

*Семинар 11. НВП. НОП. Рюкзак. Матричное ДП.*

1. В дощечке в один ряд вбиты гвоздики (они отсортированы по координате). Любые два гвоздика можно соединить ниточкой. Требуется соединить некоторые пары гвоздиков ниточками так, чтобы к каждому гвоздику была привязана хотя бы одна ниточка, а суммарная длина всех ниточек была минимальна.
2. Дана матрица  $n \times m$  целых чисел. Нужно пройти из левого верхнего в правый нижний угол, ходить можно только вправо или вниз. Стоимость пути — это произведение всех чисел на пути. Найти минимальное количество нулей, на которое может заканчиваться стоимость пути. Асимптотика  $\mathcal{O}(nm)$ .
3. На плоскости есть множество из  $N$  кругов. Любые два либо вложены, либо не пересекаются. Найдите наибольшую цепочку вложенных кругов за  $\mathcal{O}(N^2)$ .
4. Найдите наибольшую подпоследовательность-палиндром.
5. Найдите расстояние Левенштейна двух строк.
6. Найдите расстояние Левенштейна от строки до какого-либо палиндрома.
7. Решите задачу о рюкзаке в следующих постановках:
  - (a)  $i$ -й предмет можно брать от 0 до  $cnt[i]$  раз
  - (b) каждый предмет можно брать неограниченное число раз
8. Дан тетраэдр и муравей, находящийся в вершине  $A$ . За  $\mathcal{O}(\log n)$  посчитайте число путей длины  $n$  в вершину  $A$  (вершины могут повторяться).
9. Найти за  $\mathcal{O}(k^3 \log n)$  число путей из вершины  $u$  в вершину  $v$ , если граф задан матрицей смежности  $G$  размера  $k \times k$ .
10. Задана двумерная целочисленная сетка с неотрицательными координатами. Из  $(0, 0)$  нужно попасть в  $(k, 0)$ . Ходить из точки  $(x, y)$  можно только в точки  $(x + 1, y)$ ,  $(x + 1, y + 1)$ . Есть  $n$  горизонтальных отрезков с ординатой  $\leq Y$ , выше которых нельзя подниматься. Их концы  $(a_i, b_i)$  по оси  $OX$  таковы, что  $a_1 = 0$ ,  $b_n = k$ ,  $a_{i+1} = b_i$ . Найти количество валидных путей за  $\mathcal{O}(n \cdot Y^3 \log k)$ .