



Universität Regensburg
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Bachelorarbeit

Néron-Modelle elliptischer Kurven

Gesina Schwalbe

28. September 2016

Betreuer: Prof. Dr. Moritz Kerz

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	3
2	Gruppenstrukturen auf Schemata	6
2.1	Gruppenschemata	6
2.2	Normale Komposition auf Schemata	9
3	Néron-Modelle	11
3.1	Definition	11
3.2	Eigenschaften	14
3.2.1	Allgemeine Eigenschaften	14
3.2.2	Néron-Modelle abelscher Varietäten	19
4	Weierstraßmodelle	21
4.1	Konstruktion	21
4.1.1	Weierstraßgleichungen	21
4.1.2	Weierstraßmodelle	22
4.2	Gruppenschemastruktur	23
4.2.1	Allgemeine Eigenschaften	23
4.2.2	Gruppenstruktur auf Weierstraßmodellen	25
5	Arithmetische Flächen	28
5.1	Definition	28
5.2	Eigenschaften	29
5.3	Minimale Modelle	31
6	Existenz von Néron-Modellen auf elliptischen Kurven	34
6.1	Gruppenstruktur hinreichend	34
6.2	Gruppenstruktur für strikt henselsche Ringe	36
6.2.1	Strikt henselsche Ringe	36
6.2.2	Nachweis der Gruppenstruktur für strikt henselsche Ringe	37
6.3	Allgemeine Existenz	40
7	Beispiele und Ausblick	42
	Literatur	45

1 Motivation

Sei (R, \mathfrak{m}) diskreter Bewertungsring, $K = \text{Quot}(R)$ und E_K elliptische Kurve über K . Eine Weierstraßgleichung zu E_K

$$0 = Y^2Z + \alpha_1XYZ + \alpha_3YZ^2 - X^3 - \alpha_2X^2Z - \alpha_4XZ^2 - \alpha_6Z^3 =: F \in K[X, Y, Z]$$

mit Koeffizienten in R definiert ein projektives R -Schema $W = V_+(F) \subset \mathbb{P}_R^n$ der Dimension 2. Dessen generische Faser ist wieder E_K und die spezielle Faser ist die Kurve, die durch das reduzierte Polynom $(F \bmod \mathfrak{m})$ über $\kappa(\mathfrak{m})$ erzeugt wird. W enthält also Informationen zur Reduktion der elliptischen Kurve.

Da elliptische Kurven besonders durch ihre Gruppenstruktur interessant sind, stellt sich die Frage, ob sich die Gruppenstruktur $E_K \times_K E_K \rightarrow E_K$ auf ein hinreichend gutartiges (hier: glattes, separiertes) R -Schema wie W erweitern lässt, und wenn ja, ob sich ein solches minimal beziehungsweise eindeutig wählen lässt. Eine sinnvolle Forderung an ein solches R -Schema wäre

Die Gruppenverknüpfung auf der generischen Faser erweitert sich zu einer Gruppenverknüpfung $E \times_R E \rightarrow E$ auf ganz E .

Insbesondere sind dann für R -Schemata Y alle Schnitte $E(Y)$ Gruppen. Per Konstruktion ist die kanonische Abbildung $E(Y) \rightarrow E_K(Y_K)$, die durch den Basiswechsel induziert ist, ein Gruppenmorphismus, der allerdings im Allgemeinen weder surjektiv noch injektiv ist. Um von einer Erweiterung der Gruppenstruktur sprechen zu können, sollte hier in den relevanten Fällen Surjektivität gefordert werden und für eine minimale Erweiterung Isomorphie:

Für alle „gutartigen“ (hier: glatten) R -Schemata Y mit generischer Faser Y_K soll die kanonische Abbildung $E(Y) \rightarrow E_K(Y_K)$ ein (Gruppen-)Isomorphismus sein.

Diese stärkere Forderung motiviert die Definition des Néron-Modells, welches ein R -Modell von E_K ist, das ebendiese universelle Erweiterungseigenschaft erfüllt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, die Existenz von Néron-Modellen für elliptische Kurven zu zeigen und die Konstruktion zu skizzieren. Die Ausführungen beschränken sich auf Dedekindringe R mit perfekten Restklassenkörpern. Allgemeine Dedekindringe werden in [Szy04] behandelt.

In Kapitel 2 werden die nötigen Grundlagen zu Gruppenschemata eingeführt, wonach dann in Kapitel 3 Néron-Modelle allgemein definiert und einige ihrer Eigenschaften

behandelt werden. Hier wird auch ein Blick darauf geworfen, wann und welcher Teil eines Néron-Modells einer abelschen Gruppenstruktur wieder abelsch ist.

Kapitel 4 erläutert die Konstruktion des Schemas W von oben genauer und untersucht die Eigenschaften einer solchen Kurve über R . Insbesondere zeigt sich, dass der glatte Teil von W tatsächlich die Gruppenverknüpfung erweitert und im glatten Fall sogar das Néron-Modell von E_K ist.

Ist W nicht regulär, sind erst weitere Modifikationen an W nötig, um eine hinreichend gutartige Kurve über R zu erhalten. Solche gutartigen Kurven über einem Dedekindring werden arithmetische Fläche genannt und in Kapitel 5 näher auf ihre Eigenschaften und die Konstruktion für elliptische Kurven untersucht.

Zuletzt wird sich in Kapitel 6 zeigen, dass der glatte Teil einer minimal gewählten arithmetischen Fläche zu E_K , wie zuvor konstruiert, bereits das Néron-Modell von E_K ist.

Kapitel 7 enthält dann noch einige Beispiele und den Ausblick auf eine Klassifizierung elliptischer Kurven nach der Form ihres minimalen Modells.

Notation

Es werden Kenntnisse zur Garben- und Schematheorie vorausgesetzt, insbesondere zu den Begriffen glatt, flach, eigentlich, separiert. Die Notation richtet sich nach [GW10].

Eine Kurve über einem Körper K sei immer eine projektive Varietät der Dimension 1, und eine elliptische Kurve über K ist eine glatte Kurve E_K vom Geschlecht 1 zusammen mit einem K -Schnitt $O \in E_K(K)$. Elliptische Kurven sind K -Gruppenschemata mit Nullelement O [Sil92].

Es werden nur elliptische Kurven über Körpern mit Charakteristik ungleich 2 und 3 betrachten und die Restklassenkörper der Dedekindringe seien perfekt.

Für Abbildungen zwischen Faserprodukten wird mitunter die Elementnotation verwendet, das heißt eine Notation der Form

$$\phi : X \longrightarrow Y \times_S Z \quad x \longmapsto (f(x), g(x))$$

meint die kanonische Abbildung $\phi = f \times_S g$.

Im Folgenden sind noch die Definitionen einiger weiterer verwendeter Begriffe.

Definition 1.1 (Dedekindring). Ein Dedekindring ist ein Integritätsring R , der kein Körper ist und eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt

- (i) R ist regulär und $\dim(R) \leq 1$.
- (ii) R ist noethersch, normal und $\dim(R) \leq 1$.

- (iii) Jede Lokalisierung nach einem Maximalideal ist ein diskreter Bewertungsring, das heißt lokal, noethersch, normal von Dimension 1.

Für Schemata über Dedekindringen wird die Faser über dem generischen Punkt als generische Faser, die Fasern über den abgeschlossenen Punkten als spezielle Fasern bezeichnet.

Definition 1.2 (Dedekindschema). Ein Dedekindschema ist ein noethersches, integres Schema X , das eine der äquivalenten Eigenschaften erfüllt

- (i) Die offenen affinen Unterschemata sind Spektren von Dedekindringen.
- (ii) Es gilt $\dim(X) \leq 1$ und X ist regulär (in Dimension 1 äquivalent zu normal nach [GW10, Corollary 6.39, Proposition 6.40]).

Sei S allgemein ein irreduzibles Schema. Ein S -Schema wird auch als S -Modell seiner generischen Faser bezeichnet.

Die folgende Äquivalenz und die Aussage zu Glattheit werden häufig verwendet.

Bemerkung 1.3. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlich präsentierter Morphismus von Schemata. Dann ist f genau dann glatt in x , wenn f flach in x ist und $X_{f(x)}$ glatt über $\kappa(f(x))$ nach [Bos13, Proposition 8.5/17].

Ist X ein K -Schema lokal endlichen Typs, so sind glatt und geometrisch regulär äquivalent nach [GW10, Corollary 6.32]. Ist K perfekter Körper (z. B. $\text{char}(K) = 0$), ist dies sogar äquivalent zu regulär nach [GW10, Remark 6.33].

Glattheit impliziert die Eigenschaften reduziert, lokal von endlichem Typ und flach [für flach siehe GW10, Theorem 14.22].

2 Gruppenstrukturen auf Schemata

2.1 Gruppenschemata

Im Folgenden sei S ein Schema. Zuerst werden in diesem Abschnitt Gruppenschemata definiert, also S -Schemata, deren Schnittfunktor Gruppen liefert. Als Spezialfälle werden abelsche Schemata und abelsche Varietäten aufgeführt. Ein wichtiges Beispiel für letzteres sind elliptische Kurven. Zuletzt wird die Hauptaussage sein, dass sich eigentliche Gruppenschemata gutartig bezüglich Morphismen verhalten, die nur auf offenen dichten Teilmengen definiert sind, sogenannte rationale Funktionen.

Definition 2.1 (Gruppenschema). Ein Gruppenschema über S oder S -Gruppenschema ist ein S -Schema $\pi: G \rightarrow S$ zusammen mit S -Morphismen

$$\begin{aligned} \mu: G \times_S G &\longrightarrow G && \text{(Gruppenverknüpfung)} \\ \varepsilon: S &\longrightarrow G && \text{(Neutrales Element)} \\ i: G &\longrightarrow G && \text{(Inverses)} \end{aligned}$$

für die folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{(\mu, \text{id})} & G \times_S G \\ \downarrow (\text{id}, \mu) & & \downarrow \mu \\ G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

(Assoziativität)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\pi, \text{id})} & S \times_S G \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \varepsilon \times \text{id} \\ G & \xleftarrow{\mu} & G \times_S G \end{array}$$

(Neutrales Element)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(i, \text{id})} & G \times_S G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ S & \xrightarrow{\varepsilon} & G \end{array}$$

(Inverses)

Die folgende Äquivalenz zeigt, wo der Gruppenbegriff zum tragen kommt.

Bemerkung 2.2. Die obige Definition ist äquivalent dazu, dass für S -Schemata T die T -wertigen Punkte $G(T) = \text{Hom}_S(T, G)$ eine in T funktorielle Gruppenstruktur tragen. In anderen Worten der Schnittfunktor faktorisiert über dem Vergissfunktor:

$$\begin{aligned} (\text{Sch}/S) &\longrightarrow (\text{Groups}) \longrightarrow (\text{Sets}) \\ T &\longmapsto G(T) \end{aligned}$$

Die Gruppenstruktur auf $G(T)$ ist durch μ gegeben als

$$\begin{aligned} G(T) \times G(T) &\longrightarrow G(T) \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \left(T \xrightarrow{(\phi, \psi)} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G \right) \end{aligned}$$

wobei der Schnitt $T \rightarrow S \xrightarrow{\varepsilon} G$ die Identität ist und sich Inverse durch Verknüpfung mit i ergeben. Die Gruppenstruktur liefert außerdem, dass für einen Schnitt $\sigma \in G(S)$ der S -Morphismus

$$\tau_\sigma : G \cong G \times_S S \xrightarrow{\text{id} \times_S \sigma} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$$

ein S -Automorphismus von G ist mit Inversem $\tau_{(\sigma^{-1})}$, genannt Translation um σ .

Anhand der Gruppenstruktur auf den Schnitten lassen sich Morphismen zwischen Gruppenschemata und Untergruppenschemata definieren.

Definition 2.3 (Morphismen von Gruppenschemata). Seien G und H zwei S -Gruppenschemata. Ein Morphismus von S -Gruppenschemata ist ein Morphismus $f : G \rightarrow H$ von S -Schemata, für den für alle S -Schemata T die induzierten Abbildungen

$$(\bullet \circ f) : G(T) \rightarrow H(T)$$

auf den T -wertigen Punkten Gruppenhomomorphismen sind. In anderen Worten

$$f \circ \mu_G = \mu_H \circ (f \times_S f)$$

Definition 2.4 (Untergruppenschema). Sei G ein S -Gruppenschema. Ein S -Untergruppenschema von G ist ein abgeschlossenes S -Unterschema von G , dessen abgeschlossene Immersion ein Homomorphismus von Gruppenschemata ist.

Ein wichtiges Beispiel eines Untergruppenschemas, das durch die Topologie gegeben ist, ist die sogenannte Identitätskomponente.

Definition 2.5 (Identitätskomponente). Sei G ein S -Gruppenschema. Für $s \in S$ ist die Identitätskomponente einer Faser G_s von G die Zusammenhangskomponente von G_s , die $\varepsilon(s)$ enthält. Die Identitäts- oder Zusammenhangskomponente von G ist die Vereinigung aller Identitätskomponenten der Fasern von G .

Die Identitätskomponente ist tatsächlich ein Untergruppenschema, und als solches sogar normal. Siehe dazu auch [Sil94, Proposition IV.1.5].

Einige wichtige Spezialfälle von Gruppenschemata sind abelsche Gruppenschemata, die im Folgenden näher betrachtet werden. Es sei erwähnt, dass deren Gruppenverknüpfungen tatsächlich kommutativ sind, was aber nicht weiter benötigt wird.

Bemerkung 2.6. Für ein K -Gruppenschema endlichen Typs über einem Körper K sind glatt und geometrisch reduziert äquivalent. Im glatten Fall sind auch irreduzibel und zusammenhängend äquivalent nach [GW10, Exercise 3.16], [GW10, Corollary 16.51].

Definition 2.7 (Abelsche Varietät). Eine abelsche Varietät X/K ist ein eigentliches, glattes, irreduzibles K -Gruppenschema.

Bemerkung 2.8. Abelsche Varietäten sind projektiv nach [Bos13, Proposition 9.6/4].

Definition 2.9 (Abelsches Schema). Ein abelsches S -Schema ist ein eigentliches, glattes S -Gruppenschema, dessen Fasern abelsche Varietäten sind, also zusätzlich irreduzibel beziehungsweise zusammenhängend, siehe 2.7 und 2.6, nachdem eigentlich und glatt stabil unter Basiswechsel sind.

In manchen Fällen ist für (S) -Schemata X, Y kein (S) -Morphismus $f: X \rightarrow Y$ gegeben, sondern nur ein Morphismus auf einer offenen dichten Teilmenge von X , zum Beispiel der generischen Faser. Solche Fälle sind besonders interessant, wenn Aussagen darüber getroffen werden sollen, ob und wie sich dieser Morphismus auf ganz X erweitert. Ein Beispiel sind rationale Abbildungen zwischen projektiven Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Eine Verallgemeinerung davon sind die (S) -rationalen Abbildungen zwischen (S) -Schemata.

Definition 2.10 (rationale Abbildung). Sei S Schema, und seien X und Y glatte S -Schemata. Eine rationale Abbildung $\phi: X \dashrightarrow Y$ von S -Schemata ist eine Äquivalenzklasse der Menge

$$\{\psi: U \rightarrow Y \text{ } S\text{-Morphismus} \mid U \subset X \text{ dicht, offen in } X\}$$

wobei $\psi: U \rightarrow Y$ äquivalent zu $\psi': U' \rightarrow Y$ ist, falls sie auf einer in X dichten, offenen Teilmenge von $U \cap U'$ übereinstimmen.

Ein offenes Unterschema $U \subset X$ heißt S -dicht in X , falls für alle $s \in S$ die Faser U_s topologisch dicht in der Faser X_s liegt. Eine S -rationale Abbildung $\phi: X \dashrightarrow Y$ ist eine rationale Abbildung, wobei alle dichten offenen Mengen aus obiger Definition S -dicht sind.

Eine (S) -rationale Abbildung $\phi: X \dashrightarrow Y$ heißt definiert in $x \in X$, falls es eine offene Umgebung U von x gibt und ϕ von einem Morphismus $\psi: U \rightarrow Y$ präsentiert werden kann. Der Definitionsbereich $\text{Dom}(\phi)$ von ϕ sind die Punkte, in denen ϕ definiert ist. Er ist eine offene, (S) -dichte Teilmenge von X . Ist X separiert über R , so gibt es einen Morphismus $\text{Dom}(\phi) \rightarrow Y$, der ϕ präsentiert.

Eine $(S-)$ rationale Abbildung $\phi : X \dashrightarrow Y$ heißt $(S-)$ birational, falls sie von einem S -Morphismus $\psi : U \rightarrow Y$ präsentiert werden kann, der die offene Immersion einer $(S-)$ dichte, offenen Teilmenge von Y ist.

Nachdem das Hauptaugenmerk auf Gruppenschemata liegt, ist besonders interessant, wie sich S -Gruppenschemata bezüglich $(S-)$ rationalen Abbildungen verhalten. Tatsächlich verhalten sich eigentliche Gruppenschemata in folgender Hinsicht gutartig:

Theorem 2.11. *Sei G ein R -Gruppenschema, Y ein glattes R -Schema und $\phi : Y \dashrightarrow G$ eine R -rationale Abbildung. Dann gilt*

- (a) $Y \setminus \text{Dom}(\phi)$ hat (reine) Kodimension 1.
- (b) Ist G eigentlich, so ist ϕ Morphismus.

Für den Beweis siehe zum Beispiel [Sil94, Proposition IV.6.2].

2.2 Normale Komposition auf Schemata

Sei R im folgenden ein Dedekindring. In manchen Fällen kann der Morphismus einer Gruppenstruktur nicht auf dem gesamten Schema sondern nur als R -rationale Abbildung angegeben werden. Das führt zur Definition der normalen Komposition, welche eine R -rationale Gruppenstruktur liefert.

Definition 2.12 (normale Komposition). Sei V ein glattes R -Schema mit nichtleeren Fasern. Eine normale Komposition auf V ist eine R -rationale Abbildung

$$\mu : V \times_R V \dashrightarrow V ,$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(Assoziativität) Es gilt auf dem entsprechenden Definitionsbereich

$$\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)) .$$

(Inverses) Die R -rationalen Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \phi : V \times_R V \dashrightarrow V \times_R V & \psi : V \times_R V \dashrightarrow V \times_R V \\ (x, y) \longmapsto (x, \mu(x, y)) & (x, y) \longmapsto (y, \mu(x, y)) \end{array}$$

haben dichtes Bild in jeder Faser und die Einschränkung auf jede Faser ist birational.

Ein großer Vorteil einer normalen Komposition ist, dass zumindest ein erheblicher Teil (ein offenes dichtes Unterschema) offen und dicht in einem richtigen Gruppenschema mit derselben Gruppenstruktur liegt, wie folgender Satz von Weil besagt. Für den Beweis siehe [CS86, Theorem VIII.1.12] oder [Sil94, Theorem IV.6.9] für eine Skizze.

Theorem 2.13 (Weil). *Sei V ein glattes R -Schema mit nichtleeren Fasern und normaler Komposition $\mu: V \times_R V \dashrightarrow V$. Sei V zusätzlich endlichen Typs und die Vereinigung der Bilder der Schnitte $V(R)$ sei dicht in jeder Faser. Dann gibt es ein R -Gruppenschema (G, μ_G) endlichen Typs und ein gemeinsames, offenes, R -dichtes Unterschemata $V \hookleftarrow U \hookrightarrow G$ von V und G , so dass $\mu|_U = \mu_G|_U$.*

3 Néron-Modelle

Sei R im gesamten Kapitel ein Dedekindring mit Quotientenkörper K .

Nachdem jetzt die nötigen Grundlagen für Gruppenschemata vorhanden sind, lassen sich Néron-Modelle wie zuvor motiviert definieren. Dazu wird erst die formale Definition angegeben und für Gruppenschemata spezialisiert. Danach werden wichtige allgemeine Eigenschaften untersucht, die direkt aus der universellen Eigenschaft folgen, unter anderem die Eindeutigkeit und Lokalität. Zuletzt wird noch einen kurzen Blick auf Néron-Modelle allgemeiner abelscher Varietäten geworfen.

3.1 Definition

Das Néron-Modell eines K -Gruppenschemas ist – falls es existiert – eine besonders gutartige (genauer: glatte, separierte) Erweiterung der Gruppenstruktur auf ein R -Gruppenschema, das minimal mit dieser Eigenschaft gewählt ist.

In diesem Abschnitt wird vorerst die allgemeine Definition eines Néron-Modells nach [BLR90, Definition 1.2/1] anhand der Erweiterungsforderung eingeführt. Daraus leiten sich bereits einige Eigenschaften ab, die zu einer alternativen Definition für K -Gruppenschemata führen, welche die Gruppenstruktur wieder mit einbezieht.

Definition 3.1 (Néron-Modell). Sei R ein Dedekindring, $K = \text{Quot}(R)$ und X_K ein glattes, separiertes K -Schema endlichen Typs. Ein Néron-Modell von X_K über R ist ein glattes, separiertes R -Modell X von X_K mit der Néron-Abbildungseigenschaft:

Für jedes weitere glatte R -Schema Y wird jeder K -Morphismus $Y_K \rightarrow X_K$ auf den generischen Fasern durch einen eindeutigen R -Morphismus $Y \rightarrow X$ erweitert.

In anderen Worten die kanonische Abbildung $X(Y) \rightarrow X_K(Y_K)$, die durch die Einschränkung induziert wird, ist ein Isomorphismus.

Die Motivation als minimale Erweiterung von Gruppenschemata ist wie folgt gerechtfertigt:

Lemma 3.2. Sei X ein Néron-Modell seiner generischen Faser X_K über R . Ist X_K ein K -Gruppenschema, so wird dessen K -Gruppenstruktur durch die Néron-Abbildungseigenschaft eindeutig auf eine S -Gruppenschemastruktur auf X erweitert.

Beweisskizze. Die Gruppenverknüpfung $\mu_K: X_K \times_K X_K \rightarrow X_K$ erweitert sich wegen der Néron-Abbildungseigenschaft zu einem Morphismus $\mu: X \times_R X \rightarrow X$, da $X \times_R X$ wieder glatt ist. Genauso liften das Inverse, der Einheitsschnitt und, wegen der Eindeutigkeit, die Diagramme aus 2.1, was μ zur Gruppenverknüpfung auf X macht. \square

Lemma 3.3. *Ist X_K ein K -Gruppenschema und X ein glattes R -Modell und Gruppenschema von X_K , das die Néron-Abbildungseigenschaft erfüllt, so ist X ein Néron-Modell von X_K .*

Beweis. Als Faser eines glatten Schemas ist X_K glatt. Es bleibt also zu zeigen, dass X_K und X separiert sind.

Ein Gruppenschema X ist genau dann separiert, wenn der Einheitsschnitt $\varepsilon \in X(R)$ eine abgeschlossene Immersion, siehe [Aut16, Lemma 38.6.1] oder [BLR90, Lemma 7.1/2]. Entsprechend sind K -Gruppenschemata immer separiert, siehe [Aut16, Lemma 38.7.3].

Sei wegen 3.8 ohne Einschränkung R diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k . Es wird im Folgenden gezeigt, dass topologisch $\text{im}(\varepsilon) = \text{im}(\varepsilon_K)$, also dass $\text{im}(\varepsilon_K)$ aus genau dem Punkt $\varepsilon(\text{Spec } K)$ in der generischen Faser und dem Punkt $\varepsilon(\text{Spec } k)$ in der speziellen Faser besteht. Dann ist $\text{im}(\varepsilon)$ topologisch abgeschlossen in X und der Schnitt ε demnach eine abgeschlossene Immersion, da er aufgrund der Glattheit von X bereits Homeomorphismus und als Schnitt surjektiv auf den Halmen ist.

Auf der generischen Faser gilt $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)} \cap X_K = \text{im}(\varepsilon_K)$, da ε_K eine abgeschlossene Immersion ist. Außerdem stimmen hier $\text{im}(\varepsilon_K) = \{\varepsilon_K(\text{Spec } K)\}$ und $\text{im}(\varepsilon) \cap X_K$ wegen der Néron-Abbildungseigenschaft punktweise überein.

Auf der speziellen Faser X_k ist zu zeigen, dass für jeden Punkt $x \in \overline{\text{im}(\varepsilon_K)} \cap X_k$ bereits $x \in \text{im}(\varepsilon)$ gilt. Sei also x ein solcher Punkt. Das schematische Bild $\text{Im}(\varepsilon_K)$ von ε_K ist nach [GW10, Remark 10.32] genau $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)} = \{\varepsilon_K(\text{Spec}(K))\}$ mit reduzierter Unterschemastruktur, was $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}$ mit einer integralen Unterschemastruktur ausstattet. Sei U eine offene, affine Umgebung von x in X und $\text{Spec}(A) = U \cap \overline{\text{im}(\varepsilon_K)}$ ein offenes, affines Unterschema von $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}$. Später werden die Inklusionen $R \subset A \subset K$ gezeigt. Nachdem R als diskreter Bewertungsring der größte Unterring von K ist, folgt daraus dann $R = A$ und es ergibt sich zusammen mit der Immersion zu $\text{Spec}(A)$ ein Schnitt

$$X(R) \ni e: \text{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(A) \hookrightarrow X,$$

der $\varepsilon_K: \text{Spec}(K) \rightarrow X_K$ erweitert. Dieser muss allerdings wegen der Eindeutigkeit aus der Néron-Abbildungseigenschaft gleich $\varepsilon \in X(R)$ sein, also liegt x in $\text{im}(e) = \text{im}(\varepsilon)$. Nachdem $x \in \overline{\text{im}(\varepsilon_K)} \cap X_k$ beliebig gewählt war, kann $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)} \cap X_k$ nur den Punkt $\varepsilon(\text{Spec } k)$ enthalten.

Betrachte also A wie oben, um $R \subset A \subset K$ zu zeigen. Es ist $e_K := \varepsilon_K(\text{Spec}(K))$ der generische Punkt von $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}$ und entsprechend auch vom offenen Unterschema $\text{Spec}(A)$.

Da $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}$ und $\text{Spec}(A)$ integer sind, ist $\mathcal{O}_{\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}, e_K} = \mathcal{O}_{A, e_K}$ Körper. Es folgt eine Sequenz von Körperhomomorphismen auf den Halmen

$$\text{id}_K : K \xrightarrow{\pi_K^\#} \mathcal{O}_{\overline{\text{im}(\varepsilon_K)}, e_K} = \mathcal{O}_{A, e_K} = \text{Quot}(A) \xrightarrow{\varepsilon_K^\#} K$$

weshalb $\text{Quot}(A) \cong K$ und daher $A \hookrightarrow K$. Für den zu $\pi|_{\text{Spec}(A)}$ assoziierten Ringhomomorphismus $\pi^\# = \pi_K^\#|_R$ kommutiert außerdem wegen $\pi \circ \varepsilon_K = \text{id}_{\text{Spec}(K)}$ das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \text{Quot}(A) \\ \pi^\# \uparrow & & \downarrow \varepsilon_K^\# \\ R & \hookrightarrow & K \end{array}$$

weshalb $\pi^\# : R \hookrightarrow A$ gelten muss.

Die Mengen $\overline{\text{im}(\varepsilon_K)} = \text{im}(\varepsilon_K)$ stimmen also überein, insbesondere ist $\text{im}(\varepsilon_K)$ eine abgeschlossene Immersion. \square

Satz/Definition 3.4 (Néron-Modelle elliptischer Kurven). Sei E_K eine elliptische Kurve, das heißt ein glattes, projektives, insbesondere separiertes, integres K -Schema endlichen Typs vom Geschlecht 1. Dann ist ein Néron-Modell von E_K nach 3.2 und 3.3 ein glattes R -Modell und Gruppenschema E/R mit der Néron-Abbildungseigenschaft:

Für jedes weitere glatte R -Schema Y wird jeder K -Morphismus $\phi_K : Y_K \rightarrow E_K$ auf den generischen Fasern durch einen eindeutigen R -Morphismus $Y \rightarrow E$ erweitert.

Bemerkung 3.5. Das ϕ_K aus 3.4 kann auch als K -rationale Abbildung gewählt werden. Da E_K projektiv, also eigentlich, ist, erweitert sich ϕ_K nach 2.11 zu einem Morphismus.

Im Fall eines diskreten Bewertungsrings R ist der generische Punkt (0) von $\text{Spec}(R)$ offen, da das Komplement $\text{Spec}(R) \setminus \{(0)\}$ aus nur endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht. Entsprechend ist die generische Faser Y_K jedes R -Schemas Y offen. Ist Y glatt – also insbesondere flach und reduziert – über R , ist Y_K dicht in Y nach [Har77, Proposition III.9.7]. Also präsentiert der Morphismus $\phi_K : Y_K \rightarrow E_K$ eine rationale Abbildung wie in 2.10

$$\phi : X \dashrightarrow E$$

Die Néron-Abbildungseigenschaft bedeutet, dass diese sich Abbildung eindeutig zu einem Morphismus $X \rightarrow E$ erweitert.

3.2 Eigenschaften

3.2.1 Allgemeine Eigenschaften

Wie oben sei R immer noch ein Dedekindring mit $K = \text{Quot}(R)$.

Ein Grund, weshalb für ein Néron-Modell Separiertheit gefordert wird, ist die Eindeutigkeit von Morphismen für separierte Schemata im Sinne des folgenden Satzes. Für den Beweis siehe [GW10, Corollary 9.9].

Satz 3.6. *Seien Y und X zwei R -Schemata, sei X separiert und Y reduziert. Dann ist ein Morphismus $\phi : Y \rightarrow X$ durch jede Einschränkung auf eine dichte Teilmenge von Y eindeutig bestimmt. Insbesondere sind, falls Y flach über X ist, Erweiterungen von Morphismen der generischen Fasern eindeutig.*

Somit ist die Eindeutigkeit der Erweiterung eines Schnitts bereits durch die Separiertheit des Néron-Modells gegeben. Außerdem ist nun bekannt, dass die kanonische Einschränkung $X(Y) \rightarrow X_K(Y_K)$ der R -Schnitte eines Néron-Modells X nicht nur für glatte, sondern auch für reduzierte Schemata Y injektiv ist.

Nun folgen einige weitere grundlegende Eigenschaften von Néron-Modellen. Hierbei ist zu beachten, dass sich Néron-Modelle nicht so gutartig verhalten, wie es die universelle Eigenschaft vermuten lässt. Unter anderem sind sie zwar stabil unter Produktbildung (hier nicht benötigt und nicht gezeigt), allerdings nicht unter beliebigem Basiswechsel.

Satz 3.7. *Sei X ein Néron-Modell seiner generischen Faser X_K über R . Dann gilt*

- (a) *X ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie.*
- (b) *Für einen étalen Basiswechsel $R \rightarrow R'$ mit K' Funktionenkörper von R' ist $X_{R'} = X \times_R R'$ ein Néron-Modell seiner generischen Faser $X_{K'} = X_K \times_K K'$ über R' , das heißt étaler Basiswechsel kommutiert mit der Bildung von Néron-Modellen.*

Beweis. Die erste Eigenschaft folgt direkt aus der universellen Eigenschaft, für die zweite sind weitere Argumente zur Stabilität unter Basiswechsel nötig.

- (a) Sei X' ein weiteres Néron-Modell von X_K . Dann liefert die Néron-Abbildungseigenschaft zur Identität $\text{id}_{X_K} : X_K \rightarrow X_K$ eindeutige Morphismen $\phi : X' \rightarrow X$ und $\psi : X \rightarrow X'$. Die Verknüpfungen $\phi \circ \psi : X \rightarrow X$ und $\psi \circ \phi : X' \rightarrow X'$ sind jeweils die Identität auf der generischen Faser X_K , welche nach der Eindeutigkeit in der Néron-Abbildungseigenschaft eindeutig durch die Identitäten auf X und auf X' erweitert wird. Also sind ϕ, ψ zueinander inverse Isomorphismen.

- (b) $X_{R'}$ ist glatt, separiert und von endlichem Typ, das heißt lokal von endlichem Typ und quasikompakt, da diese Eigenschaften stabil unter Basiswechsel sind. Es ist somit nur die Néron-Abbildungseigenschaft zu prüfen. Sei also Y' glattes R' -Schema mit generischer Faser $Y'_{K'}$ und $\phi_{K'}: Y'_{K'} \rightarrow X_{K'}$ ein K' -Morphismus.

Existenz: Y' ist ein glattes R -Schema durch die Komposition

$$Y' \xrightarrow{\text{glatt}} \text{Spec}(R') \xrightarrow{\text{glatt}} \text{Spec}(R)$$

glatter Abbildungen. Außerdem lässt sich der K -Morphismus

$$\phi_K := \text{proj}_{X_K} \circ \phi_{K'}: Y'_{K'} \xrightarrow{\phi_{K'}} X_{K'} = X \times_K K' \xrightarrow{\text{proj}_{X_K}} X_K$$

mit der Néron-Abbildungseigenschaft von X zu einem eindeutigen R -Morphismus $\phi_R: Y' \rightarrow X$ erweitern. So ergibt sich ein kanonischer, eindeutiger R -Morphismus (beziehungsweise ein R' -Morphismus) $\phi_{R'} = (\phi_R, \pi_{R'})$ auf dem Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} Y' & & \\ \downarrow \phi_R & \searrow \exists! \phi_{R'} & \downarrow \pi_{R'} \\ X \times_R R' & \xrightarrow{\text{proj}_{R'}} & \text{Spec}(R') \\ \downarrow \text{proj}_X & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \text{Spec}(R) \end{array}$$

$\phi_{R'}$ erweitert $\phi_{K'}$, denn

$$\begin{aligned} \phi_{R'}|_{Y'_{K'}} &= (\phi_R|_{Y'_{K'}}, \pi_{R'}|_{Y'_{K'}}: Y'_{K'} \hookrightarrow Y' \rightarrow \text{Spec}(R')) \\ &\stackrel{\text{Faserprod.}}{=} (\phi_R|_{Y'_{K'}}, \pi_{K'}: Y'_{K'} \rightarrow \text{Spec}(K') \hookrightarrow \text{Spec}(R')) \\ &\stackrel{\text{Def. } \phi_R}{=} (\phi_K, \pi_{K'}) \\ &\stackrel{\text{Def. } \phi_K}{=} (\text{proj}_{X_K} \circ \phi_{K'}, \text{proj}_{K'} \circ \phi_{K'}) \\ &= \phi_{K'} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Für jeden weiteren Lift $\psi_{R'}$ von $\phi_{K'}$ ist $\text{proj}_X \circ \psi_{R'}$ ein Lift von ϕ_K und es gilt aufgrund der Eindeutigkeit in der Néron-Abbildungseigenschaft $\text{proj}_X \circ \psi_{R'} = \phi_R$. Damit lässt ψ ebenfalls das obige Diagramm kommutieren und ist nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts bereits gleich $\phi_{R'}$. \square

Eine sehr wichtige und praktische Eigenschaft von Néron-Modellen ist die Lokalität, also die Möglichkeit, lokal zu untersuchen, ob es sich um ein Néron-Modell handelt.

Satz 3.8. Für ein R -Schema X endlichen Typs ist äquivalent:

- (i) X ist das Néron-Modell seiner generischen Faser.
- (ii) $X \times_R \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R),s})$ ist das Néron-Modell seiner generischen Faser über $\mathcal{O}_{R,s} = R_s$ für alle abgeschlossenen Punkte $s \in \operatorname{Spec}(R)$.

Das heißt, es kann ohne Einschränkung immer davon ausgegangen werden, dass R lokal ist, also ein diskreter Bewertungsring.

Im Folgenden wird nur die Implikation (ii) \Rightarrow (i) benötigt, daher sei für die andere Richtung auf [BLR90, Proposition 1.2/4] verwiesen. Erst ist dazu das folgende Lemma und Korollar zur Erweiterung von Morphismen auf offene Umgebungen nötig.

Lemma 3.9. Sei S ein lokal noethersches Schema, seien X und Y zwei S -Schemata und sei X endlichen Typs. Seien weiterhin $y \in Y$ und ein S -Morphismus $f_y : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow X$ gegeben. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset Y$ von y , auf der f_y von einem Morphismus $f : U \rightarrow X$ erweitert wird.

Beweis. Es reicht, sich auf den affinen Fall $X = \operatorname{Spec}(B)$ zu beschränken. Denn $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist lokal mit Maximalideal \mathfrak{y} , also ist \mathfrak{y} in jeder Zariski-abgeschlossenen, nichtleeren Menge von $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$ enthalten. Anders gesagt die einzige offene Umgebung von \mathfrak{y} in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$ ist $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$ selbst. Somit ist das offene Urbild jeder offenen, affinen Umgebung $\operatorname{Spec}(B) \subset X$ von $f_y(\mathfrak{y})$ ganz $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$.

X ist nach Voraussetzung von endlichem Typ und S lokal noethersch. Es kann also eine genügend kleine, offene, affine Umgebung $\operatorname{Spec}(B) \subset X$ von $f_y(\mathfrak{y})$ und eine offene Teilmenge $\operatorname{Spec}(R) \subset S$ ausgewählt werden, so dass R noethersch und B eine R -Algebra endlichen Typs – wegen noethersch auch endlich präsentiert – ist. Das heißt B hat die Form

$$B = R[X_0, \dots, X_n]/(g_0, \dots, g_r) \quad n, r \in \mathbb{N}$$

Wähle weiterhin eine genügend kleine, offene, affine Umgebung $\operatorname{Spec}(A) \subset Y$ von y aus, dass A ebenfalls R -Algebra ist. Hier gilt $\mathfrak{y} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y} = \operatorname{Spec}(A_y) \subset \operatorname{Spec}(A)$.

Der Morphismus $f_y : \operatorname{Spec}(A_y) \rightarrow \operatorname{Spec}(B) \subset X$ korrespondiert also zu einem Ringhomomorphismus $\Gamma(f_y) : B \rightarrow A_y$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} \phi : R[X_0, \dots, X_n] & \twoheadrightarrow & \frac{R[X_0, \dots, X_n]}{(g_0, \dots, g_r)} \xrightarrow{\Gamma(f_y)} A_y \\ X_i & \longmapsto & \frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad i = 0, \dots, n \\ g_j & \longmapsto & \frac{\alpha'_j}{\beta'_j} \quad j = 0, \dots, r \end{array}$$

Die Bedingung $\frac{\alpha'_j}{\beta_j} = \Gamma(f_y)(g_j) = 0 \in A_y$ heißt, dass es γ_j gibt, so dass $\alpha'_j \gamma_j = 0 \in A$.
 Definiere $\gamma := \prod_{i=0}^n \beta_i \prod_{j=0}^r \gamma_j$. Dann gilt für den Morphismus

$$\begin{aligned} \phi_\gamma: R[X_0, \dots, X_n] &\longrightarrow A_\gamma \\ X_i &\longmapsto \frac{\alpha_i \cdot \prod_{k \neq i} \beta_k \prod_{j=0}^r \gamma_j}{f} \quad i = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

dass $(g_0, \dots, g_r) \subset \ker(\phi_f)$ und das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} R[X_0, \dots, X_n] & \xrightarrow{\phi_\gamma} & A_\gamma \\ \downarrow \scriptstyle \phi_\gamma & \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\Gamma(f_y)} & A_y \end{array} .$$

Insbesondere faktorisiert $\Gamma(f_y): B \rightarrow A_\gamma \rightarrow A_y$ über A_γ , was heißt, dass f_y über einen Morphismus $f: D(\gamma) \rightarrow \text{Spec}(B)$ faktorisiert:

$$f_y: \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} = \text{Spec}(A_y) \hookrightarrow \text{Spec}(A_\gamma) = D(\gamma) \xrightarrow{f} \text{Spec}(B)$$

$D(\gamma)$ ist eine offene Umgebung von y , womit die Existenz gezeigt ist. \square

Korollar 3.10. Sei S ein Dedekindschema, sei $\pi: Y \rightarrow S$ ein integrales, flaches S -Schema und X ein separiertes S -Schema endlichen Typs. Sei für ein $s \in S$ ein S -Morphismus

$$f_s: Y \times_S \mathcal{O}_{S,s} \rightarrow X \times_S \mathcal{O}_{S,s}$$

gegeben. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset Y$ von $Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}$, auf der f_s eindeutig von einem Morphismus $f: U \rightarrow X$ erweitert wird. Insbesondere gilt dies für glatte Y , da Y dann die disjunkte Vereinigung integrier, flacher S -Schemata ist.

Beweis. Sei $y \in Y \times_S \mathcal{O}_{S,s} \subset Y$ und $s' := \pi(y) \in \text{Spec } \mathcal{O}_{S,s}$ die zugehörige Spezialisierung von s . Dann ist $y \in Y \times_S \mathcal{O}_{S,s'}$ und π induziert einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{S,s'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ auf den Halmen. Der zugehörige Morphismus $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{S,s'} \subset \text{Spec } \mathcal{O}_{S,s}$ von affinen R -Schemata ist die Einschränkung von π auf $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \subset Y$, insbesondere liegt ganz $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y}$ im Urbild von $\text{Spec } \mathcal{O}_{S,s}$. Das zeigt, dass $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \subset Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}$ für jeden Punkt $y \in Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}$, und die Einschränkung von f_s liefert für jedes solches y einen R -Morphismus

$$f_{s,y}: \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow X \times_S \mathcal{O}_{S,s} \subset X \quad \text{für alle } y \in Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}$$

Jeder davon erweitert sich nach 3.9 zu einem Morphismus auf einer offenen Umgebung $U_y \subset Y$ von y . Diese Erweiterungen sind eindeutig aufgrund der Separiertheit. Die Definitionsmengen U_y sowie ihre Schnitte $U_y \cap U_{y'} \subset Y$, $y, y' \in Y$, sind offene, integrale Unterschemata mit demselben generischen Punkt η wie Y , der entsprechend dicht

in allen U_y liegt. Da Y nach Voraussetzung flach ist, liegt η außerdem in $Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}$ nach [GW10, Proposition 14.14], sprich im Definitionsbereich von f_s . Da X separiert ist, sind deswegen nach 3.6 alle Erweiterungen von $f_s|_{U_y}$ auf ganz U_y und von $f_s|_{U_y \cap U_{y'}}$ auf $U_y \cap U_{y'}$ eindeutig durch $f_s|_{\{\eta\}}$ bestimmt. Insbesondere sind die Erweiterungen $f_{s,y}$ eindeutig und stimmen auf den Schnitten ihrer Definitionsmengen überein. Daher verkleben sie zu einem eindeutigen Morphismus

$$f : U = \bigcup_{y \in Y \times_S \mathcal{O}_{S,s}} U_y \longrightarrow X$$

der f_s erweitert. □

Beweis von 3.8. Vorerst ist zu zeigen, dass X glatt und separiert ist. Letzteres gilt, da das Bewertungskriterium für Separiertheit erfüllt ist: Sei (A, \mathfrak{m}) ein Bewertungsring und über $\pi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ eine R -Algebra mit $\pi(\mathfrak{m}) = s$. Dann faktorisiert π über $\text{Spec}(R_s)$ und für jeden Morphismus $\text{Spec}(\text{Quot}(A)) \rightarrow X$ faktorisiert eine Erweiterung $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ über $X \times_R \mathcal{O}_{R,s}$:

$$\text{Spec}(A) \rightarrow X_s \hookrightarrow X \times_R \mathcal{O}_{R,s} \hookrightarrow X$$

Hier ist sie eindeutig wegen Separiertheit von $X \times_R \mathcal{O}_{R,s}$.

Für Glattheit auf X ist nur noch nötig, dass X ein flaches R -Schema ist, da R noethersch und X nach Voraussetzung von endlichem Typ, also endlich präsentiert, ist. Für ein $s \in \text{Spec}(R)$ und ein $x \in X_s \subset X$ ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{(X \times_R \mathcal{O}_{R,s}),x}$ wegen der Glattheit von $X \times_R \mathcal{O}_{R,s}$ bereits flach über R_s .

Es bleibt die Néron-Abbildungseigenschaft zu zeigen. Sei $K = \text{Quot}(R)$ und betrachte ein glattes R -Schema Y sowie einen K -Morphismus $f_K : Y_K \rightarrow X_K$ der generischen Fasern. Als glattes R -Schema ist Y flach, reduziert und insbesondere regulär, weshalb die irreduziblen Komponenten alle offen und disjunkt sind. Es ist also ohne Einschränkung anzunehmen, dass Y integer ist. Nach Voraussetzung erweitert sich f_K für einen abgeschlossenen Punkt $s \in \text{Spec}(R)$ eindeutig zu einem Morphismus

$$f_s : Y \times_R \mathcal{O}_{R,s} \rightarrow X \times_R \mathcal{O}_{R,s},$$

da $X \times_R \mathcal{O}_{R,s}$ Néron-Modell seiner generischen Faser X_K ist. Nach 3.10 gibt es eine offene Umgebung U_s von $Y \times_R \mathcal{O}_{R,s}$, auf der $f_s|_{U_s \times_R \mathcal{O}_{R,s}}$ wiederum eindeutig auf einen Morphismus $u_s : U_s \rightarrow X$ erweitert wird. Die u_s stimmen wieder wegen Separiertheit von X nach 3.6 auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein. Zudem überdecken sie ganz Y , da $\text{Spec}(R)$ genau aus seinen abgeschlossenen Punkten und dem generischen Punkt besteht, und letzterer in jeder offenen Teilmenge enthalten ist. Daher liefert Verkleben der eindeutigen u_s einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : Y \rightarrow X$, der f_K erweitert. Das heißt die Néron-Abbildungseigenschaft ist erfüllt. □

3.2.2 Néron-Modelle abelscher Varietäten

Nachdem das Hauptaugenmerk der Arbeit explizit auf Néron-Modellen abelscher Varietäten liegt, seien hier einige Eigenschaften aufgeführt. Wichtig ist unter anderem, dass die Existenz in diesem Fall allgemein gesichert ist, was für elliptische Kurven später explizit nachgewiesen wird. R sei in diesem Abschnitt wieder ein Dedekindring und $K := \text{Quot}(R)$. Zur Existenz von Néron-Modellen im Fall abelscher Varietäten besagt [BLR90, Corollary 1.3/2] vorerst ohne explizite Konstruktion:

Satz 3.11. *Abelsche Varietäten über K haben ein Néron-Modell über R .*

Abelsche Varietäten unterscheiden sich von generellen glatten, separierten K -Gruppenschemata dadurch, dass die Gruppen ihrer Schnitte abelsch sind. Da diese Eigenschaft für Gruppenschemata sehr wünschenswert ist, stellt sich die Frage, inwieweit das Néron-Modell einer abelschen Varietät wieder abelsch ist.

Satz 3.12. *Sei A_K eine abelsche Varietät über K mit guter Reduktion, das heißt es gibt ein glattes, eigentliches R -Modell A von A_K . Dann ist A das Néron-Modell von A_K und die induzierte Gruppenschemastruktur macht A zu einem abelschen Schema.*

Beweisskizze. Für den vollständigen Beweis siehe [BLR90, Proposition 1.4/2]. Nach 3.11 existiert ein Néron-Modell X von A_K , das nach 3.2 eine Gruppenschemastruktur trägt. Es bleibt zu zeigen, dass A isomorph zu X ist mit zusammenhängenden Fasern, denn dann ist A abelsches Schema, da es nach Voraussetzung bereits glatt und eigentlich ist.

A ist isomorph zu X : Die Néron-Abbildungseigenschaft von X liefert zur Identität id_{A_K} einen R -Morphismus $f : A \rightarrow X$, der bereits offene Immersion, siehe dazu [BLR90, 4.3/1 (ii) oder 4.4/1]. Es ist zu zeigen, dass das Bild von f ganz X ist, woraus wegen Reduziertheit von X bereits folgt, dass f ein Isomorphismus ist. X ist glatt, also nach 1.3 flaches und lokal endlich präsentiertes R -Schema. Als solches ist es (universell) offen nach [GW10, Theorem 14.33] und somit zusammenhängend nach [GW10, Proposition 3.24], da die generische Faser A_K zusammenhängend und $\text{Spec}(R)$ ein integres Schema ist. Es ist also nur zu zeigen, dass das Bild von f abgeschlossen ist, da es dann als offene und abgeschlossene Teilmenge des zusammenhängenden X schon ganz X sein muss. A ist nach Voraussetzung eigentlich, weswegen $A \rightarrow R$ universell abgeschlossen und insbesondere der Basiswechsel $A \times_R X \rightarrow X$ abgeschlossen ist. Nachdem X separiert ist, ist der Graph $\Gamma_f : A \rightarrow A \times_R X$ und daher das Bild von

$$f : A \xrightarrow{\Gamma_f} A \times_R X \xrightarrow{f \times_R \text{id}} X$$

abgeschlossen in X .

A hat zusammenhängende Fasern: Ohne Einschränkung sei R ein diskreter Bewertungsring nach 3.8. Dann ist nur noch die spezielle Faser über dem abgeschlossenen Punkt zu überprüfen, die nach [Gro61, 5.5.1] zusammenhängend ist. \square

Mit diesem Ergebnis kann für Néron-Modelle abelscher Varietäten eine Aussage dazu getroffen werden, wo die induzierte Gruppenschemastruktur abelsch ist.

Satz 3.13. *Sei A_K eine abelsche Varietät über K und X ihr Néron-Modell über R . Sei weiterhin $S \subset \operatorname{Spec}(R)$ die Menge des generischen Punktes zusammen mit allen abgeschlossenen Punkten $s \in \operatorname{Spec}(R)$, über denen A_K gute Reduktion hat, also für die A_K ein glattes, eigentliches R_s -Modell hat. S ist entsprechend offen und dicht in $\operatorname{Spec}(R)$. Dann ist $X \times_R S$ ein abelsches Schema über S .*

Beweisskizze. Siehe [BLR90, Theorem 1.4/3] für den vollständigen Beweis. Es gilt zu zeigen, dass A_K in einer Umgebung U_s jedes Punktes $s \in S$ gute Reduktion hat, also die generische Faser eines eigentlichen, glatten Schemas über U_s ist. Diese Schemata sind dann nach 3.12 bereits jeweils über U_s Néron-Modelle und abelsch. Wegen der Néron-Abbildungseigenschaft und der resultierenden Eindeutigkeit von Néron-Modellen über den offenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(R)$ lassen sie sich zu einem abelschen S -Schema verkleben.

In den abgeschlossenen Punkten von S hat A_K nach Definition gute Reduktion, welche sich auf eine offene Umgebung erweitern lässt. Für den generischen Punkt kann der schematische Abschluss A des nach 2.8 projektiven A_K in \mathbb{P}_R^n betrachtet werden, das heißt das schematische Bild von

$$A_K \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_R^n$$

Hier ist es explizit der Abschluss des Bildes mit reduzierter Unterschemastruktur nach [GW10, Remark 10.32], da A_K reduziert ist. Dieser ist glatt über dem generischen Punkt von $\operatorname{Spec}(R)$ und somit auch über einer offenen Umgebung S' dessen. Insgesamt ist es ein glattes, projektives, also eigentliches, S' -Modell von A_K um den generischen Punkt, was gesucht war. \square

4 Weierstraßmodelle

In diesem Kapitel wird näher auf die Konstruktion eines projektiven R -Schemas W aus einer Weierstraßgleichung über dem Quotientenkörper eines Dedekindrings eingegangen. Ein solches Schema ist zwar eigentlich – erfüllt also die Néron-Abbildungseigenschaft – ist aber nicht notwendigerweise glatt und die Gruppenverknüpfung erweitert sich nicht immer zu einem Morphismus auf ganz W . Immerhin letzteres ist auf dem Unterschema W^0 der glatten Punkte von W behoben. Denn hier erweitert sich die Gruppenverknüpfung und macht W^0 zum Gruppenschema, wie in Abschnitt 4.2 zu sehen sein wird.

Vorweg sei schon gesagt, dass W^0 nur groß genug für die Néron-Abbildungseigenschaft ist, wenn W regulär ist. Allerdings wird sich aus der späteren Konstruktion ergeben, dass W^0 immer ein großer Teil des Néron-Modells ist.

Die behandelte Konstruktion des Néron-Modells einer elliptischen Kurve beginnt in jedem Fall mit einem Weierstraßmodell wie unten beschrieben.

4.1 Konstruktion

4.1.1 Weierstraßgleichungen

Jede elliptische Kurve E_K über einem beliebigen Körper K kann durch eine homogene Gleichung der Form

$$0 = Y^2Z + \alpha_1XYZ + \alpha_3YZ^2 - X^3 - \alpha_2X^2Z - \alpha_4XZ^2 - \alpha_6Z^3 =: F \in K[X, Y, Z]$$

mit Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in K$ und Nullpunkt $O = [0, 1, 0]$ dargestellt werden. Das heißt sie ist isomorph zur projektiven Kurve $V_+(F) \subset \mathbb{P}_K^2$. Umgekehrt ist jede glatte Kurve, die durch eine solche Gleichung definiert wird, eine elliptische Kurve mit genanntem Nullpunkt nach [Sil92, Proposition III.3.1]. Gleichungen dieser Form werden Weierstraßgleichungen genannt.

Für $\text{char}(K) \neq 2, 3$ lässt sich eine Weierstraßgleichung durch homogene Koordinatentransformation vereinfachen zur Form

$$Y^2Z = X^3 + \beta XZ^2 + \gamma Z^3 \quad \text{oder dehomogenisiert} \quad y^2 = x^3 + \beta x + \gamma,$$

wobei $\beta, \gamma \in K$. Für Berechnungen wird im Folgenden von dieser vereinfachten Form ausgegangen. Für $\text{char}(K) = 2, 3$ siehe [Sil92, Appendix: Elliptic Curves in Characteristics 2 and 3].

Zu einer Weierstraßgleichung ist die Diskriminante und die j -Invariante assoziiert, welche für eine Gleichung in obiger Form definiert sind als

$$\Delta = -16(4\beta^3 + 27\gamma^2) \quad j = (-16) \cdot 2^8 \cdot 3^3 \cdot \beta^3$$

Eine Weierstraßgleichung ist genau dann regulär, definiert also eine elliptische Kurve, wenn $\Delta \neq 0$ gilt, und im singulären Fall gibt es genau einen singulären Punkt nach [Sil92, Proposition III.1.4].

4.1.2 Weierstraßmodelle

Sei im folgenden Abschnitt R Dedekindring, $K = \text{Quot}(R)$ mit $\text{char}(K) \neq 2, 3$ und E_K elliptische Kurve über K .

Es ist nun interessant, ob und wie sich eine Weierstraßgleichung mit Koeffizienten in R , also ein projektives R -Modell von E_K , finden lässt. Weiterhin unter der Annahme $\text{char}(K) \neq 2, 3$ sind die Isomorphismen zwischen Weierstraßkurven zu E_K genau durch Koordinatenwechsel der Form

$$[x, y, z] \mapsto [a^{-2n}x, a^{-3n}y, z] \quad a \in K, n \in \mathbb{Z}$$

mit dem Koeffizientenwechsel

$$\beta \mapsto a^{4n}\beta \quad \gamma \mapsto a^{6n}\gamma \quad \Delta \mapsto a^{12n}\Delta$$

gegeben, siehe [BLR90, Lemma 1.5/2] oder [Sil92, Chapter VII.1]. Sind $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ mit $\beta_i, \gamma_i \in R$, erzeugt ein solcher Koordinatenwechsel mit $a = \gamma_2\beta_2$ eine Weierstraßgleichung mit Koeffizienten in R .

Definition 4.1 (Weierstraßmodell). Im Folgenden wird ein projektives R -Schema

$$W = V_+(F) \subset \mathbb{P}_R^2,$$

das von einer homogenen Weierstraßgleichung $0 = F \in R[X, Y, Z]$ von E_K mit Koeffizienten in $R \subset K$ erzeugt wird, ein Weierstraßmodell von E_K über R genannt.

Ist R ein diskreter Bewertungsring, kann die Bewertung der Diskriminante durch einen Koordinatenwechsel manipuliert werden. Daher macht es Sinn, eine bezüglich der gegebenen diskreten Bewertung minimale Form der Weierstraßgleichung in R zu betrachten.

Definition 4.2 (minimale Weierstraßgleichung). Sei R ein diskreter Bewertungsring. Eine Weierstraßgleichung ($\text{char}(K) \neq 2, 3$) von E_K

$$Y^2Z = X^3 + \beta XZ^2 + \gamma Z^3$$

heißt minimal, wenn für die Koeffizienten $\beta, \gamma \in R$ gilt und die Bewertung $\text{ord}_K(\Delta)$ der Diskriminante minimal bezüglich homogenem Koordinatenwechsel ist. Ein Weierstraßmodell von E_K über R heißt minimal, wenn es von einer minimalen Weierstraßgleichung von E_K erzeugt wird.

Es stellt sich heraus, dass sich die spezielle Faser des Weierstraßmodells einer elliptischen Kurve anhand der minimalen Bewertung der Diskriminante und der j -Invariante in eine von zehn Kategorien klassifizieren lässt. Siehe dazu auch Kapitel 7.

4.2 Gruppenschemastruktur

4.2.1 Allgemeine Eigenschaften

Im Folgenden werden ein paar nützliche Eigenschaften von Weierstraßmodellen aufgeführt, die unter anderem für den Nachweis der Gruppenstruktur auf dem glatten Teil eines Weierstraßmodells nötig sind.

Lemma 4.3. *Ein Weierstraßmodell $W = V_+(F)$ zu einer Weierstraßgleichung $0 = F$ von E_K über einem Dedekindring R mit $K = \text{Quot}(R)$ ist integer, projektiv, insbesondere quasikompakt und noethersch, endlich präsentiert, insbesondere von endlichem Typ, und flach.*

Beweis. Die meisten Eigenschaften sind direkt ersichtlich aus der Definition.

projektiv: Per Konstruktion W ist projektiv. Als abgeschlossenes Unterschema des quasikompakten, noetherschen Raums \mathbb{P}_R^n ist es quasikompakt und noethersch.

integer: Das Schema $W = V_+(F)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $F \in R[X, Y, Z]$ irreduzibel ist. Da nach Voraussetzung $E_K \cong V_+(F) \subset \mathbb{P}_K^2$ elliptische Kurve ist, vor allem irreduzibel, ist F irreduzibel als Polynom in $K[X, Y, Z]$. Nach Algebra impliziert das bereits die Irreduzibilität von $F \in R[X, Y, Z]$.

endlich präsentiert: W ist offen überdeckt von seinen drei dehomogenisierten, affinen Teilmengen $V(F_i) = \text{Spec}(R[x, y]/(F_i))$, wobei F_X, F_Y, F_Z Dehomogenisierungen von F nach X, Y, Z seien. Diese sind jeweils endlich präsentiert, also ist W endlich präsentiert. Entsprechend folgt, dass W von endlichem Typ ist.

flach: Es ist zu zeigen, dass aus integer und nichtleerer generischer Faser E_K folgt, dass der eindeutige generische Punkt η von W auf den generischen Punkt von R geschickt wird. Das zeigt, dass W flach ist nach [Har77, Proposition III.9.7], denn $\text{Spec}(R)$ ist integer, regulär und von Dimension 1 und W ist reduziert, womit alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Nachdem W integer ist, hat es einen eindeutigen generischen Punkt η . Angenommen, dieser wird durch die Abbildung, die W zum R -Schema macht, auf einen abgeschlossenen Punkt \mathfrak{m} von $\text{Spec}(R)$ geschickt. Dann liegt η im abgeschlossenen Urbild von \mathfrak{m} – aber der Abschluss $\overline{\{\eta\}} = X$ von η ist darin enthalten. Entsprechend wäre die generische Faser E_K leer, was ein Widerspruch ist. Also muss der generische Punkt auf den generischen Punkt geschickt werden. \square

Satz 4.4. *Sei (R, \mathfrak{m}) ein diskreter Bewertungsring, $K = \text{Quot}(R)$, und sei der Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ perfekt. Sei weiter E_K eine elliptische Kurve über K und W ein Weierstraßmodell von E_K über R mit spezieller Faser $W_{\mathfrak{m}}$ über k . Dann gilt:*

- (a) *W ist genau dann glatt, wenn die spezielle Faser von W glatt ist.*
- (b) *Ist W nicht glatt, so ist der eindeutige, abgeschlossene, singuläre Punkt γ der speziellen Faser der eindeutige Punkt, in dem W nicht glatt ist, das heißt*

$$W^0 := W \setminus \{\gamma\}$$

ist das offene Unterschema der glatten Punkte von W und ein glattes R -Modell von E_K .

Beweis. Hier sind die Ergebnisse aus 4.3 nötig, dass W flaches, lokal endlich präsentiertes R -Schema ist.

- (a) Nach [Bos13, Proposition 8.5/17] ist W genau dann glatt, wenn seine Fasern glatt sind. Nachdem $W_K = E_K$ nach Voraussetzung glatt ist, ist W genau dann glatt, wenn $W_{\mathfrak{m}}$ glatt ist.
- (b) Für Schemata lokal endlichen Typs über einem Körper sind glatt und geometrisch regulär äquivalent [GW10, Corollary 6.32]. Da k perfekt ist, ist dies für k -Schemata sogar äquivalent zu regulär [GW10, Remark 6.33]. Schemata lokal endlichen Typs über einem Körper sind genau dann regulär, wenn sie in allen abgeschlossenen Punkten regulär sind [GW10, Remark 6.25 (3)]. Insbesondere sind alle singulären Punkte abgeschlossen.

Als Weierstraßkurve ist $W_{\mathfrak{m}}$ über k ein k -Schema lokal endlichen Typs, also treffen obige Aussagen zu. Nach [Sil92, Proposition III.1.4] ist unter den abgeschlossenen Punkten von $W_{\mathfrak{m}}$ maximal ein singulärer Punkt γ . Demnach kann $W_{\mathfrak{m}}$ maximal in einem abgeschlossenen Punkt $\gamma \in W_{\mathfrak{m}}$ singulär, also nicht glatt, sein.

Angenommen, $W_{\mathfrak{m}}$ habe den singulären Punkt γ . $W_{\mathfrak{m}} = W \setminus E_K$ ist als Urbild des abgeschlossenen Punktes \mathfrak{m} von $\text{Spec}(R)$ ein abgeschlossenes Unterschema von

W . Also ist der Punkt γ , der abgeschlossen in $W_{\mathfrak{m}}$ ist, auch abgeschlossener Punkt von W . Das Unterschema $W^0 = W \setminus \gamma$ ist dementsprechend offen. Außerdem ist W^0 irreduzibel, da der Abschluss $\overline{W^0} = W$ in W irreduzibel ist nach 4.3. Es ist als Unterschema von W ebenfalls reduziert, endlich präsentiert und flach, siehe 4.3. Es hat wie W die nichtleere, glatte, generische Faser E_K und per Konstruktion die spezielle Faser $W_{\mathfrak{m}} \setminus \{\gamma\}$, welche nach Voraussetzung beide regulär über perfekten Körpern, also glatt, sind. Damit ist W^0 wieder nach [Bos13, Proposition 8.5/17] glatt über R , heißt ein glattes R -Modell von E_K und das offene Unterschema der glatten Punkte von W . \square

Bemerkung 4.5. Für den Fall eines diskreten Bewertungsringes $(R, \mathfrak{m} = (\pi))$ liefert 4.4 ein sehr einfaches Kriterium für die Glattheit eines Weierstraßmodell W von E_K . W ist genau dann glatt, wenn seine spezielle Faser glatt beziehungsweise regulär ist. Dies lässt sich recht leicht an der Weierstraßgleichung ablesen.

Die spezielle Faser $W_{\mathfrak{m}} = W \times_R (R/\mathfrak{m})$ ist definiert durch die Reduktion der Weierstraßgleichung von W modulo dem Maximalideal \mathfrak{m} von R , also ebenfalls eine Weierstraßkurve. Entsprechend ist $W_{\mathfrak{m}}$, und damit W , genau dann glatt, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $0 \neq \Delta_{\mathfrak{m}} = \bar{\Delta} \in R/\mathfrak{m}$,
- (ii) $\Delta \notin \mathfrak{m}$ bzw. $\pi \nmid \Delta$,
- (iii) $\text{ord}_R(\Delta) = 0$ bzw. $\Delta \in R^\times$,

wobei $\Delta_{\mathfrak{m}}$ Diskriminante von $W_{\mathfrak{m}}$ und Δ Diskriminante von W ist, [vgl. Sil92, Proposition VII.5.1 (a)]. Die letzte Bedingung ist einfach nachzuprüfen.

4.2.2 Gruppenstruktur auf Weierstraßmodellen

Das Folgende Lemma weist die Gruppenstruktur auf dem glatten Teil eines Weierstraßmodells nach. Es wird nur eine kurze Beweisskizze geliefert, da die Aussage nur ein Spezialfall von 6.1 ist.

Lemma 4.6. *Sei (R, \mathfrak{m}) wieder ein diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ und $K = \text{Quot}(R)$. Sei W ein Weierstraßmodell von E_K über R und W^0 das offene R -Unterschema der glatten Punkte von W , welches ebenfalls ein R -Modell von E_K ist nach 4.4. W^0 ist ein glattes R -Gruppenschema mit Addition, Inversenbildung und neutralem Schnitt*

$$\mu_0: W^0 \times_R W^0 \longrightarrow W^0 \qquad i_0: W^0 \longrightarrow W^0 \qquad \varepsilon_0: R \longrightarrow W^0$$

welche die Gruppenstruktur (Addition μ , Inversenbildung i und neutraler Schnitt ε) der abelschen Varietät E_K erweitern.

Beweisskizze. Sei wieder $\text{char}(K) \neq 2, 3$. 4.6 folgt als Spezialfall von 6.1. Für das Nachweisen der Gruppenstruktur ist zu zeigen, dass die von E_K induzierten, rationalen Abbildungen $\mu: W \times_R W \dashrightarrow W$ und $i: W \dashrightarrow W$ auf W^0 definiert sind.

i ist in projektiven Koordinaten (also als graduierter Ringmorphismus der zugrundeliegenden graduierten Ringe) dargestellt als

$$i: [X, Y, Z] \mapsto [X, -Y, Z]$$

Dies definiert einen Isomorphismus auf ganz \mathbb{P}_R^2 , ist also insbesondere auf W^0 definiert.

Für μ kann die zugehörige Darstellung als Morphismus graduierten Polynomringe über K auf einen Morphismus von Polynomringen über R erweitert werden [vgl. Formeln für Addition in Sil92, Group Law Algorithm III.2.3]. Berechnungen wie in [Sil92, Proposition 2.5] zeigen, dass μ auf $W \times_R W$ höchstens im singulären Punkt nicht definiert ist, falls dieser existiert. Dies kann auf der affinen Überdeckung von W nachgerechnet werden. \square

Bemerkung 4.7. Für ein minimales Weierstraßmodell W von E_K über R ist W^0 isomorph zur Identitätskomponente des Néron-Modells von E_K über R . Siehe dazu [BLR90, Chapter 1.5, S. 23], [Sil94, Corollary IV.9.1] oder [Tat75, S. 46]. Diese Tatsache ist eine direkte Folge der Konstruktion.

Im glatten Fall ist das Néron-Modell wie versprochen bereits das Weierstraßmodell mit der induzierten Gruppenstruktur.

Satz 4.8. *Sei R hier ein Dedekindring mit perfekten Restklassenkörpern, $K = \text{Quot}(R)$, E_K eine elliptische Kurve über K und W ein Weierstraßmodell von E_K über R . Ist W glatt, so ist W bereits das Néron-Modell von E_K über R .*

Beweis. Nach 3.8 ist nur zu prüfen, ob die $W \times_R R_s$ für die abgeschlossenen Punkte $s \in \text{Spec}(R)$ Néron-Modelle von E_K über R_s sind. Ist W glatt, so ist auch $W \times_R R_s$ ein glattes Weierstraßmodell von E_K über R_s , da alles stabil unter Basiswechsel ist. Sei daher R ohne Einschränkung bereits lokal, also ein diskreter Bewertungsring.

Für die Néron-Abbildungseigenschaft ist nun von Nutzen, dass W nach 4.6 ein R_s -Gruppenschema ist. Sei Y ein glattes R -Schema mit generischer Faser Y_K und $\phi_K: Y_K \rightarrow E_K$ ein Morphismus. In 4.9 unten wird gezeigt, dass ϕ_K eine eindeutige R -rationale Abbildung $\phi: Y \dashrightarrow W$ liefert. Nachdem W ein eigentliches R -Gruppenschema und Y glatt ist, ist ϕ nach 2.11 ein Morphismus, der ϕ_K erweitert, und die Néron-Abbildungseigenschaft ist erfüllt. \square

Lemma 4.9. *Sei R ein Dedekindring, $K = \text{Quot}(R)$, W allgemein ein eigentliches R -Schema, Y lokal noethersches, flaches, reguläres, integres R -Schema und $\phi_K: Y_K \rightarrow W_K$ ein Morphismus auf den generischen Fasern. Dann erweitert sich ϕ_K eindeutig zu einer R -rationalen Abbildung $\phi: Y \dashrightarrow W$. Dasselbe gilt für ein glattes Y , da es dann als reguläres Schema die disjunkte Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten ist.*

Beweis. $\text{Spec}(R)$ und Y sind nach Voraussetzung lokal noethersch, und der Morphismus $\pi: Y \rightarrow R$ ist flach über R . Daher gilt für ein $x \in Y$ nach [Liu02, Theorem 4.3.12]

$$\dim \mathcal{O}_{Y,x} = \dim R_{\pi(x)} + \dim \mathcal{O}_{Y_{\phi(x)},x} . \quad (4.1)$$

Für $s \in \text{Spec}(R)$ und den generischen Punkt η_s einer irreduziblen Komponente der Faser Y_s von $Y \rightarrow R$ gilt $\dim \mathcal{O}_{Y_s,\eta_s} = 0$, also $\dim \mathcal{O}_{Y,\eta_s} = \dim R_s = 1$. Da Y regulär über R ist, ist \mathcal{O}_{Y,η_s} ein diskreter Bewertungsring. Der Quotientenkörper von \mathcal{O}_{Y,η_s} ist der lokale Ring eines generischen Punkts η von Y . Da Y flach ist, liegt η nach [Har77, Proposition III.9.7] in der generischen Faser. Es kann also das Bewertungskriterium für Eigentlichkeit für W angewendet werden:

$$\begin{array}{ccccc} \eta & \xlongequal{\quad} & \text{Spec}(\kappa(\eta)) & \xrightarrow{\phi_K|_\eta} & E_K & \hookrightarrow & W \\ & & \downarrow & \nearrow \exists! & & & \downarrow \\ \eta \cup \eta_s & \xlongequal{\quad} & \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta_s}) & \longrightarrow & \text{Spec}(R) & & \end{array}$$

Damit erweitert sich ϕ_K zu einem eindeutigen Morphismus $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta_s}) \rightarrow W$, der sich nach 3.9 und 3.6 eindeutig auf einen Morphismus in einer Umgebung von η_s erweitert.

Die so gewonnenen Morphismen in Umgebungen der generischen Punkte der Fasern können wiederum wegen der Eindeutigkeit aus 3.6 verklebt. Das Ergebnis ist eine eindeutige R -rationale Abbildung $\phi: U \dashrightarrow W$ auf einem offenen Unterschema $U \subset Y$. Letzteres enthält alle generischen Punkte der Fasern von $Y \rightarrow R$ und ist somit R -dicht. ϕ ist demnach eindeutige R -rationale Erweiterung von ϕ_K . \square

Bemerkung 4.10. Im Fall diskreter Bewertungsringe kann die Glattheit anhand der Fasern überprüft werden: Aus 4.5 ist bekannt, dass ein Weierstraßmodell W von E_K über R genau dann glatt ist, wenn $\text{ord}_R(\Delta) = 0$ für die Diskriminante der Weierstraßgleichung gilt. Somit ist beispielsweise das Weierstraßmodell W über $\mathbb{Z}_{(5)}$ zur (hier dehomogenisierten) Weierstraßgleichung

$$y^2 = x^3 + x$$

einer elliptischen Kurve $E_{\mathbb{Q}}$ über \mathbb{Q} glatt, da $\Delta = -16 \cdot 4 \cdot 1^3$ eine Einheit in $\mathbb{Z}_{(5)}$ ist. W ist deshalb bereits das Néron-Modell von $E_{\mathbb{Q}}$.

Nach 3.12 gilt auch, dass die Gruppenstruktur auf glatten Weierstraßmodellen die eines abelschen Schemas ist. Dies ist direkt aus der Konstruktion klar, da die Fasern des Weierstraßmodells in diesem Fall ja alle elliptische Kurven sind.

5 Arithmetische Flächen

Arithmetische Flächen sind besonders gutartige Kurven über einem Dedekindring R , das heißt R -Schemata der Dimension 2. Besonders wichtig ist, dass ihre Fasern alle projektive Kurven sind, weswegen sie leicht zu beschreiben sind.

In diesem Kapitel beginnt mit der Definition arithmetischer Flächen, woraufhin sich zeigt, dass es für elliptische Kurven immer eine R -Modell dieser Form gibt. Für die Konstruktion wird das Weierstraßmodell aus Kapitel 4 nötig sein. Weiterhin werden einige Eigenschaften arithmetischer Flächen untersucht. Unter anderem wird gezeigt, dass alle R -Schnitte einer arithmetischen Fläche bereits R -Schnitte des glatten Teils sind. Dies ist für die Konstruktion des Néron-Modells später von Nutzen, welches sich als der glatte Teil einer minimal gewählten arithmetischen Fläche entpuppen wird. Diese Form der Minimalität wird in Abschnitt 5.3 eingeführt, wo auch die Existenz solcher minimalen Modelle für elliptische Kurven gezeigt wird.

5.1 Definition

Definition 5.1 (Arithmetische Fläche). Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K . Eine arithmetische Fläche ist ein projektives, integres, flaches, reguläres R -Schema von Dimension 2, also relativer Dimension 1 über R , falls R kein Körper ist. Die generische Faser X_K ist eine integrale, projektive Kurve über K und jede spezielle Faser X_s über einem abgeschlossenen Punkt $s \in \text{Spec}(R)$ ist eine projektive Kurve über $\kappa(s)$ nach [Liu02, Lemma 8.3.3].

Beispiel 5.2. Ein reguläres Weierstraßmodell einer elliptischen Kurve ist eine arithmetische Fläche. Beachte, dass W regulär sein kann, aber dennoch nicht glatt, also singulär in endlich vielen Fasern.

Satz 5.3. Für eine elliptische Kurve E_K über K existiert eine arithmetische Fläche über R , deren generische Faser E_K ist (kurz: *eigentliches Modell von E_K über R*).

Beweis. Aus Kapitel 4 ist bekannt, dass zu E_K ein Weierstraßmodell W über R existiert, das heißt ein projektives, integres, flaches R -Schema, dessen generische Faser E_K ist. Zur arithmetischen Fläche fehlt W nur noch die Regularität. [Liu02, Corollary 8.3.51] besagt nun, dass W eine starke, projektive Desingularisierung besitzt. Das bedeutet, es gibt einen projektives, reguläres W -Schema $\pi: Z \rightarrow W$, welches birational zu W und

ein Isomorphismus auf den regulären Punkten von W ist. Birationale Abbildungen erhalten per Definition Irreduzibilitätskomponenten, Reduziertheit und Dimension. Daher ist Z insbesondere wie W integer und von Dimension 2.

Weiterhin schicken birationale Morphismen generische Punkte auf generische Punkte, weshalb nach [Har77, Proposition III.9.7] das reduzierte Schema Z flach über R ist, weil W flach über R ist.

Außerdem hat Z dieselbe generische Faser E_K , da W in E_K glatt und insbesondere regulär ist. Insgesamt ist Z arithmetischen Fläche über R mit generischer Faser E_K . \square

Bemerkung 5.4. Die Desingularisierung von W kann wie folgt induktiv durch eine Abfolge von abwechselnden Normalisierungen und Blow-Ups konstruiert werden:

$$Z = Z_n \rightarrow Z'_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Z_2 \rightarrow Z'_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z'_0 = W$$

Die $Z_i \rightarrow Z'_{i-1}$ sind die Normalisierung der Z'_{i-1} , das heißt birationale, integrale Morphismen mit normalem Z_i und wegen Birationalität auch wieder integer. Sie existieren nach [Liu02, Proposition 4.1.22].

Die $Z'_i \rightarrow Z_i$ sind Blow-ups entlang des singulären Teils von Z_i , der in diesem Fall jeweils abgeschlossen ist. Zu Blow-Ups siehe auch [Liu02, Chapter 8.1] oder [GW10, Chapter 13.19]. Wichtig hier ist, dass Blow-Ups außerhalb des aufgeblähten Bereichs Isomorphismen sind. Es bleibt also insbesondere die generische Faser und die Eigenschaft integer erhalten.

[Liu02, Corollary 8.3.51] besagt, dass diese Folge in endlich vielen Schritten ein reguläres Z_n liefert.

5.2 Eigenschaften

Eine recht praktische Eigenschaft von arithmetischen Flächen über Dedekindringen mit perfekten Restklassenkörpern ist, dass sie in den Bildern all ihrer Schnitte glatt sind. Dieser Abschnitt befasst sich mit dieser Aussage, die später für den Existenzbeweis von Néron-Modellen elliptischer Kurven nötig ist.

Lemma 5.5. *Sei R ein Dedekindring, $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(R)$ eine arithmetische Fläche über R , $\phi \in X(R)$ ein R -Schnitt und $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Dann ist $X_{\mathfrak{p}}$ regulär in $\phi(\mathfrak{p})$.*

Beweis. Nachdem die generische Faser einer arithmetischen Fläche bereits glatt, also regulär ist, sei $\mathfrak{p} \subset \text{Spec}(R)$ ein abgeschlossener Punkt. Sei $x = \phi(\mathfrak{p}) \in X_{\mathfrak{p}} \subset X$ und $\mathfrak{m}_{X_{\mathfrak{p}},x} \subset \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{p}},x}$ das Maximalideal des Halmes von x in $X_{\mathfrak{p}}$, analog $\mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Der Punkt x ist als Bildpunkt des Schnitts $\phi|_{\text{Spec}(\kappa(\mathfrak{p}))}$ abgeschlossen in $X_{\mathfrak{p}}$. Daher gilt wegen [Liu02, Corollary 2.5.24]

$$\dim \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{p}},x} = \dim X_{\mathfrak{p}} = 1,$$

denn X_p ist equidimensional nach [Liu02, Proposition 4.4.16] und projektive Kurve. Für die Regularität von X_p in x ist demnach zu zeigen, dass $\mathfrak{m}_{X_p,x}/\mathfrak{m}_{X_p,x}^2$ als Vektorraum über $(\mathcal{O}_{X_p,x}/\mathfrak{m}_{X_p,x})$ von nur einem Element f_1 erzeugt wird.

$\mathcal{O}_{X,x}$ ist eine R -Algebra über den induzierten lokalen Homomorphismus $\pi^\# : R_p \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Sei $\phi^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow R_p$ der induzierte lokale Ringhomomorphismus zu ϕ auf den Halmen. Für diesen muss $\phi^\#(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{p}$ gelten, denn aus

$$\mathfrak{p} = (\pi \circ \phi)^\#(\mathfrak{p}) = \phi^\# \circ \pi^\#(\mathfrak{p})$$

folgt $\mathfrak{p} \subset \phi^\#(\mathfrak{m}_{X,x})$ und aus der Lokalität folgt $\mathfrak{p} \supset \phi^\#(\mathfrak{m}_{X,x})$.

Es ist zu zeigen, dass es ein Element $t \in \pi^\#(\mathfrak{p}) \setminus \mathfrak{m}_{X,x}^2$ gibt, woraus die gewünschte Dimension von $\mathfrak{m}_{X_p,x}/\mathfrak{m}_{X_p,x}^2$ beziehungsweise die Regularität von X_p in x geschlossen werden kann. Angenommen, es gelte $\pi^\#(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}^2$. Mit $\pi \circ \phi = \text{id}_{\text{Spec}(R)}$ folgt die Abschätzung

$$\mathfrak{p} = (\pi \circ \phi)^\#(\mathfrak{p}) = \phi^\# \circ \pi^\#(\mathfrak{p}) \stackrel{\text{Ann.}}{\subset} \phi^\#(\mathfrak{m}_{X,x}^2) = \phi^\#(\mathfrak{m}_{X,x})^2 = \mathfrak{p}^2$$

Dies ist ein Widerspruch, da $\mathfrak{p} \subset R_p$ das Maximalideal eines diskreten Bewertungsrings ist und deshalb wegen Regularität von R_p gelten muss, dass $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \neq 0$. Also ist die Zwischenbehauptung $\pi^\#(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{m}_{X,x}^2$ gezeigt.

Nach Gleichung 4.1 gilt $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim R_p + \dim \mathcal{O}_{X_p,x} = 2$ und X ist nach Voraussetzung regulär, weshalb $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär von Dimension 2 ist. Das bedeutet, dass es zwei Elemente $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_{X,x}$ gibt, so dass

$$\mathfrak{m}_{X,x} = f_1 \mathcal{O}_{X,x} + f_2 \mathcal{O}_{X,x} + \mathfrak{m}_{X,x}^2 \quad (5.1)$$

Wegen $\pi^\#(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{m}_{X,x}^2$ gibt es ein $t \in \pi^\#(\mathfrak{p}) \setminus \mathfrak{m}_{X,x}^2 \subset \mathfrak{m}_{X,x}$. Gleichung 5.1 bedeutet für t , dass es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_{X,x}$ gibt, so dass

$$0 \neq t = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \pmod{\mathfrak{m}_{X,x}^2}$$

Da $t \notin \mathfrak{m}_{X,x}^2$, muss mindestens einer der Koeffizienten α_1, α_2 in $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}^\times$ liegen, also eine Einheit sein. Ohne Einschränkung sei $\alpha_2 \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$. Dann nach f_2 wie folgt aufgelöst werden

$$f_2 = \alpha_2^{-1} t + \alpha_1 \alpha_2^{-1} f_1$$

und aus (5.1) wird die neue Gleichung

$$\mathfrak{m}_{X,x} = t \mathcal{O}_{X,x} + f_1 \mathcal{O}_{X,x} + \mathfrak{m}_{X,x}^2. \quad (5.2)$$

Für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X_p,x}$ von x in der generischen Faser $X_p = X \times_R (R/\mathfrak{p})$ gilt

$$\mathcal{O}_{X_p,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\pi^\#(\mathfrak{p}),$$

$$\mathfrak{m}_{X_p,x} = \mathfrak{m}_{X,x}/\pi^\#(\mathfrak{p}) \stackrel{(5.2)}{=} \bar{t} \mathcal{O}_{X_p,x} + \bar{f}_1 \mathcal{O}_{X_p,x} + \mathfrak{m}_{X_p,x}^2 \stackrel{t \in \pi^\#(\mathfrak{p})}{=} \bar{f}_1 \mathcal{O}_{X_p,x} + \mathfrak{m}_{X_p,x}^2.$$

Es ist zu sehen, dass $\mathfrak{m}_{X_p,x}$ von $\mathfrak{m}_{X_p,x}^2$ und einem Element erzeugt ist, was $\mathcal{O}_{X_p,x}$ zu einem regulären Ring der Dimension 1 macht. \square

Satz 5.6. *Sei R ein Dedekindring mit perfekten Restklassenkörpern, $K = \text{Quot}(R)$, sei X eine arithmetische Fläche, X^0 das offenes Unterschema der glatten Punkte und X_K die generische Faser von X . Dann gilt*

$$X_K(K) = X(R) = X^0(R).$$

Beweis. Die erste Gleichheit ist allein eine Anwendung des Bewertungskriteriums für Eigentlichkeit auf das projektive, also eigentliche Schema X . Wegen $X^0 \subset X$ gibt es eine natürliche Inklusion $\text{incl}: X^0(R) \hookrightarrow X(R)$. Jetzt gilt es zu zeigen, dass im regulären Fall das Bild jedes Schnitts $\phi \in X(R)$ in X^0 liegt, also nur glatte Punkte enthält. Dann ist die Inklusion ein Isomorphismus.

Nach 5.5 enthält das Bild $\phi(\text{Spec}(R))$ eines Schnitts $\phi \in X(R)$ nur reguläre Punkte der Fasern. Diese sind glatte Punkte von X . Denn X ist flach und lokal endlich präsentiert, daher genau dann glatt, wenn die Fasern glatt sind nach [Bos13, Proposition 8.5/17]. Die generische Faser ist aber bereits glatt und die speziellen Fasern sind als Schemata endlichen Typs über einem perfektem Körper genau dann glatt, wenn sie regulär sind. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

5.3 Minimale Modelle

In diesem Abschnitt sei R immer ein Dedekindring, K sein Quotientenkörper und C_K eine reguläre, projektive Kurve über K .

Eigentliche Modelle können für elliptische Kurven minimal bezüglich birationaler Morphismen gewählt werden, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird. Aus der Konstruktion ist auch gleich ersichtlich, dass der Algorithmus aus 5.4 bereits ein minimales Modell liefert. Ein solches minimales Modell ist die Grundlage für den späteren Existenzbeweis des Néron-Modells, welches genau dessen glatter Teil ist.

Definition 5.7 (Minimales Modell). Ein minimales eigentliches Modell X_{\min} für C_K über R (kurz: minimales Modell von C_K über R) ist ein eigentliches R -Modell von C_K , das folgende universelle Minimalitätseigenschaft erfüllt

Für jedes weitere eigentliche Modell X von C_K über R und für jeden K -Isomorphismus ϕ_K der generischen Fasern ist die nach 4.9 induzierte R -birationale Abbildung $\phi: X \dashrightarrow X_{\min}$ ein R -Morphismus.

Satz 5.8. *Ein minimales Modell X_{\min} von C_K über R hat folgende Eigenschaften*

- (a) X_{\min} ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.
- (b) Jeder K -Automorphismus von C_K erweitert sich eindeutig zu einem R -Automorphismus von X_{\min} , der glatte Punkte auf glatte Punkte abbildet.

- (c) *Minimale Modelle sind wie folgt stabil unter Basiswechsel: Sei Y ein glattes R -Schema, $x \in Y$ und der Halm $R' = \mathcal{O}_{Y,x}$ in x ein diskreter Bewertungsring mit $K' := \text{Quot}(R')$. Dann ist das minimale Modell von $C_K \times_K K'$ genau $X_{\min} \times_R R'$. Ist $E \subset X_{\min}$ das Unterschema der glatten Punkte von X_{\min} , ist $E \times_R R' \subset X_{\min} \times_R R'$ das Unterschema der glatten Punkte von $X_{\min} \times_R R'$.*

Beweis. Es werden wie in 3.7 die universelle Eigenschaft sowie Stabilität unter Basiswechsel für mehrere Eigenschaften benötigt.

- (a) Für zwei minimale Modelle X_1, X_2 von C_K über R liefert die Minimalitätseigenschaft zwei R -Morphismen $X_1 \rightarrow X_2, X_2 \rightarrow X_1$, deren Komposition jeweils die Identität auf C_K erweitert. Wegen der Eindeutigkeit aus 3.6 müssen die Kompositionen jeweils die Identität sein und die Morphismen sind zueinander inverse R -Isomorphismen.
- (b) Die Minimalitätseigenschaft liefert zu einem K -Automorphismus $\tau: C_K \rightarrow C_K$ die Erweiterung auf einen R -Automorphismus $\tau: X_{\min} \rightarrow X_{\min}$, der wegen Eigentlichkeit eindeutig ist. Als bijektive, also offene Abbildungen, schicken τ und sein Inverses offene glatte Umgebungen auf offene glatte Umgebungen, und somit glatte Punkte auf glatte Punkte. Einschränkung liefert also einen R -Automorphismus auf dem Unterschema der glatten Punkte.
- (c) Die Eigenschaften flach, projektiv und integer sind stabil unter Basiswechsel. Regulär ist stabil unter glattem Basiswechsel [BLR90, Chapter 2.3, S. 49], weshalb $C_K \times_R Y$ regulär ist. Nachdem $C_K \times_R R'$ dieselben Halme hat, ist es ebenfalls regulär. Die Minimalitätseigenschaft von $X_{\min} \times_R R'$ folgt aus der von X_{\min} und der universellen Eigenschaft des Faserprodukts.

$E \times_R R'$ ist glattes Unterschema von $X_{\min} \times_R R'$, da glatt stabil unter Basiswechsel ist. Nachdem Y glatt ist, ist ein Punkt $X_{\min} \times_R Y$ und insbesondere im Unterschema $X_{\min} \times_R R' \subset X_{\min} \times_R Y$ genau dann glatt, wenn seine Projektion auf X_{\min} glatt ist, also wenn sie in E liegt. Damit ist $E \times_R R'$ das Unterschema aller glatten Punkte in $X_{\min} \times_R R'$. \square

Satz 5.9. *Minimale R -Modelle elliptischer Kurven existieren und sind nach 5.8 eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

Beweisskizze. Für den vollständigen Beweis siehe [Liu02, Theorem 9.3.21]. Aus 5.3 ist bekannt, dass zu einer elliptischen Kurve E_K über K zumindest eine arithmetische Fläche gefunden werden kann. [Liu02, Theorem 9.3.21] besagt, dass allgemein für arithmetische Flächen mit generischer Faser vom Geschlecht größer 0 eine minimale existiert. Genutzt wird hierbei, dass die Existenz eines minimalen Modells äquivalent dazu ist, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Es existiert ein *relativ minimales Modell*, das heißt ein R -Modell mit der abgeschwächten Minimalitätseigenschaft: Jeder birationale Morphismus in ein anderes R -Modell ist Isomorphismus.
- (b) Alle relativ minimalen Modelle sind isomorph, es gibt also ein *eindeutiges* relativ minimales Modell.

Relative Minimalität ist nach [Liu02, Theorem 9.2.2] äquivalent dazu, dass das Modell keine außerordentlichen Divisoren besitzt, also keine integren, zusammenziehbaren Kurven als Teilmengen hat. Außerordentliche Divisoren können unter anderem mit Castelnuovos Kriterium [Liu02, Theorem 9.3.8] identifiziert werden und es gibt nur eine endliche Anzahl an Fasern, die solche enthalten nach [Liu02, Lemma 9.3.17].

Wie in [Liu02, Proposition 9.3.19] gezeigt wird, ist es in endlich vielen Schritten möglich, die zusammenziehbaren Divisoren nacheinander zu einem relativ minimalen Modell zusammenzuziehen, womit Bedingung (a) erfüllt ist.

Bedingung (b) mit der Eindeutigkeit dieses Modells kann wie beschrieben in [Liu02, Theorem 9.3.21] durch Widerspruchsbeweis mithilfe der Bedingung an das Geschlecht der generischen Faser gezeigt werden. Das Zusammenziehen hat also bereits ein minimales Modell geliefert. \square

Bemerkung 5.10. Ist in 5.3 das n minimal gewählt, ist das resultierende eigentliche Modell bereits ein relativ minimales, also minimales. Denn bei jedem Zusammenziehen eines Divisors würde per Konstruktion die Regularität des Modells verloren gehen.

6 Existenz von Néron-Modellen auf elliptischen Kurven

Theorem 6.1. *Sei R Dedekindring mit perfekten Quotientenkörpern, $K = \text{Quot}(R)$, E_K elliptische Kurve über K und C minimales R -Modell von E_K , das heißt reguläres, integres, projektives, flaches R -Schema mit Minimalitätseigenschaft. Sei E das offene Unterschema der glatten Punkte von C . Dann ist E Néron-Modell von E_K .*

Nachdem minimale Modelle elliptischer Kurven nach 5.9 existieren, hat jede elliptische Kurve über einem Dedekindring mit perfekten Restklassenkörpern ein Néron-Modell.

Dieses Kapitel ist dem Beweis des vorangegangenen Satzes gewidmet.

Von der Idee her wird vorerst in Abschnitt 6.1 festgestellt, dass E genau dann ein Néron-Modell von E_K ist, wenn sich die Gruppenverknüpfung von E_K auf ganz E erweitert (das „genau dann“ ist bereits aus 3.2 bekannt).

Nun bleibt es zu zeigen, dass sich die Gruppenverknüpfung tatsächlich auf E erweitert. Dies wird in Abschnitt 6.2 vorerst für den Spezialfall eines strikt henselschen diskreten Bewertungsringes R betrachtet. Im ersten Schritt ist hier zu sehen, dass die Gruppenverknüpfung von E_K eine normale Komposition auf E definiert. Wie aus 2.13 bekannt, ist E dann birational zu einem R -Gruppenschema mit der gewünschten Struktur. Es wird sich zuletzt herausstellen, dass diese R -birationale Abbildung bereits ein R -Isomorphismus und E daher ein R -Gruppenschema ist.

Zum Abschluss ist in Abschnitt 6.3 gezeigt, wie von allgemeinen Dedekindringen ohne Einschränkung zu strikt henselschen Bewertungsringen übergegangen werden kann, was dann mit den vorangegangenen Ergebnissen den Beweis vollendet.

6.1 Gruppenstruktur hinreichend

Die Hauptaussage dieses Kapitels wird sein, dass E genau dann Néron-Modell von E_K ist, wenn sich die Gruppenverknüpfung von E_K auf ganz E erweitert und E damit zum R -Gruppenschema macht.

Lemma 6.2. *Sei R diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper k und K , E_K , C , E wie in 6.1. Sei (R', \mathfrak{m}') der Halm eines glatten R -Schemas und diskreter Bewertungsring und sei ein R -Morphismus $\phi : \text{Spec}(R') \rightarrow C$ gegeben. Ist $\phi(\text{Spec}(K)) \in E$, gilt $\text{im}(\phi) \subset E$.*

Beweis. Für den generischen Punkt $\phi((0))$ ist dies klar, da die generische Faser von C glatt ist und nach [Bos13, Proposition 8.5/17] wegen Flachheit von C in E liegt. Betrachte also $\phi(\mathfrak{m}')$ für den abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{m}' \in \text{Spec}(R')$. Das Faserprodukt $C_{R'} := C \times_R R'$ ist nach 5.8 wieder eine arithmetische Fläche über R' mit Unterschema der glatten Punkte $E_{R'} := E \times_R R'$. Nun ist der kanonische Morphismus

$$(\phi \times_R \text{id}_{R'}) : \text{Spec}(R') \rightarrow C_{R'}$$

ein R' -Schnitt, weshalb die spezielle Faser $(C_{R'})_{\mathfrak{m}'}$ nach 5.5 regulär in $(\phi \times \text{id})(\mathfrak{m}')$ ist. Als Schema endlichen Typs über einem perfekten Körper ist $(C_{R'})_{\mathfrak{m}'}$ sogar glatt in diesem regulären Punkt. Da $C_{R'}$ als flaches, endlich präsentiertes R' -Schema wieder genau dann glatt in einem Punkt ist, wenn es die zugehörige Faser ist, ist $C_{R'}$ glatt im Punkt $(\phi \times \text{id})(\mathfrak{m}')$ beziehungsweise $(\phi \times \text{id})(\mathfrak{m}') \in E \times_R R'$. Folglich muss bereits $\phi(\mathfrak{m}')$ in E liegen und $\phi : \text{Spec}(R') \rightarrow E \subset C$ faktorisiert über E . \square

Satz 6.3. *Sei R hier ein diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper k und seien K, E_K, C, E wie in 6.1. Erweitert sich die K -Gruppenschemastruktur von E_K auf $E = C^0$, dann ist E Néron-Modell von E_K .*

Beweis. Da E bereits nach Voraussetzung ein glattes R -Gruppenschema ist, ist noch die Néron-Abbildungseigenschaft zu prüfen. Sei also Y ein glattes R -Schema mit einem K -Morphismus $\phi_K : Y_K \rightarrow E_K$ der generischen Fasern. Nach 4.9 erweitert sich ϕ_K auf eine R -rationale Abbildung $\phi : Y \dashrightarrow C$, deren Bild nach dem vorhergehenden Lemma 6.2 in E liegt.

Der Beweis kann wie folgt durch Widerspruch geführt werden. Angenommen, die R -rationale Abbildung $\phi : Y \dashrightarrow E$ sei kein Morphismus. Da E ein R -Gruppenschema, Y glatt und ϕ eine R -rationale Abbildung ist, hat $Y \setminus \text{Dom}(\phi)$ Kodimension 1 nach 2.11. Das heißt es gibt ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema $Z \subset Y$ der Kodimension 1, auf dessen generischem Punkt η_Z die R -rationale Abbildung ϕ nicht definiert ist. Der Halm \mathcal{O}_{Y, η_Z} ist ein diskreter Bewertungsring, da er von Dimension 1, regulär wegen Y glatt, und lokal ist. Sein Quotientenkörper ist der Quotienten- beziehungsweise Restklassenkörper eines generischen Punkts η der irreduziblen Komponente von X , in der η_Z liegt. Somit ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \eta \equiv \text{Spec}(\kappa(\eta)) & \xrightarrow{\phi_K|_\eta} & E_K & \hookrightarrow & C \\ \downarrow & & \searrow \exists! & & \downarrow \\ \eta \cup \eta_Z \equiv \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, \eta_Z}) & \longrightarrow & & & \text{Spec}(R) \end{array}$$

kommutativ. Da C nach Voraussetzung eigentlich ist, erweitert sich $\phi_K|_\eta$ nach dem Bewertungskriterium für Eigentlichkeit auf einen Morphismus $\phi|_{\mathcal{O}_{Y, \eta_Z}} : \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, \eta_Z}) \rightarrow C$. Nach 3.9 erweitert sich dieser auf eine offene Umgebung U_Z von η_Z , was bedeutet, dass $\phi|_{U_Z} : U_Z \dashrightarrow E \hookrightarrow C$ ein Morphismus ist. Nun ist aber $\eta \in E_K$, also $\phi|_{\mathcal{O}_{Y, \eta_Z}}(\eta) \in E$,

weshalb nach 6.2 $\text{im}(\phi|_{\mathcal{O}_{Y,\eta_Z}}) \subset E$. Es kann demnach eine glatte, offene Umgebung von $\text{im}(\phi|_{\mathcal{O}_{Y,\eta_Z}})$ gewählt werden, deren Urbild U unter $\phi|_{U_Z}$ entsprechend wieder offen in U_Z , also Y , ist. Insgesamt ist $\phi|_U: U \rightarrow E$ ein Morphismus, was bedeutet, dass ϕ entgegen der Annahme in η_Z definiert ist. Damit muss $\phi: Y \rightarrow E$ ein Morphismus sein, sprich die Néron-Abbildungseigenschaft für E ist erfüllt.

□

6.2 Nachweis der Gruppenstruktur für strikt henselsche Bewertungsringe

Für den Abschluss des Beweises zu 6.1 muss nach 6.3 nur noch nachgewiesen werden, dass sich die Gruppenstruktur auf E erweitert. Dies ist in diesem Abschnitt vorerst für strikt henselsche Bewertungsringe gezeigt. Vorweg werden die Definition und die nötigen Eigenschaften strikt henselscher Ringe aufgeführt.

6.2.1 Strikt henselsche Ringe

Definition 6.4 (Strikt henselscher Ring). Ein lokaler Ring (R, \mathfrak{m}) heißt henselsch, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (i) *Hensels Lemma*: Für jedes normierte Polynom $f \in R[X]$ und jede einfache Nullstelle $\bar{a} \in R/\mathfrak{m}$ seiner Restklasse $\bar{f} \in (R/\mathfrak{m})[X]$ gibt es eine eindeutige Nullstelle $a \in R$ von f , die ein Lift von \bar{a} ist.
- (ii) Jede endliche R -Algebra ist ein Produkt lokaler Ringe.

Ein henselscher Ring heißt strikt henselsch, falls sein Restklassenkörper R/\mathfrak{m} separabel abgeschlossen ist. Im Fall eines perfekten Restklassenkörpers ist dies äquivalent zu algebraisch abgeschlossen.

Definition 6.5 (Strikte Henselisierung). Die strikte Henselisierung eines lokalen Rings (R, \mathfrak{m}) mit Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ ist ein strikt henselscher lokaler Ring R^{sh} , dessen Restklassenkörper der separable Abschluss k_s von k ist, zusammen mit einem lokalen Ringhomomorphismus $i^{\text{sh}}: R \rightarrow R^{\text{sh}}$, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist

Für jeden weiteren lokalen Ringhomomorphismus $u: R \rightarrow A$ in einen strikt henselschen lokalen Ring A mit Restklassenkörper k_A und für jeden k -Körperhomomorphismus $\alpha: k_s \rightarrow k_A$ gibt es einen eindeutigen lokalen Ringhomomorphismus $u^{\text{sh}}: R^{\text{sh}} \rightarrow A$, so dass das folgende Diagramm kommutiert und so dass α die Projektion von u^{sh} auf die Restklassenkörper ist:

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{u} & A \\
\downarrow i^{\text{sh}} & \nearrow \exists! u^{\text{sh}} & \\
R^{\text{sh}} & &
\end{array}$$

Die strikte Henselisierung ist nach Definition eindeutig bis auf Isomorphismus und hat k_s als Restklassenkörper.

Satz 6.6. *Jeder diskrete Bewertungsring (R, \mathfrak{m}) hat eine strikte Henselisierung R^{sh} .*

Beweis. Siehe [Sil94, Proposition IV.6.5], [Sil94, Remark IV.6.6.2] oder [BLR90, Chapter 2.3, S. 48]. \square

Die im Folgenden besonders wichtige Eigenschaft eines strikt henselschen Rings ist folgende Aussage über die Einschränkung von Schnitten. Für den Beweis siehe zum Beispiel [Sil94, Proposition IV.6.4].

Satz 6.7. *Sei (R, \mathfrak{m}) ein diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ und X ein glattes R -Schema mit spezieller Faser X_k . Die Einschränkung*

$$X(R) \longrightarrow X_k(k) \hookrightarrow X_k$$

ist

- (a) *surjektiv auf $X_k(k)$, falls R henselsch ist.*
- (b) *surjektiv mit dichtem Bild in der speziellen Faser X_k , falls R strikt henselsch ist.*

6.2.2 Nachweis der Gruppenstruktur für strikt henselsche Ringe

Um die Erweiterung der Gruppenverknüpfung auf ganz E für strikt henselsche Ringe nachzuweisen, ist erst zu zeigen, dass die Gruppenverknüpfung von E_K eine normale Komposition auf E definiert. Die Bedingungen, dass R strikt henselsch mit perfekten Restklassenkörpern ist, sorgen außerdem dafür, dass die Vereinigung der Bilder der R -Schnitte $E(R)$ dicht in jeder Faser in E liegen, weswegen 2.13 angewendet werden kann. Danach ist E dann R -birational zu dem gesuchten Gruppenschema und es wird gezeigt, dass diese Birationalität ein Isomorphismus ist.

Satz 6.8. *Sei R ein strikt henselscher diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper k und seien K, E_K, C, E wieder wie in 6.1. Dann erweitert sich die Gruppenstruktur von E_K auf E und macht E zum Gruppenschema.*

Beweis zu 6.8. Die Aussage folgt direkt aus den folgenden beiden Lemmata. \square

Lemma 6.9. *Die Gruppenstruktur μ_K auf E_K erweitert sich zu einer normalen Komposition μ auf E .*

Beweis. Das Faserprodukt $E \times_R E$ ist glattes R -Schema und C ist eigentlich, weshalb sich die Gruppenverknüpfung $\mu_K: E_K \times_K E_K \rightarrow E_K$ auf E_K nach 4.9 eindeutig zu einer R -rationalen Abbildung $\tilde{\mu}: E \times_R E \dashrightarrow C$ erweitert. Die generischen Punkte η_k der speziellen Fasern von $E \times_R E$ haben wegen Gleichung 4.1 Dimension 1, sind also diskrete Bewertungsringe, da $E \times_R E$ glatt und somit regulär ist. Nach 6.2 liegt dann $\tilde{\mu}(\eta_k)$ und entsprechend das Bild einer offenen Umgebung von η_k unter $\tilde{\mu}$ in E . Das ergibt – unter Umständen durch Einschränkung von $\text{Dom}(\tilde{\mu})$ – eine R -rationale Abbildung $\mu: E \times_R E \dashrightarrow E$.

Für eine normale Komposition bleiben die Assoziativität und die wohldefiniertheit der Inversenabbildungen zu zeigen. Seien hierfür $\phi, \psi: E \times_R E \rightarrow E \times_R E$ wie in der Definition 2.12.

Assoziativität: Für Assoziativität müssen für alle $x, z \in E$, für die es wohldefiniert ist, die folgenden R -rationalen Abbildungen gleich sein

$$\mu(\mu(x, \bullet), z), \mu(x, \mu(\bullet, z)): E \dashrightarrow E$$

Da $E \times_R E$ reduziert ist, sind aber beide die nach 3.6 eindeutige Erweiterung von

$$\mu_K(\mu_K(x, \bullet), z) = \mu_K(x, \mu_K(\bullet, z)): E_K \dashrightarrow E_K$$

Somit sind sie gleich als R -rationale Abbildungen.

Inverses R -rational: Für R -Rationalität von ϕ und ψ muss noch gezeigt werden, dass $\text{Dom}(\phi)$ und $\text{Dom}(\psi)$ dicht in der speziellen Faser von E ist, also in jedem generischen Punkt der speziellen Faser definiert ist. Es wird der Fall für ϕ behandelt, ψ folgt analog.

Sei also $\eta \in E \times_R (R/\mathfrak{p}) = E_K$ ein generischer Punkt der speziellen Faser von E und $R' = \mathcal{O}_{E, \eta}$ der Halm in η mit $K' := \text{Quot}(R')$. Wegen Gleichung 4.1 hat R' Dimension 1, ist demnach ein diskreter Bewertungsring und $C_{R'} := C \times_R R'$ nach 5.8 minimales R' -Modell der elliptischen Kurve $E_K \times_{K'} K' =: E_{K'}$ mit offenem Unterschema $E_{R'} = E \times_R R'$ der glatten Punkte. Es ist bekannt, dass per Konstruktion $\text{Spec}(R') \subset E$, also dass es einen R' -wertigen Punkt $s: \text{Spec}(R') \rightarrow E_{R'}$ gibt. Es lässt sich ein zugehöriger Translationsmorphismus auf der generischen Faser definieren, der aufgrund der Gruppenstruktur ein Automorphismus ist:

$$\tau_{K'}: E_{K'} \cong E_{K'} \times_{K'} K' \xrightarrow{\text{id} \times s} E_{K'} \times_{K'} E_{K'} \xrightarrow{\mu_{K'}} E_{K'}$$

Nach 5.8 erweitert sich $\tau_{K'}$ zu einem R' -Automorphismus $\tau_{R'}$ auf dem minimalen Modell $C_{R'}$ und auf dem glatten Unterschema $E_{R'}$. Für ein $e \in \text{Spec}(R')$, $x = s(e)$ und einen Punkt in der Faser $y \in (E_{R'})_e$ sieht $\tau_{R'}$ wie folgt aus

$$\begin{aligned} R' \times_R E &= R' \times_{R'} (R' \times_R E) \xrightarrow{s \times \text{id}} (R' \times_R E) \times_{R'} (R' \times_R E) \xrightarrow{\mu_{R'}} R' \times_R E \\ (e, y) &\longmapsto (e, (e, y)) \longmapsto ((e, x), (e, y)) \longmapsto (e, \mu(x, y)) \end{aligned}$$

Alternativ erhält man $\tilde{\tau}_{R'}: (e, y) \mapsto (e, \mu(y, x))$, wenn $R' \times_{R'} (R' \times_R E)$ kanonisch durch $(R' \times_R E) \times_{R'} R'$ ersetzt wird. Daher ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 (e, y) & & R' \times_R E & \xrightarrow[\sim]{\tau_{R'}} & R' \times_R E & & (e, \mu(x, y)) \\
 \downarrow & & \downarrow s \times \text{id} & & \downarrow s \times \text{id} & & \downarrow \\
 (x, y) & & E \times_R E & \xrightarrow{\phi} & E \times_R E & & (x, \mu(x, y))
 \end{array}$$

kommutativ und ϕ muss auf dem generischen Punkt

$$(\eta, \eta) \in \text{Spec}(R') \times_R \text{Spec}(R') \subset E \times_R E$$

von $(E \times_R E)_k = E_k \times_k E_k$ definiert sein. Mit $\tilde{\tau}$ statt τ ergibt sich dasselbe für ψ .

Inverses R-birational Für die Birationalität von ϕ und ψ siehe den Beweis in [Sil94, Proposition IV.6.10]. \square

Lemma 6.10. *Es ist 2.13 auf E anwendbar, das heißt E ist R -birational zu einem Gruppenschema G . Diese R -birationalen Abbildungen sind Isomorphismen, insbesondere R -Gruppenschemaisomorphismen.*

Beweis. Wegen 6.8 hat E bereits eine normale Komposition und ist nach Voraussetzung von endlichem Typ. Damit fehlt nur noch, dass die Vereinigung der Bilder der Schnitte $P \in E(R)$ dicht in jeder Faser von E liegt, um 2.13 auf E anwenden zu können. Zuerst ist festzustellen, dass sowohl K als auch k unendliche Körper sind, denn K hat eine Bewertung und k ist algebraisch abgeschlossen. Eine Kurve $I \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ über einem Körper \mathbb{K} besteht genau aus dem generischen Punkt und den abgeschlossenen Punkten, wobei es von letzteren für unendliches \mathbb{K} unendlich viele gibt. Daher sind die abgeschlossenen Teilmengen von I genau I selbst sowie die endlichen Vereinigungen abgeschlossener Punkte. Insbesondere ist eine Teilmenge genau dann dicht in I , wenn sie entweder bereits den generischen Punkt oder eine unendliche Anzahl abgeschlossener Punkte enthält. Es ist also zu zeigen, dass die R -Schnitte gemeinsam unendlich viele Bildpunkte in E_K und E_k haben. Da R strikt henselsch ist, gilt dies nach 6.7. Außerdem durch die Einschränkungabbildung folgende Surjektion gegeben:

$$\{\text{abgeschlossene Punkte in } E_K\} \supset E_K(K) \xrightarrow{5.6} E(R) \xrightarrow{6.7} E_k(k).$$

Insbesondere gibt es nach dem Schubladenprinzip unendlich viele abgeschlossene Punkte in E_K , die Bild eines K - beziehungsweise R -Schnitts sind. Also ist auch hier die Menge der Bildpunkte von R -Schnitten unendlich und somit dicht in E_K .

Wir können daher 2.13 auf E anwenden. Damit ist E birational zu einem Gruppenschema G über zueinander inverse, R -birationale Abbildungen $f: G \dashrightarrow E$ und $g: E \dashrightarrow G$,

wobei die normale Komposition μ_E von E auf dem gemeinsamen Definitionsbereich mit der Gruppenverknüpfung μ_G von G übereinstimmt. Das heißt $f \circ \mu_G = \mu_E$ und $g \circ \mu_E = \mu_G$. Es ist zu zeigen, dass f und g beide Morphismen sind.

g Morphismus: Angenommen, g ist kein Morphismus. Dann besagt 2.13, dass es eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge $Z \subset E$ gibt, so dass g nicht in deren generischen Punkt η_Z definiert ist. Die spezielle Faser E_k von E ist eindimensional und abgeschlossen, weshalb $\eta_Z \in E_k$ bedeuten würde, dass η_Z ein generischer Punkt von E_k ist. Nachdem g als R -rationale Abbildung auf einer dichten Teilmenge von E_k , insbesondere auf dessen generischen Punkten, definiert ist, kann η_Z also nicht in E_k liegen. Allerdings ist g auf der gesamten generischen Faser und daher dann auch in η_Z definiert, was ein Widerspruch ist.

f Morphismus: Eine Translation $\tau_P^G: G \rightarrow G$ auf G um einen Schnitt P liefert eine Translation $\tau_P := \tau_P^G|_{E_K}$, also einen K -Automorphismus auf E_K mit Inversem $\tau_{(-P)} = \tau_{(-P)}^G$. Diese erweitern sich nach 5.8 auf E zu zueinander inversen R -Automorphismen $\tau_P^E, \tau_{(-P)}^E: E \rightarrow E$. Überall, wo es definiert ist, gilt

$$f = \tau_{(-P)}^E \circ f \circ \tau_P^G,$$

da beides die eindeutigen Erweiterungen von $\text{id}_{E_K} = f|_{E_K}$ sind, wo $\tau_P = \tau_P^E|_{E_K} = \tau_P^G|_{E_K}$ ein K -Automorphismus ist und $\text{id}_{E_K} = \tau_{(-P)} \circ \tau_P$ gilt.

Für jedes $\beta \in G$, für das es einen Schnitt P gibt mit $\tau_P^G(\beta) \in \text{Dom}(f)$, ist $\tau_{(-P)}^E \circ f \circ \tau_P^G$ daher eine eindeutige Erweiterung von $f|_{E_K}$ beziehungsweise von f auf eine Umgebung von β . Durch Translation kann also der Definitionsbereich von f für passende β erweitert werden.

Jetzt kommt zum tragen, dass R nach Voraussetzung strikt henselsch ist. Das bedeutet nach 6.7, dass die Menge der Bildpunkte aller Schnitte $P: \text{Spec}(R) \rightarrow G$ dicht in der speziellen Faser liegt. Insbesondere liegt für jedes $\beta \in G_k$ im offenen Urbild $\mu(\bullet, \beta)^{-1}(\text{Dom}(f))$ der Bildpunkt $P(\text{Spec}(k))$ eines Schnitts P . Damit erfüllt β die Bedingung von oben wegen

$$\tau_P^G(\beta) = \mu(P(\text{Spec}(k)), \beta) \in \text{Dom}(f)$$

Damit ist f auf ganz G definiert und somit ein Morphismus. □

6.3 Allgemeine Existenz

Zu allerletzt bleibt noch zu sehen, dass von Dedekindringen auf Bewertungsringe und von dort auf strikt henselsche Bewertungsringe übergegangen werden kann.

Beweis von 6.1. Wegen 3.8 ist R ohne Einschränkung diskreter Bewertungsring. Betrachte also einen diskreten Bewertungsring R mit perfektem Restklassenkörper, eine elliptische Kurve E_K über $K = \text{Quot}(R)$, ein minimales Modell X von E_K über R und dessen Unterschema der glatten Punkte E . Sei R^{sh} die strikte Henselisierung von R . Nach [BLR90, Chapter 2.4, Corollary 9] ist R^{sh} treuflach über R und unverzweigt per Konstruktion, vergleiche auch [BLR90, Chapter 2.3, Proposition 11]. Daher ist R^{sh} insbesondere étale über R und nach 5.8 ist $C \times_R R^{\text{sh}}$ ein minimales Modell von $E_K^{\text{sh}} = E_K \times_K K^{\text{sh}}$ über R^{sh} mit Unterschema $E \times_R R^{\text{sh}}$ der glatten Punkte. Wie aus 6.8 bekannt, ist $E \times_R R^{\text{sh}}$ also das Néron-Modell von E_K^{sh} über R^{sh} .

Für die Néron-Abbildungseigenschaft von E sei Y glattes R -Schema und $\phi_K: Y_K \rightarrow E_K$ Morphismus auf den generischen Fasern. $Y \times_R R^{\text{sh}}$ ist glattes R^{sh} -Schema, da Glattheit stabil unter Basiswechsel ist. Daher erweitert sich der Basiswechsel $\phi_K^{\text{sh}}: Y_K^{\text{sh}} \rightarrow E_K^{\text{sh}}$ von ϕ_K wegen der Néron-Abbildungseigenschaft von $E \times_R R^{\text{sh}}$ auf einen Morphismus $\phi_R^{\text{sh}}: Y \times_R R^{\text{sh}} \rightarrow E \times_R R^{\text{sh}}$. Nach [BLR90, Chapter 6.1, Theorem 6] ist wegen Treuflachheit von $\pi: \text{Spec}(R^{\text{sh}}) \rightarrow \text{Spec}(R)$ der Basiswechselfunktor

$$(\text{Sch}/R) \longrightarrow (\text{Sch}/R^{\text{sh}}), \quad X \longmapsto \pi^* X = X \times_R R^{\text{sh}}$$

volltreu. Deshalb gibt es einen treuflachen Abstieg $\phi: Y \rightarrow E$ von ϕ_R^{sh} , der ϕ_K erweitert. Somit ist E ein Néron-Modell von E_K . □

7 Beispiele und Ausblick

Inzwischen ist aus 5.2 und 5.10 bekannt, dass ein reguläres Weierstraßmodell über einem Dedekindring bereits ein minimales Modell seiner generischen Faser ist. In einigen Fällen kann die Regularität an den Koeffizienten der Weierstraßgleichung abgelesen werden. Sei im Folgenden $(R, (\pi))$ ein diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper, $K = \text{Quot}(R)$, E_K eine elliptische Kurve über K und W ein minimales Weierstraßmodell von E_K zur Gleichung ($\text{char}(K) \neq 2, 3$):

$$f: y^2 = x^3 + \beta x + \gamma. \quad (7.1)$$

Korollar 7.1. *Eine hinreichende Bedingung dafür, dass W regulär ist, ist*

$$\text{ord}_K(\beta) \geq 1 \quad \text{und} \quad \text{ord}_K(\gamma) = 1.$$

Das heißt $\gamma = u\pi$ und $\beta = v\pi^n$ für Einheiten $u, v \in R^\times$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Beweis. Wie aus 4.4 bekannt, ist nur die Regularität des singulären Punkts der speziellen Faser zu überprüfen. Sei $\mathfrak{m}_\pi := (\pi)$ und $k = (R/\mathfrak{m}_\pi)$ der Restklassenkörper von R . Die spezielle Faser W_k ist auf dem betrachteten Teil seiner affinen Überdeckung das Spektrum von

$$\frac{k[\bar{x}, \bar{y}]}{(\bar{y}^2 - \bar{x}^3 + \beta \bar{x} + \gamma)} = \frac{k[\bar{x}, \bar{y}]}{(\bar{y}^2 - \bar{x}^3 + v\pi^n \bar{x} + u\pi x)} = \frac{k[\bar{x}, \bar{y}]}{(\bar{y}^2 - \bar{x}^3)},$$

welches im abgeschlossenen Punkt $(0, 0) \in \mathbb{A}_k^2$ beziehungsweise $(\bar{x}, \bar{y}) \in W_k$ singulär ist. Da der singuläre Punkt von W_k eindeutig ist, muss nur dieser überprüft werden. Er entspricht in W dem Maximalideal $\mathfrak{p} := (\pi, x, y) \subset R[x, y]/(f)$. Für Regularität gilt zu zeigen, dass \mathfrak{p} in seinem Halm $(R[x, y]/(f))_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{W, \mathfrak{p}}$ nur von zwei Elementen erzeugt wird. Durch Umstellen von (7.1) ist aber ersichtlich, dass

$$\pi = u^{-1}(y^2 - x^3 - \beta x) \in \mathfrak{p},$$

weshalb $\mathfrak{p} = (x, y)$ tatsächlich nur zwei Erzeuger hat. □

Bemerkung 7.2. Nach [BLR90, Lemma 1.5/3 und 1.5/4] ist die Bedingung $\text{ord}_K(\beta) \geq 1$ und $\text{ord}_K(\gamma) = 1$ für minimale Weierstraßgleichungen äquivalent dazu, dass gilt $\text{ord}_K(\Delta) = 2$ und $\text{ord}_K(j) \geq 1$, wobei $j = 2^8 \cdot 3^3 \cdot \beta^3$ die j -Invariante der Weierstraßgleichung ist.

Wie in [BLR90, Chapter 1.5] beschrieben, ist die Gruppenstruktur der speziellen Faser im Fall von 7.1 die des additiven Gruppenschemas $G_{a,k}$ über k . Dieses ist definiert als $G_a \times_{\mathbb{Z}} k$, wobei $G_a := \text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ ist mit der Gruppenstruktur

$$\begin{array}{ccc}
 G_a \times_{\mathbb{Z}} G_a & \xrightarrow{\mu} & G_a \\
 \parallel & & \parallel \\
 (\text{Spec } \mathbb{Z}[T_1]) \times_{\mathbb{Z}} (\text{Spec } \mathbb{Z}[T_2]) & & \\
 \parallel & & \\
 \text{Spec}(\mathbb{Z}[T_1] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T_2]) & & \\
 \parallel & & \\
 \text{Spec } \mathbb{Z}[T_1, T_2] & \xrightarrow{\mu} & \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]) \\
 T_1 + T_2 & \longleftarrow & T
 \end{array}$$

Beispiel 7.3. Sei $R = \mathbb{Z}_{(5)}$ und betrachte die Weierstraßgleichungen

$$\begin{array}{ll}
 y^2 = x^3 + 5x \pm 10 & \Delta = -16 \cdot 3200 = -16 \cdot 2^7 \cdot 5^2 \\
 y^2 = x^3 \pm 5 & \Delta = -16 \cdot 675 = -16 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \\
 y^2 = x^3 \pm 10 & \Delta = -16 \cdot 2700 = -16 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2
 \end{array}$$

Für alle Gleichungen ist offensichtlich die Bedingung aus 7.1 erfüllt. Somit sind die projektiven Abschlüsse der elliptischen Kurven über $\mathbb{Z}_{(5)}$ alle bereits minimale Modelle und ihr glatter Teil, das heißt der Punkt $(x, y, 5)$ ausgenommen, ist das jeweilige Néron-Modell.

Beispiel 7.4. Ein Anwendungsbeispiel für die Aussage aus 3.13 ist jetzt besonders ersichtlich: Bei einem regulären Weierstraßmodell W ist die induzierte Gruppenstruktur auf dem glatten Teil in einer Umgebung der glatten Fasern von W abelsch. Dies liegt daran, dass die glatten Fasern von W bereits elliptische Kurven sind.

Wie zuvor bereits angedeutet, ist es möglich, die minimalen Modelle elliptischer Kurven anhand ihrer Weierstraßgleichung nach der Form ihrer speziellen Faser in zehn verschiedenen Kategorien zu klassifizieren [vgl. Sil94, Theorem IV.8.2]. Zur Klassifizierung kann ein Algorithmus von Tate verwendet werden, der von einer Weierstraßgleichung der elliptischen Kurve ausgeht, diese minimalisiert und dann einer der Kategorien in Tabelle 7.1 zuordnet. Für genaueres zu Tates Algorithmus siehe [Sil94, Chapter IV.9], [BLR90, Chapter 1.5] und [Tat75]. Ein analoger Algorithmus, welcher auch den Fall von Dedekindringen mit nicht perfekten Restklassenkörpern abdeckt, ist in [Szy04] zu finden.

	Bedingungen an die Koeffizienten	Beschreibung der speziellen Faser
a	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 0$	elliptische Kurve
b_n	$\text{ord}_K(j) < 0,$ $\text{ord}_K(\beta) = 0, \text{ord}_K(\gamma) = 0$	$n = 1$: Kurve mit Knoten $n > 1$: n reguläre Kurven, die sich schneiden
$c1$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 2$	singuläre Kurve mit Scheitelpunkt
$c2$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 3$	2 reguläre Kurven mit 1 tangentialem Schnittpunkt
$c3$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 4$	3 reguläre Kurven mit 1 gem. Schnittpunkt
$c4$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 6$	1 reguläre Kurve mit Multiplizität 2, die 4 weitere reguläre Kurven schneidet
$c5_n$	$\text{ord}_K(j) < 0,$ $\text{ord}_K(\beta) = 2, \text{ord}_K(\gamma) = 3$	n reguläre Kurven mit Multiplizität 2 bilden eine Kette, die an den 2 Enden jeweils eine Kurve der Multiplizität 1 schneidet
$c6$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 8$	1 reguläre Kurve der Multiplizität 3 schneidet 3 Kurven mit Multiplizität 2, die jeweils 1 mit Multiplizität 1 schneiden
$c7$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 9$	ähnlich $c6$ mit 8 Kurven und bis Multiplizität 4
$c8$	$\text{ord}_K(j) \geq 0, \text{ord}_K(\Delta) = 10$	ähnlich $c6$ mit 9 Kurven und bis Multiplizität 6

Tabelle 7.1: Kategorien für die Klassifizierung der speziellen Faser des minimalen Modells einer elliptischen Kurve über einem diskreten Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper, nach Néron, vergleiche [BLR90, Chapter 1.5] und [Sil94, Figure IV.4.4]

Literatur

- [Aut16] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 30. Juni 2016. URL: <http://stacks.math.columbia.edu/>.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert und Michel Raynaud. *Néron models*. Bd. 21. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1990. ISBN: 3-540-50587-3. DOI: 10.1007/978-3-642-51438-8.
- [Bos13] Siegfried Bosch. *Algebraic geometry and commutative algebra*. Universitext. Springer, London, 2013. ISBN: 978-1-4471-4828-9. DOI: 10.1007/978-1-4471-4829-6.
- [CS86] Gary Cornell und Joseph H. Silverman, Hrsg. *Arithmetic geometry*. Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984. Springer-Verlag, New York, 1986. ISBN: 0-387-96311-1. DOI: 10.1007/978-1-4613-8655-1.
- [Gro61] A. Grothendieck. „Eléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I.“ In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 11 (1961). ISSN: 0073-8301.
- [GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Schemes with examples and exercises. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. ISBN: 978-3-8348-0676-5. DOI: 10.1007/978-3-8348-9722-0.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. ISBN: 0-387-90244-9.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Bd. 6. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002. ISBN: 0-19-850284-2.
- [Sil92] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Bd. 106. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1986 original. Springer-Verlag, New York, 1992. ISBN: 0-387-96203-4.
- [Sil94] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Bd. 151. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994. ISBN: 0-387-94328-5. DOI: 10.1007/978-1-4612-0851-8.

- [Szy04] Michael Szydło. „Elliptic fibers over non-perfect residue fields“. In: *J. Number Theory* 104.1 (2004), S. 75–99. ISSN: 0022-314X. DOI: 10.1016/j.jnt.2003.06.004.
- [Tat75] J. Tate. „Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil“. In: *Modular functions of one variable, IV (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*. Springer, Berlin, 1975, 33–52. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 476.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Gesina Schwalbe, geboren am 29.01.1996 in Aachen, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe. Weiter versichere ich, dass ich die Arbeit noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Regensburg, den 28. September 2016

Gesina Schwalbe