Skript Numerik I

von Prof. Dr. Luise Blank im WS14/15

Gesina Schwalbe

21. Januar 2015

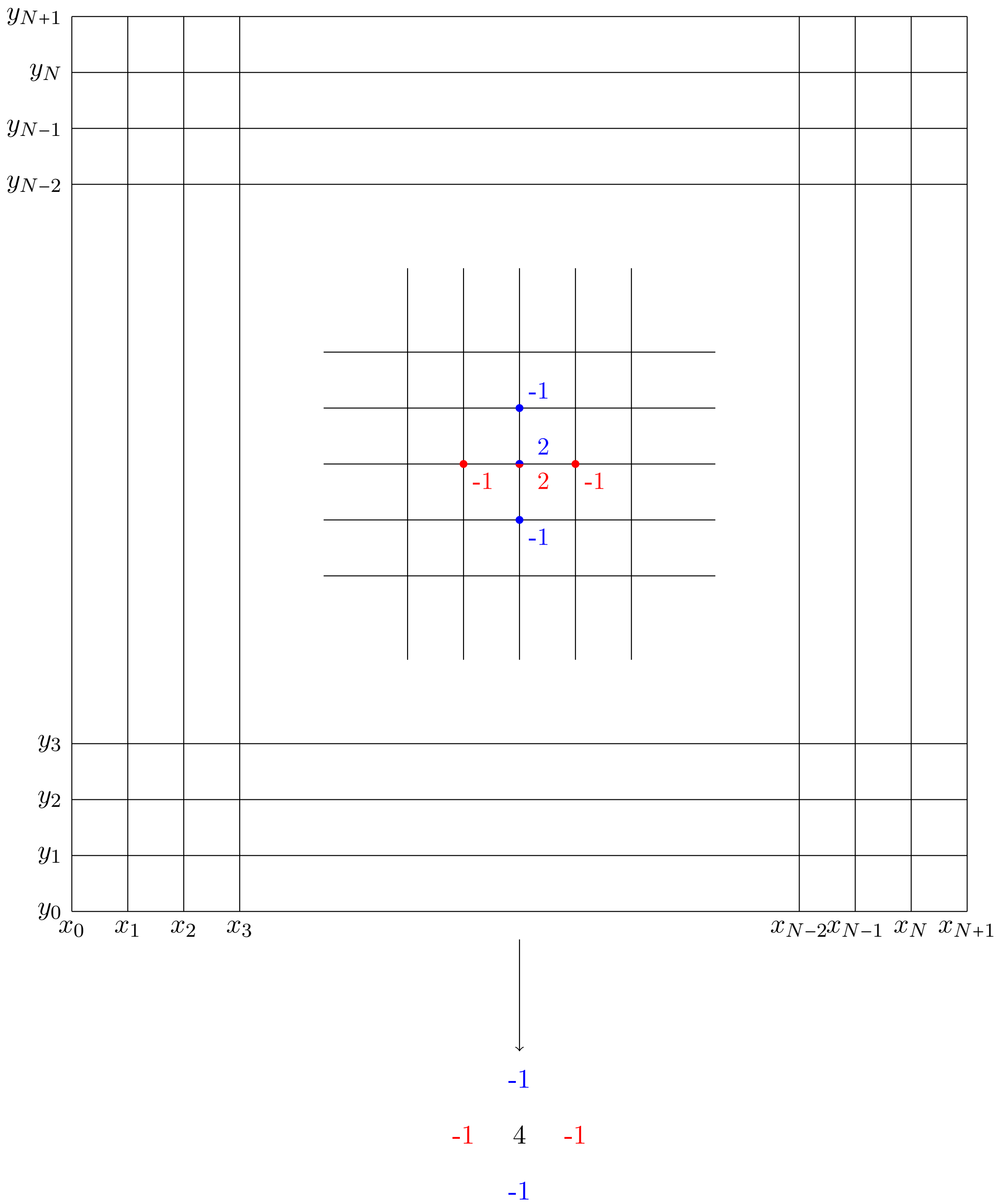
Inhaltsverzeichnis

9 Lineare Gleichungssysteme: Iterative Methoden

9.1 Einführung

Beispiel 9.1.1 (Approximation der Poisson-Gleichung)**.** Betrachte $\Delta u = u_{xx} - u_{yy} =: f$ in $\Omega = (0,1)^2$ mit $u = 0$ auf $\delta\Omega$

Abb. 9.1.0 *Gitter mit Unbekannten*



Es gibt N^2 Unbekannte, $N^2 \times N^2$. Also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n = N^2$.

$$
\begin{aligned}
&(x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_2, y_0), \dots, (x_{N+1}, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_1), \dots, (x_{N+1}, y_{N+1}) \\
&\Rightarrow 0 \dots 0 \ \underbrace{-1 \ 0 \dots 0 \ -1}_{N} \ 4 \ \underbrace{-1 \ 0 \dots 0 \ -1}_{N} \ 0 \dots 0 \qquad i\text{-te Zeile von } A
\end{aligned}
$$

Damit sind nur maximal 5 Elemente verschieden von Null je Zeile und Au benötigt ca. $5n = 5N^2$ Multiplikationen (statt $n^2 = N^4$).

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & -I & & 0 \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & & & -I \\ 0 & & -I & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{9.1.1}$$

9.1.2 Typische Aufgabenstellung

Zu lösen ist $Ax = b$ mit

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, n sehr groß
- A dünn besetzt
- A hat Blockstruktur

s. Folien

9.2 Klassische (stationäre) Verfahren

Betrachte

$$Ax = b \tag{9.2.1}$$

Wähle nun für A eine **Aufspaltung** $A = M - N$ mit einer einfach invertierbaren Matrix M, s.d.

$$Mx = Nx + b \tag{9.2.2}$$

Die **Iterationsvorschrift** ist dann: Löse zu einem gegebenen Startwert $x^{(0)}$ als Schätzung für x für $k = 0, -1, 2, \ldots$

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \tag{9.2.3}$$

Es ergeben sich folgende Äquivalenzen

$$(9.2.3) \Leftrightarrow x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \tag{9.2.4}$$
$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}r^{(k)} \tag{9.2.5}$$

mit $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ (Residuum im k-ten Schritt).

Als **Abbruchkriterium**

a) sollte immer eine maximale Iterationszahl angegeben werden und

b) wird oft für eine gegebene Toleranz $tol \geq \left\| r^{(k)} \right\|$ oder wie diskutiert $tol \cdot \|b\| \geq \left\| r^{(k)} \right\|$ verwendet.

Nach (9.2.4) ergibt sich also die **Fixpunktiteration**

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d =: g(x^{(k)}) \tag{9.2.6}$$

zur **Fixpunktgleichung**

$$x^* = Gx^* + d = g(x^*)$$

mit der **Iterationsmatrix**

$$G = M^{-1}N = I - M^{-1}A = g'(x) \tag{9.2.7}$$

und $d = M^{-1}b$. Weiterhin folgt

$$x^{(k+1)} - x^* = G(x^{(k)} - x^*) = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*)$$

und hiermit gilt elementweise (falls $x^{(0)} - x^* \notin ker(G^{k+1})$)

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} G^k = 0$$

Satz 9.2.1 (Konvergenzkriterien)**.** *Sei $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) Die Iteration (9.2.6) *konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$*

ii) Es gilt $\lim_{k\to\infty} G^k = 0$

iii) Für den Spektralradius $\rho(G) := \max_i |\lambda_i|$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ Eigenwert zu G gilt

$$\rho(G) < 1 \tag{9.2.8}$$

Beweis. **i)⇔ ii):** siehe oben.

ii)⇒ iii): Ist $\rho(G) \geq 1$ dann existiert ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ und Eigenvektor $v \neq 0$ zu G. Damit ist $G^k v = \lambda^k v$. Mit $\lim_{k\to\infty} \lambda^k \neq 0$ (falls existent) folgt $\lim_{k\to\infty} G^k \neq 0$.

iii)⇒ ii): Sei $\rho(G) < 1$. Da $\left(TGT^{-1}\right)^k = TG^kT^{-1}$ für eine invertierbare Matrix T, reicht es, für die Jordansche Normalform $J = TGT^{-1}$ von G zu zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} J^k = 0$ gilt. Da $J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m^k \end{pmatrix}$ mit den Jordankästchen $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} =: \lambda_i I + S_i$

mit $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ist, ist nur $\lim_{k\to\infty} J_i^k$ zu untersuchen.

$$\begin{aligned} J_i^k &= (\lambda_i I + S_i)^k \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l} S_i^l \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l} S_i^k \end{aligned}$$

für $k \geq n$, da für $S_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ gilt $S_i^r = 0$ und mit $r \leq k$ ist dann $\lim_{k\to\infty} S_i^k = 0$. Weiterhin gilt $\binom{k}{l} \leq k^l$ und wegen $|\lambda_i| < 1$

$$\left|\binom{k}{l}\right| \cdot \left|\lambda_i^{k-l}\right| \leq \left|\lambda_i^k\right| \cdot \left|\frac{k}{\lambda_i}\right|^l \leq |\lambda_i|^k \cdot \left|\frac{k}{\lambda_i}\right|^n \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Also $J_i^k \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$.

□

Lemma 9.2.2. *Für jede von einer Vektornorm induzierten Matrixnorm $\|\bullet\|$ gilt*

$$\rho(G) \leq \|G\| \tag{9.2.9}$$

Beweis. Sei λ Eigenwert von G zum Eigenvektor v. Dann gilt $\frac{\|Gv\|}{\|v\|} = |\lambda|$ und daraus folgt direkt

$$\|G\| \geq \sup_{v\in V} \frac{\|Gv\|}{\|v\|} \geq |\lambda| \quad \forall \lambda$$

□

$\|G\| < 1$ ist meist leichter zu prüfen als $\rho(G) < 1$. Desweiteren gilt die Fehlerabschätzung

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq \|G\|^k \left\|x^{(0)} - x^*\right\| \tag{9.2.10}$$

für submultiplikative Matrixnormen.

Index

Literatur

[Boo01] Carl de Boor. A Practical Guide to Splines. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2001. ISBN: 9780387953663.

[DH08] Peter Deuflhard und Andreas Hohmann. Numerische Mathematik. 1. 4. Aufl. de Gruyter Lehrbuch. Eine algorithmisch orientierte Einführung. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2008. ISBN: 978-3-11-020354-7.

[DR08] Wolgang Dahmen und Arnold Reusken. Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 2. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2008. ISBN: 978-3-540-76493-9.

[FH07] R.W. Freund und R.H.W. Hoppe. Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1. Springer-Lehrbuch Bd. 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540453901. URL: https://books.google.de/books?id=2aYfBAAAQBAJ.

[GO96] Gene Golub und James M. Ortega. Scientific computing. Eine Einführung in das wissenschaftliche Rechnen und Parallele Numerik, Übersetzung des englischsprachigen Originals von 1993. B. G. Teubner, Stuttgart, 1996. ISBN: 3-519-02969-3. DOI: 10.1007/978-3-322-82981-8.

[HH94] Günther Hämmerlin und Karl-Heinz Hoffmann. Numerische Mathematik. 4. Aufl. Springer-Lehrbuch. Grundwissen Mathematik. Springer-Verlag, Berlin, 1994. ISBN: 3-540-58033-6. DOI: 10.1007/978-3-642-57894-6.

[Pre+02] William H. Press u. a. Numerical recipes in C++. The art of scientific computing, Second edition, updated for C++. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ISBN: 0-521-75033-4.

[SB90] Josef Stoer und Roland Bulirsch. Numerische Mathematik. 2. 3. Aufl. Springer-Lehrbuch. Eine Einführung—unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer. Springer-Verlag, Berlin, 1990. ISBN: 3-540-51482-1. DOI: 10.1007/978-3-662-22250-8.

[SW05] Robert Schaback und Holger Wendland. Numerische Mathematik. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN: 9783540267058. URL: https://books.google.de/books?id=wdgmBAAAQBAJ.