

Schülerzirkel am 02.06.2018

# Vom Skalarprodukt zur Bildbearbeitung

Gesina Schwalbe

## Definitionen

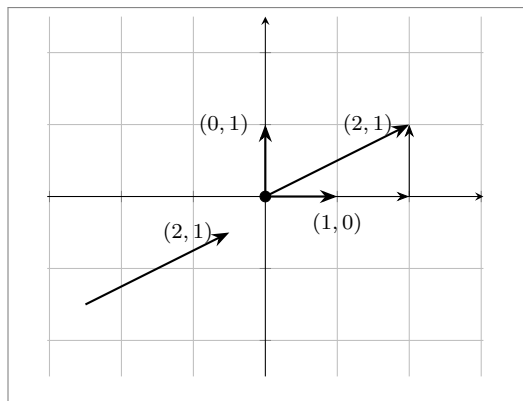
**Vektor** „Wegbeschreibung“

**Koordinatensystem**

1. *Nullpunkt*
2. *Grundrichtungen mit (Schritt)Längen in best. Reihenfolge*

so, dass:

- *Jeder Punkt erreichbar*
- *So wenige wie möglich*



**Vektordarstellung**

$$\left( \langle \text{Schritte in Richtung 1} \rangle, \langle \text{Schritte in Richtung 2} \rangle, \dots \right)$$

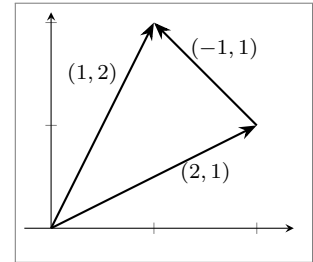
- Die Reihenfolge, in der ich die Schritte mache, ist egal!
- Auch Schrittbruchteile sind erlaubt.

## Rechnen mit Vektoren

### Addition

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

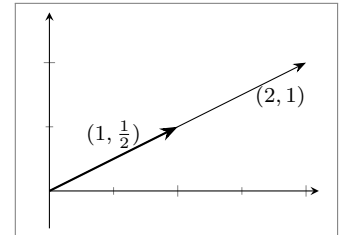
Beispiel:  $(2, 1) + (-1, 1) = (1, 2)$



### Strecken/Stauchen

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$$

Beispiel:  $\frac{1}{2} \cdot (2, 1) = (1, \frac{1}{2})$



Insbes.  $(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots) + \dots + x_n \cdot (0, \dots, 0, 1)$

## Andere Räume mit Koordinatensystem

- RGB-Farbpixel: (Rotwert, Grünwert, Blauwert)
- Schwarz-weiß Bild: (Helligkeit Pixel 1, Helligkeit Pixel 2, ...)

0,5	0,5	0
0,5	1	0
0	0	0

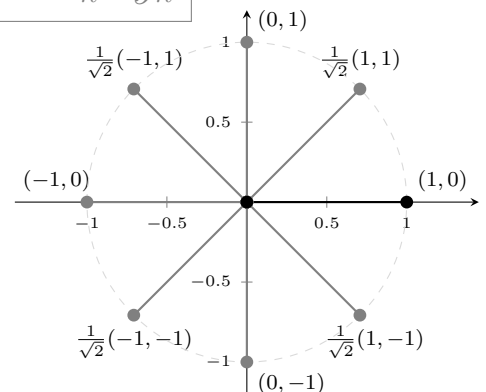
## Skalarprodukt

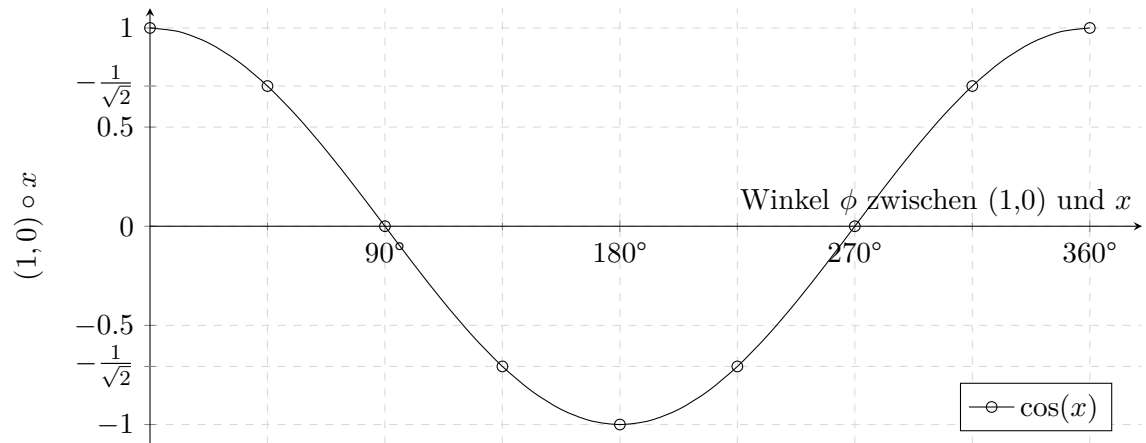
$$(x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Das Skalarprodukt ist ein Maß dafür, *wie sehr zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen.*

Genauer:

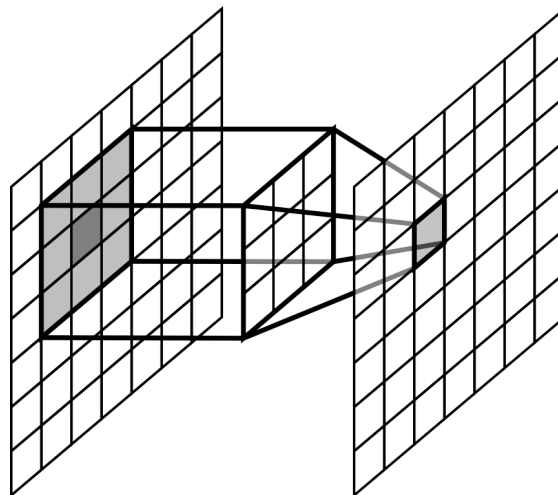
$$x \circ y = \text{Länge}(x) \cdot \text{Länge}(y) \cdot \cos(\phi)$$





## Anwendung in der Bildverarbeitung: Faltung

Eine Faltung sammelt die Ergebnisse von Skalarprodukten eines Vergleichsbildausschnitts mit Bildausschnitten unseres Anfangsbildes in einem Ergebnisbild.



Wirkung der Faltung	Vergleichsbildausschnitt	
horizontale (scharfe) Linie	<div> <div>-2-2-2</div> <div>4 4 4</div> <div>-2-2-2</div> </div>	
vertikale Kante von dunkel zu hell	<div> <div>0 0 0</div> <div>-1 1 0</div> <div>0 0 0</div> </div> oder <div> <div>-1 1 0</div> <div>-1 1 0</div> <div>-1 1 0</div> </div>	
Relief	<div> <div>-2 -1 0</div> <div>-1 1 1</div> <div>0 1 2</div> </div>	
Schärfen	<div> <div>0 -1 0</div> <div>-1 5 -1</div> <div>0 -1 0</div> </div>	

### Beachte für den Umgang mit Bildern und Faltungen:

- Pixelwerte  $\begin{cases} < 0 & \text{keine Farbe (schwarz)} \\ > 255 & \text{volle Farbe (weiß)} \end{cases}$
- Für Vergleichsbildausschnitte sollte man beachten:
  - Die Summe der Einträge sollte zwischen 0 und 1 sein.
  - Um obige Bedingungen zu erreichen: Die Tendenz (hell zu dunkel) ist entscheidend.

### Gimp Bedienung

Filters → Generic → Convolution Matrix...  
 Starte mit folgenden Einstellungen:

