Introduktion

Lad $R_{f,t}$ være den risikofrie rente i måned t, og lad $R_{M,t}$ være markedsafkastet. Definér markeds-excess som

$$r_{M,t} = R_{M,t} - R_{f,t}.$$

Vi arbejder med månedlige excess-afkast for FF25-porteføljerne og markedet:

$$r_{i,t}, \quad i = 1, \dots, 25, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$r_{M,t} \quad \text{(Ken French Mkt-RF)}.$$

Fra år 1926 til 2025. Vi betragter forskellen mellem FF-portefølje i og markedet

$$d_{i,t} = r_{i,t} - r_{M,t}.$$

Lad

$$\hat{\mu}_{d,i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} d_{i,t}, \qquad \hat{\sigma}_{d,i} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (d_{i,t} - \hat{\mu}_{d,i})^2},$$

med sample-skævhed og -kurtosis for spredningen givet ved

$$\hat{\gamma}_{3,i} = \text{skew}(d_{i,t}), \qquad \hat{\gamma}_{4,i} = \text{kurtosis}(d_{i,t}).$$

Definér markeds-forskel-Sharpen som

$$\hat{SR}_i^{(\text{rel})} := \frac{\hat{\mu}_{d,i}}{\hat{\sigma}_{d,i}}.$$

Så spørgsmålet bliver: "Har FF_i højere Sharpe end markedet?", eller mere præcist: "har forskelsporteføljen en Sharpe-ratio større end 0?"

Fra Prado/Bailey er Sharpe-estimatoren for en følge af afkast med forventet værdi μ, standardafvigelse σ, skewness γ_3 og kurtosis γ_4 med T observationer asymptotisk givet ved

$$\hat{SR} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(SR, \frac{1 - \gamma_3 SR + \frac{\gamma_4 - 1}{4} SR^2}{T} \right).$$

Vi betragter nu $\hat{SR}_i^{(\text{rel})}$ med

$$H_0 : SR_i^{(\text{rel})} \leq 0, \qquad H_1 : SR_i^{(\text{rel})} > 0.$$

Siden $SR_0 = 0$ kan dette sættes ind i formlen for PSR-variansen, hvilket giver

$$\hat{\sigma}^2_{SR_0} = \frac{1}{T}, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\sigma}_{SR_0} = \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

PSR og MinTRL

Vi bestemmer herfra vores teststørrelse med $SR_0 = 0$,

$$z_i^* = \frac{\hat{SR}_i^{(\text{rel})} - 0}{\hat{\sigma}_{SR_0}} = \hat{SR}_i^{(\text{rel})} \sqrt{T}.$$

Vi sætter

$$PSR_i = \Phi\left(z_i^*\right),$$

hvor Φ er standard-normal-CDF'en. Tanken her er, at vi ser på, med hvilket konfidensniveau vi kan afvise $SR_i^{(\text{rel})} \leq 0$; mere præcist er $1 - PSR_i$ den ensidede p-værdi for testen af, om Sharpen på vores forskels-porteføljer er større end 0.

Vi definerer reglen, at ved $\alpha = 0.05$ slår FF_i markedet, hvis

$$PSR_i \geq 1 - \alpha = 0.95,$$

dvs. for det ensidede eksperiment, at $z_i^* \geq z_{1-\alpha} = 1.645$.

De Prado definerer også "Minimum Track Record Length" som det mindste T, så PSR opnår det ønskede konfidensniveau $1 - \alpha$:

$$\text{MinTRL} = \left(1 - \gamma_3 SR_0 + \frac{\gamma_4 - 1}{4} SR_0^2\right)\left(\frac{z_{1-\alpha}}{\hat{SR}^* - SR_0}\right)^2.$$

Med vores $SR_0 = 0$ simplificerer det til

$$\text{MinTRL}_i = \left(\frac{z_{1-\alpha}}{\hat{SR}_i^{(\text{rel})}}\right)^2.$$

Tanken er, at vi for hver FF_i udregner MinTRL_i og sammenligner med vores T. Vi definerer da reglen: "hvis $T < \text{MinTRL}_i$ er der ikke nok data til, at vi kan konkludere noget fornuftigt om, hvorvidt FF_i slår markedet."

Deflated Sharpe Ratio og multiple testing

Nu estimerer vi, hvor mange uafhængige forsøg vi reelt har, ved hjælp af en spektral metode på korrelationsmatricen, som foreslået i DSR-praksisretningslinjerne. Definér $T \times K$-matricen $D = (d_{i,t})$ og lad $R = \text{Corr}(D) \in \mathbb{R}^{K \times K}$. Dekomponér

$$R = Q \Lambda Q^\top, \qquad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_K),$$

hvor $\lambda_j \geq 0$ og $\sum_{j=1}^K \lambda_j = \text{tr}(R) = K$. Intuition: Egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ fra R fortæller os, hvordan variansen er fordelt over ortogonale retninger (principal components) i vores strategi-rum.

Definér uafhængighedskoefficienten

$$K_{\text{eff}} := \frac{\left(\sum_{j=1}^K \lambda_j\right)^2}{\sum_{j=1}^K \lambda_j^2} = \frac{K^2}{\sum_{j=1}^K \lambda_j^2}.$$

Hvis alle strategier er uafhængige, er $R = I$, så $\lambda_j = 1$ for alle $j = 1, \ldots, K$, og dermed $\sum_j \lambda_j^2 = K$, så $K_{\text{eff}} = K^2/K = K$. Hvis i stedet alle strategier er perfekt korrelerede, er $\text{Corr}(d_i, d_j) = 1$ for alle i, j, så $R = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \in \mathbb{R}^{K \times K}$. Betragt $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, så

$$R\mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \mathbf{1} = K\mathbf{1}.$$

Så $\mathbf{1}$ er en egenvektor med egenværdi K. Enhver orthogonal vektor $\mathbf{y}$ til $\mathbf{1}$ opfylder da

$$R\mathbf{y} = \mathbf{1}\left(\mathbf{1}^\top \mathbf{y}\right) = \mathbf{1} \cdot 0 = 0,$$

hvorfor egenspektrummet er $\boldsymbol{\lambda} = (K, 0, \ldots, 0)$. Da er $\sum_j \lambda_j^2 = K^2$, så $K_{\text{eff}} = 1$. Eller intuitivt; er strategiernes afkast bare skaleringer af et underlæggende afkast.

Lad cross-trial forventning -og varians være hhv.

$$\overline{SR} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{SR}_i^{(\text{rel})}, \qquad \hat{V} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K \left(\hat{SR}_i^{(\text{rel})} - \overline{SR}\right)^2.$$

Fra Prado/Baileys False Strategy Theorem (FST) får vi

$$SR_0 = \sqrt{\hat{V}} \left[(1 - \gamma)\, \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{K_{\text{eff}}}\right) + \gamma\, \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{K_{\text{eff}} e}\right)\right],$$

hvor $\gamma \approx 0.5772$ er Euler–Mascheroni-konstanten. Dette mål beskriver, hvad den bedste Sharpe vi ville forvente at se fra ren støj er, givet variansen $\widehat{V}$ og det effektive antal forsøg K_{eff}.

For at "deflate" Sharpe-ratioen sætter vi vores threshold til $SR^* = SR_0$ og bruger nu variansformlen ved dette niveau:

$$\hat{\sigma}^2_{SR_0,i} = \frac{1 - \hat{\gamma}_{3,i} SR_0 + \frac{\hat{\gamma}_{4,i}-1}{4} SR_0^2}{T}.$$

Da er

$$z_i^{(DSR)} = \frac{\hat{SR}_i^{(\text{rel})} - SR_0}{\hat{\sigma}_{SR_0,i}}, \qquad DSR_i = \Phi\left(z_i^{(DSR)}\right),$$

hvor

$$DSR_i \approx \mathbb{P}\big(SR_i^{(\text{rel})} > SR_0 \,\big|\, \hat{SR}_i^{(\text{rel})}, T, \hat{\gamma}_{3,i}, \hat{\gamma}_{4,i}, K_{\text{eff}}\big).$$

Resultater

(Hov kan se at jeg i min kode har brugt $\alpha = 0.01$, må lige streamline til at være den ene eller den anden)

portfolio	sr_rel	n_obs	psr	psr_pass	minTRL (år)	nok data	sr0_dsr	dsr	dsr_pass	verdict
SMALL HiBM	0.109110	1191	0.999917	True	37.882186	True	0.043957	0.993509	True	DSR pass
ME2 BM5	0.106000	1191	0.999873	True	40.137912	True	0.043957	0.987941	False	PSR only
ME3 BM4	0.096355	1191	0.999558	True	48.576237	True	0.043957	0.972418	False	PSR only
ME4 BM4	0.090924	1191	0.999149	True	54.551591	True	0.043957	0.954823	False	PSR only
ME3 BM5	0.089002	1191	0.998935	True	56.934090	True	0.043957	0.949544	False	PSR only
ME2 BM4	0.088669	1191	0.998893	True	57.362645	True	0.043957	0.952596	False	PSR only
ME1 BM4	0.086367	1191	0.998562	True	60.460128	True	0.043957	0.947810	False	PSR only
ME3 BM3	0.084966	1191	0.998317	True	62.471344	True	0.043957	0.927276	False	PSR only
ME3 BM2	0.083270	1191	0.997972	True	65.042263	True	0.043957	0.915365	False	PSR only
ME2 BM3	0.076273	1191	0.995759	True	77.523021	True	0.043957	0.885760	False	PSR only
ME4 BM5	0.070047	1191	0.992184	True	91.916144	True	0.043957	0.827758	False	PSR only
ME4 BM3	0.062143	1191	0.984009	False	116.782347	False	0.043957	0.742383	False	Too short or SR≤ 0
ME2 BM2	0.061427	1191	0.982993	False	119.521356	False	0.043957	0.740540	False	Too short or SR≤ 0
BIG HiBM	0.053302	1191	0.967079	False	158.737816	False	0.043957	0.631957	False	Too short or SR≤ 0
ME1 BM3	0.053070	1191	0.966487	False	160.128122	False	0.043957	0.630747	False	Too short or SR≤ 0
ME4 BM2	0.043569	1191	0.933660	False	237.578364	False	0.043957	0.494565	False	Too short or SR≤ 0
ME4 BM1	0.016399	1191	0.714288	False	1676.938533	False	0.043957	0.166840	False	Too short or SR≤ 0
ME5 BM3	0.007555	1191	0.602855	False	7900.407419	False	0.043957	0.104500	False	Too short or SR≤ 0
ME3 BM1	0.007308	1191	0.599553	False	8445.450735	False	0.043957	0.094530	False	Too short or SR≤ 0
BIG LoBM	0.001018	1191	0.514007	False	435516.506086	False	0.043957	0.069592	False	Too short or SR≤ 0
ME1 BM2	-0.004636	1191	0.436438	False	∞	False	0.043957	0.032289	False	Too short or SR≤ 0
ME5 BM4	-0.007314	1191	0.400367	False	∞	False	0.043957	0.036418	False	Too short or SR≤ 0
ME2 BM1	-0.010396	1191	0.359888	False	∞	False	0.043957	0.025973	False	Too short or SR≤ 0
SMALL LoBM	-0.013399	1191	0.321889	False	∞	False	0.043957	0.015100	False	Too short or SR≤ 0
ME5 BM2	-0.027087	1191	0.174946	False	∞	False	0.043957	0.007200	False	Too short or SR≤ 0