



Trabalho final
AA-804: Introdução ao Controle Clássico

Aluno: 1T(EN) Gabriel Arruda **Evangelista**

2019

1 Tarefas

1.1 Determinação do ponto de equilíbrio

Dado que:

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} h_{ref} \\ v_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\dot{x}(x_{ref}, u_{ref}) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} v \\ \frac{ku^2}{M(h-d)^2} - g \end{bmatrix} = 0$$

Do primeiro termo temos que $v_{ref} = 0$, que já era sabido. Do segundo termo, substituindo $h = h_{ref} = d/2$, temos:

$$ku_{ref}^2 = Mg \left(\frac{d}{2} - d \right)^2 \rightarrow u_{ref} = \pm \frac{d}{2} \sqrt{\frac{Mg}{k}}$$

Substituindo os valores

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } u_{ref} = \pm 0.0495$$

1.2 Linearização em torno do ponto de equilíbrio

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ref}, u_{ref}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{x_{ref}, u_{ref}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2ku_{ref}^2}{M(h_{ref}-d)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{ref}, u_{ref}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_{ref}, u_{ref}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2ku_{ref}}{M(h_{ref}-d)^2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4g}{d} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm \frac{4}{d} \sqrt{\frac{kg}{M}} \end{bmatrix}}$$

$$\text{Ou, substituindo os valores} \rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 392 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 395.9798 \end{bmatrix}}$$

1.3 Verificação de estabilidade

Os autovalores da matriz A são $\lambda = \pm 19.779$ (calculados com o comando `eig(A)` no Matlab). Dado que um dos auto-valores da matriz A está no semi-plano direito, então o sistema é instável.

1.4 Simulação em malha aberta

Para simulação em malha aberta do levitador magnético foi escrita uma s-function para modelar o comportamento da planta no ambiente Simulink. Foi utilizado de base para escrever a s-function o exemplo de Continuous States S-Function do livro *Writing S-Functions* (Version 3, 1998) da MathWorks. O solver utilizado para todas simulações neste trabalho foi o ODE4 (Runge-Kutta) de passo fixo igual a $10^{-4}s$ e tempo de simulação igual a 1s. O modelo do Simulink pode ser observado na figura 1. O resultado do sistema para o estado inicial de equilíbrio é observado na figura 2. Para a pequena perturbação do estado inicial sugerida em relação ao ponto $x(0) = x_{ref} = [d/2 \ 0]^T$, a resposta é observada na figura 3. Ambas simulações foram feitas para o ponto de equilíbrio no qual u_{ref} é positivo, que também considera a matriz B de valores positivos.

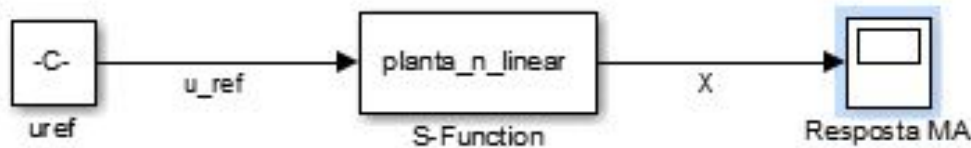


Figura 1: Modelo Simulink implementado para representar o sistema.

Na simulação que parte do ponto de equilíbrio nota-se que o sistema permanece sem variação. Por outro lado, com a pequena perturbação de posição imposta no estado inicial, o sistema tem dinâmica indo para grandes valores. Comportamento característico de sistemas instáveis conforme previsto.

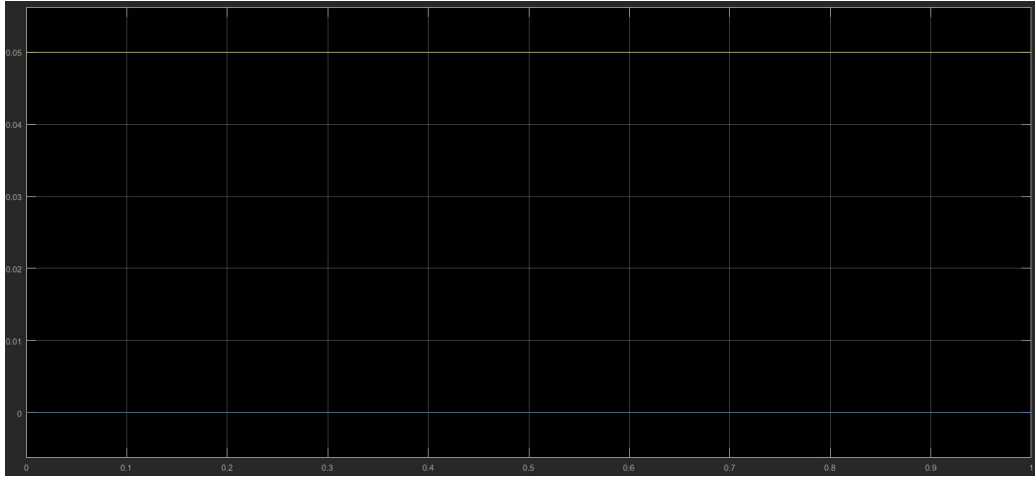


Figura 2: Resposta do sistema não linear para $x(0) = x_{ref}$ e $u = u_{ref}$. h em amarelo e v em azul.

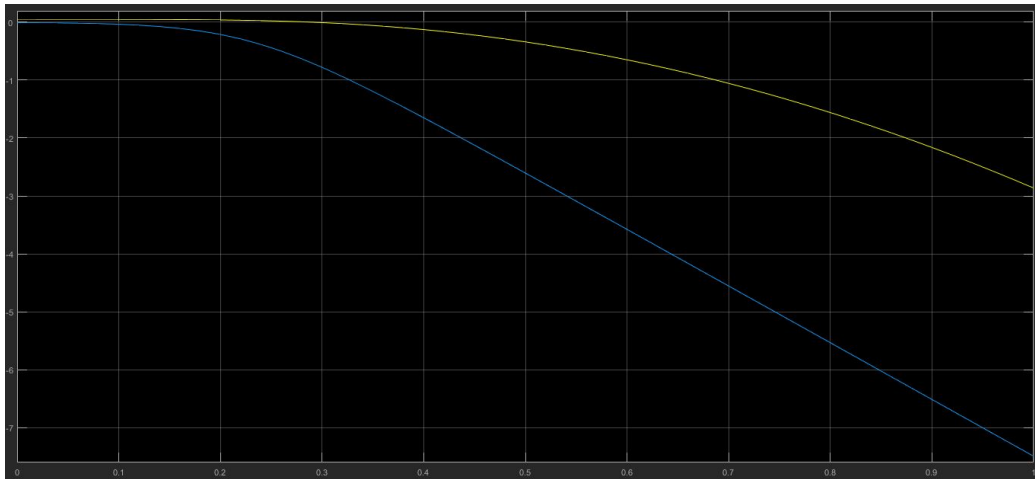


Figura 3: Resposta do sistema não linear para $x(0) = [h_{ref} \ v_{ref} - 0.01]^T$ e $u = u_{ref}$. h em amarelo e v em azul.

1.5 Projeto de controlador

Tanto para o ponto de equilíbrio com entrada positiva quanto negativa obtém-se que determinante da matriz de controlabilidade \mathcal{C} , calculado a partir das matrizes do sistema linearizado, é -156800. Logo, esta matriz tem posto completo e é controlável no entrono do ponto de linearização. Chegou-se a isso com uso do comando $\det(ctrb(A,B))$ no Matlab. O comando $crtb(A,B)$ calcula a matriz $\mathcal{C} = [BA * B]$. Ainda no ambiente Matlab,

com uso do comando $K = \text{place}(A, B, [-10 \ -11])$ obtém-se os ganhos:

$$K = \pm [1.2677 \ 0.0530]$$

1.6 Simulação em malha fechada com medida de estado

Para esta tarefa foi usada a mesma planta, implementada em uma s-function, anteriormente apresentada no item 1.4. Adicionada a planta há uma realimentação com os ganhos calculados no item anterior conforme se observa no esquema da figura 4.

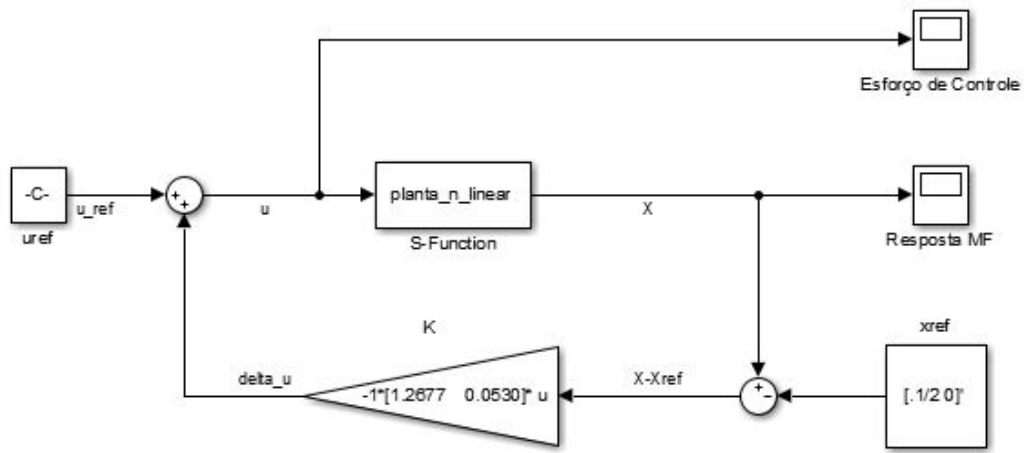


Figura 4: Modelo implementado em Simulink com realimentação.

Com esse esquema a planta foi novamente simulada para a pequena perturbação de estado inicial sugerida no item 2.4. O sistema rapidamente converge para seu ponto de referência como pode ser visto na figura 5. O esforço de controle $u(t)$ pode ser observado na figura 6.

Para a solução do sistema linearizado com B de valor negativo, a entrada de referência e os valores dos ganhos K são negativos, devido a isto nota-se que o esforço de controle é o simétrico do anterior, como se observa na figura 7. Porém, a característica "par" do sistema nas duas regiões de linearização faz com que o sistema evolua da mesma forma apresentando a mesma resposta. Dado isso, a imagem com a resposta do sistema nesse caso apresenta uma figura idêntica a 4, portanto esta foi omitida.

Visando testar a robustez do controle por realimentação mudou-se ao estado inicial no código da s-function. Notou-se que para $|h| < 0.10$ e velocidades relativamente baixas o sistema era capaz de retornar a posição

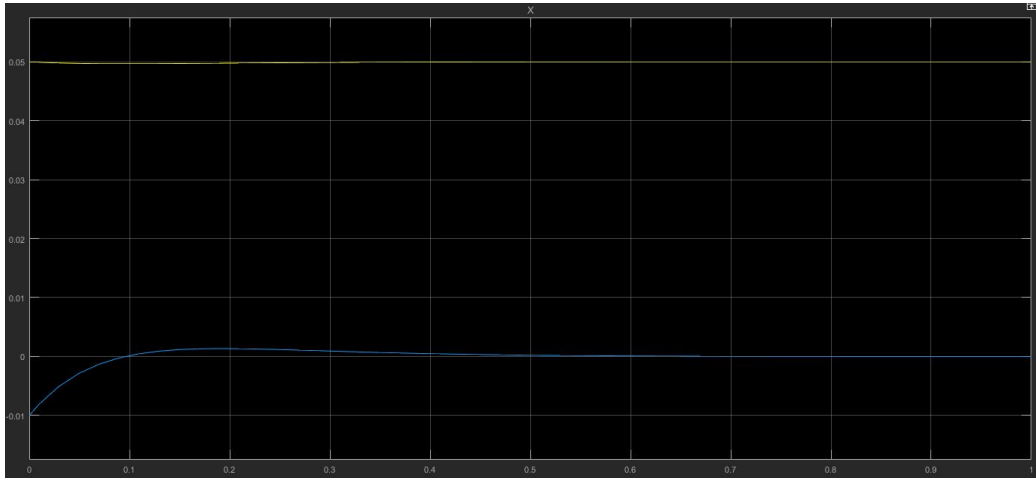


Figura 5: Resposta do sistema não linear em MF para a $x(0) = [h_{ref} \ v_{ref} - 0.01]^T$ e $u = u_{ref} + \delta u = u_{ref} - K\delta X$. h em amarelo e v em azul.

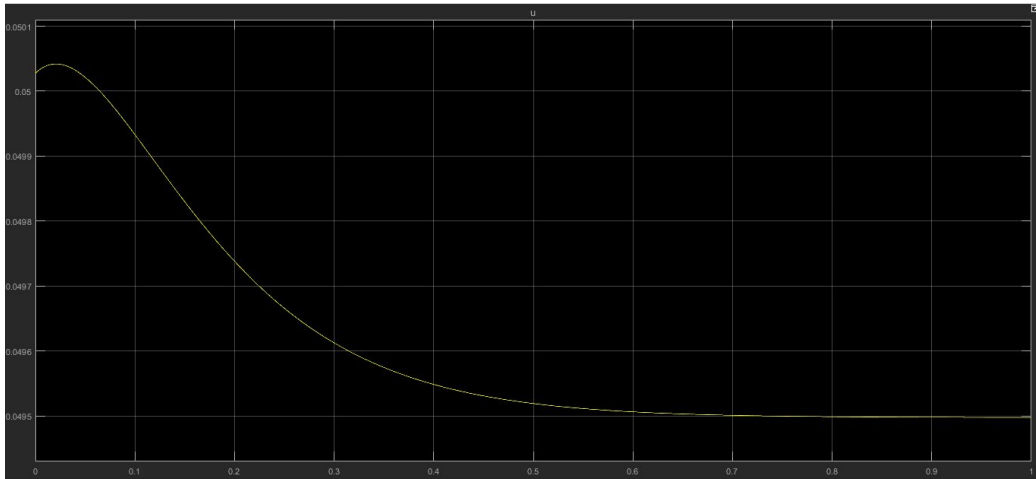


Figura 6: Resposta do sistema não linear em MF para a $x(0) = [h_{ref} \ v_{ref} - 0.01]^T$ e $u = u_{ref} + \delta u = u_{ref} - K\delta X$. h em amarelo e v em azul.

de equilíbrio. Associa-se isso a singularidade apresentada pela planta neste ponto. Um exemplo em que o sistema é capaz de retornar ao ponto de equilíbrio é visto na figura 8 em que o estado inicial é $x(0) = [0.093 \ 0.025]^T$.

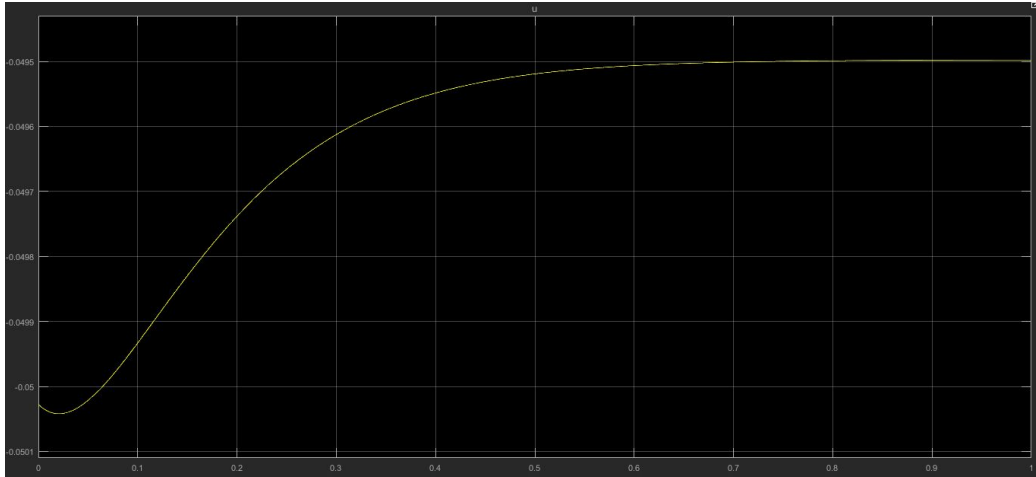


Figura 7: Resposta do sistema não linear em MF para a $x(0) = [h_{ref} \ v_{ref} - 0.01]^T$ e $u = u_{ref} + \delta u = u_{ref} - K\delta X$, no caso em que $u_{ref} < 0$ e $b_{21} < 0$. h em amarelo e v em azul.

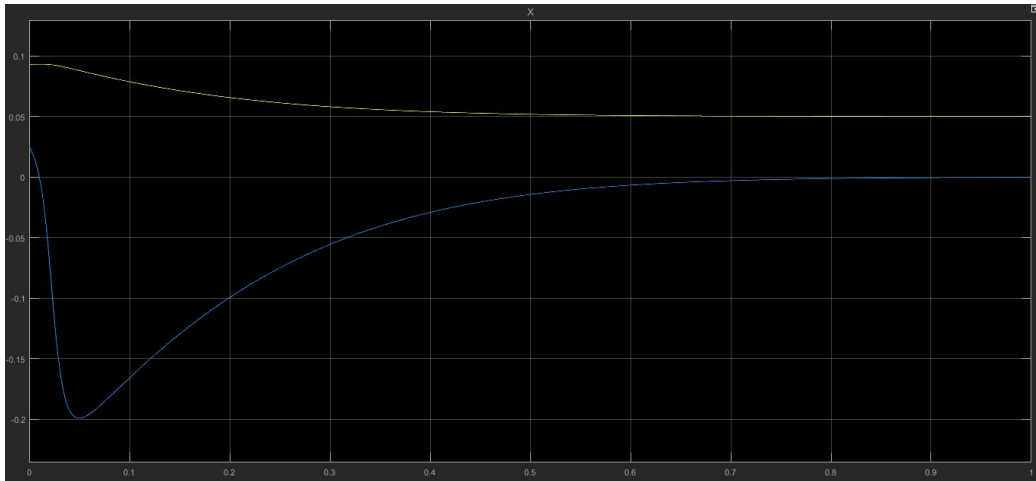


Figura 8: Resposta do sistema não linear em MF para a $x(0) = [0.093 \ 0.025]^T$ e $u = u_{ref} + \delta u = u_{ref} - K\delta X$. h em amarelo e v em azul.

1.7 Projeto de observador de estados

O determinante da matriz de observabilidade \mathcal{O} , calculado a partir das matrizes de estado do sistema linearizado, é 1. Logo, esta matriz tem posto completo e é possível projetar um observador para o entorno do ponto de linearização. Segundo a documentação do Matlab é possível alocar os polos do observador nas posições desejadas com vetor de ganhos L obtido com o comando $L = \text{place}(A', C', [-100 \ -110])'$. Os ganhos assim obtidos são aproximadamente:

$$L = \begin{bmatrix} 210 \\ 11392 \end{bmatrix}$$

É necessário alocar os polos do estimador muito mais a esquerda no plano complexo para que a dinâmica do erro, decaindo de forma exponencial no domínio do tempo, seja muito mais rápida do que a do sistema. Isso implica a célere convergência de \hat{x} para x reduzindo a influência do observador na realimentação do sistema.

1.8 Simulação em malha fechada com observador de estados

Para simulação com esta configuração, o estimador foi implementado em um bloco de sistema dinâmico conforme o diagrama de blocos apresentado na figura 9. A implementação do observador é feita a partir do sistema linearizado.

Dada a equação do enunciado:

$$\dot{\delta x} = (A - LC)\delta x + B\delta u + L(C\delta x)$$

E, como a multiplicação de $X - X_{ref}$ é feita externamente ao bloco de sistema dinâmico do observador, a entrada desse bloco vinda do mux é $u_{\mathcal{O}} = [\delta u \ C\delta x]^T$. Logo, obtém-se as seguintes matrizes no espaço de estados para o observador:

$$A_{\mathcal{O}} = A - LC = \begin{bmatrix} -210 & 1 \\ -11000 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B_{\mathcal{O}} = [B, L] = \begin{bmatrix} 0 & 210 \\ 396 & 11392 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, foi simulado o sistema para $x(0) = x_{ref}$, $u = u_{ref}$ e $\hat{x}(0) = [0 \ -0.01]^T$. Conforme o esperado, o erro de estimação, exposto na figura 10, vai a zero antes de 0.1s. O δx é apresentado na figura 11.

A dinâmica dos estados, e dos estados estimados ($x_{ref} + \hat{\delta x}$) e o esforço de controle podem ser observados nas figuras 12, 13 e 14, respectivamente.

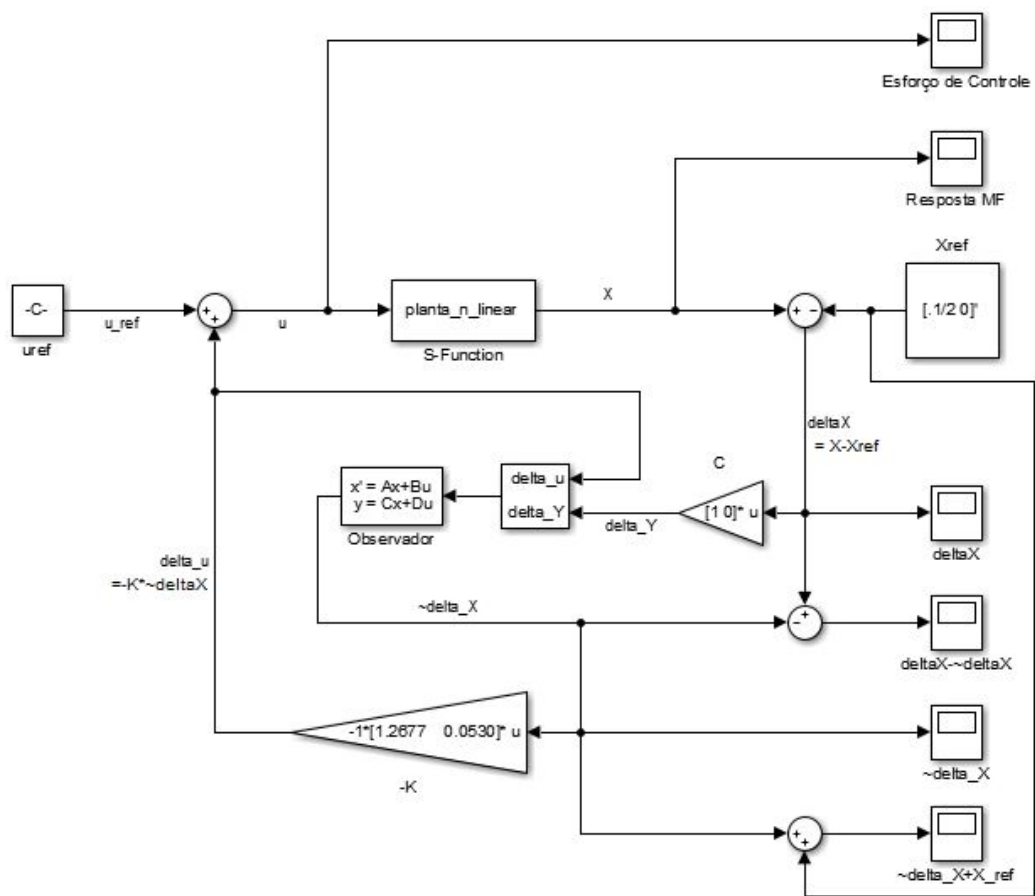


Figura 9: Esquema do modelo implementado no Simulink para sistema com observador e realimentação de estados.

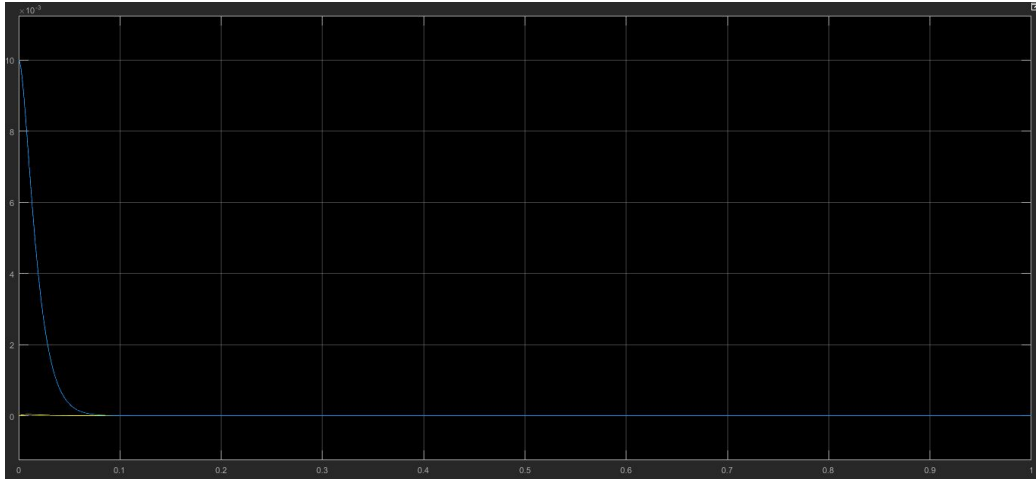


Figura 10: Erros de estimação $e = \delta x - \hat{\delta x}$. h em amarelo e v em azul.

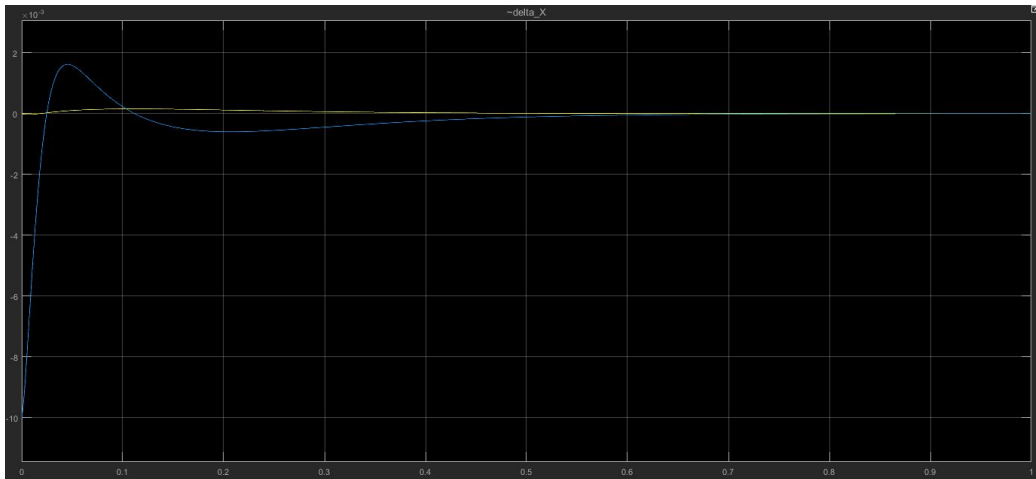


Figura 11: Desvio estimado em relação a x_{ref} , ou seja $\hat{\delta x}$. h em amarelo e v em azul.

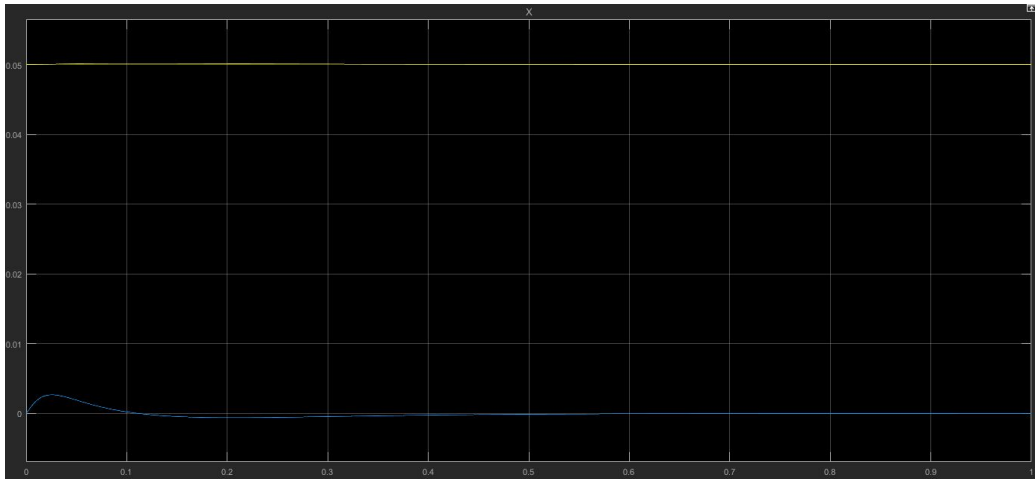


Figura 12: Resposta da planta, $x(t)$. h em amarelo e v em azul.

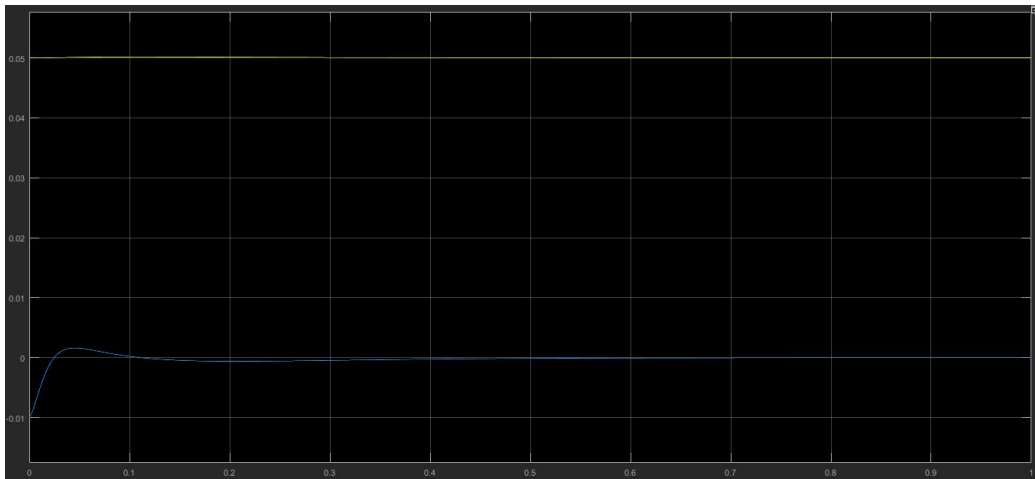


Figura 13: Resposta estimada, ou seja $x_{ref} + \hat{\delta}x$. h em amarelo e v em azul.

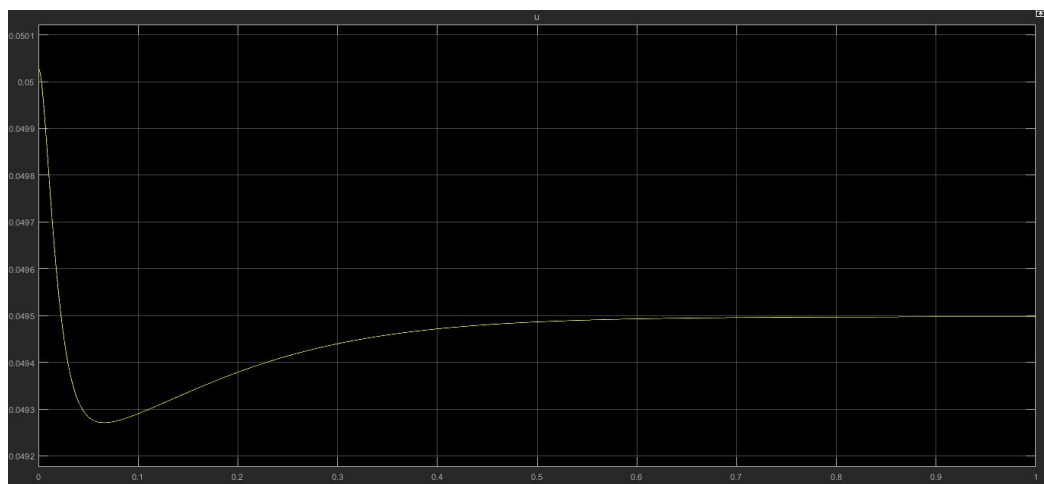


Figura 14: Esforço de controle $u(t)$ na entrada da planta.

”Validado”o modelo, novamente o sistema é simulado. Agora o estado inicial do observador é $\hat{\delta x}(0) = [0 \ 0]^T$, o estado inicial da planta é $x(0) = [h_{ref} \ v_{ref} - 0.01]$. O erro de estimação, exposto na figura 15, novamente vai a zero antes de 0.1s. O $\hat{\delta x}$ é apresentado na figura 16.



Figura 15: Erros de estimação $e = \delta x - \hat{\delta x}$. h em amarelo e v em azul.

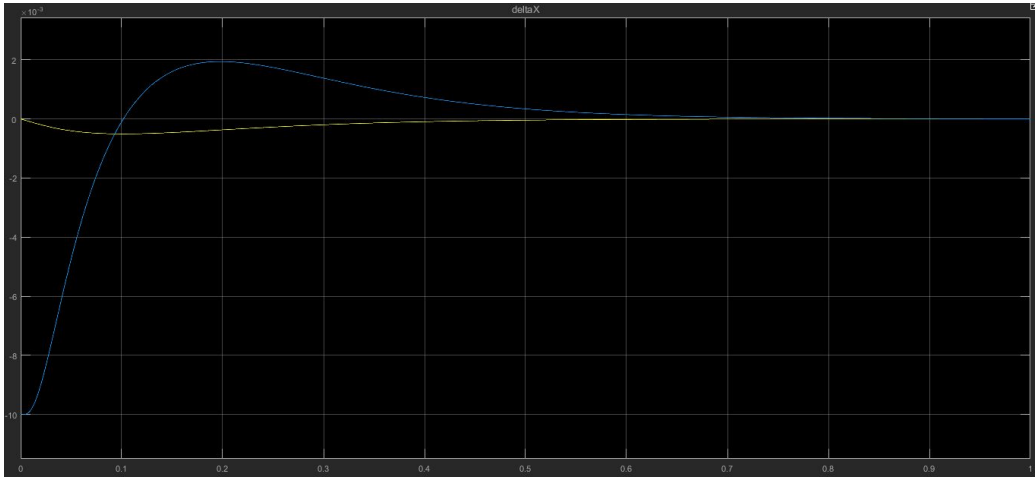


Figura 16: Desvio estimado em relação a x_{ref} , ou seja $\hat{\delta x}$. h em amarelo e v em azul.

Para esta simulação, a dinâmica dos estados, e dos estados estimados $\hat{\delta x}$ e o esforço de controle podem ser observados nas figuras 17, 18 e 19 , respectivamente.

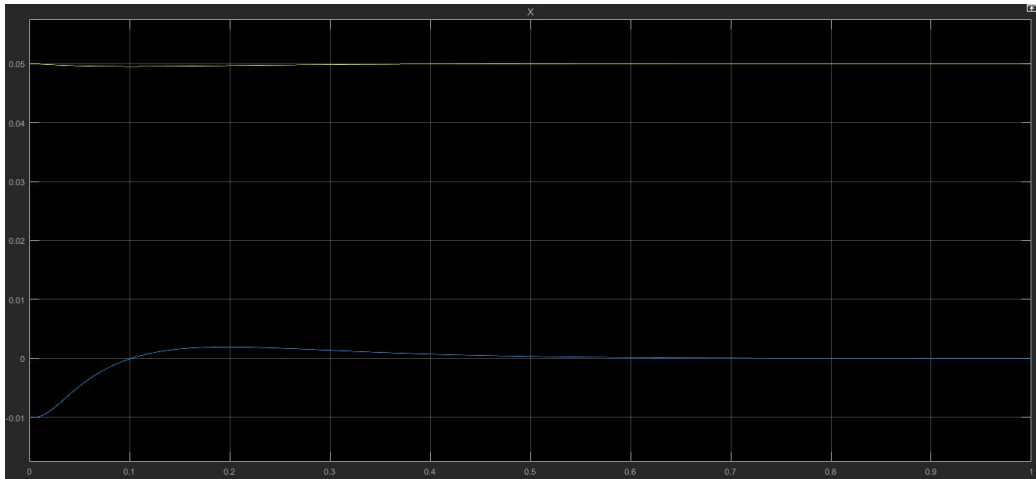


Figura 17: Resposta da planta, $x(t)$. h em amarelo e v em azul.

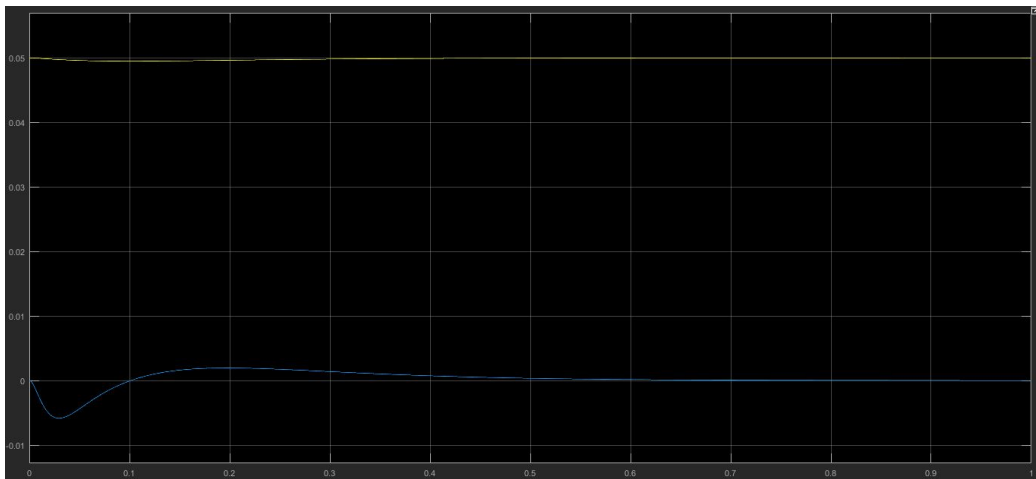


Figura 18: Resposta estimada, ou seja $x_{ref} + \hat{\delta}x$. h em amarelo e v em azul.

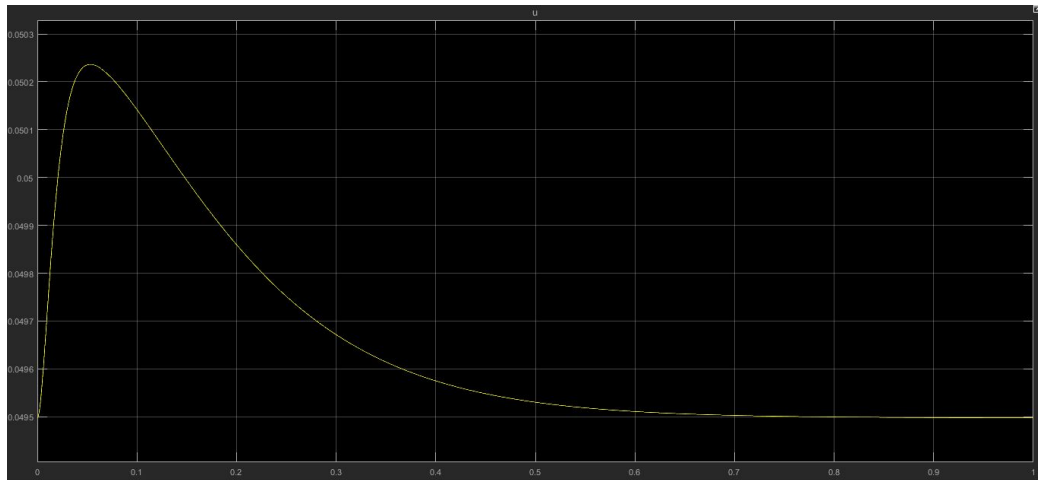


Figura 19: Esforço de controle $u(t)$ na entrada da planta.

Apresentados esses resultados, nota-se que o sistema converge para os valores esperados dentro dos tempos previstos no enunciado.