

Schülerzirkel am 02.06.2018

## Aufgaben

zum Vortrag „Vom Skalarprodukt zur Bildbearbeitung“

Clara Löh, Julian Seipel, Gesina Schwalbe

### Eigenschaften von Vektoren

1. (*Distributivität von Vektoraddition und Skalarmultiplikation*) Berechne folgende Vektoren:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \cdot [(2, 1) + (-3, 1)] &= (-2, 4) \\ [2 \cdot (2, 1)] + [2 \cdot (-3, 1)] &= (-2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -3 \cdot [(1, 3, -2) + (-1, -2, 3)] &= (0, -3, -3) \\ [-3 \cdot (1, 3, -2)] + [-3 \cdot (-1, -2, 3)] &= (0, -3, -3) \end{aligned}$$

Kannst du folgende allgemeine Regel für Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  bestätigen?

$$a \cdot [x + y] = [a \cdot x] + [a \cdot y]$$

2. (*Bilinearität des Skalarprodukts I*) Berechne folgende Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} \text{a) } [(1, -2) + (-3, 1)] \circ (1, -3) &= (-2, -1) \circ (1, -3) = 1 \\ [(1, -2) \circ (1, -3)] + [(-3, 1) \circ (1, -3)] &= (-2, -1) \circ (1, -3) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3, 2) \circ [(-5, 3) + (4, -3)] &= (3, 2) \circ (-1, 0) = -3 \\ [(3, 2) \circ (-5, 3)] + [(3, 2) \circ (4, -3)] &= (3, 2) \circ (-1, 0) = -3 \end{aligned}$$

Kannst du folgende allgemeinen Regeln für Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , und  $z = (z_1, \dots, z_n)$  bestätigen?

$$\begin{aligned} [x + y] \circ z &= [x \circ z] + [y \circ z] \\ x \circ [y + z] &= [x \circ y] + [x \circ z] \end{aligned}$$

3. (*Bonus: Bilinearität des Skalarprodukts II*) Berechne folgende Skalarprodukte:

$$\text{a) } 3 \cdot [(-1, 2) \circ (3, 1)] = 3 \cdot -1 = -3$$

b)  $[3 \cdot (-1, 2)] \circ (3, 1) = 3 \cdot -1 = -3$

c)  $(-1, 2) \circ [3 \cdot (3, 1)] = 3 \cdot -1 = -3$

Kannst du folgende allgemeine Regel für Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  bestätigen?

$$a \cdot [x \circ y] = [a \cdot x] \circ y = x \circ [a \cdot y]$$

4. (*Bonus: Geschwindigkeitsvektoren*) Wähle ein Koordinatensystem und zeichne den Geschwindigkeitsvektor eines Steins ein, der mit  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (Länge unseres Geschwindigkeitsvektors) im nicht ganz optimalen Winkel von  $30^\circ$  auf eine Wasseroberfläche trifft. Welchen senkrechten Geschwindigkeitsanteil hat unser Stein? *Der Vektor ist ca. (9,66, 2,59).*

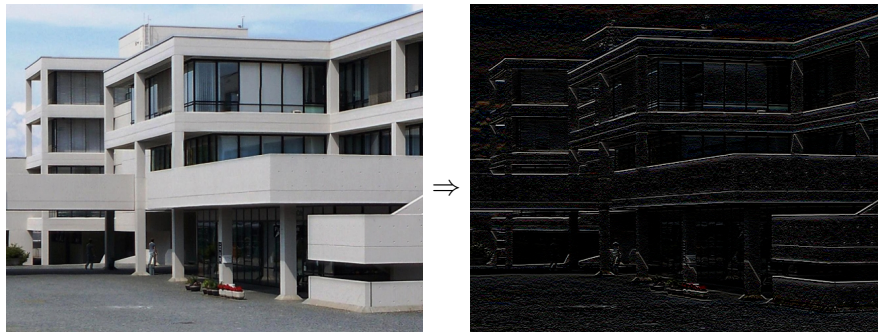
(*Bonus-Bonus*) Weißt du, warum er, wenn richtig geworfen, nicht einsinkt?

## Bildbearbeitung mit Gimp in Theorie und in der Praxis

1. Welcher Vergleichsbildausschnitt verändert bei einer Faltung ein Bild gar nicht?  
*Der mittlere Eintrag 1, sonst nur 0*

Mit welchem Vergleichsbildausschnitt kannst du das Bild mit einer Faltung einfach nur heller, und mit welchem einfach nur dunkler machen? Was hat er mit dem Ergebnis von oben zu tun? *Der Faktor ist der mittlere Eintrag, alle anderen sind 0. D.h. es ist ein Vielfaches des Kerns von oben.*

2. Welcher Vergleichsbildausschnitt könnte diese Faltung hervorrufen?



*Mögliche Antworten:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Überlege dir, wie ein Kernel für folgende Probleme aussehen könnte, probiere deine Ideen zusammen mit deiner Gruppe aus und verbessere sie:

**Künstliche Unschärfe** Ersetze ein Pixel durch den Durchschnittswert seiner umliegenden Pixel. Inwiefern stellt der Vergleichsbildausschnitt eine Unschärfe dar? *Am einfachsten: Setze alle 9 Kernwerte auf 1 und den Divisor auf  $\frac{1}{9}$*   
 Bonus: Was heißt unscharf bei Bildern für benachbarte Pixelwerte? *Die Helligkeit benachbarter Pixel unterscheidet sich wenig – alles Einheitsbrei.*

**Ecken-/Kantenerkennung** Markiere alle Kantenpixel hell, die übrigen dunkel. Tipp: Finde erst Vergleichsbildausschnitte für verschiedene Kantentypen und addiere sie. Inwiefern benutzt du damit die Bilinearität des Skalarprodukts (s.o.)? *Mögliche Antworten:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. *(Bonus: Bildschärfungsfaltung)* Betrachte folgenden Kernel, der eine künstliche Schärfung der Kanten eines Bildes bewirkt, und verändere die mittlere Zahl nach oben und nach unten:

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

Was erhältst du bei niedrigeren Werten? *Das Bild wird bei 4 zur Kantenerkennung, darunter immer mehr schwarz.* Was passiert bei höheren? *Das Bild wird immer heller, der Schärfungseffekt weniger.*

Kannst du die Operation „Bild schärfen“ durch die Summe zweier Faltungen beschreiben? *Die Bildschärfungsfaltung addiert eigentlich nur die Ergebnisse der Identität, d.h. das ursprüngliche Bild, und das Ergebnis einer Kantenerkennung. Erhöht man den Wert, wird das ursprüngliche Bild entsprechend vielfach aufaddiert und das Resultat somit insgesamt heller.*