

Vom Skalarprodukt zur Bildbearbeitung

Gesina Schwalbe

Definitionen

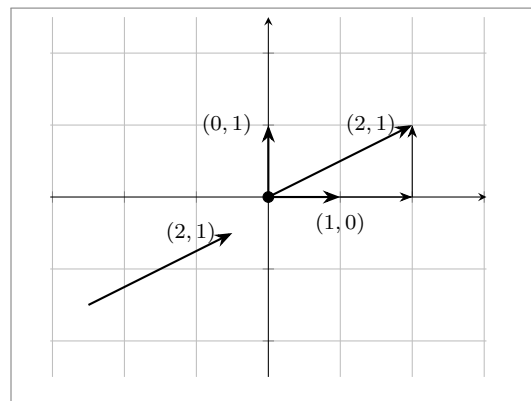
Vektor „Wegbeschreibung“

Koordinatensystem

1. *Nullpunkt*
2. *Grundrichtungen mit (Schritt)Längen in best. Reihenfolge*

so, dass:

- *Jeder Punkt erreichbar*
- *So wenige wie möglich*



Vektordarstellung

$$\left(\langle \text{Schritte in Richtung 1} \rangle, \langle \text{Schritte in Richtung 2} \rangle, \dots \right)$$

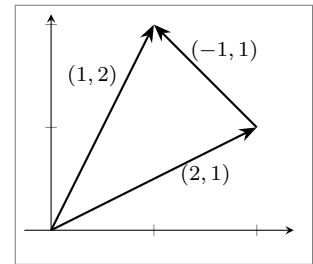
- Die Reihenfolge, in der ich die Schritte mache, ist egal!
- Auch Schrittbruchteile sind erlaubt.

Rechnen mit Vektoren

Addition

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

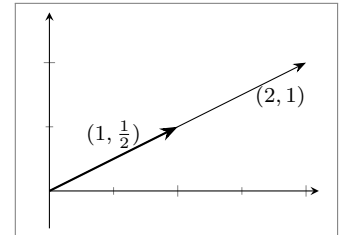
Beispiel: $(2, 1) + (-1, 1) = (1, 2)$



Strecken/Stauchen

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$$

Beispiel: $\frac{1}{2} \cdot (2, 1) = (1, \frac{1}{2})$



Insbes. $(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots) + \dots + x_n \cdot (0, \dots, 0, 1)$

Andere Räume mit Koordinatensystem

- RGB-Farbpixel: (Rotwert, Grünwert, Blauwert)
- Schwarz-weiß Bild: (Helligkeit Pixel 1, Helligkeit Pixel 2, ...)

0,5	0,5	0
0,5	1	0
0	0	0

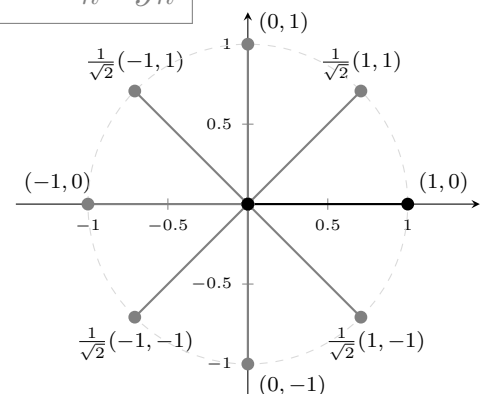
Skalarprodukt

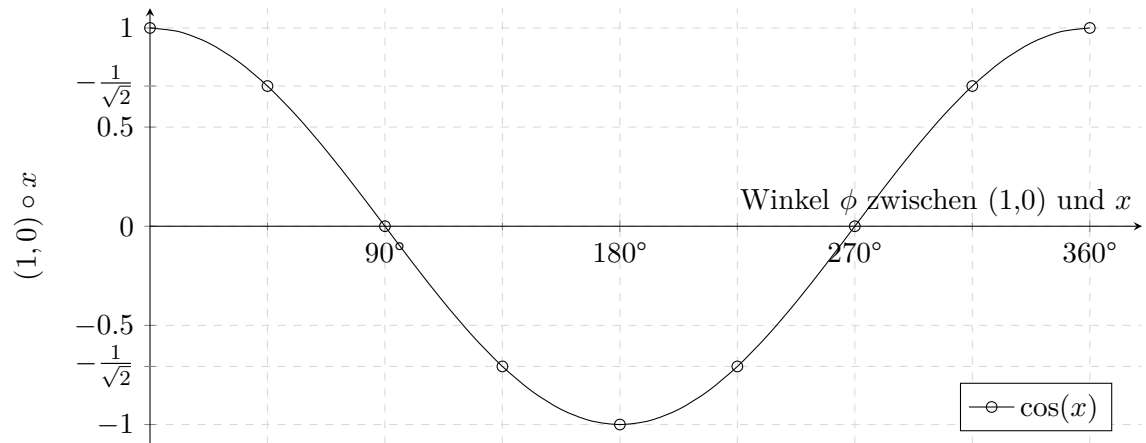
$$(x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Das Skalarprodukt ist ein Maß dafür, *wie sehr zwei Vektoren in dieselbe Richtung zeigen.*

Genauer:

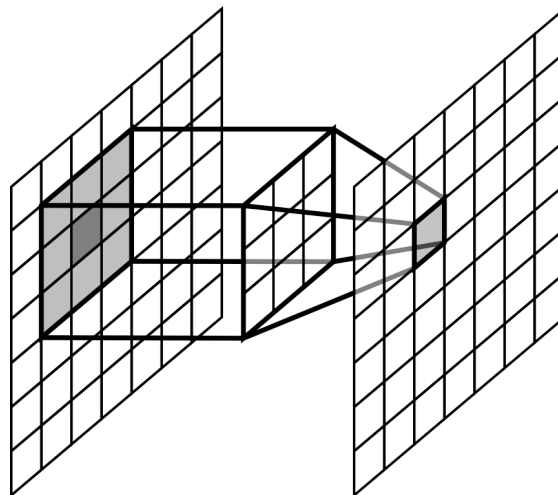
$$x \circ y = \text{Länge}(x) \cdot \text{Länge}(y) \cdot \cos(\phi)$$





Anwendung in der Bildverarbeitung: Faltung

Eine Faltung sammelt die Ergebnisse von Skalarprodukten eines Vergleichsbildausschnitts mit Bildausschnitten unseres Anfangsbildes in einem Ergebnisbild.



Wirkung der Faltung

Vergleichsbildausschnitt

horizontale (scharfe) Linie

-2	-2	-2
4	4	4
-2	-2	-2

vertikale Kante von dunkel zu hell

0	0	0
-1	1	0
0	0	0

oder

-1	1	0
-1	1	0
-1	1	0

Relief

-2	-1	0
-1	1	1
0	1	2

Schärfen

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

Beachte für den Umgang mit Bildern und Faltungen:

- Pixelwerte $\begin{cases} < 0 & \text{keine Farbe (schwarz)} \\ > 255 & \text{volle Farbe (weiß)} \end{cases}$
- Für Vergleichsbildausschnitte sollte man beachten:
 - Die Summe der Einträge sollte zwischen 0 und 1 sein.
 - Um obige Bedingungen zu erreichen: Die Tendenz (hell zu dunkel) ist entscheidend.

Gimp Bedienung

Filters → Generic → Convolution Matrix...
 Starte mit folgenden Einstellungen:

