第 21 卷第 3 期
2008 年 9 月

海南师范大学学报（自然科学版）
Journal of Hainan Normal University(Natural Science)

Vol.21 No.3
Sep. 2008

凸约束二次规划问题求解的一般方法

王 炜，张 楠
（辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连 116029）

摘　要：将标准对偶变换的思想应用到求解凸约束二次规划问题上，并给出了该问题的完全解的形式．标准对偶变换思想的主旨是将原问题通过标准对偶变换的方法转化为其对偶问题，通过求解其对偶问题得到原问题的最优解．这种方法可使原来复杂的问题简单化，并使得原问题与其对偶问题间的对偶间隙为零且不带有任何扰动．应用这种方法我们还可以很容易的得到一些比较好的结果．

关键词：凸约束二次规划；标准对偶变换

中图分类号：O 224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8747(2008)03-0233-03

n 维实数空间上的线性约束的二次规划问题的求解方法已有报道[1]．但在很多情况下，我们要解决的二次规划问题并不是线性约束的情形．本文对此问题进行了进一步的拓展，研究了凸约束二次规划问题的求解方法．

考虑问题：

$$(P):\min P(x)=\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle-\langle x,f\rangle \qquad (1)$$

$$\text{s.t.}\quad x\in k$$

其中，可行域 K 为赋范空间 C 中的任意一个凸子集，C 的代数内部非空；$A:C\to C^*$ 为一线性算子且 $A=A^*$；$f\in C^*$ 为一给定向量．

对于该问题，我们可通过对其等价问题 $\min P^*(x)$ 求最优解而得到原问题(1)的最优解．而根据 A 性质的不同，求解的方法也不同．当 A 半正定时，可借助于凸分析中次微分的相关知识得到最优解；在 A 不是半正定的情况下，就需要采用标准对偶变换的思想．

1　标准对偶变换的基本思想

1.1　预备知识

关于问题 $(P):\min P(x)$，其中 $P(x)$ 为非凸函数，γ 为赋范空间 χ 的任一凸子集．

$$\text{s.t.}\quad x\in\gamma$$

定义 1　对于 χ 上的实值函数 $\overline{W}(y):\gamma\to R$，若其导函数 $D\overline{W}(y)$ 可逆，即为一一映射，则称 $\overline{W}(y)$ 为标准函数．

定义 2　若 $\overline{W}(y)$ 为标准函数，则 $\overline{W}(y)$ 的共轭函数为 $\overline{W}^*(y^*)=\left\{y^Ty^*-\overline{W}(y)\ \middle|\ y^*=D\overline{W}(y)\right\}$.

定义 3　$D_x\Phi(x,y)$ 表示二元函数 $\Phi(x,y)$ 对 x 的偏导函数．

收稿日期：2008-07-12

基金项目：国家自然科学基金(10001007)

1.2 标准对偶变换的基本思想

对于原始问题(P),首先找到一个算子$y=\Lambda(x):\chi\rightarrow\gamma$,使得非凸函数$P(x)$可写成$P(x)=\Phi(x,\Lambda(x))$的形式,其中$\Phi(x,y):\chi\times\gamma\rightarrow R$关于变量$x$、$y$均是标准函数.一般情况下,我们可以得到$\Phi(x,y)=\overline{W}(y)-\overline{F}(x)$,其中$\overline{W}(y):\gamma\rightarrow R$、$\overline{F}(x):\chi\rightarrow R$均为标准函数.由此可得$\Phi(x,y)$的Lagrange共轭函数为

$$\Phi^*(x,y^*)=\langle\Lambda(x),y^*\rangle-\overline{W}^*(y^*)-\overline{F}(x),$$

再利用Λ-标准对偶变换

$$\overline{F}^{\Lambda}(y^*)=\left\{\langle\Lambda(x),y^*\rangle-\overline{F}(x)\mid\Lambda_t^*(x),y^*-D\overline{F}(x)=0,x\in\chi\right\}$$

得到非凸函数$P(x)$的标准对偶函数为

$$P^d(y^*)=\{\Phi^*(x,y^*)\mid D_x\Phi^*(x,y^*)=0,x\in\chi\}=\overline{F}^{\Lambda}(y^*)-\overline{W}^*(y^*).$$

3 一般凸约束二次规划问题的求解

现在,考虑问题(1),我们首先引入指示函数$\delta(x\mid K)=\begin{cases}0, & x\in K\\ +\infty, & x\notin K\end{cases}$,则原问题(1)等价于

$$\min P^*(x)=\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle-\langle x,f\rangle+\delta(x\mid K)\qquad(2)$$
$$\text{s.t.}\quad x\in C$$

于是原问题由凸约束的二次规划问题转化为C上的无约束问题,且若$\bar{x}$是原始问题(1)的最优解,则它必为(2)的最优解;反过来,若$\bar{x}$为(2)的最优解,则其必为(1)的最优解.于是要求原问题(1)的最优解,只需求其等价问题(2)的最优解即可.

引理1[3] 对于不可微的凸函数f,点x为其最优解的充分必要条件为$0\in\partial f(x)$.

定理1 若A半正定,对于一点$\bar{x}$,若有$0\in\partial P^*(\bar{x})$,则$\bar{x}$为原问题$P(x)$的最优解.

证明 若A为半正定,则$P(x)$为凸函数.由于指示函数$\delta(x\mid K)$为凸函数,于是得$P^*(x)$为凸函数.此时,对于一点$\bar{x}$,若有$0\in\partial P^*(\bar{x})$,则$\bar{x}$为$P^*(x)$的全局最优解,又(1)与(2)有相同的最优解,即有$P^*(\bar{x})=\min_{x\in C}P^*(x)=\min_{x\in K}P(x)=P(\bar{x})$,于是原问题得解,其最优解为$\bar{x}$.

若A不是半正定的,则$P(x)$不是凸函数.此时,上述作法不再成立,于是我们想到利用标准对偶变换的思想方法对原问题(2)进行求解.

定理2 对于非凸二次规划问题(P),通过标准对偶变换的方法,原问题(P)与其对偶问题(P^d)的对偶间隙为零.

证明 对于非凸二次规划问题(P),存在算子$y=\Lambda(x)$,使得$P(x)=\Phi(x,y)=\overline{W}(y)-\overline{F}(x)$,通过标准对偶变换得出$P^d(y^*)=\overline{F}^{\Lambda}(y^*)-\overline{W}^*(y^*)$.设$\bar{x}$,$\bar{y}^*$分别为原问题与其对偶问题的最优解,且$\bar{y}=\Lambda(\bar{x})$,则有

$$P(x)-P^d(y^*)=\overline{W}(y)-\overline{F}(x)-(\overline{F}^{\Lambda}(y^*)-\overline{W}^*(y^*))=$$
$$\overline{W}(y)+\overline{W}^*(y^*)-(\overline{F}(x)+\overline{F}^{\Lambda}(y^*))=\langle y,y^*\rangle-\langle\Lambda(x),y^*\rangle$$

由于$y=\Lambda(x)$,所以$P(x)-P^d(y^*)=0$,进而有$P(x)=P^d(y^*)$,则可知$P(x)$与$P^d(\bar{y}^*)$在其各自最优点处的最优值相同,即对偶问题(P)与(P^d)的对偶间隙为零.

由此看出,可完全根据原问题的对偶问题对其进行求解.而为了利用标准对偶变换,我们首先假设A可逆.

对于原始问题(P),令$\overline{W}(x)=\delta(x\mid K)$,$\overline{F}(x)=-P(x)=\langle x,y\rangle-\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle$,则$P(x)=\overline{W}(x)-\overline{F}(x)$.

由于A可逆,于是$\overline{F}(x)$为标准方程;$\overline{W}(x)$为凸函数,且在C上为下半连续函数.

引理2[3] 指示函数$\delta(x\mid K)$在$x\in K$处的次微分为集合K的法锥,即$N_K(x)$;在$x\notin K$处的次微分为空集.

由引理 2 的对偶变量 $x^*\in C^*$ 可定义如下:$x^*\in\partial\overline{W}(x)=\begin{cases}N_K(x),\ x\in K\\ \Phi,\quad x\notin K\end{cases}$.

$\overline{W}(x)$的标准共轭函数可通过 sup-Fenchel 变换得到:

$$\overline{W}^{\triangle}(x^*)=\delta^*(x^*\mid N_K(x))=\begin{cases}x^Tx^*,\ x^*\in N_K(x)\\ +\infty,\ x^*\notin N_K(x)\end{cases},$$

其有效域为 $C^*_{\triangle}=\mathrm{dom}\overline{W}^{\triangle}(x^*)=\{x^*\in C^*\mid x^*\in N_K(x)\}=N_K(x)$.

定义 4　若对偶对(x,x^*)在 $C_{\overline{W}}\times C^*_{\triangle}$上满足:

$$x^*\in\partial\overline{W}(x)\Leftrightarrow x\in\partial\overline{W}^{\triangle}(x^*)\Leftrightarrow\overline{W}(x)+\overline{W}^{\triangle}(x^*)=x^Tx^*\tag{3}$$

则称(x,x^*)为标准对偶对,$\overline{W}(x)$与 $\overline{W}^{\triangle}(x^*)$称为标准对偶函数. 其中 $C_{\overline{W}}$为函数 $\overline{W}(x)$的有效域. 特别地,在 $C\times C^*_{\triangle}$ 上,对偶关系(3)等价于 $x\perp x^*,x\in C,x\in C^*_{\triangle}$.

由假设条件知 A 可逆,则 $\overline{F}(x)$的标准共轭函数为

$$\overline{F}^{\triangle}(x^*)=\left\{\langle x,x^*\rangle-\overline{F}(x)\mid x^*-D\overline{F}(x)=0,x\in C\right\}=$$
$$-\frac{1}{2}(f-x^*)^T(A^T)^{-1}(f-x^*)\tag{4}$$

此时,

$$\overline{W}^{\triangle}(\bar{x}^*)=(f-x^*)^TA^{-1}x^*\tag{5}$$

于是在对偶可行域 $C^*_{\triangle}$上,标准对偶函数 $P^d(x^*)=\overline{F}^{\triangle}(x^*)-\overline{W}^{\triangle}(x^*)$形式如下:

$$P^d(x^*)=-\frac{1}{2}(f-x^*)^T(A^T)^{-1}(f-x^*)-(f-x^*)^T(A^T)^{-1}x^*.$$

不妨设 A 对称,即有 $A=A^T$,则原函数的标准对偶函数为

$$P^d(x^*)=-\frac{1}{2}(f-x^*)^TA^{-1}(f-x^*)-(f-x^*)^TA^{-1}x^*.$$

于是原问题(P)的对偶问题为 $\max P^d(x^*)$

$$\text{s.t.}\ \ x^*\in N_K(x).$$

定理 3　若 $\bar{x}^*$ 是对偶问题(P^d)的最优解,则 $\bar{x}=A^{-1}(f-\bar{x}^*)$为原问题的最优解.

证明　若 $\bar{x}^*$ 是对偶问题(P^d)的最优解,$\bar{x}=A^{-1}(f-\bar{x}^*)$满足 $\bar{x}^*-D\overline{F}(\bar{x})=0$, 于是由(5)式得

$$\overline{W}^{\triangle}(\bar{x}^*)=(f-\bar{x}^*)^TA^{-1}\bar{x}^*=\bar{x}^T\bar{x}^*,$$

而根据定义形式

$$\overline{W}^{\triangle}(\bar{x}^*)=\sup\left\{\langle x,\bar{x}^*\rangle-\overline{W}(x)\mid\bar{x}^*\in N_K(x),x\in C\right\}=\bar{x}^T\bar{x}^*,$$

从而有 $\bar{x}^*\in N_K(\bar{x})$,进而有 $\bar{x}\in K$.

现将 $\bar{x}=A^{-1}(f-\bar{x}^*)$代入(2)式,则有

$$P(\bar{x})=\frac{1}{2}\langle\bar{x},A\bar{x}\rangle-\langle\bar{x},f\rangle=$$
$$\frac{1}{2}\langle A^{-1}(f-\bar{x}^*),A\cdot A^{-1}(f-\bar{x}^*)\rangle-\langle A^{-1}(f-\bar{x}^*),f\rangle=$$
$$\frac{1}{2}(f-\bar{x}^*)^TA^{-1}(f-\bar{x}^*)-(f-\bar{x}^*)A^{-1}f=P^d(\bar{x}^*)$$

由此可得 $\bar{x}$ 为原问题的最优解.

至此,原问题得解.

需要注意的是,本文仅给出了求解凸约束二次规划问题方法的一般步骤,而对于具体的约束情况,要选取适当的 $y=\Lambda(x)$,使得原文题可化为标准形式,从而可归结到本文的方法上,唯一不同的是最后得到

(下转第 267 页)

A multi-attribute decision-making method based on projection and its application

Wu Kaixin[1], La Qiong[2]
(1. *Department of Mathematics, Yangen University, Fujian* 362014, *China*;
2. *College of Science, Xizang University, Xizang* 850000, *China*)

Abstract: In this paper, the multi-attribute decision-making problem with known weight and the attribute values of interval numbers was discussed. First, the interval ideal point was defined, and based on the projected method, the most desirable alternative was found by confirming the projection on the interval ideal point. Finally, an example was given and the result obtained was satisfactory.

Key words: multi-attribute decision-making; the ideal point; projection; interval numbers; weight

---

(上接第 235 页)

的对偶问题的形式会有所不同,因而,我们要具体问题具体分析,正确的应用本文给出的求解方法.

参考文献:

[1] David Yang Gao. Canonical duality theory and solutions to constrained nonconvex quadratic programming [J]. Journal of Global Optimization, 2004, 29: 377-399.
[2] David Yang Gao. Perfect duality theory and complete solutions to a class of clobal optimization problems [J]. Optimization, 2003, 52:467-493.
[3] Rockafellar R T. Convex Analysis [M]. Princeton: Princeton University Press, NJ, 1970.

Application of the canonical dual transformation theory to a convex constrained quadratic programming

Wang Wei, Zhang Nan
(*School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)

Abstract: This paper analyzes the application of the canonical dual theory to and the form of solution to quadratic programming problems subjected to convex constrains. It is shown that, by this method, these difficult constrained programming can be solved easily, i.e. the perfect dual formulation with zero duality gaps and without any perturbation. Therefore, some satisfactory results can easily be obtained by this method.

Key words: convex constrained quadratic programming; canonical dual transformation

凸约束二次规划问题求解的一般方法

作者： 王炜， 张楠， Wang Wei， Zhang Nan
作者单位： 辽宁师范大学数学学院,辽宁,大连,116029
刊名： 海南师范大学学报（自然科学版）
英文刊名： JOURNAL OF HAINAN NORMAL UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
年，卷(期)： 2008,21(3)

参考文献(3条)

1. David Yang Gan Canonical duality theory and solutions to constrained nonconvex quadratic programming[外文期刊] 2004

2. David Yang Gao Perfect duality theory and complete solutions to a class of clobal optimization problems[外文期刊] 2003(4-5)

3. Rockafellar R T Convex Analysis 1970

本文读者也读过(9条)

引用本文格式：王炜.张楠.Wang Wei.Zhang Nan 凸约束二次规划问题求解的一般方法[期刊论文]-海南师范大学学报（自然科学版） 2008(3)