicht leitende Materialien ist zudem die Ladungsdichte ρ_{frei} und die Stromdichte j_{frei} gleich null. In Formeln also $\mu = 1$, $\rho_{\text{frei}} = 0$, $j_{\text{frei}} = 0$.

Lichtausbreitung in Vakuum oder in einem Dielektrikum

Im Dielektrikum muss man die **Maxwellgleichungen** (kurz **MWGl.**) für ein Medium mit **dielektrischer Verschiebung** verwenden. Weitere Annahmen sind

- lineare Optik
- isotropes Medium (Gase, Flüssigkeit, kubische Kristalle)

Mit diesen Annahmen gilt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$ die elektrische Feldkonstante ist und ε die relative *Dielektrizitätskonstante* des Mediums.

Achtung: in optisch anisotropen Medien wird ε durch einen Tensor ersetzt.

Elektrische und magnetische Felder sind wie folgt über die MWGl. verknüpft:

MWGl. für isolierendes nicht magnetisches Medium:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

mit magnetischer Feldkonstante $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$

MWGl. im Vakuum:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

mit ε_0, μ_0 „Materialparameter“ für Vakuum.

Effekte in Materie

In echter Materie können (mikroskopisch) Polarisationsladungen und Ampere'sche Kreisströme induziert werden, was

- mikroskopische elektrische Dipole
- mikroskopische Kreisströme

verursacht. Zur Vereinfachung betrachten wir makroskopische, örtlich gemittelte Größen.

Unterschiede zwischen freien und gebundenen Ladungen Es gilt allgemein für die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \vec{j}

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{gebunden}} \\ \text{analog } \vec{j} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}} + \vec{j}_{\text{Polarisation}}\end{aligned}$$

wobei $\vec{j}_{\text{mag}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ und $\vec{j}_{\text{Polarisation}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Die gebundenen Ladungsträger führen zu einer makroskopischen Polarisation \vec{P} (bzw. zur makroskopischen Magnetisierung \vec{M} im Fall der Stromdichte), welche sich auf die elektrische Verschiebung \vec{D} und die magnetische Feldstärke \vec{H} auswirkt:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}\end{aligned}$$

Für isotrope, lineare Materialien mit Dielektrizitätskonstante ϵ_r gilt

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \chi \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{D} &= (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \rho_{\text{frei}} &= \rho - \rho_{\text{Pol}} = \rho + \text{div } \vec{P} \\ \implies \text{div } \vec{P} &= -\rho + \rho_{\text{frei}} = -\rho_{\text{Pol}}\end{aligned}$$

Damit ergeben sich

MWGl. in Materie mit Spezialfall (isotropes, ungeladenes, unmagnetisches Medium)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_{\text{frei}} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Von den MWGl. zur Wellengleichung für das \vec{E} -Feld Wir erhalten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0 \text{ da } \rho = 0} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = -\Delta \vec{E}\end{aligned}$$

Setzen wir diese zusammen, folgen die *Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen*:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Allgemein Die allgemeine Form der Wellengleichungen (u.a. für elektromagnetische Wellen) sind Differentialgleichungen, die eine 2. Ableitung einer Größe nach der Zeit mit der 2. Ableitung der Größe nach dem Ort verknüpft:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

wobei $v_{ph} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit (*Phasengeschwindigkeit*) ist. Die Berechnungen oben liefern für ein Elektrische Feld, das sich in einem isolierenden, nicht magnetischen Material ausbreitet, die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \quad (2.1)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes in einem solchen Medium ist also

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot c$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **Achtung:** Nur im Vakuum (hier ist $\varepsilon = 1$) gilt $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = v_{ph}$! In anderen Medien ist Einfluss eines Mediums ist durch $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{n}$ gegeben. Der *Brechungsindex*

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

ist direkt mit der Wellenausbreitung verknüpft.

2.3 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

(s. Folien)

- Planetenmethode
- Zahnradmethode
- Drehspiegel

2.4 Lösung der Wellengleichung des elektrischen Feldes im Spezialfall

Einfachste Lösung der Wellengleichung (2.1) von oben (Ausbreitung eines Elektrischen Feldes in einem isolierenden, nicht magnetischen Material) ist die *ebene Welle*

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)$$

bzw. $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)}]$

Ebenfalls ist die *Kugelwelle* eine Lösung. Der Phasenterm ϕ legt den Nulldurchgang des Kosinus/Sinus fest. Die Lösung eingesetzt in die Wellengleichung führt zur *linearen Dispersionsrelation*:

$$\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Allgemein nennt man eine Beziehung, die den Betrag des Wellenvektors \vec{k} mit der Kreisfrequenz verknüpft, *Dispersionsrelation* (z. B. bei Photonen $\omega \propto k$, bei freien e^- ist $\omega \propto k^2$). Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi n}{\lambda} && \text{(Allgemein für beliebige Welle)} \\ \lambda &= \frac{2\pi n}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} \quad \text{mit } \nu = \frac{\omega}{2\pi} && \text{(Wellenlänge im Vakuum)} \\ \lambda_m &= \frac{\lambda}{n} && \text{(Wellenlänge im Medium)} \\ \omega(k) &= c \cdot k \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Weitere wichtige Beziehungen sind

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \\ c &= \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

Des weiteren gilt für \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} und \vec{k}

$$\vec{k} \perp \vec{D} \quad (\text{bzw. } \vec{E}) \qquad \vec{k} \perp \vec{B} \qquad \vec{E} \perp \vec{B} \qquad \vec{D} \perp \vec{B}$$

In optisch isotropen Medien gilt $\vec{E} \perp \vec{k}$ und $|\vec{E}| = \frac{c}{n} |\vec{B}|$. \vec{k} , \vec{D} , \vec{B} bilden ein rechtshändiges System. Elektromagnetische Wellen in isolierenden Medien sind transversale Wellen (Beweis siehe Folien) mit Ausbreitungsrichtung \vec{k} .

Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie werden fast immer durch die elektrische Feldstärke dominiert. Meist werden also nur \vec{E} -Felder diskutiert. Begründung: Betrachte die Kraft auf geladenes Teilchen, die durch Wechselwirkung entsteht

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{F_{\text{mag}}}{F_{\text{el}}} &= \frac{qvB}{qE} \underset{(B=\frac{1}{c}E)}{=} \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Daraus folgt: Für $v \ll c$ ist $F_{\text{mag}} \ll F_{\text{el}}$.

2.5 Energie von Licht, Poynting-Vektor

Licht kann Energie transportieren, z. B. von der Sonne zur Erde.

In der Elektrodynamik wird die Energiestromdichte einer elektromagnetischen Welle durch den *Poynting-Vektor* \vec{S} beschrieben.

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

Die zeitliche Mittelung von \vec{S} über eine Schwingungsperiode T des Feldes gibt einem die *Strahlungsflussdichte* (mittlere Lichtenergie pro Zeit und Fläche) und die *Lichtintensität* I . Mit $|\vec{E}| = \frac{c}{n}$ folgt

$$I := \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 n c \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

Im Speziellen gilt für eine ebene Welle $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)$ mit Bedingungen wie in (2.1) und Brechungsindex n

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi) dt = \frac{1}{2} |E_0|^2 \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 n c |E_0|^2 \end{aligned}$$

2.6 Impuls von Licht

Licht besitzt eine Impulsdichte (wichtig bei Absorption und Reflexion), eine Art „Strahlungsdruck“. Beschreibungen in den beiden Modellen:

Teilchenbild

Energie des Photons:	$E_{Ph} = \hbar\omega = h\nu$
Impuls des Photons:	$p = \frac{E_{Ph}}{c} = \hbar k$
Gesamtimpuls:	$p_{\text{ges}} = \frac{N E_{Ph}}{c}$
Intensität:	$I = \frac{N E_{Ph}}{\Delta t A} = \frac{\Phi h\nu}{A}$
mittlere Photonenflussdichte:	$\frac{\Phi}{A} = \frac{I}{n\nu}$

Wellenbild

Hier wird als Ursache die Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit einer zunächst ruhenden Ladung q gedeutet.

- Beschleunigung der Ladung im \vec{E} -Feld
- Aus dem Lichtfeld wird Leistung entnommen:
Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$
Geschwindigkeit \vec{v}_q
entnommene Leistung $L = qE v_q$
- das sich jetzt bewegende Elektron erfährt eine Lorentzkraft \vec{F}_{Lorentz} im \vec{B} -Feld ($\vec{B} \perp \vec{E}$ und $\vec{B} \perp \vec{k}$)
- \vec{F}_{Lorentz} zeigt in Richtung von \vec{k}

2.7 Wellenpakete

Die Wellengleichung erfüllt das Superpositionsprinzip, d.h. sind \vec{E}_1 und \vec{E}_2 Lösungen der Wellengleichung, dann ist auch $\vec{E}_s = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ eine Lösung (verwende Fouriertransformation). Durch Addition von Wellen verschiedener Frequenzen (ω_j wird zu $j\omega_0$) und Amplituden (E_{0j} wird zu beliebigem $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit Perioden $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) lassen sich beliebige Lösungen der Wellengleichung konstruieren. Z. B. bei $\vec{r} = 0$:

$$\vec{E}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{0j} \exp(i\omega_j t)$$

oder bei kontinuierlicher Verteilung der Frequenzkomponenten

$$\vec{E}(t) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.2)$$

was gerade die Fourierreihe (erster Fall) bzw. die Fouriertransformation von $\vec{E}(\omega)$ ist. Da $\vec{E}(t)$ eine reelle Größe ist, kann man auch $E_0(\omega) = E_0^*(-\omega)$ schreiben. Die Rücktransformation ist:

$$\vec{E}(\omega) = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.3)$$

Je nachdem, ob man die normierte Fouriertransformation durchführt oder nicht, ist der Vorfaktor $c_1 = \frac{1}{2\pi}$ in (2.2) und $c_2 = 1$ in (2.3), oder beide Male $c_1, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Der Frequenz- und der Zeitraum sind durch die eindeutigen Transformationen äquivalent. Die eindimensionale Darstellung ist:

$$E(\omega) = A \exp\left(-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right) + A \exp\left(-\left(\frac{\omega + \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right) \quad (2.4)$$

Einsetzen in Gleichung (2.2)

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} E(\omega) \exp(i\omega t) \\
 &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\delta\omega}{2} \exp\left[-\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 t^2\right] (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \\
 &= \frac{A\delta\omega}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 t^2\right] \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

Das Resultat ist ein Wellenpaket mit Schwingungsfrequenz ω_0 und zeitlich modulierter Amplitude mit $\delta\omega\delta t = 2$

$$\Delta\omega_F \Delta t_F = 8 \ln(2) \approx 5,55$$

Es sind auch andere Einhüllende möglich, z. B. so dass $\Delta\omega_F \Delta t_F \approx 2\pi$, $\Delta\nu_F \Delta t \approx 1$.

2.8 Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten

Ein Lichtimpuls breitet sich *nicht* mit der Phasengeschwindigkeit $v_{\text{Ph}} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n}$, sondern mit der *Gruppengeschwindigkeit* aus.

$$v_{\text{gr}} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} \quad (2.5)$$

Wichtig! Zur Berechnung der Gruppengeschwindigkeit benötigen wir die *Dispersionrelation* $\omega(k)$. Für Licht gilt $\omega = \frac{c}{n}k$, also für $n = n(k)$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

3 Dispersion von Licht

Die Ausbreitung von Licht hängt vom Brechungsindex $n = n(\omega)$ ab. $n(\omega)$ bestimmt die Geschwindigkeit von Licht, das Auseinanderfließen von Lichtimpulsen, Ablenkungen und Reflexion an Grenzflächen.

3.1 Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ε

I.A. ist ε ein Tensor mit ω -Abhängigkeit. Vergleicht man die statische Dielektrizitätskonstante bzw. den Brechungsindex $n_0 = \sqrt{\varepsilon(\omega=0)}$ mit $n = \sqrt{\varepsilon(\omega=589\text{ nm})}$, ist ein Unterschied zu erkennen! Typischerweise zeigt ε die Resonanzen an. Die Ursache ist mikroskopisch, da die Elektronenwolke gegenüber dem Atomkern durch das \vec{E} -Feld ausgelenkt wird.

einfaches Modell:

- ∞ -schwerer Kern
- negativ geladenes Elektron

Dies ist vereinfacht mit dem Modell des harmonischen Oszillators zu beschreiben. Berechne $x(t)$ der Elektronenwolke und daraus das Dipolmoment bzw. die Polarisation \vec{P} . Es folgt $\varepsilon(\omega)$ über $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E}$ mit der treibenden Kraft $\vec{F}(t) = -e\vec{E}(t) = -e\vec{E}_0 \exp(i\omega t)$, wobei $\vec{E} \parallel \vec{x}$ und \vec{E}_0 reell ist. Daraus erhält man die Bewegungsgleichung für einen 1-dim. harmonischen Oszillator mit schwacher Dämpfung:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0 x = \frac{1}{m}F(t) = \frac{-e}{m}E_0 \exp(i\omega t)$$

Lösung: $x(t) = \frac{-e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t)$

Wenn man nun noch die Teilchendichte N (Teilchen pro Volumen) dazunimmt, erhält man:

$$P(t) = -ex(t)N = \frac{eN^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t) = (\varepsilon(\omega) - 1)\varepsilon_0 E(t)$$

Daraus erhält man die frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

Bei einem Medium mit verschiedenen Atomen/Molekülen summiert man über die Dielektrizitätskonstanten und man erhält

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{N_j}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

3.2 Der Brechungsindex

Am einfachsten ist die Betrachtung eines verdünnten Mediums, d. h. man ist weit weg von Resonanzerscheinungen (s. Folien). Dazu machen wir folgende Annahmen:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &\approx 1 \\ |\Delta\varepsilon| &\ll 1 \\ \implies n(\omega) &= \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1\end{aligned}$$

Mit dieser Schätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}\varepsilon - 1 &= n^2 - 1 = \underbrace{(n+1)(n-1)}_{\approx 2} \approx 2(n-1) \\ n-1 &\approx \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \cdot 2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}n_R &= 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} && \text{Realteil} \\ n_I &= \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} && \text{Imaginärteil}\end{aligned}$$

Oft schreibt man n' für den Realteil, genannt *reelle Brechzahl*, und k für den Imaginärteil, genannt *Absorptionsindex*:

$$n(\omega) = n'(\omega) - ik(\omega)$$

3.3 Absorption von Licht

Wir nehmen eine *ebene Welle* $E(z, t)$ an, welche in z -Richtung mit Wellenvektor $k = \frac{n\omega}{c}$ propagiert, in einem Medium mit $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}E(z, t) &= E_0 \exp(i\omega t - ikz) \\ &= E_0 \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega n_R}{c} \cdot z + \frac{\omega n_I}{c} \cdot z \right] \\ &= \left(E_0 \exp \left(\frac{\omega n_I}{c} \cdot z \right) \right) \exp \left(i\omega t - \frac{i\omega n_R}{c} \cdot z \right)\end{aligned}$$

Die Amplitude der Welle wird exponentiell gedämpft, falls $n_I < 0$, was fast immer der Fall ist (aber z.B. nicht bei Lasermedien). Daraus folgt für die Intensität der ebenen Welle

$$I(z) = I(0) \exp\left(\frac{2\omega n_I z}{c}\right) = I(0) \exp(-az)$$

wobei $a = -\frac{2\omega n_I}{c}$ *Extinktionskoeffizient* genannt wird. Es ist

$$a = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Das Verhältnis von Intensität zu Nullintensität wird Transmission T genannt

$$T := \frac{I(z)}{I(0)} = \exp(-az) \quad \text{Lambert-Beersches Gesetz}$$

Achtung: Imaginärteil und Realteil des Brechungsindex sind nicht unabhängig voneinander! Die Relation zwischen ihnen wird *Kramer-Kronis-Relation* genannt:

$$(\operatorname{Re}(n(\omega)))^2 - 1 = \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty \frac{a(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Diese Relation ist wichtig für die optische Spektroskopie.

3.4 Wie sieht das im Detail aus?

Die zu erzwungenen Schwingungen angeregten Atome (Elektronenwolken) im Medium strahlen mit der Anregungsfrequenz, aber mit *verzögerter Phase* ab (s. Mechanik)

3.5 Das elektromagnetische Feld eines oszillierenden Dipols

Die Licht-Materie-Wechselwirkung wird in erster Linie durch die Wechselwirkungen elektromagnetischer Wellen mit atomaren Dipolen beschrieben. Es wird hierzu das elektrische und magnetische Feld eines strahlenden Dipols berechnet. Wir werden im Folgenden das \vec{B} -Feld betrachten (das \vec{E} -Feld wird von den Maxwell-Gleichungen beschrieben).

Es gilt für das Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, wobei

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) dV_2}{|\vec{r}_{12}|}$$

Achtung: für $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}_2, t)$ ergibt sich eine Retardierung, da sich das Feld nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Damit hängt $\vec{A}(\vec{r}_1, t)$ von $\vec{j}(\vec{r}_2)$ zur Zeit $t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c}$ ab:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c}\right)}{|\vec{r}_{12}|} dV_2$$

Im Fernfeld (d. h. $|\vec{r}_{12}| \gg l$) gilt mit $\vec{j} = \vec{v}\rho$

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} \int \vec{v}\rho \left(\vec{r}_2, t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c} \right) dV_2$$

wobei $\rho dV_2 = dq$ und $\int \rho dV = q$ für die Ladung q gilt.

Das elektrische Dipolmoment \vec{p} wird beschrieben durch

$$\vec{p}(t) = q \underbrace{d_0 \sin(\omega t)}_{\vec{d}(t)} \hat{e}_z = q\vec{d}(t)$$

mit d_0 als maximale Auslenkung der Ladung nach einer Viertel Periode.

Jetzt verwenden wir $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin(\omega t)$ und $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \dot{\vec{p}} = q\vec{v}$. Damit erhält man

$$\vec{A}(t)(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} \frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r_{12}}{c})}{\partial t}$$

mit $\omega(t - \frac{r_{12}}{c}) = \omega t - r_{12} \frac{2\pi}{\lambda} = \omega t - kr_{12}$ (k als Wellenvektor) sowie $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = q \cdot d_0 \omega \cos(\omega t) \hat{e}_z$. Insgesamt ergibt sich ein zeitlich veränderliches Vektorpotential, das sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{1}{r_{12}} q \cdot d_0 \omega \cos(\omega t - kr_{12}) \vec{e}_z}_{\text{Kugelwelle mit } c = \frac{\omega}{k}}$$

Zusammengefasst erzeugt eine oszillierende Ladung ein Vektorfeld \vec{A} , welches wiederum \vec{B} und \vec{E} erzeugt.

Es bleibt die Frage, wie sieht das \vec{B} -Feld am Ort P aus? Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} & \text{mit } \vec{A} &= (0, 0, A_z) \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt, das \vec{B} -Feld liegt in der x - y -Ebene. Die genaue Formel für B_x ist

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\dot{p} \left(t - \frac{r_{12}}{c} \right) \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left(\dot{p} \left(t - \frac{r_{12}}{c} \right) \right) \right]$$

Definiere zur Vereinfachung $u = t - \frac{r_{12}}{c}$, dann ist $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u}$ und $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c}$. Außerdem gilt $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, d.h.

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\ddot{p} \frac{1}{c} \frac{y}{r}$$

Damit gilt dann

$$B_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{p} \frac{y}{r^3} + \ddot{p} \frac{y}{cr^2} \right]$$

B_y analog. Insgesamt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r^3} \left[\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right]$$

Wegen $\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}$ gilt $\vec{B} \perp \vec{p}_{\text{Dipol}}$ und $\vec{B} \perp$ Ausbreitungsrichtung. Damit folgen zwei Terme für \vec{B} :

1. Nahfeld $\propto \dot{\vec{p}} \propto \frac{1}{r^2}$
2. Fernfeld $\propto \ddot{\vec{p}} \propto \frac{1}{r}$

Daher kommen die Terme

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \underbrace{\mu_0 \vec{j}}_{\text{Nahfeld}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Fernfeld}}$$

wobei das \vec{E} -Feld über die Maxwell-Gleichungen beschrieben wird.

Ergebnisse im Fernfeld

- \vec{E} und \vec{B} sind Pulse.
- $E = cB$ (für elektromagnetische Wellen)
- Das \vec{B} -Feld beschreibt konzentrische Kreise um die Dipolachse, $\vec{E} \perp \vec{B}$.
- Im großen Abstand sind \vec{B} und \vec{E} linear polarisierte ebene Wellen.
- Das abgestrahlte Feld ist proportional zur Dipolbeschleunigung und die Amplitude nimmt proportional zu $\frac{1}{r}$ ab.

Zusammengefasst haben wir folgende Formeln:

$$|\vec{E}| \propto |\vec{B}| \propto \frac{\dot{\vec{p}}(\vec{r}, t)}{r}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{p_0 \omega^2}{r} \sin \theta \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Die Intensität ist dabei $\propto \sin^2 \theta$. Die gesamte vom Dipol abgestrahlte zeitlich gemittelte Leistung dabei beträgt:

$$\langle P_{em} \rangle = \frac{q^2 \omega^4 d_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \propto \omega^4$$

3.6 Die Dispersion von dichten Medien

Bisher lagen die Werte für n bzw. ε nahe bei 1. Jetzt betrachten wir $\varepsilon > 1$ und mehrere Resonanzen (beispielsweise bei verschiedenen Molekülsorten). Bei mehreren Atomen im System erhält man folgende Gleichung

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j N_j}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad (3.1)$$

wobei f_j die Oszillatorstärke, γ_j die Dämpfungskonstante, e die Elementarladung und m_e die Elektronenmasse ist. Zur Berechnung des Brechungsindex verwendet man oft die *Sellmeier-Beziehung*:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{\lambda^2 - C_i^2}$$

A , B_j , C_j werden aus Messungen von $n(\lambda)$ bestimmt. Oft genügt der erste Term (z. B. beim sichtbaren Bereich, für nicht absorbierende Materialien).

- Im sichtbaren (z. B. Gläser) nimmt $n(\omega)$ über weite Bereiche mit ω zu. Diese nennt man die „*positive* oder *normale Dispersion*“ mit $\frac{dn}{d\omega} > 0$ und $\frac{dn}{d\lambda} < 0$.
- Nahe bei den Resonanzen findet man $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ und $\frac{dn}{d\omega} < 0$. Diese nennt man die „*negative* oder *anormale Dispersion*“. Der Imaginärteil ist hier wesentlich von null verschieden, deshalb absorbiert das Material.

Transparente Materialien Dispersion im sichtbaren Bereich ist dominiert von einer elektronischen Resonanz im UV-Bereich. Die Dispersion bei transparenten Materialien ist ähnlich.

3.7 Brechungsindex und Absorption von Metallen

Metalle sind in erster Linie ein freies Elektronengas. Ein See von Leitungselektronen führt zu hoher Leitfähigkeit. Eine charakteristische Größe ist die Streuzeit τ bzw. die Stoßfrequenz $\frac{1}{\tau}$. Für diese gilt

$$\tau = \frac{\sigma_0 m_e}{N e^2}$$

wobei N die Teilchenzahldichte ist. Die Streuzeit liegt in einer Größenordnung von ca. 10^{-14} bis 10^{-15} . Für Frequenzen der elektromagnetischen Wellen $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ (Dämpfung vernachlässigbar) kann man im einfachsten Modell schreiben

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.2)$$

mit *Plasmafrequenz* $\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m_e}$. Aus der Gleichung 3.2 folgt für

große Frequenzen ($\omega > \omega_p$): Hier ist die Dielektrizitätskonstante positiv und somit der Brechungsindex reell. Daher gibt es keine Absorption.

kleine Frequenzen ($\omega < \omega_p$): Hier ist die Dielektrizitätskonstante negativ und somit der Brechungsindex rein imaginär. Also es gibt Absorption.

Wenn man nun aber ein realistischeres Metall betrachtet, also ein Medium mit Dämpfung, erhält man folgende Gleichungen

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m_e} \tau = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\gamma} \quad \text{mit } \tau = \frac{1}{\gamma}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \quad \text{aus (3.1)}$$

Anschaulich:

$0 < \frac{1}{\tau}$ (**normaler Skineffekt**) Die Eindringtiefe fällt mit wachsender Frequenz proportional zu $\sqrt{\omega}$ ab.

$\frac{1}{\tau} < \omega < \omega_p$ (**anormaler Skineffekt**) Die Eindringtiefe ist konstant mit $\frac{1}{a} = \frac{c}{2\omega_p}$.

$\omega_p < \omega$ (**normale Wellenausbreitung**) Das Material ist transparent.

4 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

4.1 Randbedingungen der elektromagnetischen Welle

Wir wollen jetzt Wellenausbreitung in inhomogenen Medien beschreiben, z. B. den Übergang von Medium 1 nach Medium 2, also einer Grenzfläche.

Randbedingungen der MWGl.: Für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle muss gelten:

- Die Tangentialkomponenten von \vec{E} und $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$ sind stetig.
- Die Normalkomponenten von $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ und \vec{B} sind ebenfalls stetig (Erinnerung: Für isotrope, isolierende, nicht magnetische Medien gilt $\mu_r =: \mu = 1$).

Einfachster Fall: Wir betrachten zwei homogene Medien mit Brechungsindex n_e (einfallender Strahl) und n_t (transmittierte Welle). Der Winkel α liegt zwischen \vec{k}_e und \vec{e}_y bzw. zwischen \vec{k}_t und \vec{e}_y . Wir nehmen an, dass es eine fest vorgegebene einlaufende Welle ist.

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= \vec{E}_{0,e} \cos(\omega_e t - \vec{k}_e \vec{r}) = \vec{E}_{0,e}(\phi_e(\vec{r}, t)) \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0,r} \cos(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r} + \varphi_r) = \vec{E}_{0,r}(\phi_r(\vec{r}, t)) \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{0,t} \cos(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r} + \varphi_t) = \vec{E}_{0,t}(\phi_t(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

Die Wellenvektoren \vec{k}_e , \vec{k}_r und \vec{k}_t müssen die Dispersionsrelationen im jeweiligen Medium erfüllen. Die *Phasenfaktoren* φ_r , φ_t bestimmen die Phasenlage relativ zur einlaufenden Welle.

4.2 Reflexions- und Brechungsgesetz

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche ist wichtig für den Wellenverlauf. Daher muss man die Randbedingung annehmen, dass die x - und die z -Komponente von \vec{E} und \vec{H} stetig sein müssen. Z. B. ist für

$$\begin{aligned}E_{0_{ex}} \cos(\phi_e(\vec{r}, t)) + E_{0_{rx}} \cos(\phi_r(\vec{r}, t)) &= E_{0_{tx}} \cos(\phi_t(\vec{r}, t)) \\ E_{0_{ez}} \cos(\phi_e(\vec{r}, t)) + E_{0_{rz}} \cos(\phi_r(\vec{r}, t)) &= E_{0_{tz}} \cos(\phi_t(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

die notwendige Bedingung, dass für alle t und alle \vec{r} mit $y = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\phi_e(\vec{r}, t) &= \phi_r(\vec{r}, t) = \phi_t(\vec{r}, t) \quad \text{bzw.} \\ \omega_e t - \vec{k}_e \vec{r} &= \omega_r t - \vec{k}_r \vec{r} = \omega_t t - \vec{k}_t \vec{r}\end{aligned}$$

Diese ist nur erfüllbar, wenn folgendes gilt

- $\omega_e = \omega_r = \omega_t$.
Achtung: Es ist eine Wellenlängenänderung möglich.
- Die Ebenengleichungen

$$\begin{aligned}\vec{k}_e \vec{r} &= \vec{k}_r \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{k}_e - \vec{k}_r) \vec{r} = 0 \\ \vec{k}_e \vec{r} &= \vec{k}_t \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{k}_e - \vec{k}_t) \vec{r} = 0\end{aligned}$$

D. h. die Vektoren $(\vec{k}_e - \vec{k}_r)$ und $(\vec{k}_e - \vec{k}_t)$ müssen senkrecht auf der Ebene $y = 0$ stehen.

Daraus folgt, dass die Komponenten \vec{k}_e und \vec{k}_r parallel zur Grenzfläche gleich sein müssen:

$$\vec{k}_e = \vec{k}_r$$

Setzt man hier nun die Dispersionsrelation $\vec{k}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$ ein, erhält man $k_{eG} = \frac{\omega n_e}{c} \sin \alpha = k_{rG} = \frac{\omega n_e}{c} \sin \alpha'$, umgeschrieben das *Reflexionsgesetz*

$$\sin \alpha = \sin \alpha'$$

Die Oberflächennormalen \vec{e}_y und \vec{k}_e spannen die Einfallsebene auf, in der auch \vec{k}_r liegen muss (d. h. keine Seitwärtsreflexion).

Transmittierter Strahl Für den transmittierten Strahl erhält man analog $\vec{k}_{e_r} = \vec{k}_{t_G}$ und daraus wieder mit der Dispersionsrelation $k_{e_G} = \frac{\omega n_e}{c} \sin \alpha = k_{t_G} = \frac{\omega n_t}{c} \sin \beta$, also das sog. *Snellins'sche Brechungsgesetz*

$$n_e \sin \alpha = n_t \sin \beta \quad (4.1)$$

Es gilt anschaulich

$n_e < n_t$ zum Lot hin gebrochen

$n_e > n_t$ vom Lot weg gebrochen

und mit relativem Brechungsindex $n_{et} = \frac{n_e}{n_t}$ lässt sich (4.1) umformen zu

$$\sin \alpha = n_{et} \sin \beta$$

4.3 Die Fresnel'schen Formeln

Die in diesem Kapitel behandelten *Fresnel'schen Formeln* beschreiben den Reflexionsgrad einer Grenzfläche. Dieser hängt von der *Polarisation* ab.

4.3.1 Linear Polarisiertes Licht

Es sei $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$. Definiere $\vec{k} = (0, 0, k_z)$, dann liegt \vec{E} in der x - y -Ebene mit

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \begin{pmatrix} E_{x,0} \cos(k_z z - \omega t) \\ E_{y,0} \cos(k_z z - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass eine Phasendifferenz zwischen E_x und E_y möglich ist. Für $\phi = 0$ bzw. $\phi = \pm m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) gilt

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{x,0} \\ E_{y,0} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(k_z z - \omega t)$$

Die Richtung von \vec{E}_0 ist nicht zeitabhängig.

4.3.2 Zirkular polarisiertes Licht

Zirkular polarisiertes Licht ist der Spezialfall $E_{x,0} = E_{y,0} = E_0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$ (wieder $m \in \mathbb{N}$), in Formel

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) \\ \cos(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2} + m\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) \\ \pm \sin(k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist der Betrag der Feldstärke zeitlich konstant und der \vec{E} -Vektor beschreibt eine Helixbahn (s. Folien), während m den Drehsinn bestimmt. Die Unterscheidung zwischen rechts und links zirkular ist:

rechts zirkulares Licht Blick zur Lichtquelle, \vec{E} rotiert im Uhrzeigersinn

links zirkulares Licht Blick zur Lichtquelle, \vec{E} rotiert gegen den Uhrzeigersinn

4.3.3 Elliptisch polarisiertes Licht

Hier gilt $E_{x,0} \neq E_{y,0}$ und φ ist beliebig. Dann Beschreibt der \vec{E} -Vektor eine Ellipse in x - y -Richtung.

4.3.4 Fresnel'sche Formeln

Bisher wurden nur die Phase und damit die Ausbreitungsvektoren betrachtet. Jetzt betrachten wir die Amplituden. Dazu spaltet man die Felder in Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene auf:

E_s **bzw.** E_\perp Feldvektor schwingt senkrecht zur Einfallsebene; E_s ist automatisch tangential zur Grenzfläche

E_p **bzw.** E_\parallel Feldvektor schwingt in der Einfallsebene

4.3.5 Senkrechter Lichteinfall

Wir nehmen für senkrechten Lichteinfall folgende Randbedingungen für das elektrische und magnetische Feld an

$$\vec{E}_{0_e} + \vec{E}_{0_r} = \vec{E}_{0_t} \quad (4.2)$$

$$\vec{H}_{0_e} + \vec{H}_{0_r} = \vec{H}_{0_t} \quad (4.3)$$

Verwendet man die MWGl $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ und setzt alles in die ebene Welle ein, erhält man

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\frac{\partial E_{0,z} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{\partial y}}{\frac{\partial E_{0,x} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{\partial x}} - \frac{\frac{\partial E_{0,y} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{\partial z}}{\frac{\partial E_{0,z} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{\partial y}} \right) = -\frac{\partial \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{\partial t} \\ & \iff \begin{pmatrix} E_{0,z} \cdot ik_y - E_{0,y} \cdot ik_z \\ E_{0,x} \cdot ik_z - E_{0,z} \cdot ik_x \\ E_{0,y} \cdot ik_x - E_{0,x} \cdot ik_y \end{pmatrix} = -\vec{B}_0 \cdot (-i\omega) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \vec{B} \quad \text{bzw.} \\ \vec{B}_0 &= \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Setze (4.4) in (4.3) ein und erhalte

$$\frac{1}{\omega} (\vec{k}_e \times \vec{E}_{0,e}) + \frac{1}{\omega} (\vec{k}_r \times \vec{E}_{0,r}) = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_t \times \vec{E}_{0,t})$$

da $\vec{k} \perp \vec{E}$ und $\vec{k}_e = -\vec{k}_r$, $\vec{k}_t = \frac{n_t}{n_e} \vec{k}_e$. Daraus erhält man

$$n_e \vec{E}_{0,e} - n_r \vec{E}_{0,r} = n_t \vec{E}_{0,t}$$

Eliminiere $\vec{E}_{0,t}$ durch Einsetzen von (4.2)

$$\begin{aligned}\vec{E}_{0,r} &= \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \vec{E}_{0,e} = r \vec{E}_{0,e} & r &= \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} & (\text{Reflexionskoeffizient}) \\ \vec{E}_{0,t} &= \frac{2n_e}{n_e + n_t} \vec{E}_{0,e} = t \vec{E}_{0,e} & t &= \frac{2n_e}{n_e + n_t} & (\text{Transmissionskoeffizient})\end{aligned}$$

05.11.2015

$n_e > n_t$: Wenn Licht von optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium übergeht, ist der Reflexionskoeffizient größer null. Daraus folgt, dass $\vec{E}_{0,r}$ und $\vec{E}_{0,e}$ in die gleiche Richtung zeigen und die Wellen an der Grenzschicht in Phase sind.

$n_e < n_t$: Wenn Licht aus einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium übergeht, wird der Reflexionskoeffizient kleiner Null und $\vec{E}_{0,r}$ und $\vec{E}_{0,e}$ zeigen in antiparallele Richtungen. Außerdem liegt bei der Reflexion ein Phasensprung von π vor, bei Transmission aber nicht.

Da die reflektierte Intensität nur proportional zu $|\vec{E}|^2$ ist, spielt der Phasenfaktor keine Rolle.

Reflexionsgrad der Intensität

$$R = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right)^2 = \left(\frac{n_{et} - 1}{n_{et} + 1} \right)^2 = \left(\frac{1 - n_{te}}{1 + n_{te}} \right)^2$$

Der Reflexionsgrad ist unabhängig davon, von welcher Seite das Licht einfällt. Er hängt allein von der Änderung des relativen Brechungsindex ab. Wird das Licht aber absorbiert, wird der Reflexionskoeffizient komplex und kann geschrieben werden als

$$R = |r|^2 = r r^*$$

Beispiel:

Übergang	relativer Brechungsindex	Reflexion in %
Luft – Glas	1,5	4 %
Luft – Diamant	2,41	17 %

4.3.6 Beliebige Einfallswinkel α

Zunächst betrachten wir ein \vec{E} -Feld, das parallel zur Einfallsebene schwingt und p-polarisiert (d. h. parallel zur Einfallsebene) ist. Im Folgenden werden die Tangentialkomponenten mit dem Index T versehen und die Normalkomponenten mit dem Index N . Betrachte außerdem noch die Setigkeitsbedingungen für \vec{E} und $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$.

$$\begin{aligned}E_{eN} &= E_e \sin \alpha & E_{tN} &= E_t \sin \beta & E_{rN} &= E_r \sin \alpha \\ E_{eT} &= E_e \cos \alpha & E_{tT} &= E_t \cos \beta & E_{rT} &= -E_r \cos \alpha\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen und der Snellschen Formel, erhalten wir daraus die *Fresnelschen Formeln*, wobei r_p der Reflexionskoeffizient für p-polarisiertes Licht ist.

$$r_{\parallel} = r_p = \frac{n_t \cos \alpha - n_e \cos \beta}{n_t \cos \alpha + n_e \cos \beta} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (4.5)$$

$$r_{\perp} = r_s = \frac{n_e \cos \alpha - n_t \cos \beta}{n_e \cos \alpha + n_t \cos \beta} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (4.6)$$

Die Amplituden der reflektierten \vec{E} -Felder erhält man durch Multiplikation der Amplituden des emittierten \vec{E} -Felder mit den Reflexionskoeffizienten.

Transmittierte Leistung P_t und Intensität I_t

Wenn man nicht direkt an den Amplituden sondern an der Leistung interessiert ist, kann man diese auch über den Transmissionsgrad $T^P = \frac{P_t}{P_e}$ (bzw. bei der Intensität $T^I = \frac{I_t}{I_e}$) berechnen. Aufgrund der Energieerhaltung gilt $P_e = P_r + P_t$ und man erhält

$$T_{\parallel}^P = 1 - |r_{\parallel}|^2 \quad \text{sowie} \quad T_{\perp}^P = 1 - |r_{\perp}|^2$$

Für die Berechnung der Intensität ist allerdings die Änderung der Fläche zu berücksichtigen, da sich die Ausdehnung des Lichtstrahls auf der Einfallsebene und im transmittierten Strahl ändert.

$$d' = \frac{d}{\cos \alpha} \quad d_t = d' \cos \beta$$

Nun kann man folgende Gleichungen formulieren

$$T^P = \frac{P_t}{P_e} = \frac{I_t A_t}{I_e A_e} = \frac{I_t \cos \beta}{I_e \cos \alpha} = \frac{n_t |t|^2 \cos \beta}{n_e \cos \alpha}$$

$$T^I = \frac{I_t}{I_e} = T^P \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = |t|^2 \frac{n_t}{n_e}$$

Diskussion der Fresnel'schen Formeln: Reflexionsgrad bei Lichteinfall aus einem optisch dünnerem Medium

Ein Beispiel hierfür ist der Übergang von Luft in Gas mit $\frac{n_t}{n_e} = 1,5$. Betrachte nun die Winkelabhängigkeit von $R = |r|^2$ aus den Fresnel'schen Formeln 4.5 und 4.6. Bei Erhöhung des Winkels steigt R_{\perp} stetig von 4 % bis 100 % an. R_{\parallel} sinkt hingegen anfangs bis zu einem gewissen Winkel auf Null ab. Dieser Winkel wird auch *Brewsterwinkel* genannt, danach steigt R_{\parallel} ebenfalls auf die 100 % an (siehe Abb.4.1). Der Brewsterwinkel α_B oder auch α_P wird dann erreicht, wenn der Nenner divergiert, also $\tan(\alpha_B + \beta) = \infty$ bzw. $\alpha + \beta = 90^\circ$. In diesem Fall stehen der reflektierte und der gebrochene Strahl aufeinander senkrecht. Dies lässt sich wie folgt erklären. Man nehme an, dass der reflektierte Strahl durch einen oszillierenden Dipol mit Dipolmoment parallel zum \vec{E} -Feld in der Grenzschicht erzeugt wird. Dabei ist die abgestrahlte Leistung $P(\theta) \propto \sin^2 \theta$ und θ ist der Winkel zwischen Wellenvektor des abgestrahlten Lichts und Dipolachse. Also wird längs zur Dipolachse

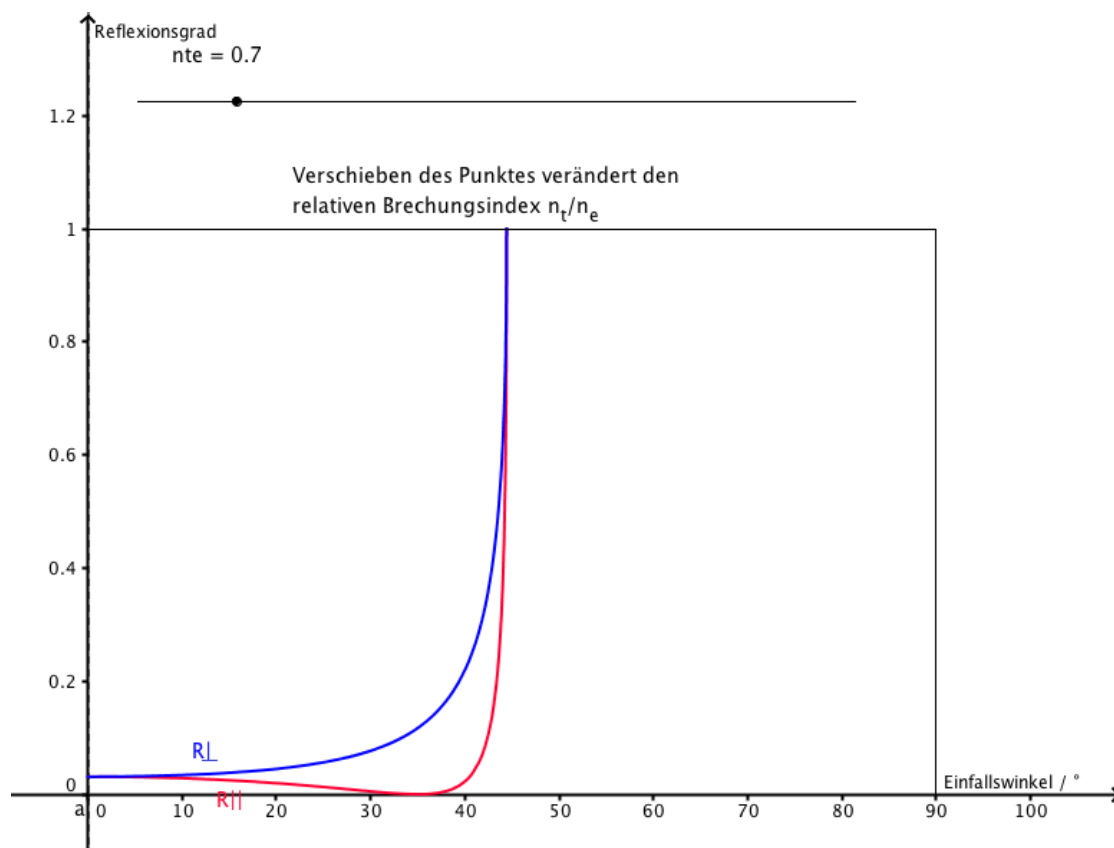


Abbildung 4.1: Reflexionsgrad in Abhängigkeit des Einfallswinkels

($\theta = 0$) kein Licht abgestrahlt – \vec{E}_{\parallel} wird nicht reflektiert. Daraus kann man folgern, dass das Licht vollständig linear polarisiert ist. Der Brewsterwinkel ergibt sich aus der Formel

$$\tan \alpha_B = \frac{n_t}{n_e}$$

09.11.2015

Reflexionsgrad bei Lichteinfall aus optisch dichteren Medien Wir betrachten $n_e > n_t$ und beobachten, dass ab einem Einfallswinkel $\alpha = \alpha_T < 90^\circ$ das Reflexionsvermögen 100% erreicht, d.h. *Totalreflexion*. Aus Snell erhalten wir $\sin \beta = 1$, also für den Winkel α_T der Totalreflexion

$$\sin \alpha_t = \frac{n_t}{n_e} \quad \text{bzw.} \\ \alpha_T = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_e}\right)$$

Für Winkel $\alpha > \alpha_T$ gibt es nach Snell keine Lösung für β . Der transmittierte Wellenvektor \vec{k}_t besitzt keine reelle Komponente senkrecht zur Grenzfläche. Die imaginäre Komponente führt zu Absorption! Wir erhalten eine *evaneszente Welle*.

Die Fresnel'schen Formeln können weiterhin verwendet werden. Ersetze hierfür $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ durch die Snell'sche Formel

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{n_e}{n_t}\right)^2 \sin^2 \alpha}$$

Für $\alpha > \alpha_T$ wird dieser Ausdruck rein imaginär.

Der Reflexionsgrad (für Intensitäten) ist $R_{\perp} = R_{\parallel} = 1$ Die Koeffizienten r_{\parallel} und r_{\perp} werden ebenfalls komplex. Diese komplexen Amplitudenkoeffizienten verursachen eine *Phasenverschiebung* φ_r bei Totalreflexion, die polarisationsabhängig ist.

Anwendungen sind z. B.

- Fresnel-Rhombus (Polarisationsdreher)
- Umlenkprisma: Einlaufendes linear polarisiertes Licht wird nach zweimaliger Reflexion zirkular polarisiert. Der Grund dafür ist, dass die relative Phase von s- und p-polarisierten Komponenten des \vec{E} -Feldes sich ändert.

Lichtwellenleiter (s. Folien)

Lichtwellenleiter sind wichtig für die Telekommunikation. Anwendungen sind u. a.

- Mono-Moden Fasern
- Multi-Moden Fasern
- Bildübertragung

4.3.7 Totalreflexion und evaneszente Welle

Trifft eine ebene Welle auf eine Grenzschicht, erhält man ein Interferenzbild durch Überlagerung von einlaufender und reflektierter Welle im ersten Medium (aus dem die einlaufende Welle kommt). Im zweiten Medium beobachtet man eine stetige Abnahme der Feldstärke in y -Richtung. Um dies zu beschreiben, verwende

- \vec{k}_e hat die Komponenten $k_{ex} = k_e \sin \alpha$ und $k_{ey} = k_e \cos \alpha$
- Für \vec{k}_t gilt

$$k_{tG} = k_{eG} = \frac{\omega n_e}{c} \sin \alpha$$

Mit der Dispersionsrelation folgt

$$k_t = \frac{\omega n_t}{c} = \sqrt{k_{tG}^2 + k_{ty}^2}$$

Hiermit lässt sich die Komponente $k_{ty} = k_{t,\perp}$ berechnen als

$$k_{t,\perp}^2 = \left(\frac{\omega n_t}{c} \right)^2 - k_{tG}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha)$$

Für $\alpha > \alpha_T$ gilt wegen Snell ($n_e \sin \alpha > n_t$), dass $k_{t,\perp}$ rein imaginär wird:

$$k_{t,\perp} = \pm i k_t \sqrt{\frac{n_e^2}{n_t^2} \sin^2 \alpha - 1} = \pm i \beta$$

Die Oberflächenwelle wird dann beschrieben durch

$$\vec{E}(x, y, t) = \underbrace{\vec{E}_{0,t} \exp(-\beta y)}_{\text{exponentiell gedämpft in } y\text{-Richtung}} \cdot \underbrace{\exp(ik_{tG}x - i\omega t)}_{\text{ebene Welle in } x\text{-Richtung}}$$

Wir betrachten das Beispiel $n_e = 1,5$, $n_t = 1$, also $\alpha_T = 41,8^\circ$, für eine Welle mit Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$. Hier erhält man $\beta = 3,7 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{mm}}$ bzw. $\frac{1}{\beta} \approx \frac{\lambda}{2}$. D.h. die evaneszente Welle klingt auf der Längenskala der Wellenlänge ab (hier ca. 300 nm).

12.11.2015

4.3.8 Absorbierende Medien

Das Reflexionsvermögen bei absorbierenden Medien ist mit Fresnelformeln ebenfalls berechenbar. Man ersetze nur n durch seine komplexe Darstellung $n_R + in_I$. Nun erhält man einen komplexen Reflexionskoeffizient und Reflexionsgrad:

$$r = \frac{n_{rel} - 1}{n_{rel} + 1}$$

$$R = rr^* = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2}$$

Daraus ergibt sich allgemein

- Das Reflexionsvermögen nimmt mit steigender Absorption zu (z. B. ideal leitende Metalle $\omega < \omega_p$). Bei Spiegeln ist beispielsweise $R \approx 100\%$ im Infrarot (IR), Nahinfrarot (NIR) und im sichtbaren Bereich (VIS), wobei R im sichtbaren Bereich bereits zurück geht.
- Mit wachsender Absorption (n_I bzw. k) verschwindet der Brewsterwinkel, es bleibt ein Minimum von R_{\parallel} .
- Die Farbe von Gegenständen hängt von den dielektrischen Eigenschaften ab.

Verwendet man im sichtbaren Bereich ein weißes Licht mit allen Spektralanteilen, lässt sich das Erscheinungsbild verschiedener Materialien durch Reflexion, Transmission und Absorption beschreiben:

Metalle sind durch ihre hohe Leitfähigkeit charakterisiert, die sich in einer spektral breitbandigen Reflexion äußern. Dadurch entsteht der metallische Glanz.

Isolatoren, die im VIS-Bereich keine Absorption besitzen, sind transparent. Allerdings wenn ihre Oberfläche gestört wird, werden sie weiß aufgrund ihres wellenlängenunabhängigen Reflexionsvermögens (vgl. Zucker – Puderzucker).

Isolatoren mit nur einer schwachen Absorption im VIS-Bereich zeigen in Transmission und Reflexion jeweils andere Farben. Dies wird durch die spektrale Verteilung des transmittierten Lichts bestimmt (vgl. verdünnte Tinte).

Isolatoren mit sehr hoher Absorption – also sehr hoher Reflexion – haben eine Transmissionsfarbe, die wieder durch den Spektralbereich mit optimaler Transparenz bestimmt.

5 Polarisation

Wir betrachten eine Wellenausbreitung im homogenen Medium in z -Richtung. Im allgemeinen Fall ist $E_{0x} \neq E_{0y}$ und die Phasenverschiebung φ zwischen den beiden Vektoranteilen beliebig. Deshalb beschreibt das \vec{E} -Feld eine Ellipse in der x - y -Ebene. Stärke und Richtung des \vec{E} -Felds ändern sich als Funktion der Zeit. Der Endpunkt des \vec{E} -Felds beschreibt eine Ellipse in der x - y -Ebene. Für den Winkel α zwischen der großen Halbachse der Ellipse und der x -Achse erhalten wir:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \varphi}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$$

Für spezielle Werte von φ (genau: $\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$) wird $\alpha = 0$ und es gilt

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

5.1 Mathematische Formulierung

Definiere Polarisationszustand eines Feldes als 2D-Vektor mit komplexen Amplituden, den sogenannten *Jones-Vektor*:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}$$

Normiere nun den Vektor auf Eins, denn oft ist nur der relative Wert von Interesse:

$$\frac{\vec{E}}{E_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \end{pmatrix}$$

Lineare Polarisation

Lineare Polarisation lässt sich wie folgt charakterisieren

$$0^\circ: \frac{E_y}{E_x} = 0$$

$$90^\circ: \frac{E_y}{E_x} = \infty, \text{ d. h. } \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$45^\circ: \frac{E_y}{E_x} = 1$$

$$\text{bel.: } \frac{E_y}{E_x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Zirkulare und elliptische Polarisation

Bei *zirkularer Polarisation* hat der Jones-Vektor eine rein imaginäre y -Komponente

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

Die Richtungen lassen sich wie folgt unterscheiden:

rechtszirkular $\frac{E_y}{E_x} = -i$

linkszirkular $\frac{E_y}{E_x} = +i$

Bei *elliptischer Polarisation* hat der Jones-Vektor eine komplexe (nicht rein imaginäre) y -Komponente

$$\frac{E_y}{E_x} = a + bi$$

5.2 Polarisatoren

Ein Polarisator ist ein optisches Element, das aus „unpolarisiertem“ Licht einen definierten Polarisationszustand selektiert. Beispiele sind Linearpolarisatoren, Zirkularpolarisatoren oder elliptische Polarisatoren. Für die Funktionsweise ist eine *optisch asymmetrische Komponente* nötig, die Licht mit ungewünschter Polarisation absorbiert/unterbindet.

Man unterscheidet vier Mechanismen von Polarisatoren:

1. *Reflexion* (Brewsterfenster, Fresnel-Rhombus)
2. *Streuung* (Hertz'scher Dipol)
3. *richtungsselektive Absorption* (Dichroismus)
4. *Doppelbrechung*

Mit Hilfe eines Polarisators kann man die Polarisations Eigenschaften von Licht bestimmen, ihn also als *Analysator* verwenden.

Beispiel Selektiere den Polarisationszustand mit einem Linearpolarisator und analysiere mit dem Linearpolarisator. Es gilt für den Winkel α zwischen Polarisator und Analysator

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\parallel} + \vec{E}_{0\perp} = |\vec{E}_0| \cos \alpha \vec{e}_{\parallel} + |\vec{E}_0| \sin \alpha \vec{e}_{\perp}$$

und $|\vec{E}_{\parallel}| = |\vec{E}_0| \cos \alpha$.

Beispiel Polarisation durch Dichroismus Dichromatische Materialien sind z. B. Turmalin oder (preiswerter) gestreckte, gefärbte Polymerfolien. Hier gilt das Malus'sche Gesetz

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

wobei die Stromstärke proportional zur Intensität ist.

Polarisation durch Reflexion

Beispiele für Polarisation durch Reflexion sind:

- Für den *Brewster Winkel* gilt, dass das reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist.
- *Fresnel-Rhombus*
- *Polarisationsdrehung* durch Reflexion, z. B. Doppelspiegel

16.11.2015

Polarisation durch Dichroismus

Bisher haben wir eine kugelsymmetrische Elektronenverteilung um den Atomkern betrachtet. Jetzt werden wir eine *anisotrope Ladungsverteilung* betrachten. Der einfachste Fall ist eine zigarrenförmige Ladungsverteilung. Wir machen folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Bewegungen senkrecht und parallel zur Atom-/Molekülvorzugsachse sind unabhängig voneinander
- zwei unabhängige harmonische Oszillatoren mit Eigenfrequenzen ω_{\perp} und ω_{\parallel}

In unserem „Zigarrenmodell“ sind folgende zwei Fälle der Ausrichtung der asymmetrischen Moleküle/Atome im Material zu unterscheiden:

isotrope Verteilung Die Ausrichtung der asymmetrischen Moleküle/Atome ist isotrop in alle Richtungen verteilt.

anisotrope Verteilung Die asymmetrischen Moleküle sind geordnet, d. h. gleich ausgerichtet, wie z. B. im kristallinen Festkörper. Hier können die optischen Eigenschaften stark anisotrop (richtungsabhängig) werden.

Eine Folge von anisotroper Verteilung der Ausrichtung ist der *Dichroismus* (richtungsabhängige Absorption): Je nach Richtung der Polarisation ist die Absorption stark unterschiedlich. Beispiele für Materialien, die ausgeprägten Dichroismus aufweisen, sind:

- Turmalinkristalle
- Polaroidfolien (Folienpolarisatoren)
- Drahtgitterpolarisatoren

5.3 Doppelbrechung

Doppelbrechung gibt es in folgenden Formen

natürlich anisotrope Kristalle (z. B. Calcit)

mechanisch induziert z. B. durch mechanische Spannung

durch Felder induziert z. B. durch elektrische Felder

Der physikalische Hintergrund ist eine anisotrope Ladungsverteilung, d. h. zwei Resonanzfrequenzen ω_{\perp} und ω_{\parallel} . Dies lässt sich schön anhand des folgenden Modells darstellen:

Federmodell Als Modell betrachtet man eine Kugel, die mit zwei unterschiedlichen Federn befestigt ist. Zieht man mit der Kraft $\vec{F}(x, y)$, so beugt sich die Masse nicht parallel zur Kraft.

Lichtausbreitung in einem doppelbrechenden Medium Die Experimentelle Beobachtung ergibt

- Es treten Doppelbilder auf.
- Es tritt eine Aufspaltung in zwei getrennte Strahlen auf; Es gibt eine Abhängigkeit von der Polarisation.
- Die relativen Intensitäten sind abhängig von der Polarisation der einlaufenden Welle.
- Nur der ordentliche Strahl folgt dem Snellius'schen Gesetz.
- Der ordentliche und der außerordentliche Strahl bilden einen Winkel zueinander; Dieser wird Strahlenversatz genannt.

Für die dielektrischen Eigenschaften bedeutet das, dass

1. zwischen \vec{D} und \vec{E} ein tensorieller Zusammenhang besteht:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \vec{E} \quad \text{oder} \quad D_i = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^i \varepsilon_{ik} E_k$$

2. \vec{E} und \vec{P} i. A. nicht mehr parallel sind

Wir erhalten durch orthogonale Transformation der Koordinatenachsen die sog. *Hauptachsenform des Dielektrizitätstensors*, d. h. die Diagonalform der Matrixdarstellung des Tensors (ε_i ist der Eintrag auf der Diagonale in der i -ten Zeile). Hier gilt

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i \quad \text{bzw.} \quad E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}$$

Die spezielle Form von $\boldsymbol{\varepsilon}$ hängt von der Symmetrie des Mediums ab. Man unterscheidet drei Fälle:

optisch isotrope Medien: $\varepsilon_i = \varepsilon$ Alle drei Tensorelemente sind gleich. Hier sind die optischen Eigenschaften nicht richtungsabhängig.

optische einachsige Kristalle: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$ **und** $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$ Zwei der drei Tensorelemente sind gleich, d. h. es gibt eine ausgezeichnete optische Achse (hier als Beispiel die z -Achse). Für Richtungsausbreitung entlang der optischen Achse tritt keine Polarisationsabhängigkeit der Ausbreitung auf (die \vec{E} -Felder schwingen entlang ε_{\perp}). In der anderen Richtung treten Abweichungen vom Snellius'schen Gesetz auf. Dieser Effekt wird *Doppelbrechung* genannt.

optisch zweiachsige Kristalle: $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq \varepsilon_x$ Es gibt zwei optische Achsen, längs derer polarisationsunabhängige Lichtausbreitung stattfinden kann.

Für die Herleitung verwende die MWGl in Tensorform mit dem Ansatz ebene Welle und Grenzbedingungen. Dann erhält man die Beziehungen für die Richtungen von \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{S} und \vec{k} . Das Resultat ist: Die Dielektrische Verschiebung ist i. A. nicht parallel zu \vec{E} .

Resultat für den Brechungsindex (einachsige Kristalle)

Es sei wie oben die Koordinatendarstellung so gewählt, dass der Dielektrizitätstensor Hauptachsenform hat, und die optische Achse sei wieder die z -Achse. Wir erhalten die Beziehung

$$\frac{1}{n_{ao}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} \quad \text{und} \quad n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

Der Brechungsindex ist also richtungsabhängig mit $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$ und $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$. θ ist der Winkel, den der Wellenvektor \vec{k} mit der optischen Achse (z -Achse) einschließt. Wir betrachten folgende Fälle:

$\theta = 0^\circ$ Es gibt keine Doppelbrechung für Licht, das sich entlang der optischen Achse ausbreitet ($n_{ao} = n_o$).

$\theta = 90^\circ$ Wenn der Wellenvektor in x -Richtung zeigt, ergeben sich zwei Werte für den Brechungsindex: $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ und $n_{ao} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$. Dabei liegen die \vec{E} -Vektoren entlang der z -Richtung (optische Achse) bzw. längs der y -Richtung. Licht kann sich in x -Richtung nur mit diesen beiden Polarisationsrichtungen im Kristall ausbreiten!

Im optisch einachsigen Kristall gibt es zwei Polarisationsrichtungen

ordentlicher Strahl Hier haben wir die Eigenschaften

- \vec{E} und \vec{D} sind senkrecht zur optischen Achse gerichtet.
- Der Brechungsindex ist unabhängig von der Ausbreitungsrichtung $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$.
- Das Snellius'sche Gesetz gilt.

außerordentlicher Strahl Hier gilt:

- Der Strahl ist in der Ebene, die durch die optische Achse und \vec{k} gebildet wird, polarisiert (Hauptschnitt).
- Der Brechungsindex ist richtungsabhängig.
- Das Snellius'sche Gesetz gilt nicht.

Phasengeschwindigkeiten

Für den ordentlichen Strahl erhalten wir eine Kugelgleichung für n bzw. v_{ph} und für den außerordentlichen Strahl wird es zu einem Ellipsoid:

$$v_{ao} = \frac{c}{n_{ao}} \\ v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n_o}$$

Es gilt:

$v_{ao} > v_o$ ($n_{ao} < n_o$): negativ einachsig

$v_{ao} < v_o$ ($n_{ao} > n_o$): negativ einachsig

Materialien sind z. B.

- Calcit: Für großen Unterschied zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl. Wir erhalten Polarisation.
- Quartz: Für kleinen Unterschied zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl. Wir erhalten $\frac{\lambda}{2}$ - und $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen.

5.3.1 Anwendungen anisotroper Materialien (natürliche Doppelbrechung)

1. Erzeugung von polarisiertem Licht durch Dichroismus
2. doppelbrechende Polarisatoren für linear polarisiertes Licht
3. Polarisationsdreher ($\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen)
4. Zirkularpolarisatoren ($\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen)

Gangunterschied/Phasenverschiebung

Wegen der unterschiedlichen Brechungsindizes von ordentlichem und außerordentlichem Strahl lassen sich durch geeigneten Schnitt (Plättchen mit best. Dicke d) des doppelbrechenden Materials definierte Phasenunterschiede zwischen senkrecht zueinander polarisierten Teilstrahlen erreichen. Voraussetzung ist:

- optische Achse in der Plattenebene
- senkrechte Inzidenz

Dann breiten sich außerordentlicher und ordentlicher Strahl parallel in der Platte aus, allerdings aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Wir erhalten ein sogenanntes Verzögerungsplättchen. Wir erhalten folgende Formeln für den Versatz zwischen den Strahlen:

$$\Delta l = d(n_o - n_{ao}) \quad (\text{Gangunterschied})$$

$$\Delta\varphi = k_o d - k_{ao} d = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_o - n_{ao}) \quad (\text{Phasenunterschied})$$

Wegen der λ -Abhängigkeit (wobei λ die Wellenlänge bezeichnet) hängt die Funktion des optischen Bauteils von der Wahl des Lichts ab. Zwei Spezialfälle in der Optik sind die sogenannten $\frac{\lambda}{4}$ -, $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen:

$\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen Wir erhalten von oben:

Wegunterschied $\Delta l = n\lambda_o \pm \frac{\lambda_o}{4}$

Phasenunterschied $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $(n \pm \frac{1}{2})\pi$

Die Dicke muss so eingestellt werden, dass $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Die Platte wandelt unter einem Winkel von $\theta = 45^\circ$ linear polarisiertes Licht in zirkulares Licht um (und umgekehrt). Für $\theta \neq 45^\circ$ erhält man elliptisch polarisiertes Licht.

$\frac{\lambda}{2}$ -**Plättchen** Wie oben erhalten wir

Wegunterschied $\Delta l = n\lambda_o \pm \frac{\lambda_o}{2}$

Phasenunterschied $\Delta\varphi = \pi$ bzw. $(n + 1)\pi$

Der ausfallende \vec{E} -Vektor wird durch eine Phasenverschiebung um π von \vec{E}'_{\perp} charakterisiert. Damit erhält man eine *Drehung der Polarisation* um 2θ . Für $\theta = 45^\circ$ erhält man eine Drehung um 90° . Für zirkulares Licht erhält man eine Umwandlung von linkszirkular zu rechtszirkular und umgekehrt.

5.3.2 Induzierte Doppelbrechung

In vielen Materialien lässt sich die optische Asymmetrie durch äußere Einflüsse manipulieren, z. B. um die Polarisation von transmittiertem Licht zu beeinflussen.

Beispiele

- a) *Kerr-Effekt* Betrachte ein optisch anisotropes Material, z. B. Flüssigkeit mit zigarrenförmig angeordneten Molekülen, wobei das Molekül anisotrope Polarisierbarkeit α habe. Damit haben wir ein induziertes Dipolmoment im elektrischen Feld $\vec{\mu} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_k$. Das Dipolmoment wird im elektr. Feld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet, es gibt also ein Drehmoment \vec{M}

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{\mu} \times \vec{E}_k \\ |\vec{M}| &= \varepsilon_0 \alpha E_k^2 \sin \gamma \quad (\text{Stärke des ausrichtenden Moments})\end{aligned}$$

Für \vec{E} -Vektor parallel zu \vec{E}_k sei der Brechungsindex $n_{\parallel} = n_{ao}$ und für \vec{E} -Vektor senkrecht zu \vec{E}_k sei der Brechungsindex $n_{\perp} = n_o$. Dann erhält man

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = n_{ao} - n_o = K \cdot \lambda E_k^2$$

mit *Kerr-Konstante* K . Diese ist abhängig von der Wellenlänge λ und der Periodendauer T .

Anwendungen sind u. a.

- schnelle optische Modulatoren (bis einige Gigahertz)
- LCD-Bildschirme

- b) *Spannungsdoppelbrechung* Mechanische Krafteinwirkung kann zur Ausrichtung von Molekülen führen, bzw. zur Verzerrung von Elektronenorbitalen.

- c) *optische Aktivität* Manche Materialien haben in Lösung einen konzentrationsabhängigen Drehwinkel. Teilweise tritt sogar Rotationsdispersion auf (der Drehwinkel ändert sich je nach Wellenlänge). Der Effekt beruht auf zirkularer Doppelbrechung, d. h. einen Unterschied des Brechungsindex für rechts- und linkszirkulares Licht

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}(n_L - n_R) \quad (\text{Drehung der Polarisationsrichtung bei optischer Achse})$$

Es ist *rechtsdrehend* für $n_L > n_R$ und *linksdrehend* für $n_R > n_L$. Beispiele solcher Materialien sind Zucker oder Quarz.

- d) *Faraday-Effekt* Manche Moleküle ohne optische Aktivität werden bei Anlegen eines magnetischen Felds optisch aktiv nach der Beziehung

$$\beta = V \cdot B \cdot d$$

mit *Verdet-Konstante* V . B zeigt hier in Ausbreitungsrichtung/Richtung des Wellenvektors. Der Drehwinkel dreht sich um, wenn die Polarisationsrichtung umgekehrt wird.

6 Nichtlineare Optik

Bisher haben wir nur den Zusammenhang

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

betrachtet mit $\chi = \varepsilon(\omega) - 1$, wobei ε nicht von \vec{E} abhängig war, also ein linearer Zusammenhang zwischen \vec{P} und \vec{E} . Bei großen Feldstärken wird der Zusammenhang zwischen \vec{E} und \vec{P} aber nichtlinear (Sättigungsverhalten).

Der einfachste Ansatz, um $\vec{P}(\vec{E})$ dann zu beschreiben, ist die Entwicklung nach Ordnungen von \vec{E} :

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \left(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 \dots \right) \\ &= P_{\text{lin}} + P_{\text{nicht lin}} \end{aligned}$$

I. A. sind die χ_i klein, aber E kann dafür groß werden (z. B. bei starken Laserfeldern). Außerdem sind die $\chi_i = \vec{\chi}_i$ i. A. Tensoren $(i + 1)$ ter Ordnung.

Wir verwenden den Ansatz ebener Wellen:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \chi_1 E_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_2 E_0^2 \left[\underbrace{1}_{\text{opt. Gleich- richtung}} + \underbrace{\cos(2\omega t)}_{\text{doppelte Frequenz}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \chi_3 E_0^3 \left[3 \cos(\omega t) + \underbrace{\cos(3\omega t)}_{\text{dreifache Frequenz}} \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Zu beobachtende Konsequenzen sind

- nichtlineare Frequenzverdopplung
- nichtlinearer Brechungsindex (z. B. Selbstfokussierung)
- Selbstphasenmodulation
- ...

7 Geometrische Optik

Die *geometrische Optik* bzw. *Strahlenoptik* befasst sich mit der Darstellung komplexer optischer Instrumente. Es wird der Grenzfall betrachtet, dass die Dimension des Problems sehr viel größer sein muss, als die Wellenlänge. Zur Vereinfachung wird die Wellenfront einer punktförmigen Lichtquelle betrachtet und ein Lichtbündel bzw. ein Lichtstrahl durch Einfügen einer Blende erzeugt. Beugungseffekte werden vernachlässigt.

7.1 Grundgesetze der geometrischen Optik/Fermat'sches Prinzip

Für die geometrische Optik werden weiterhin folgende Annahmen gemacht:

- geradlinige Ausbreitung von Licht in einem homogenen Medium
- Reflexionsgesetz und Snellius'sches Brechungsgesetz gelten
- Strahlengänge sind umkehrbar
- sich durchdringende Strahlen beeinflussen sich nicht

Dann gilt das *Fermat'sche Prinzip* (auch Variationsprinzip): Lichtausbreitung erfolgt so, dass der optische Weg $W(s)$ (Produkt aus Brechungsindex $n(\vec{r})$ und zurückgelegter Strecke s) einen Extremwert besitzt:

$$W(s) = \int_{s(Q \rightarrow P)} n(\vec{x}) ds \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W(s)}{\partial s} \right)_{s_0} = 0$$

für eine Strecke (einen Pfad) s vom Punkt Q zum Punkt P .

Bemerkung dazu:

- Das Fermat'sche Prinzip lässt sich aus der Wellentheorie des Lichts herleiten.
- Aus der obigen Gleichung folgt die Umkehrbarkeit des Lichtweges.
- Es kann ein Minimum *oder* ein Maximum sein (fast immer ein Minimum)

Strahlablenkung durch ein Prisma

Wir betrachten als Beispiel ein Glasprisma ($n_1 = n_{\text{Luft}} = 1$, $n_2 = n_{\text{Glas}} \approx 1,5$) und verwenden das Snellius'sche Gesetz $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Die Fragestellung ist nun: Wie hängt die Ablenkung δ von α_1 ab?

Generell gilt $\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$. und $(\varepsilon + (90^\circ - \beta_1) + (90^\circ - \beta_2)) = 180^\circ$. Aus Snellius folgt

$$\delta = \alpha_1 - \varepsilon + \arcsin \left(\sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sin \alpha_1 \cos \varepsilon \right)$$

Also, da β_1, β_2 durch den Schliff des Prismas gegeben sind, ist $\delta = \delta(\alpha_1)$ von α_1 (d. h. dem Einfallswinkel) abhängig.

Es kann gezeigt werden, dass es einen minimalen Ablenkwinkel gibt, der für Spektroskopie als Fixpunkt genutzt werden kann bei symmetrischem Strahlengang. Er liegt bei (Kleinwinkelnäherung)

$$\begin{aligned} \delta_{\min} &= 2\alpha_1 - \varepsilon = 2 \arcsin \left(n \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\ &\approx 2 \arcsin \left(n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\approx n \cdot \varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon(n - 1) \end{aligned}$$

7.2 Die optische Abbildung

7.2.1 Paraxiale Objekte

Eine Abbildung schickt mathematisch gesehen jeden Punkt im Objektraum auf einen Punkt im Bildraum. Allerdings gibt es folgende Unterschiede zwischen dieser Idealisierung und der Realität:

ideale opt. Abb. Hier wird angenommen:

- maßstabsgetreu (z. B. 8:1)
- umkehrbar (Umkehrbarkeit der Lichtwege)

real phys. Abb. Hier gilt

- Abbildungsfehler
- keine punktgenaue Abbildung möglich, d. h. das Bild eines Punkts verschmiert in ein Scheibchen, es gibt also eine Verbreiterung bzw. Unschärfe

Die Näherung einer idealen optischen Abbildung trifft am ehesten zu, wenn man sich in der Nähe der optischen Achse aufhält bzw. bei kleinen Winkeln. Denn dann gilt die Näherung $\tan \theta = \sin \theta = \theta$. Dieses Gebiet der Optik wird *paraxiale Optik* oder *Gaußsche Optik* genannt.

Reelle und virtuelle Abbildung

Grundsätzlich soll alles Licht, das von einem Objektpunkt ausgeht, in einem lagerichtigen Bildpunkt zusammengeführt werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

reelle Abbildung: Die Abbildung kann direkt beobachtet und auf einen Schirm abgebildet werden.

virtuelles Bild: Die Lichtstrahlen scheinen von einem Punkt zu kommen, können aber nicht auf einem Schirm abgebildet werden. Ein Beispiel ist ein Hohlspiegel.

7.2.2 Abbildungen mit Kugelspiegel

siehe Übungsaufgaben

7.2.3 Abbildung durch brechende Kugelflächen

Die Fragestellung ist, wie sich eine Abbildung realisieren lässt. Man kann sphärisch gekrümmte Grenzflächen zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichen Brechungsindizes n_1 und n_2 verwenden. Wir betrachten die paraxiale Näherung, also kleine Winkel. Damit wird das Snellius'sche Gesetz $n_1 \sin \theta_e = n_2 \sin \theta_t$ zu $n_1 \theta_e = n_2 \theta_t$. Ersetzen wir hier $\theta_e = \gamma + \alpha$ und $\theta_t = \alpha - \beta$ ¹ erhalten wir

$$n_1 \cdot (\gamma + \alpha) = n_2 \cdot (\alpha - \beta)$$

und mit $\gamma = \frac{h}{g}$, $\alpha = \frac{h}{r}$ und $\beta = \frac{h}{b}$ dann insgesamt

$$n_1 \left(\frac{h}{g} + \frac{h}{r} \right) = n_2 \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{b} \right)$$

Ein wenig umgeschrieben erhalten wir die *Abbildungsgleichung für eine brechende Kugelfläche*

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (7.1)$$

Brennweite

Lässt man die Gegenstandsweite g gegen unendlich gehen (also geht man von Einfall paralleler Strahlen aus), wird Gleichung (7.1) zu

$$\frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n_1}{\infty}}_0 + \frac{n_2}{b}$$

¹ α : Winkel zwischen optischer Achse und Lot auf die sphärische Grenzfläche am Grenzpunkt des Lichtstrahls;

γ : Winkel zwischen optischer Achse und Ausbreitungsrichtung des einfallenden Lichtstrahls;

β : Winkel zwischen optischer Achse und Ausbreitungsrichtung des transmittierten Lichtstrahls;

² h : Höhe des Grenzpunktes über der optischen Achse;

g : Entfernung vom Objektpunkt (auf der opt. Achse) zum Lotpunkt des Grenzpunkts auf der opt. Achse;

b : Entfernung vom Bildpunkt (auf der opt. Achse) zum Lotpunkt des Grenzpunkts auf der opt. Achse;

r : Radius der sphärischen Krümmung

und wir erhalten durch Umformung die *bildseitige Brennweite* b

$$b = f_B = \frac{n_2 \cdot r}{n_2 - n_1}$$

Analog erhält man die *gegenstandsseitige Brennweite* g

$$g = f_G = \frac{n_1 \cdot r}{n_2 - n_1}$$

Bisher haben wir nur eine halbe Linse betrachtet, also nur einen sphärischen Übergang von zwei Materialien mit unterschiedlichem Brechungsindex. Für eine richtige Linse benötigt man einen Übergang von einem Medium (Brechungsindex n_1) in die Linse (Brechungsindex n_2) und wieder in ein anderes Medium (Brechungsindex n_3). Wir betrachten wieder sphärische Grenzflächen von Medium 1 und 3 zum Linsenmedium. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{g_1} + \frac{n_2}{b_1} &= \frac{n_2 - n_1}{r_1} & 1. \text{ Kugelfläche} \\ \frac{n_2}{g_2} + \frac{n_3}{b_2} &= \frac{n_3 - n_2}{r_2} & 2. \text{ Kugelfläche} \end{aligned}$$

wobei $g_2 = -b_1$ für $d \ll r_1, r_2$ (d.h. der Abstand der beiden Linsengrenzflächen ist wesentlich kleiner als die Grenzflächenradien). Ineinander eingesetzt ergibt das

$$\frac{n_1}{g_1} + \frac{n_3}{b_3} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

Für $n_1 = n_3 = n_{\text{Luft}} = 1$ und mit $b := b_2$ und $g := g_1$ erhalten wir die *allgemeine Linsenmachergleichung*

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) =: \frac{1}{f}$$

f ist die Brennweite der Linse (auf beiden Seiten gleich) und alle zur optischen Achse parallele Strahlen verlaufen nach Durchgang durch die Linse durch einen der zwei Brennpunkte (Sammellinse: Brennpunkt auf der Austrittsseite, Zerstreuungslinse: Brennpunkt auf der Eintrittsseite).

Achtung: Die Brennweite f ist (unter den genannten Näherungen) nur abhängig von $\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ und auf beiden Linsenseiten gleich!

7.3 Optische Geräte

7.3.1 Sammel- und Zerstreuungslinsen

Sammellinsen

Bei gegebener Linse mit best. Brennweite ist die Bildweite (die Ebene, in der Punkte scharf auf Punkte abgebildet werden) von der Gegenstandsweite abhängig. Je größer die Gegenstandsweite, desto kleiner die Bildweite.

Der Grad der Unschärfe ist bestimmt durch die Größe des Bildscheibchens, auf das ein Gegenstandspunkt abgebildet wird. Die Bildscheibchengröße wiederum ist bestimmt durch den Winkel, den zwei vom Gegenstandspunkt ausgehende Strahlen einschließen können. Dieser Winkel kann durch das Einsetzen einer Blende wesentlich verringert werden.

Zerstreuungslinsen

Eine Zerstreuungslinse erhält man, wenn die Grenzflächen der Linse nach innen sphärisch sind anstatt nach außen. Dann durchläuft ein zur optischen Achse paralleler Strahl nach Durchtritt durch die Linse nicht mehr den Brennpunkt auf der Austrittsseite, sondern seine Verlängerung verläuft durch den Brennpunkt auf der Eintrittsseite. Ein Betrachter sieht ein virtuelles Bild, das weiter als die Gegenstandsweite weg zu sein scheint.

7.3.2 Lupe

Der Betrachtungswinkel ε_0 (bzgl. der optischen Achse), den unser Auge für einen Gegenstand der Größe G wahrnimmt bzw. der Größe $\frac{G}{2}$ von der opt. Achse aus gemessen, lässt sich aus dem Winkel ε zwischen der optischen Achse und einem Strahl von der Gegenstandsspitze durch die Linsenmitte bestimmen. Für ε gilt

$$\tan(\varepsilon) = \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{f} = \frac{G}{2f} \approx \varepsilon_0$$

Dann ist ε_0 ohne Lupe (also nur die Linse des Auges) und mit $s_0 = f_{\text{Auge}} \approx 25 \text{ cm}$

$$\varepsilon_0 = \frac{G}{2s_0}$$

Damit ist der Vergrößerungsfaktor einer weiteren Sammellinse, die man vor das Auge schiebt,

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}$$

7.3.3 Das Teleskop bzw. Fernrohr

Für weit entfernte Objekte kann man mit 2 Linsen gute Vergrößerungen erreichen. Der wesentliche Unterschied zur Lupe ist hierbei, dass die Strahlen nahezu parallel aufgrund der großen Entfernung auf die Linse treffen.

Funktionsweise Von einem Objekt wird ein verkleinertes auf dem Kopf stehendes reelles Bild auf die Brennebene der ersten Linse projiziert. Dieses wird mit der Lupe (2. Linse) betrachtet.

Das erste Zwischenbild in der Brennebene hat die Größe

$$B = \frac{f_{\text{obj}}}{g} G$$

B wird also mit f_{obj} größer bzw. wenn man ein größeres Bild haben will, benötigt man eine größere Brennweite. Beispielsweise besitzen Teleobjektive Brennweiten von 100 – 1000 mm. Weiter kann man eine Lupe benutzen, um dieses reelle Zwischenbild noch weiter zu vergrößern.

Nun betrachten wir die Vergrößerung zunächst ohne Lupe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon &= \frac{B}{S_0} & \frac{1}{2}\varepsilon_0 &= \frac{G}{g} \\ \Rightarrow V_{\text{obj}} &= \frac{f_{\text{obj}}}{S_0} \end{aligned}$$

Nun mit Lupe:

$$\begin{aligned} V &= \frac{f_{\text{obj}}}{S_0} V_{\text{Lupe}} = \frac{f_{\text{obj}}}{S_0} \cdot \frac{S_0}{f_{\text{Lupe}}} = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{Lupe}}} \\ V_{\text{Tele}} &= \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{Lupe}}} \end{aligned}$$

Also erhalten wir höchste Vergrößerung, wenn f_{obj} sehr groß und f_{Lupe} sehr klein ist. Allerdings ist das Teleskop für terrestrische Anwendungen nicht geeignet, da das Bild invertiert wird und eine große Baulänge benötigt wird. Man müsste also mit Prismenglas zur Faltung des Strahls arbeiten und bei astronomischen Ferngläsern bekommt man Gewichtsprobleme.

Galileisches Fernrohr Alternativ kann man anstatt einer Sammellinse als Okular eine negative Linse (Zerstreuungslinse) mit negativer Brennweite ($f_{\text{okular}} < 0$) verwenden und *vor* das reelle Bild einbringen. Der Abstand der negativen Linse von der Bildebene soll gleich $|f_{\text{okular}}|$ sein. Mit entspanntem Auge sieht man ein aufrecht stehendes Bild unter dem Schinkel

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{f_{\text{obj}}}{|f_{\text{okular}}|}$$

7.3.4 Mondaufgang

Die Größe G eines Objekts wird durch den Beobachtungswinkel ε bestimmt. Wir schätzen die Größe ab, indem wir die Entfernung g zum Objekt schätzen.

$$G = g \sin \varepsilon = g\varepsilon$$

Ein Beispiel ist der Mond, der beim Aufgang oberhalb von nahen Objekten zu stehen scheint:

$$\begin{aligned} d_{\text{Mond}} &= 3,6 \cdot 10^6 \text{ m} \\ g &= 3,8 \cdot 10^8 \text{ m} \\ \varepsilon &= \frac{d}{g} = 9,05 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Wenn man dies nun mit dem Sehwinkel eines 10 m hohen Baums in 1 km Entfernung vergleicht:

$$\varepsilon' = 10 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Daher sieht der Mensch den Mond in der selben Größe. Wenn der Mond nun weiter aufsteigt, wird er nicht kleiner, sondern unser Gehirn vergleicht ihn nun mit Objekten mit dem gleichen kleineren Sehwinkel. Beispielsweise einem Baum in 7 km Entfernung. Dann erhalten wir einen Durchmesser für den Mond von $d = 64 \text{ m}$.

7.4 Abbildungsfehler

7.4.1 Chromatische Aberration

Aus der Abbildungsgleichung für dünne Linsen

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n(\lambda) - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}$$

erhalten wir, dass die Brennweite f einer einfachen Linse eine monotone Funktion des Brechungsindex ist:

$$D(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1)\rho$$

Das bedeutet, dass bei einer dünneren Linse die Brennweite für rotes Licht immer größer ist als für blaues Licht (wegen normaler Dispersion von n). Es gibt also keinen Ort an dem das „rote“ und das „blaue“ Bild gleichzeitig scharf sind. Außerdem tritt die sogenannte *laterale Aberration* auf, nämlich dass die Bilder unterschiedliche Größen haben. *Es gibt also keine einfachen Linsen ohne Farbfehler*. Man kann dies durch Kombinationen von Linsen korrigieren. Zum Beispiel durch einen *Achromat*, der aus zwei Linsen aus Glas mit unterschiedlichen Dispersionen besteht.

7.4.2 Sphärische Aberration (Öffnungsfehler)

Die Brennweite hängt vom Abstand der Strahlen von der optischen Achse ab. Der Brennpunkt verschiebt sich also für Strahlen, die weiter entfernt von der optischen Achse sind, da die Kleinwinkelnäherung hier nicht mehr gültig ist. Man nennt diese auch *monochromatische Aberration*, da dieser Effekt auch bei monochromatischem Licht auftritt und unabhängig von der Wellenlänge ist.

7.4.3 Koma

Bei schiefem Lichteinfall auf die Linse entsteht ein „schiefes Bündel“ mit großem Öffnungswinkel (s. Folien).

7.4.4 Astigmatismus

Eine nicht rotationssymmetrische Linsenform hat unterschiedliche Brennweiten in unterschiedlichen Raumrichtungen zur Folge, z. B. unterschiedliche Wölbung in x - und in y -Richtung. Astigmatismus tritt auch bei Bündeln mit kleinen Öffnungswinkeln auf. Anschaulich: Ein Strahl, der zur optischen Achse geneigt auf die Linse auftrifft, „sieht“ eine nicht rotationssymmetrische Linse.

7.4.5 Bildfeldwölbung und -verzerrung

(s. Folien)

8 Wellenoptik

In der geometrischen Optik wird angenommen, dass wir immer einen Fokus im Punkt erreichen können, d. h. unendlich gute Ortsauflösung. In der Realität liegt der mögliche Fokus im Bereich der Wellenlänge.

Weiterhin betrachte das Gedankenexperiment, bei dem ein durch eine Blende erzeugter, rechteckiger Lichtstrahl auf einem Schirm aufgefangen wird. Das Bild ist kein exaktes Rechteck, denn durch Interferenz zeigt sich eine Modulation der Intensitätsverteilung. Im Randbereich sorgt die abnehmende Intensität dafür, dass es keinen scharfen Rand gibt, das Rechteck wird zu einem unscharfen Fleck. Allgemein beobachtet man bei Schattenwurf mit monochromatischem Licht an einer scharfen Kante Licht an Orten, wo nach klassischer geometrischer Optik keines sein sollte. Daraus sieht man, dass die Wellennatur des Lichts zur Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung (*Beugung* an der Blende) und zu Intensitätsmodulationen am Schirm (*Interferenz*) führt.

8.1 Fourier-Transformation

Mit der Fouriertransformation ist die Fourierreihe für periodische Funktionen verwandt.

Fourierreihe

Sei $f(t)$ eine komplexwertige periodische Funktion mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, dann lässt sie sich als Summe wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{ik\omega_0 t} \\ \Rightarrow f(t) &= \sum_0^{\infty} A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \end{aligned}$$

wobei $B_0 = 0$ und $\omega_k = k\omega_0 = \frac{2\pi k}{T}$ die Kreisfrequenz der periodischen Funktion ist. Die Koeffizienten lassen sich berechnen, indem man beide Seiten mit $\exp(-ikt\omega_0)$ multipliziert

und über eine Periode integriert

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\omega_k t) dt & k \neq 0 \\ A_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\omega_k t) dt \end{aligned}$$

Das ergibt für die Summen-Koeffizienten F_k der Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-k\omega_0 t} dt & -\infty \leq k \leq \infty \\ \text{also } f(t) &= A_0 + \sum_1^{\infty} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \\ &= F_0 + \sum_1^{\infty} e^{i\omega_k t} \left(\frac{A_k - iB_k}{2} \right) + e^{-i\omega_k t} \left(\frac{A_k + iB_k}{2} \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t} \end{aligned}$$

Beispiel 1 periodische Rechtecksfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{b}{2} \\ a & \text{für } -\frac{b}{2} \leq t \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{b}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Der nullte Koeffizient lautet dann

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{ab}{T}$$

Die weiteren Koeffizienten lauten:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} a e^{i\omega_0 t} dt = \frac{a}{k\pi} \sin(k\omega_0 \frac{b}{2})$$

Im Spezialfall $b = \frac{b}{2}$ (50% Duty-Cycle) gilt:

$$F_0 = \frac{a}{2} \qquad F_{\pm 2n} = 0 \qquad F_{\pm(2n+1)} = \frac{a}{(2n+1)\pi}$$

Beispiel 2 Übergang zu nicht-periodischen Funktionen. Betrachte nun wieder Rechtecksfunktionen mit der Breite b , verändere nun aber die Periode bzw. den Abstand zwischen Rechtecksimpulsen. Wenn die Periodendauer gegen unendlich geht ($T \rightarrow \infty$), geht der Abstand der Fourierkoeffizienten gegen null. Dabei beschreiben die Fourierkoeffizienten immer noch die gleiche Funktion $f(\omega)$. Führt man nun eine Grenze T_0 ein kann man oberhalb davon, also bei $|t| > T_0$, $f(t)$ vernachlässigen. Die Koeffizienten werden also durch $\omega = k\omega_0$ und $\frac{1}{T}$ bestimmt.

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Führe nun eine Funktion $F(\omega)$ ein, deren Funktionswerte bei $\omega = \omega_0 k$ die Fourierkoeffizienten F_k bestimmen.

$$F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F_k = \frac{1}{T} F(\omega_k) = \frac{1}{T} F(k\omega_0)$$

Wenn man dies nun in $f(t)$ einsetzt erhält man

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

Da $\frac{1}{T}$ direkt proportional zum Frequenzabstand $d\omega = \omega_0$ zwischen zwei Fourierkomponenten ist, folgt daraus

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

Wenn nun die Periodendauer gegen unendlich geht, wird $d\omega$ infinitesimal klein und man erhält die Fouriertransformation $f(t)$ mit ihrer Fouriertransformierten $F(\omega)$.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Die Abbildung $f(t) \rightarrow F(\omega)$ ergibt das Frequenzspektrum der Funktion $f(t)$.

Messungen Bei Messungen wird meist nur die Intensität in Abhängigkeit von Zeit und Frequenz gemessen. Die Intensitäten sind aber nicht über eine Fouriertransformation miteinander verknüpft, deshalb muss man $I \propto E^2$ ausnutzen, denn die E -Felder in Abhängigkeit zur Zeit und Frequenz sind wieder über eine Fouriertransformation miteinander verknüpft.

Rechenregeln und Spezialfälle

Betrachte nun die Delta-Funktion $\delta(x)$ bzw. $\delta(\omega)$, $\delta(t)$. $\delta(t)$ ist überall identisch Null außer bei $t = 0$.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$
$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

Eine konstante Funktion besitzt also als Fouriertransformierte die $\delta(\omega)$ -Funktion.

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t) \delta(t - \omega) dt = f(\omega)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{g'(x_i)} \delta(x - x_i) \quad \text{mit } g(x_i) = 0 \quad g'(x_i) \neq 0$$

Der Faltungssatz

Eine Faltung ist mathematisch definiert als

$$f(t) \otimes g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) g(t - \zeta) d\zeta$$

Die Fouriertransformation einer Faltung sieht wie folgt aus (F FT von f , G FT von g):

$$x(t) := g(t) \otimes f(t) \quad \text{FT: } X(\omega) = G(\omega)F(\omega)$$
$$\Rightarrow x(t) = FT^{-1}(FT(g(t)) \cdot FT(f(t)))$$

Eine Faltung lässt sich berechnen, indem die zu faltenden Funktionen $g(t)$ und $f(t)$ fouriertransformiert, dann miteinander multipliziert werden und schließlich das Produkt wieder in den ursprünglichen Raum rücktransformiert wird. Hierbei ist die Fouriertransformation (FT) als Operation zwischen Funktionsräumen aufgefasst (Funktionen \rightarrow Funktionen).

Spezielle Funktionen

Gauß-Funktion Eine (breite) Gauß-Funktion transformiert immer in eine (schmale) Gauß-Funktion.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

Die Gauß-Funktion ist eine Darstellung der δ -Funktion für $\sigma \rightarrow 0$.

Exponentialfunktion Eine (breite) Exponentialfunktion transformiert in eine (schmale) Lorentzfunktion.

$$f(t) = e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$
$$F(\omega) = \frac{2\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Rechteckfunktion Eine Rechteckfunktion transformiert in eine sinc-Funktion.

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(\omega t) dt \quad \propto -\frac{\sin(x)}{x} x$$

Es gilt die *Parseval'sche Formel*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

und der *Verschiebungssatz*

$$FT(f(t - t_0)) = FT(f(t) \otimes \delta(t - t_0)) = \underbrace{FT(f(t))}_{F(\omega)} e^{-i\omega_0 t_0}$$

8.2 Beugung

8.2.1 Das Huygen'sche Prinzip

Das *Huygen'sche Prinzip* lautet

Jeder Punkt einer primären Wellenfront ist Quelle von sekundären Elementarwellen

Die genannten Elementarwellen breiten sich mit der Dispersion des Mediums aus (also isotrop oder anisotrop). Die Einhüllende dieser Elementarwellen bildet eine neue Wellenfront. Die Einhüllende beschreibt nicht die Randbereiche (hier findet Beugung statt).

Fresnel-Huygen'sches Prinzip Eine Verbesserung dieser Theorie liefert das *Fresnel-Huygen'sches Prinzip*

Das Lichtfeld am Punkt P wird durch *Interferenz* (Summation der Amplituden/Phasen) aller Elementarwellen beschrieben.

8.2.2 Die Fresnel'sche Beugung

Es sind die *Fresnel'sche Beugung* (d groß aber endlich) und die *Fraunhofer'sche Beugung* ($d = \infty$) zu unterscheiden.

Die Fresnel'sche Beugung lässt sich anhand des Huygen'schen Prinzips erklären: Elementarwellen aus der Ebene $z = 0$ erreichen aufgrund der unterschiedlichen Wegstrecken zu unterschiedlichen Zeiten einen Punkt P im Abstand R von der Ebene. Die Strecke von einem Geradenpunkt zu P ist

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

wobei x die Verschiebung bzgl. P parallel zur Ebene ist.

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Intensität in P ist, die Elementarwellen am Ort P mit Phasenfaktor $\exp(ikr)$ aufzusummieren. Für $x = 0$ ist $r = R$. r wächst mit x an und, solange $r < R + \frac{\lambda}{2}$, tragen die Bereiche der Blendenöffnung konstruktiv zum Feld bei. Es gilt allgemein für r :

$r < R + \frac{\lambda}{2}$ konstruktive Interferenz

$R + \frac{\lambda}{2} < r < R + \lambda$ destruktive Interferenz

$R + \lambda < r < R + \frac{2\lambda}{2}$ konstruktive Interferenz

Beim Blendenversuch tragen die Zonen zur Lichtintensität im Punkt P bei, die nicht von der Kante der Blende abgedeckt werden.

8.2.3 Die Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungstheorie

Betrachte die Situation, dass eine Lichtquelle im Punkt Q Licht der Wellenlänge λ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) emittiert. Ziel ist nun, die Wellenamplitude bzw. Intensität am Ort P zu berechnen, der hinter einem Objekt B mit der Transmissionsfunktion Ω liegt. Ω hänge von den Orthonormalkoordinaten ζ und η auf der Ebene senkrecht zur Verbindung von Q und P ab und sei nur innerhalb der Blendenöffnung ungleich 0. Die Lösung hierfür über die MWG als Randwertproblem ist kompliziert. Daher trifft man folgende Näherungen

- Das skalare Lichtfeld U breitet sich von Q nach B ungestört aus.
- Das Blendenobjekt B sei „vernünftig“ (eben und beeinflusst das einfallende Lichtfeld nicht)
- Für die Beeinflussung des Lichtfelds durch die Transmissionsfunktionen $\Omega(\zeta, \eta)$ auf der rechten Seite der Blende gilt (U_e einfallendes Lichtfeld)

$$U_0(\zeta, \eta) = \Omega(\zeta, \eta) \cdot U_e(\zeta, \eta)$$

Aus der Theorie erhält man eine Vorschrift zur Berechnung der Feldstärke im Punkt P

$$U_P(\vec{R}) \propto \iint_{\Omega} U_0(\zeta, \eta) \frac{\exp(ikr)}{r} d\zeta d\eta$$

Jetzt betrachte eine Beleuchtung der Blende durch eine Punktlichtquelle in Q mit $\vec{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und Feldstärke e_0 . Von dieser Kugelwelle wird eine Kugelwelle mit der Feldstärke U_0 in der Öffnung Ω erzeugt

$$U_0(\zeta, \eta) = \frac{e_0}{r_0} \exp(ikr_0)$$

Wir erhalten

$$U_P(\vec{R}) \propto e_0 \iint_{\Omega} \frac{\exp(ik(r + r_0))}{rr_0} d\zeta d\eta \quad (8.1)$$

Wir treffen die vereinfachende Annahme, dass $r, r_0 \gg \lambda$. Bei Änderung des Beobachtungspunkts P ändert sich das Produkt rr_0 viel schwächer als $\exp(ik(r + r_0))$. Ersetze also zur Vereinfachung $rr_0 \approx RR_0$ und ziehe diesen Ausdruck aus dem Integral:

$$U_P(\vec{R}) \propto \frac{e_0}{RR_0} \iint_{\Omega} \exp(ik(r + r_0)) d\zeta d\eta$$

r und r_0 werden in der Exponentialfunktion durch die Koordinaten ζ und η ersetzt. Für Q und P weit voneinander entfernt (im Vergleich zum Blendendurchmesser) gilt

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \\ &= R - \alpha\zeta - \beta\eta + O\left(\frac{\zeta^2}{R}, \frac{\eta^2}{R}\right) + \dots \\ r_0 &= R_0 - \alpha_0\zeta - \beta_0\eta + O\left(\frac{\zeta^2}{R}, \frac{\eta^2}{R}\right) + \dots \end{aligned}$$

α und β bzw. α_0 und β_0 nennt man Richtungskosinus. Es gilt

$$\alpha = \frac{x}{R} \quad \beta = \frac{y}{R} \quad \alpha_0 = -\frac{x_0}{R} \quad \beta_0 = -\frac{y_0}{R}$$

Achtung: Richtungskosinus gegen $\zeta(x)$ und $\eta(y)$ zu berechnen; Vorzeichen! Insgesamt erhalten wir

$$r + r_0 = R + R_0 - (\alpha - \alpha_0)\zeta - (\beta - \beta_0)\eta + \underbrace{\psi}_{\text{höhere Ordn.}}$$

Die k -Vektoren der gebeugten Strahlen werden beschrieben durch

$$k_x = k\alpha \quad \text{und} \quad k_y = k\beta \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Die Näherungen, die in der Fraunhofer'schen Beugung getroffen werden, sind:

- $R \rightarrow \infty$
- $R_0 \rightarrow \infty$
- $\psi \equiv 0$

Dann wird die Formel (8.2.3) zu

$$\begin{aligned} U_P(\alpha, \beta) &\propto \underbrace{\frac{e_0}{RR_0}}_{\nu_{P,0}} \iint_{\Omega} d\zeta d\eta \exp(ik(\alpha - \alpha_0)\zeta - ik(\beta - \beta_0)\eta) \\ U_P(\alpha, \beta) &= \nu_{P,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta d\eta \Omega(\zeta, \eta) \exp(ik(\alpha - \alpha_0)\zeta - ik(\beta - \beta_0)\eta) \end{aligned}$$

Spezialfall: Senkrechter Einfall

Hier gilt $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, also

$$U_P(\alpha, \beta) = \nu_{P,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta d\eta \Omega(\zeta, \eta) \exp(ik\alpha\zeta - ik\beta\eta)$$

Das ist die 2D-Fouriertransformation der Blendenfunktion.

Beispiele für Fraunhofer'sche Beugung

- a) *Beugung am langen Spalt*: Wir betrachten senkrecht einfallendes Licht auf einen Spalt mit Breite b und Höhe h ($h \gg b$). Die Transmissionsfunktion sei $\Omega_{\text{Spalt}}(\zeta, \eta) = \Omega_{\text{Spalt}}(\eta)$. Die Integration über ζ liefert

$$\begin{aligned} U_P(\alpha, \beta) &= \nu_{P,0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(k\alpha\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\text{Spalt}}(\eta) \exp(k\beta\eta) d\eta \\ &= \nu_{P,0} 2\pi \delta(k\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\text{Spalt}}(\eta) \exp(k\beta\eta) d\eta \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_{\text{Spalt}}(\eta) = \begin{cases} 1 & -\frac{b}{2} < \eta < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit wird die Fouriertransformation die einer Rechtecksfunktion:

$$\begin{aligned} U_P(\beta) &\propto \frac{\sin(\frac{k\beta b}{2})}{\frac{k\beta}{2}} \\ \text{Intensität} &\propto (U_P(\beta))^2 \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für $\beta = 0$

$$I_{\text{Spalt}}(\beta = 0) \propto \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{k\beta b}{2})}{\frac{k\beta}{2}} \right)^2 = \dots = b^2$$

Das ist die Formel für Beugungsmuster am langen Spalt

$$\frac{I_{\text{Spalt}}(\beta)}{I_{\text{Spalt}}(0)} = \left(\frac{\sin(\frac{k\beta b}{2})}{\frac{k\beta}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sin(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda})}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 = \left(\frac{\sin B}{B} \right)^2$$

Symbolverzeichnis

α_B	Brewsterwinkel; Winkel, bei dem reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen; Winkel vollständiger linearer Polarisierung bei Reflektion; $\tan \alpha_B = \frac{n_t}{n_e}$
α_T	Winkel für Totalreflexion
χ	elektrische Suszeptibilität
ε	relative Dielektrizitätskonstante eines Mediums
ε_0	elektrische Feldkonstante
ε_i	i -tes Tensorelement des Dielektrizitätstensors in der Hauptachsenform
$\frac{1}{\tau}$	Stoßfrequenz bei Streuzeit τ ; $\gamma := \frac{1}{\tau}$
γ	Stoßfrequenz bei Streuzeit τ ; $\gamma := \frac{1}{\tau}$
γ_j	Dämpfung; $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j N_j}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma_j \omega}$
\hbar	normiertes Planksches Wirkungsquantum; Naturkonstante; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
λ	Wellenlänge; $\lambda = \frac{c}{\nu}$
μ	magnetische Permeabilität eines Mediums; hier immer $\mu = 1$
μ_0	magnetische Feldkonstante; $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ NA}^{-2}$
ν	Frequenz; auch f ; $\nu = \frac{v_{\text{ph}}}{\lambda}$
ω	Kreisfrequenz; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
ω_{\perp}	Eigenfrequenz der harmonischen Oszillation der Elektronen senkrecht zur Atom-/Molekülvorzugsachse
ω_{\parallel}	Eigenfrequenz der harmonischen Oszillation der Elektronen parallel zur Atom-/Molekülvorzugsachse
ω_p	Plasmafrequenz; $\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m_e}$ im nahezu ungedämpften Fall
Φ	Photonenfluss
ρ	Ladungsdichte (Ladung pro Volumen)

ρ_{frei}	Ladungsdichte; in isolierenden Materialien $\rho_{\text{frei}} = 0$
τ	Streuzeit
ϵ	Dielektrizitätstensor; $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$
φ_r	Phasenfaktor der reflektierten Welle; bestimmt Phasenverschiebung zur einlaufenden Welle
φ_t	Phasenfaktor der transmittierten Welle; bestimmt Phasenverschiebung zur einlaufenden Welle
\vec{B}	magnetische Flussdichte
\vec{F}	Kraft
\vec{H}	Magnetische Feldintensität; unabhängig davon, ob Materie im Magnetfeld ist
\vec{j}	Stromdichte (Ladung pro Zeit pro Fläche)
\vec{k}_e	Wellenvektor der einlaufenden Welle
\vec{k}_r	Wellenvektor der reflektierten Welle
\vec{k}_t	Wellenvektor der transmittierten Welle
\vec{M}	Drehmoment
\vec{M}	Magnetisierung (magnetisches Dipolmoment pro Volumen)
\vec{P}	Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)
\vec{S}	Poynting-Vektor, Energiestromdichte einer elektrom. Welle
\vec{D}	dielektrische Verschiebung
\vec{E}	elektrische Feldstärke
A	Fläche
a	Extinktionskoeffizient eines Mediums
b	bildseitige Brennweite
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d	Dicke
e	Elementarladung
E_{ph}	Energie eines Photons

F_{el}	elektrische Kraft
F_{mag}	magnetische Kraft, Lorentzkraft
f_j	Oszillatorstärke; $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j N_j}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}$
g	Gegenstandsweite
g	gegenstandsseitige Brennweite
I	Lichtintensität; $I = \langle \vec{S} \rangle$
I_t	transmittierte Intensität
j_{frei}	Stromdichte; in isolierenden Materialien $j_{\text{frei}} = 0$
K	Kerr-Konstante; $K \cdot \lambda E_k^2 = n_{ao} - n_o$
k	Absorptionsindex eines Mediums; Imaginärteil n_I des Brechungsindex n
m_e	Elektronenmasse
N	Anzahl (einheitenlos)
N	Teilchenzahldichte
n	materialspezifischer Brechungsindex; $n = \sqrt{\varepsilon}$
n'	reelle Brechzahl eines Mediums; Realteil n_R des Brechungsindex n
n_L	Brechungsindex für linkszirkulares Licht
n_R	Brechungsindex für rechtszirkulares Licht
P_t	transmittierte Leistung
q	elektrische Ladung
R	Reflexionsgrad
r	Reflexionskoeffizient; $r = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}$
s	Strecke (Pfad) zwischen zwei Punkten
T	Periodendauer
T	Transmission eines Mediums bei ebener Welle; $T := \frac{I(z)}{I(0)} = \exp(-az)$
t	Transmissionskoeffizient; $t = \frac{2n_e}{n_e + n_t}$
t	Zeit

T^I	Transmissionsgrad der Intensität; $T^I = \frac{I_t}{I_e}$
T^P	Transmissionsgrad der Leistung; $T^P = \frac{P_t}{P_e}$
V	Verdet-Konstante
v_{gr}	Gruppengeschwindigkeit einer Welle; $v_{\text{gr}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega=\omega_0}$
v_q	Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ladung q
v_{ph}	Phasengeschwindigkeit; Ausbreitungsgeschw. einer Welle; $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
$W(s)$	optischer Weg im Fermat'schen Prinzip; $W(s) = \int_{s(Q \rightarrow P)} n(\vec{x}) ds$

Index

- Abbildungsgleichung
 - Kugelfläche, 41
- Aberration
 - chromatische, 45
 - lateral, 45
- Abrration
 - sphärische, 45
- Absorptionsindex, 14
- Analysator, 31
- Astigmatismus, 46
- Brechungsgesetz
 - Snellins'sches Brechungsgesetz, 21
- Brechzahl, 14
- Brennweite
 - bildseitig, 42
 - gegenstandsseitig, 42
- Brewsterwinkel, 25
- Dichroismus, 32
- Dielektrizitätskonstante, 6
- Dielektrizitätstensor, 33
 - Hauptachsenform, 33
- Dispersion
 - normal, 18
 - positiv, 18
- Dispersionsrelation, 9
 - linear, 9
- Divergenz, 5
- Doppelbrechung, 33
 - Gangunterschied, 35
 - Phasenunterschied, 35
- ebene Welle, 9
- elektrische Feldkonstante, 6
- Extinktionskoeffizient, 15
- Faraday-Effekt, 37
- Fermat'sche Prinzip, 39
- Fresnel'sche Formeln, 22
- Fresnelsche Formeln, 25
- Gaußsche Optik, 40
- geometrische Optik, 39
- Gradient, 5
- Gruppengeschwindigkeit, 12
- Hauptschnitt, 34
- Jones-Vektor, 30
- Kerr-Effekt, 36
- Kerr-Konstante, 36
- Koma, 45
- Kramer-Kronis-Relation, 15
- Kugelwelle, 9
- Lambert-Beersches Gesetz, 15
- Laplace-Operator, 5
- Lichtintensität, 10
- Lichtwellenleiter, 27
- linksdrehend, 37
- Linsenmachergleichung
 - allgemein, 42
- Malus'sches Gesetz, 31
- Mathematische Operatoren
 - Divergenz, 5
 - Gradient, 5
 - Laplace-Operator, 5
 - Nabla-Operator, 5
- Maxwellgleichungen
 - mit dielektrischer Versch., 6
- Nabla-Operator, 5

- optisch asymmetrische Komponente, 31
- Oszillatorstärke, 18
- paraxiale Optik, 40
- Phasenfaktoren, 20
- Phasengeschwindigkeit, 8
- Photonenenergie, 10
- Photonenflussdichte, 10
- Photonenimpuls, 10
- Plasmafrequenz, 18
- Polarisation
 - elliptisch, 31
 - elliptisch polarisiertes Licht, 22
 - linear polarisiertes Licht, 22
 - zirkular, 31
 - zirkular polarisiertes Licht, 22
- Polarisator, 31
- Poynting-Vektor, 10
- rechtsdrehend, 37
- Reflexionsgesetz, 21
- Reflexionsgrad, 24
- Reflexionskoeffizient, 24
- Sellmeier-Beziehung, 18
- Strahlenoptik, 39
- Strahlenversatz, 33
- Strahlungsflussdichte, 10
- Streuzeit, 18
- Totalreflexion, 27
- Transmission, 15
- Transmissionsgrad, 25
- Transmissionskoeffizient, 24
- transmittierte Intensität, 25
- transmittierte Leistung, 25
- Variationsprinzip, 39
- Verdet-Konstante, 37
- Verzögerungsplättchen, 35
- Wellenfunktion
 - ebene Welle, 9
 - Kugelwelle, 9
- Wellengleichung
 - Elektromagnetische Wellen, 8