

Семинар 13. Многоугольники. Выпуклые оболочки. Тернарный поиск.

1. Рассмотрим две точки, движущиеся вдоль заданных прямых со скоростями v_1, v_2 . Найдите кратчайшее расстояние между точками.
2. На плоскости даны n точек. Найдите такую выпуклую фигуру F минимального периметра такую, что все n точек лежат внутри F и отстоят хотя бы на r от границы F . Как найти ее периметр?
3. На плоскости в некоторых точках стоят n детей. Они хотят сделать селфи. Для этого им нужно определить человека, с положения которого все остальные видны под минимальным углом. Помогите им определить фотографа за $\mathcal{O}(n \log n)$.
4. Постройте выпуклое расслоение данного множества из n точек за $\mathcal{O}(n^2)$. Выпуклое расслоение строится по слоям: i -м слоем выступают точки, лежащие в вершинах выпуклой оболочки множества точек, из которого выброшены точки меньших слоёв. Иными словами, 1-й слой — это вершины выпуклой оболочки; 2-й слой — это вершины выпуклой оболочки после выкидывания вершин 1-го слоя; и так далее.
5. На плоскости даны n точек в общем положении (никакие три не лежат на одной прямой). Рассматривают все подмножества данного множества точек, при этом размеры подмножеств хотя бы три. Для каждого подмножества построили выпуклую оболочку. Для каждой пары различных точек найдите, для какого числа построенных выпуклых оболочек оно будет ребром.
6. Известно, что если $x_1 \neq x_2$, то существует ровно одна парабола вида $y = x^2 + bx + c$, проходящая через заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . На плоскости даны n точек. Вася проводит параболы описанного вида через каждую пару точек с различными абсциссами. Найдите количество различных нарисованных парабол, внутри которых (между ветвями которых) нет других точек. Асимптотика: $\mathcal{O}(n \log n)$.
7. Расскажите про унимодальные (имеющие один экстремум) на отрезке функции и поиск этого экстремума через тернарный поиск.
8. Докажите, что следующие величины унимодальны:
 - Расстояние от точки до прямой (обобщите на k -мерный случай);
 - Расстояние между отрезками;
 - Расстояние между отрезками в 3D (обобщите на k -мерный случай).
9. Даны два отрезка, которые двигаются с заданными векторами скоростей. Найти кратчайшее расстояние между ними на протяжении времени движения, что ограничено временем t , с заданной точностью ϵ .