Vorlesungsmitschrift

Experimentalphysik III (Wellen und Quanten)

im WS2015/16 bei Prof. Dr. Christian Back

gesetzt von Hedwig Werner

Stand: 26. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Historischer Überblick

siehe Folien
Versuche: Messung der Lichtgeschwindigkeit

1.2 Hierachie der Berschreibung optischer Phänomene

- geometrische Optik
- Wellenoptik
- Elektromagnetismus
- Quantenoptik

1.3 Licht als elektromagnetische Welle

Eine wichtige Frage vorab ist: Was ist Licht? Teilchen oder Welle?

pro elektromagnetische Welle

- Licht transportiert Energie, auch im Vakuum
- Licht wechselwirkt mit Atomen/Materie (z.B. Absorption)
- Licht zeigt Brechungserscheinungen

Daraus folgt: Licht ist elektromagnetische Welle

pro Korpuskel

- Licht zeigt „Körnigkeit“, es besteht aus Energiequanten (Photonen) mit $E = h\nu$
- Licht stößt wie ein Teilchen (Compton-Effekt)

1.4 Das elektromagnetische Spektrum

Die Vorlesung „Wellen und Quanten“ beschäftigt sich mit den Eigenschaften elektromagnetischer (Hertzscher) Wellen über einem breiten Wellenlängenbereich von $10^{-15}\,\mathrm{m} \leq \lambda \leq 10^{3}\,\mathrm{m}$. Zum Vergleich: Sichtbares Licht hat Wellenlängen im Bereich $350\,\mathrm{nm} \leq \lambda \leq 800\,\mathrm{nm}$.

2 Elektromagnetische Wellen

2.1 Wiederholung

Im Folgenden wird ein Überblick über die häufig gebrauchten Operatoren Gradient (grad), Rotation (rot), Divergenz (div), den Nabla-Operator ($\vec{\nabla}$) und den Laplace-Operator (Δ) gegeben.

Vektorableitungen: Für 3-dimensionale Vektoren verwendet man den *Nabla*-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right)$$

Der *Gradient* einer skalaren Funktion $f = f(x, y, z)$ zeigt in die Richtung des größten Anstiegs.

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Die *Divergenz* einer Vektorfunktion ist

$$\operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Die Divergenz ist ungleich null, wenn es Quellen oder Senken gibt (vgl. elektr. Ladung).
Der *Laplace-Operator* einer skalaren Funktion ist die *Divergenz des Gradienten.*

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Der Laplace einer Vektorfunktion wir komponentenweise gebildet.

$$\Delta \vec{f} = \vec{\nabla}^2 \vec{f} = \left(\tfrac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} + \ldots\right)$$

Die *Rotation* einer Vektorfunktion $\vec{f}$ ist

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\tfrac{\partial f_z}{\partial y} - \tfrac{\partial f_y}{\partial z}, \tfrac{\partial f_x}{\partial z} - \tfrac{\partial f_z}{\partial x}, \tfrac{\partial f_y}{\partial x} - \tfrac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

Funktionen, die sich stark „winden“, haben eine starke Rotation.

2.2 Licht als elektromagnetische Welle

In dieser Vorlesung behandeln wir Lichtausbreitung in nicht-magnetischen Medien, d.h. man kann die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ setzen. Für nicht leitende Materialien ist zudem die Ladungsdichte ρ_{frei} und die Stromdichte j_{frei} gleich null. In Formeln also $\mu = 1$, $\rho_{\text{frei}} = 0$, $j_{\text{frei}} = 0$.

Lichtausbreitung in Vakuum oder in einem Dielektrikum

Im Dielektrikum muss man die Maxwellgleichungen (kurz MWGl.) für ein Medium mit dielektrischer Verschiebung verwenden. Weitere Annahmen sind

- lineare Optik
- isotropes Medium (Gase, Flüssigkeit, kubische Kristalle)

Mit diesen Annahmen gilt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2 m^{-2} N^{-1}}$ die elektrische Feldkonstante ist und ε die relative *Dielektrizitätskonstante* des Mediums.

Achtung: in optisch anisotropen Medien wird ε durch einen Tensor ersetzt.

Elektrische und magnetische Felder sind wie folgt über die MWGl. verknüpft:

MWGl. für isolierendes nicht magnetisches Medium:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

mit magnetischer Feldkonstante $\mu_0 = 1.2566 \times 10^{-6}\,\mathrm{NA^{-2}}$

MWGl. im Vakuum:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_o(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

mit ε_0, μ_0 „Materialparameter“ für Vakuum.

Effekte in Materie

In echter Materie können (mikroskopisch) Polarisationsladungen und Ampere’sche Kreisströme induziert werden, was

- mikroskopische elektrische Dipole
- mikroskopische Kreisströme

verursacht. Zur Vereinfachung betrachten wir makroskopische, örtlich gemittelte Größen.

Unterschiede zwischen freien und gebundenen Ladungen Es gilt allgemein für die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{gebunden}} \\ \text{analog} \quad \vec{j} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}} + \vec{j}_{\text{Polarisation}} \end{aligned}$$

wobei $\vec{j}_{\text{mag}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ und $\vec{j}_{\text{Polarisation}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Die gebundenen Ladungsträger führen zu einer makroskopischen Polarisation $\vec{P}$ (bzw. zur makroskopischen Magnetisierung $\vec{M}$ im Fall der Stromdichte), welche sich auf die elektrische Verschiebung $\vec{D}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{B}$ auswirkt:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \end{aligned}$$

Für isotrope, lineare Materialien mit Dielektrizitätskonstante ε_r gilt

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{D} &= (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \rho_{\text{frei}} &= \rho - \rho_{\text{Pol}} = \rho + \operatorname{div} \vec{P} \\ \implies \quad \operatorname{div} \vec{P} &= -\rho + \rho_{\text{frei}} = -\rho_{\text{Pol}} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich

MWGl. in Materie mit Spezialfall (isotropes, ungeladenes, unmagnetisches Medium)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} + \vec{\nabla} \vec{P} = \rho_{\text{frei}} = 0 \\ \vec{\nabla} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Von den MWGl. zur Wellengleichung für das $\vec{E}$-Feld Wir erhalten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\varepsilon \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \vec{E}}_{=0 \text{ da } \rho = 0}) - (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{E} = -\Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Setzen wir diese zusammen, folgen die *Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen*:

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Allgemein Die allgemeine Form der Wellengleichungen (u.a. für elektromagnetische Wellen) sind Differentialgleichungen, die eine 2. Ableitung einer Größe nach der Zeit mit der 2. Ableitung der Größe nach dem Ort verknüpft:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

wobei $v_{ph} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit (*Phasengeschwindigkeit*)ist. Die Berechnungen oben liefern für ein Elektrische Feld, das sich in einem isolierenden, nicht magnetischen Material ausbreitet, die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E} \tag{2.1}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes in einem solchen Medium ist also

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot c$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.9979\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Achtung: Nur im Vakuum (hier ist $\varepsilon = 1$) gilt $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = v_{ph}$! In anderen Medien ist Einfluss eines Mediums ist durch $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{n}$ gegeben. Der *Brechungsindex*

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

ist direkt mit der Wellenausbreitung verknüpft.

2.3 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

(s. Folien)

- Planetenmethode
- Zahnradmethode
- Drehspiegel

2.4 Lösung der Wellengleichung des elektrischen Feldes im Spezialfall

Einfachste Lösung der Wellengleichung (2.1) von oben (Ausbreitung eines Elektrischen Feldes in einem isolierenden, nicht magnetischen Material) ist die *ebene Welle*

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)$$
$$\text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + \phi}]$$

Ebenfalls ist die *Kugelwelle* eine Lösung. Der Phasenterm ϕ legt den Nulldurchgang des Kosinus/Sinus fest. Die Lösung eingesetzt in die Wellengleichung führt zur *linearen Dispersionsrelation*:

$$\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Allgemein nennt man eine Beziehung, die den Betrag des Wellenvektors $\vec{k}$mit der Kreisfrequenz verknüpft, *Dispersionsrelation* (z. B. bei Photonen $\omega \propto k$, bei freien e^- ist $\omega \propto k^2$). Es gelten die Beziehungen

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda} \qquad \text{(Allgemein für beliebige Welle)}$$
$$\lambda = \frac{2\pi n}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} \quad \text{mit } \nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(Wellenlänge im Vakuum)}$$
$$\lambda_m = \frac{\lambda}{n} \qquad \text{(Wellenlänge im Medium)}$$
$$\omega(k) = c \cdot k \cdot \frac{1}{n}$$

Weitere wichtige Beziehungen sind

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$
$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2n}$$

Des weiteren gilt für $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$

$$\vec{k} \perp \vec{D} \quad (\text{bzw. } \vec{E}) \qquad \vec{k} \perp \vec{B} \qquad \vec{E} \perp \vec{B} \qquad \vec{D} \perp \vec{B}$$

In optisch isotropen Medien gilt $\vec{E} \perp \vec{k}$ und $|\vec{E}| = \frac{c}{n}|\vec{B}|$. $\vec{k}, \vec{D}, \vec{B}$ bilden ein rechtshändiges System. Elektromagnetische Wellen in isolierenden Medien sind transversale Wellen (Beweis siehe Folien) mit Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$.

Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie werden fast immer durch die elektrische Feldstärke dominiert. Meist werden also nur $\vec{E}$-Felder diskutiert. Begründung: Betrachte die Kraft auf geladenes Teilchen, die durch Wechselwirkung entsteht

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$\frac{F_{\text{mag}}}{F_{\text{el}}} = \frac{qvB}{qE} \underset{(B=\frac{1}{c}E)}{=} \frac{v}{c}$$

Daraus folgt: Für $v \ll c$ ist $F_{\text{mag}} \ll F_{\text{el}}$.

2.5 Energie von Licht, Poynting-Vektor

Licht kann Energie transportieren, z. B. von der Sonne zur Erde.

In der Elektrodynamik wird die Energiestromdichte einer elektromagnetischen Welle durch den *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ beschrieben.

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

Die zeitliche Mittelung von $\vec{S}$ über eine Schwingungsperiode T des Feldes gibt einem die *Strahlungsflussdichte* (mittlere Lichtenergie pro Zeit und Fläche) und die *Lichtintensität* I. Mit $|\vec{E}| = \frac{c}{n}$ folgt

$$I \coloneqq \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 n c \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

Im Speziellen gilt für eine ebene Welle $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)$ mit Bedingungen wie in (2.1) und Brechungsindex n

$$\begin{aligned}
\langle |\vec{E}|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_o^T |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi) dt = \frac{1}{2}|E_0|^2 \\
\implies \quad I &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 n c |E_0|^2
\end{aligned}$$

2.6 Impuls von Licht

Licht besitzt eine Impulsdichte (wichtig bei Absorption und Reflexion), eine Art „Strahlungsdruck“. Beschreibungen in den beiden Modellen:

Teilchenbild

Energie des Photons:	$E_{Ph} = \hbar\omega = h\nu$
Impuls des Photons:	$p = \frac{E_{Ph}}{c} = \hbar k$
Gesamtimpuls:	$p_{\text{ges}} = \frac{N E_{Ph}}{c}$
Intensität:	$I = \frac{N E_{Ph}}{\Delta t A} = \frac{\Phi h\nu}{A}$
mittlere Photonenflussdichte:	$\frac{\Phi}{A} = \frac{I}{n\nu}$

Wellenbild
Hier wird als Ursache die Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit einer zunächst ruhenden Ladung q gedeutet.

- Beschleunigung der Ladung im $\vec{E}$-Feld
- Aus dem Lichtfeld wird Leistung entnommen:

Kraft:	$\vec{F} = q\vec{E}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}_q$
entnommene Leistung	$L = qEv_q$

- das sich jetzt bewegende Elektron erfährt eine Lorentzkraft $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$ im $\vec{B}$-Feld ($\vec{B} \perp \vec{E}$ und $\vec{B} \perp \vec{k}$)
- $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$ zeigt in Richtung von $\vec{k}$

2.7 Wellenpakete

Die Wellengleichung erfüllt das Superpositionsprinzip. Sind $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ Lösungen der Wellengleichung, dann ist auch $\vec{E}_s = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ eine Lösung (verwende Fouriertransformation). Addition von Wellen (ω_j wird zu $j\omega_0$) und Amplituden (E_{0_j} wird zu beliebigem $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit Perioden $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) lassen sich konstruieren. z.B. bei $\vec{r} = 0$:

$$\vec{E}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{0_j} \exp(i\omega_j t)$$

Kontinuierliche Verteilung der Frequenzkomponenten

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{0_j} \exp(i\omega_j t) \mathrm{d}\omega \tag{2.2}$$

da $\vec{E}(t)$ eine reelle Größe ist, kann man auch $E_0(\omega) = E_0^*(-\omega)$ schreiben. Rücktransformation:

$$\vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{0_j} \exp(-i\omega_j t) \mathrm{d}t \tag{2.3}$$

Je nachdem, ob man die normierte Fouriertransformation durchführt (wie hier), oder nicht, ist der Vorfaktor in (2.2) $\frac{1}{2\pi}$ und in (2.3) 1, oder beide Male $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Frequenz- und Zeitraum sind äquivalent. Die eindimensionale Darstellung ist:

$$E(\omega) = A \exp\left(-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right) + A \exp\left(-\left(\frac{-\omega - \omega_0}{\delta\omega}\right)^2\right) \tag{2.4}$$

Einsetzen in Gleichung (2.2)

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\exp(i\omega t)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \\
&= \frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{\delta\omega}{2}\exp\left[-\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 t^2\right](\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \\
&= \frac{A\delta\omega}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 t^2\right]\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

Das Resultat ist ein Wellenpaket mit Schwingungsfrequenz ω_0 und zeitlich modulierter Amplitude mit $\delta\omega\delta t = 2$

$$\Delta\omega_F \Delta t_F = 8\ln(2) \approx 5,55$$

Es sind auch andere Einhüllende möglich, z. B. so dass $\Delta\omega_F\Delta t_F \approx 2\pi$, $\Delta\nu_F\Delta t \approx 1$.

2.8 Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten

Ein Lichtimpuls breitet sich **nicht** mit der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n}$, sondern mit der *Gruppengeschwindigkeit* aus.

$$v_{gr} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right) = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k} \tag{2.5}$$

Wichtig! Zur Berechnung der Gruppengeschwindigkeit benötigen wir die *Dispersionrelation* $\omega(k)$. Für Licht gilt $\omega = \frac{c}{n}k$ also falls $n = n(k)$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k}$$

3 Dispersion von Licht

Die Ausbreitung von Licht hängt vom Brechungsindex $n = n(\omega)$ ab. $n(\omega)$ bestimmt die Geschwindigkeit von Licht, das Auseinanderfließen von Lichtimpulsen, Ablenkungen und Reflexion an Grenzflächen.

3.1 Die Frequenzabhängigkeit der Dielekrizitätskonstante ε

I.A. ist ε ein Tensor mit ω-Abhängigkeit. Vergleicht man den statischen Dielektrizitätskonstante bzw. den Brechungsindex $n_0 = \sqrt{\varepsilon(\omega = 0)}$ mit $n = \sqrt{\varepsilon(\omega = 589\,\mathrm{nm})}$, ist ein Unterschied zu erkennen!

3.2 Der Brechungsindex

Am einfachsten ist die Betrachtung eines verdünnten Mediums, d. h. man ist weit weg von Resonanzerscheinungen (s. Folien). Dazu machen wir folgende Annahmen:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &\approx 1 \\ |\Delta\varepsilon| &\ll 1 \\ \Longrightarrow n(\omega) &= \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1 \end{aligned}$$

Mit dieser Schätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon - 1 = n^2 - 1 &= \underbrace{(n+1)}_{\approx 2}(n-1) \approx 2(n-1) \\ n - 1 &\approx \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \cdot 2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} n_R &= 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} && \text{Realteil} \\ n_I &= \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} && \text{Imaginärteil} \end{aligned}$$

Oft schreibt man n' für den Realteil, genannt *reelle Brechzahl*, und k für den Imaginärteil, genannt *Absorptionsindex*:

$$n(\omega) = n'(\omega) - ik(\omega)$$

3.3 Absorption von Licht

Wir nehmen eine *ebene Welle* $E(z,t)$ an, welche in z-Richtung mit Wellenvektor $k = \frac{n\omega}{c}$ propagiert, in einem Medium mit $n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_0 \exp(i\omega t - ikz) \\ &= E_0 \exp\left[i\omega t - i\frac{\omega n_R}{c} \cdot z + \frac{\omega n_I}{c} \cdot z\right] \\ &= \left(E_0 \exp\left(\frac{\omega n_I}{c} \cdot z\right)\right) \exp\left(i\omega t - \frac{i\omega n_R}{c} \cdot z\right) \end{aligned}$$

Die Amplitude der Welle wird exponentiell gedämpft, falls $n_I < 0$, was fast immer der Fall ist (aber z. B. nicht bei Lasermedien). Daraus folgt für die Intensität der ebenen Welle

$$I(z) = I(0) \exp\left(\frac{2\omega n_I z}{c}\right) = I(0)\exp(-az)$$

wobei $a = \frac{2\omega n_I}{c}$ *Extinktionskoeffizient* genannt wird. Es ist

$$a = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 mc} \frac{\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Das Verhältnis von Intensität zu Nullintensität wird Transmission T genannt

$$T := \frac{I(z)}{I(0)} = \exp(-az) \qquad\qquad \text{Lambert-Beersches Gesetz}$$

Achtung: Imaginärteil und Realteil des Brechungsindex sind nicht unabhängig voneinander! Die Relation zwischen ihnen wird *Kramer-Kronis-Relation* genannt:

$$(\mathrm{Re}(n(\omega)))^2 - 1 = \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty \frac{a(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \mathrm{d}\omega'$$

Diese Relation ist wichtig für die optische Spektroskopie.

3.4 Wie sieht das im Detail aus?

Die zu erzwungenen Schwingungen angeregten Atome (Elektronenwolken) im Medium strahlen mit der Anregungsfrequenz, aber mit *verzögerter Phase* ab (s. Mechanik)

3.5 Das elektromagnetische Feld eines oszillierenden Dipols

Die Licht-Materie-Wechselwirkung wird in erster Linie durch die Wechselwirkungen elektromagnetischer Wellen mit atomaren Dipolen beschrieben. Es wird hierzu das elektrische und magnetische Feld eines strahlenden Dipols berechnet. Wir werden im Folgenden das $\vec{B}$-Feld betrachten (das $\vec{E}$-Feld wird von den Maxwell-Gleichungen beschrieben).

Es gilt für das Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ wobei

$$\vec{A}(\vec{h}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)\mathrm{d}V_2}{|\vec{r}_{12}|}$$

Achtung: für $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}_2, t)$ ergibt sich eine Retardierung, da sich das Feld nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Damit hängt $\vec{A}(\vec{r}_1, t)$ von $\vec{j}(\vec{r}_2)$ zur Zeit $t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c}$ ab:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c}\right)}{|\vec{r}_{12}|} \mathrm{d}V_2$$

Im Fernfeld (d. h. $|\vec{r}_{12}| \gg l$) gilt mit $\vec{j} = \vec{v}\rho$

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} \int \vec{v}\rho \left(\vec{r}_2, t - \frac{|\vec{r}_{12}|}{c}\right) \mathrm{d}V_2$$

wobei $\rho \mathrm{d}V_2 = \mathrm{d}q$ und $\int \rho \mathrm{d}V = q$ für die Ladung q gilt.

Das elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ wird beschrieben durch

$$\vec{p}(t) = q \underbrace{d_0 \sin(\omega t)}_{\vec{d}(t)} \hat{e}_z = q\vec{d}(t)$$

mit d_0 als maximale Auslenkung der Ladung nach einer Viertel Periode.

Jetzt verwenden wir $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin(\omega t)$ und $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \dot{\vec{p}} = q\vec{v}$. Damit erhält man

$$\vec{A}(t)(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \vec{r}_{12}} \frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r_{12}}{c})}{\partial t}$$

mit $\omega(t - \frac{r_{12}}{c}) = \omega t - r_{12}\frac{2\pi}{\lambda} = \omega t - kr_{12}$ (k als Wellenvektor) sowie $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = q \cdot d_0 \omega \cos(\omega t)\hat{e}_z$. Insgesamt ergibt sich ein zeitlich veränderliches Vektorpotential, das sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{1}{\vec{r}_{12}} q \cdot d_0 \omega \cos(\omega t - kr_{12})\vec{e}_z}_{\text{Kugelwelle mit } c = \frac{\omega}{k}}$$

Zusammengefasst erzeugt eine oszillierende Ladung ein Vektorfeld $\vec{A}$, welches wiederum $\vec{B}$ und $\vec{E}$ erzeugt.

Es bleibt die Frage, wie sieht das $\vec{B}$-Feld am Ort P aus? Wir haben

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} && \text{mit } \vec{A} = \left(0, 0, \vec{A}_z\right) \\
B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\
B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\
B_z &= 0
\end{aligned}$$

Das heißt, das $\vec{B}$-Feld liegt in der x-y-Ebene. Die genaue Formel für B_x ist

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\dot{p}\left(t - \frac{r_{12}}{c}\right)\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(\dot{p}\left(t - \frac{r_{12}}{c}\right)\right)\right]$$

Definiere zur Vereinfachung $u = t - \frac{r_{12}}{c}$, dann ist $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u}$ und $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c}$. Außerdem gilt $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, d.h.

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -\ddot{p}\frac{1}{c}\frac{y}{r}$$

Damit gilt dann

$$B_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\dot{p}\frac{y}{r^3} + \ddot{p}\frac{y}{cr^2}\right]$$

B_y analog. Insgesamt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{1}{r^3}\left[\dot{\vec{p}}\times\vec{r} + \frac{r}{c}\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}\right]$$

Wegen $\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}$ gilt $\vec{B}\perp\vec{p}_{\text{Dipol}}$ und $\vec{B}\perp$Ausbreitungsrichtung. Damit folgen zwei Terme für $\vec{B}$:

1. Nahfeld $\propto \dot{\vec{p}} \propto \frac{1}{r^2}$
2. Fernfeld $\propto \ddot{\vec{p}} \propto \frac{1}{r}$

Daher kommen die Terme

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \underbrace{\mu_0\vec{j}}_{\text{Nahfeld}} + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{Fernfeld}}$$

wobei das $\vec{E}$-Feld über die Maxwell-Gleichungen beschrieben wird.

Symbolverzeichnis

χ	elektrische Suszeptibilität
ε	relative Dielektrizitätskonstante eines Mediums
ε_0	elektrische Feldkonstante
$\hbar$	normiertes Planksches Wirkungsquantum; Naturkonstante; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
λ	Wellenlänge; $\lambda = \frac{c}{\nu}$
μ	magnetische Permeabilität eines Mediums; hier immer $\mu = 1$
μ_0	magnetische Feldkonstante; $\mu_0 = 1.2566 \times 10^{-6}\,\mathrm{NA}^{-2}$
ν	Frequenz; auch f; $\nu = \frac{v_{\mathrm{ph}}}{\lambda}$
ω	Kreisfrequenz; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
Φ	Photonenfluss
ρ	Ladungsdichte (Ladung pro Volumen)
ρ_{frei}	Ladungsdichte; in isolierenden Materialien $\rho_{\mathrm{frei}} = 0$
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$\vec{F}$	Kraft
$\vec{H}$	Magnetische Feldintensität; unabhängig davon, ob Materie im Magnetfeld ist
$\vec{j}$	Stromdichte (Ladung pro Zeit pro Fläche)
$\vec{M}$	Magnetisierung (magnetisches Dipolmoment pro Volumen)
$\vec{P}$	Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)
$\vec{S}$	Poynting-Vektor, Energiestromdichte einer elektrom. Welle
$\vec{D}$	dielektrische Verschiebung
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
A	Fläche
a	Extinktionskoeffizient eines Mediums

c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum; $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
E_{ph}	Energie eines Photons
F_{el}	elektrische Kraft
F_{mag}	magnetische Kraft, Lorentzkraft
I	Lichtintensität; $I = \langle\lvert\vec{S}\rvert\rangle$
j_{frei}	Stromdichte; in isolierenden Materialien $j_{\mathrm{frei}} = 0$
k	Absorptionsindex eines Mediums; Imaginärteil n_I des Brechungsindex n
N	Anzahl (einheitenlos)
n	materialspezifischer Brechungsindex; $n = \sqrt{\varepsilon}$
n'	reelle Brechzahl eines Mediums; Realteil n_R des Brechungsindex n
q	elektrische Ladung
T	Periodendauer
T	Transmission eines Mediums bei ebener Welle; $T \coloneqq \frac{I(z)}{I(0)} = \exp(-az)$
t	Zeit
v_{gr}	Gruppengeschwindigkeit einer Welle; $v_{\mathrm{gr}} = \frac{\partial\omega}{\partial k}$
v_q	Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ladung q
v_{ph}	Phasengeschwindigkeit; Ausbreitungsgeschw. einer Welle; $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Index