Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

EP7 – CÁLCULO III

Exercício 1 Verifique se as funções a seguir são diferenciáveis na origem.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $g(x,y) = |x| + |y|$

(c) $q(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(d) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução:

(a) Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

Logo, f será diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

com

$$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\;x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\;y = x^2 + y^2.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $f(x,y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $(0,0)$. Na Figura 1-(a) plotamos o gráfico de $f(x,y)$ e do plano $z = 0$ que é a melhor função afim que aproxima-se de f na vizinhança de $(0,0)$.

(b) Sabemos que uma condição necessária para uma função ser diferenciável num ponto é que ela tenha derivadas parciais nesse ponto. Neste exercício, temos que $g(x,0) = |x|$. Isso significa que não existe $g_x(0,0)$, já que a função módulo não tem derivada em zero. Portanto, $g(x,y) = |x| + |y|$, não é diferenciável em $(0,0)$. Na Figura 1-(b) plotamos o gráfico de $g(x,y)$.

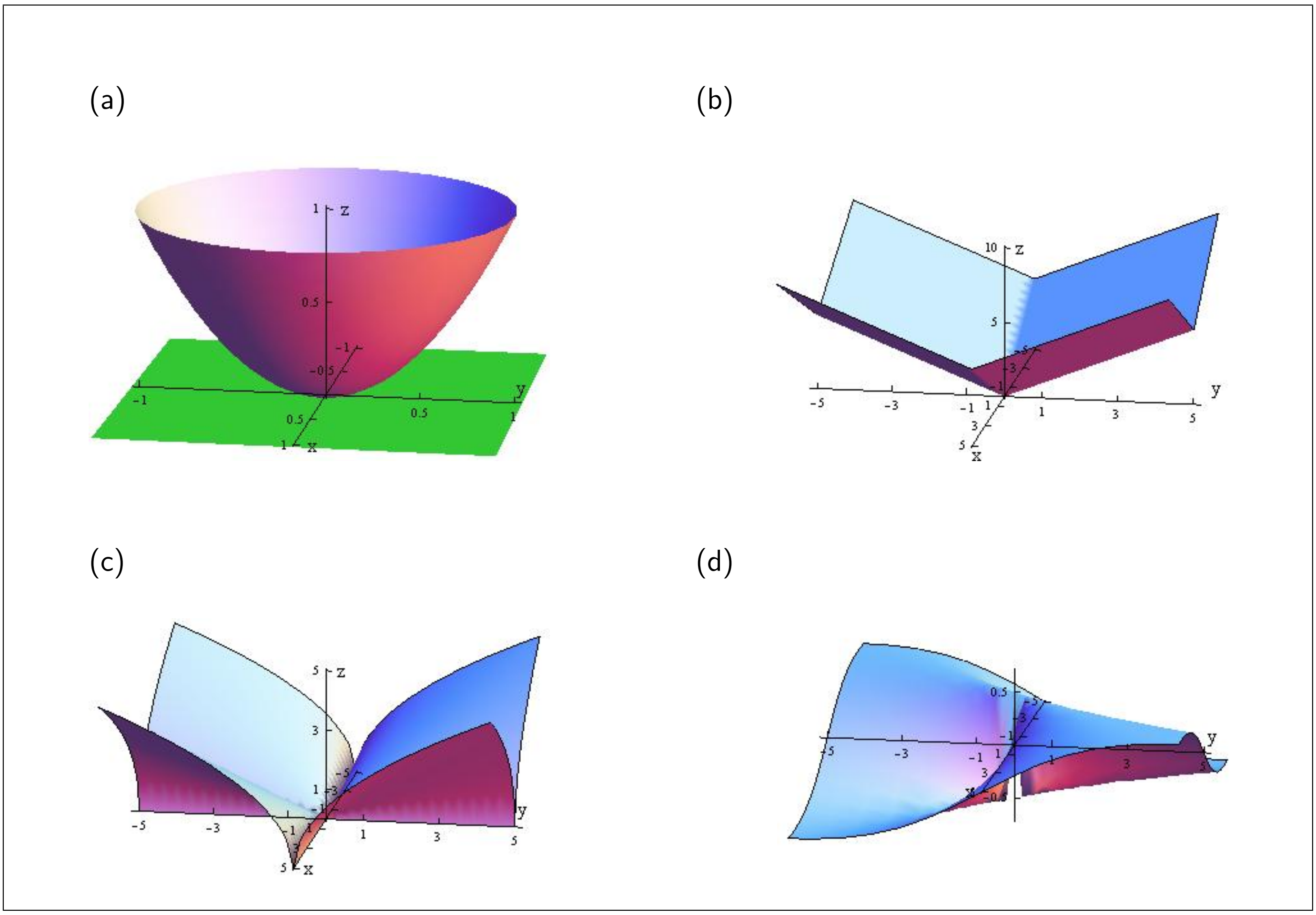

Figura 1: Exercício 1

(c) Temos que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{q(x,y)-q(0,0)-0x-0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
Observe que mesmo que esse limite exista, ele não será zero. Basta tomarmos o caminho $x=y$. Ou seja, ao longo desse caminho

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, $q(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Na Figura 1-(c) plotamos o gráfico de $q(x,y)$.

Note que apesar das derivadas parciais existirem em $(0,0)$, $q(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

(d) No Exercício 4-b do EP5, mostramos que a função $h(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$. Portanto, $h(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Na Figura 1-(d) está plotada o gráfico de $h(x,y)$.

Exercício 2 Verifique se as funções seguintes são diferenciáveis:

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$

(b) $f(x,y) = x^2 e^{x^2+y^2} + y^2\cos(x^2+y^2)$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Solução:

(a) Considerando y constante e derivando em relação a x, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\cos\left(xy^2\right)\right)\left(y^2\right) = y^2\cos\left(xy^2\right)\ .$$

Considerando x constante e derivando em relação a y, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\cos\left(xy^2\right)\right)(2xy) = 2xy\cos\left(xy^2\right)\ .$$

Observamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois é o produto de y^2, que é contínua em $\mathbb{R}^2$ por ser polinômio, com $\cos(xy^2)$, que é contínua em $\mathbb{R}^2$ por ser composição de $\cos x$ com xy^2 ambas contínuas (composição de contínuas é contínua, teorema 4.1 pág. 51 módulo 1).

De forma análoga, verificamos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$. Logo, pelo teorema 8.2 pág. 90 módulo 1, como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ temos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(b) Inicialmente calculamos as derivadas parciais.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{x^2+y^2} + x^2e^{x^2+y^2}(2x) + y^2(-\operatorname{sen}(x^2+y^2))(2x)\\ &= (2x+2x^3)e^{x^2+y^2} - 2xy^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2e^{x^2+y^2}(2y) + 2y\cos(x^2+y^2) + y^2(-\operatorname{sen}(x^2+y^2))(2y)\\ &= 2x^2ye^{x^2+y^2} + 2y\cos(x^2+y^2) - 2y^3\operatorname{sen}(x^2+y^2)\,.\end{aligned}$$

Logo, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ por ser soma, produto e composição de funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, e portanto, pelo Teorema 8.2, pág. 90, módulo 1, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(c) Sabemos que se f é diferenciável em seu domínio então f é contínua em seu domínio. Assim, se f é descontínua então f não é diferenciável.

Notemos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ pois, pelo teste dos dois caminhos com $y=0$ (eixo x) e $x=0$ (eixo y), temos, respectivamente, que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2+0^2} == \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to0} 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{0}{y^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0\,,$$

Observe que os limites tomam valores diferentes. Logo, f não é contínua em $(0,0)$. E, portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. Para pontos diferentes de $(0,0)$, isto é, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, temos de forma análoga ao item (a), que existem as derivadas parciais e são contínuas. Logo, f é diferenciável em pontos diferentes de $(0,0)$.

Exercício 3 Prove que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+y}{|x|+|y|} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Solução: De forma análoga ao item (c) da Questão 2, tomando o limite sobre a reta $y=0$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{|x|},$$

o qual não existe, pois se $x\to0^+$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{|x|} = 2$ e se $x\to0^-$, $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{|x|} = -2$. Logo, não existe limite sobre a reta $y=0$ e, portanto, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Assim, $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$ e consequentemente, não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 4 Seja $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{x^2+y^2} \cos(t^2)\;dt$, em que a é uma constante real. Prove que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x^2+y^2)_x \ \cos\big((x^2+y^2)^2\big) = 2x \ \cos\big((x^2+y^2)^2\big)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x^2+y^2)_y \ \cos\big((x^2+y^2)^2\big) = 2y \ \cos\big((x^2+y^2)^2\big).\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ por ser produto e composição de funções contínuas, segue que $f(x,y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5 Seja $f(x,y) = \begin{cases} (x^4+y^4)\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, se $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em $(0,0)$.

(c) Prove que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

(a) Considerando y constante e derivando em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left(x^4+y^4\right)_x \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)_x \\ &= 4x^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_x \\ &= 4x^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \ 2x\right) \\ &= 4x^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

Considerando x constante e derivando em relação a y, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \left(x^4+y^4\right)_y \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)_y \\ &= 4y^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_y \\ &= 4y^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^4+y^4) \ \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \ 2y\right) \\ &= 4y^3 \ \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h^4\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)-0}{h} = \lim_{h\to0} h^3\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h^4\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)-0}{h} = \lim_{h\to0} h^3\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0\,.$$

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 4x^3 \ \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) + \dfrac{2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 4y^3 \ \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) + \dfrac{2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c) Pelo teorema 8.2 pág 90 módulo 1, basta provar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Com efeito, para $(x,y) \neq (0,0)$, tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas por ser soma, produto e composição de funções contínuas.

Verifiquemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$. Devemos, então provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,.$$

e que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

Com efeito, para

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{4x^3}_{f_1(x,y)} \ \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{g_1(x,y)} + \underbrace{2x}_{f_2(x,y)} \ \underbrace{\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2} \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{g_2(x,y)}.$$

temos que

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x^3 = 0$ e $|g_1(x,y)| = \left|\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$, o que implica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)g_1(x,y) = 0$, por ser produto de uma função com limite zero e outra limitada.
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2y = 0$

  e como
  $$x^4+y^4 \leq x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 \Longrightarrow \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1$$
  segue que
  $$|g_2(x,y)| = \left|\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = \underbrace{\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}}_{\leq 1}\underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq 1,$$
  o que implica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)g_2(x,y) = 0.$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)g_1(x,y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)g_2(x,y) = 0+0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Analogamente, prova-se que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$, o que implica que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
