МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико—математический факультет

Конспект лекций по теории чисел

4-й курс, первый поток, 7-й семестр, осень 2017 г.

Лектор: Олег Николаевич Герман

Москва, 2018 г.

Предисловие

Внимание! Это не курс лекций и не методичка, а всего лишь конспект, набранный в вёрстке LaTeX и не претендующий на окончательную истину. В данном документе не исключены опечатки. Использовать на свой страх и риск. Авторы не несут ответственности за успешность подготовки по данному материалу, а также за его использование в качестве "шпоры".

Данный конспект по теории чисел состоит из 14-ти лекций, прочитанных Олегом Николаевичем Германом — доцентом кафедры теории чисел. Курс был прочитан на 7-ом семестре четвёртого курса мехмата МГУ осенью 2017 года. Он состоит из трёх больших разделов:

1. Асимптотический закон распределения простых чисел:
$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \sim \frac{x}{\ln x}.$$
2. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях: Если $(l, m) = 1$, то существует бесконечное количество таких простых p, что $p \equiv l \mod m$.
3. Теоремы о том, что e и π — иррациональные и трансцендентные числа.

Конспект был подготовлен и заTEXан студентами Артемием Соколовым, группа 405 (нечётные лекции) и Артемием Геворковым, группа 402 (чётные лекции). За основу был взят конспект Юлии Зайцевой. Также в перспективе планируется добавить решения всех упражнений из курса.

Данная версия документа была скомпилирована 24 февраля 2018 г. Последняя версия .PDF, а также все исходные файлы всегда будут доступны в репозитории по (кликабельной) ссылке:

https://github.com/arvego/numbertheory-sem7

Если найдена ошибка или опечатка — пожалуйста, сообщите нам.

Спасибо Юлии Зайцевой, Виталию Лобачевскому, Всеволоду Гусеву, Кириллу Сосову, Сергею Джунусову, Айку Эминяну, Александру Думаревскову и команде Алгебрача за поиск ошибок и помощь в оформлении данного материала.

Содержание

1 Асимптотический закон распределения простых чисел

Замечание. *Впредь, если мы будем писать сумму вида* $\sum\limits_{...p...} \ldots$, *то мы будем иметь в виду, что* p *— простое число.*

1.1 Игры с $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$

Изучение распределения простых чисел непосредственно связано с изучением следующих функций:

- $\pi(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} 1$ — количество простых чисел, не превосходящих x;
- $\theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \ln p = \ln \left(\prod\limits_{p \leqslant x} p \right)$ — θ-функция Чебышева;
- $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha \leqslant x} \ln(p) = \sum\limits_{p \leqslant x} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right] \ln(p) = \ln \left(\text{НОК}(1, 2, \ldots, [x]) \right)$ — ψ-функция Чебышева.

Как эти функции связаны? Оказывается, следующим соотношением:

Лемма 1.1.
$$\overline{\lim} \frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} = \overline{\lim} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)}, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\theta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right] \ln(p) = \ln(x) \sum_{p \leqslant x} 1 = \pi(x) \ln(x)$$

$$\overline{\lim} \frac{\theta(x)}{x} \leqslant \overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \overline{\lim} \frac{\pi(x)}{x / \ln x}$$

Будем рассматривать простые числа на отрезке $[x^\alpha, x]$ для некоторого фиксированного $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\theta(x) = \left(\sum_{p \leqslant x} \ln(p) \right) \geqslant \left(\sum_{x^\alpha < p \leqslant x} \ln(p) \right) > \left(\ln(x^\alpha) \sum_{x^\alpha < p \leqslant x} 1 \right) = \alpha \ln(x) \left(\pi(x) - \pi(x^\alpha) \right) \geqslant \alpha \ln(x) \left(\pi(x) - x^\alpha \right).$$

$$\frac{\theta(x)}{x} > \alpha \left(\frac{\pi(x)}{x / \ln x} - \frac{\ln(x)}{x^{1-\alpha}} \right) \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ получаем, что $\overline{\lim} \frac{\theta(x)}{x} \geqslant \overline{\lim} \alpha \frac{\pi(x)}{x / \ln x}$.

Значит $\overline{\lim} \frac{\theta(x)}{x} \geqslant \overline{\lim} \frac{\pi(x)}{x / \ln x}$. ■

1.2 Оценки Чебышева

Теорема 1.1 (Оценки Чебышева). *Существуют $a, b > 0$ такие, что*

$$a\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant b\frac{x}{\ln(x)}.$$

Перед доказательством этой теоремы сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.2.

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

Доказательство. Будем доказывать методом математической индукции по n.
База. При $n = 2, 3$ утверждение верно.
Переход. Если $n = 2k$ — чётно, то видно, что $\prod\limits_{p \leqslant 2k} p = \prod\limits_{p \leqslant 2k-1} p \leqslant 4^{2k-1} \leqslant 4^{2k}$.

Если $n = 2k-1$ — нечётное, то по предложению индукции $\prod\limits_{p \leqslant n} p = \left(\prod\limits_{p \leqslant k} p\right)\left(\prod\limits_{k < p \leqslant 2k-1} p\right) \leqslant 4^k 4^{k-1} = 4^n$. Заметим, что $\prod\limits_{k < p \leqslant 2k-1} p < C_{2k-1}^k = \dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}$, т.к. каждое такое простое число входит в числитель, но не входит в знаменатель. Поэтому $\prod\limits_{k < p \leqslant 2k-1} p \leqslant C_{2k-1}^k \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 2^{2m-1} = 4^{m-1}$. ■

Следствие 1.1. $\theta(n) < n\ln(4)$.

Следствие 1.2. $\theta(x) < x \cdot 3\ln(2)$.

Доказательство. Пусть $n - 1 < x \leqslant n$. Тогда $\theta(x) \leqslant \theta(n) < n\ln(4) < (x+1)\ln 4 \leqslant x \cdot 3\ln 2$. ■

Лемма 1.3. $K := \text{НОК}(1, 2, \ldots, 2n+1) > 4^n$

Доказательство. Рассмотрим $I = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$. Поскольку на отрезке $[0,1]$ величина $x(1-x)$ не превосходит $\dfrac{1}{4}$, то $I < \dfrac{1}{4^n}$.
Заметим, что $x^n(1-x)^n = a_n x^n + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда $I = \dfrac{a_n}{n+1} + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{2n+1}$, и $K \cdot I \in \mathbb{Z}$. Причём K и I оба больше нуля, т.е. $K \cdot I \geqslant 1$. Откуда следует, что $K \geqslant \dfrac{1}{I} > 4^n$. ■

Следствие 1.3. $\psi(2n+1) > n\ln(4)$.

Следствие 1.4. $\psi(x) > x\frac{\ln(2)}{2}$ *при* $x \geqslant 6$.

Доказательство. Пусть $2n+1 \leqslant x < 2n+3$. Тогда $\psi(x) \geqslant \psi(2n+1) > n\ln(4) > \dfrac{x-3}{2}\ln 4 = (x-3)\ln(2) \geqslant x\dfrac{\ln(2)}{2}$. ■

Доказательство. (Теоремы 1.1.)

Применим следствия 1.2 и 1.4. Тогда при $x \geqslant 6$ выполнено $\dfrac{\theta(x)}{x} < 3\ln 2, \dfrac{\psi(x)}{x} > \dfrac{\ln 2}{2}$.

Учитывая Лемму 1.1 получаем, что $\overline{\lim}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant 3\ln 2$ и $\underline{\lim}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} \geqslant \dfrac{\ln 2}{2}$. ∎

Теорема 1.2 (Асимптотический Закон Распределения Простых Чисел)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

1.3 Дзета-функция Римана

Положим при $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Будем писать $s = \sigma + it$. Мы докажем, что $\zeta(s)$ — аналитическая функция на $\mathrm{Re}(s) > 1$, и аналитически продолжим её на $\mathrm{Re}(s) > 0$ (можно и на всю $\mathbb{C}$, будет единственный полюс в точке 1).

Теорема 1.3 (Гипотеза Римана)**.** *Нетривиальные нули ζ-функции лежат на прямой* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Отступление:

Предположим, что $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые. Тогда $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}}$. Следовательно,

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_r)} \frac{1}{p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} \text{ — сходится.}$$

Но слева — сумма гармонического ряда. Противоречие.

1.4 Воспоминания из былых времен

Теорема 1.4 (Вейерштрасса)**.** *Пусть в области Ω функции $f_n(s)$ аналитичны и ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ сходится равномерно (по Ω). Тогда он сходится к функции $f(x)$, аналитической в Ω, причём $f'(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s)$ — также сходится равномерно.*

Признак (Вейерштрасса)**.** *Если в Ω справедливо $|f_n(s)| < c_n$, и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ равномерно сходится в Ω.*

Определение 1.1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ называется *арифметической* функцией. Если $f \not\equiv 0$ и $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых a, b таких, что $(a, b) = 1$, то функция называется *мультипликативной*.

А если равенство $f(ab) = f(a)f(b)$ выполнено для абсолютно всех $a, b \in \mathbb{N}$, то функция называется *вполне мультипликативной.*
Сверткой Дирихле двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ является функция

$$(f * g)(n) = (g * f)(n) = \sum_{k|n} f(k) g\left(\frac{n}{k}\right)$$

Формула обращения Мебиуса гласит, что если $F = f * \mathbf{1}$, то $f = F * \mu$, где $\mu(n)$ — функция Мебиуса[1]

Определение 1.2. Рядом Дирихле называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где $a_n \in \mathbb{Z}$.

Несложно видеть, что если $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, а $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$, то $F(s)G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$.

Заметим, что $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где $a_1 = 1$, а остальные $a_i = 0, (i \neq 1)$. Хотим найти "обратную"функцию к $\zeta(s)$.
Известно, что $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Теорема 1.5. *Пусть* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Тогда:*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *сходится абсолютно и задаёт аналитическую функцию* $\zeta(s)$;
2) $\zeta'(s) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$;
3) $\zeta(s) \neq 0$ *и* $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, *где* $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & n = p^k,\ k \geqslant 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ — *функция Мангольдта.*

Доказательство.
Пункт 1): Обозначим $s = \sigma + it$. Тогда $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}$, $\sigma > 1$ — таким образом, абсолютная сходимость есть. При этом в области $\Omega_\delta = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1 + \delta\}$, $\delta > 0$, сходимость будет равномерной, ибо $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ сходится. Но тогда по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ равномерно сходится в Ω_δ. По теореме 1.4 сумма ряда является аналитичной в Ω_δ (каждая $\frac{1}{n^s}$ является целой функцией s). И это справедливо для всех δ.
Пункт 2): По теореме 1.4 в каждой Ω_δ : $\left(\frac{1}{n^s}\right)' = \left(e^{-s\ln n}\right)'$. Далее очевидно.
Пункт 3): Заметим, что в области Ω_δ :

$$\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant \frac{\ln n}{n^\sigma} < \frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}},$$

[1] $\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1, \\ 0, \exists p^2 | n, \\ (-1)^r, n = p_1 \ldots, p_r. \end{cases}$

а мы знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ сходится в Ω_δ равномерно. По теореме 1.4 сходится к аналитической функции, причём абсолютно. Перемножим два абсолютно сходящихся ряда:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Lambda(l)}{l^s}\right)=\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{\Lambda(l)}{(kl)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{l|n}\Lambda(l)\ (*)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^s}=-\zeta'(s).$$

($(*)$ пусть $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$, тогда $\sum\limits_{l|n}\Lambda(l)=\sum\limits_{j=1}^{r}\left(\sum\limits_{\beta_j=1}^{\alpha_j}\Lambda\left(p_j^{\beta_j}\right)\right)=\sum\limits_{j=1}^{r}\ln\left(p_j^{\alpha_j}\right)=\ln(n)$).

Итак, при $\mathrm{Re}(s)>1$ имеем

$$-\zeta'(s)=\zeta(s)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Из аналитичности всех функций: пусть s_0 — ноль $\zeta(s)$ кратности $k>0$, тогда s_0 — ноль $\zeta'(s)$ кратности $k-1$. Так как мы перемножаем две функции, то их кратности должны складываться. Значит, $k-1=k+$нечто неотрицательное. Получаем противоречие. Почему кратность обязательно конечна? Предположим противное, пусть она бесконечна и тогда $\zeta(s)|_{\mathrm{Re}(s)>1}\equiv 0$ — противоречие. ∎

Лемма 1.4. *Пусть f — вполне мультипликативная функция, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ абсолютно сходится и $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$. Тогда*

$$S=\prod_p(1-f(p))^{-1}.$$

Доказательство. Положим $S(x)=\prod\limits_{p\leqslant x}(1-f(p))^{-1}$, покажем, что $S(x)\xrightarrow{x\to\infty}S$. Заметим, что из мультипликативности f следует $f(1)=1$ и что $|f(n)|<1$ при $n\geqslant 2$ (т.к. иначе $f(n^k)=f(n)^k\not\to 0$, а члены ряда обязаны $\to 0$ из его абсолютной сходимости). Далее, при простом p : $\frac{1}{1-f(p)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(p)^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(p^k)$. Следовательно, $S(x)=\prod\limits_{p\leqslant x}(1-f(p))^{-1}=\prod\limits_{p\leqslant x}\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(p^k)=\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}:\\ \forall p|n\ p\leqslant x}}f(n)$ (такие n зовутся "x-гладкими"). Стало быть, $|S-S(x)|=\left|\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}:\\ \exists p|n\ p>x}}f(n)\right|\leqslant\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}:\\ \exists p|n\ p>x}}|f(n)|\leqslant\sum\limits_{n>x}|f(n)|\xrightarrow{x\to\infty}0$ (т.к. последний ряд — хвост сходящегося). ∎

Теорема 1.6 (формула Эйлера)**.** *Пусть* $\mathrm{Re}(s)>1$. *Тогда*

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Возьмём (и положим) $f(n)=\frac{1}{n^s}$ и применим лемму 1.4. Тогда

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

∎

Лемма 1.5. $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ *(ну, т.е. $\psi(n) - \psi(n-1) = \Lambda(n)$).*

Доказательство. Следует из определений $\psi(x)$ и $\Lambda(n)$. ∎

1.5 Преобразование Абеля

Лемма 1.6. *(Преобразование Абеля) Пусть $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел. Пусть $g(x) \in C^1([1;\infty), \mathbb{C}), A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n$. Тогда для любого $N \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\sum_{n \leqslant N} a_n g(n) = A(N)g(N) - \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

Доказательство.

$$A(N)g(N) - \sum_{n \leqslant N} a_n g(n) = \sum_{n \leqslant N} a_n (g(N) - g(n)) = \sum_{n \leqslant N} a_n \int_n^N g'(x)dx.$$

Положим $\varphi_n(x) = a_n$, если $x \geqslant n$ или 0, если $x < n$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N} a_n \int_n^N g'(x)dx = \sum_{n \leqslant N} \int_1^N \varphi_n(x)g'(x)dx = \int_1^N \left(\sum_{n \leqslant N} \varphi_n(x) \right) g'(x)dx = \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

∎

Теорема 1.7.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}}dx,$$

причем интеграл в правой части сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 0$ *и задает аналитическую функцию.*

Доказательство. При $\mathrm{Re}(s) > 1$ выполнено $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Используя преобразование Абеля с параметрами $a_n = 1$ и $g(x) = \frac{1}{x^s}$ получим, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = N\frac{1}{N^s} + s\int_1^N \frac{[x]}{x^{1+s}} = \frac{1}{N^{s-1}} + s\left(\int_1^N \frac{1}{x^s} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}} \right) =$$

$$= \frac{1}{N^{s-1}} + s\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}} \right) = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}}.$$

Поскольку $s = \sigma + it$, где $\sigma > 1$, и $|N^{s-1}| = N^{\sigma-1}$, то при $N \to \infty$ третье слагаемое стремится к 0, а последнее стремится к несобственному интегралу в условии теоремы.
Итак, при $Re(s) > 1$ выполнено равенство

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}}dx.$$

Как только мы докажем, что этот интеграл задает аналитическую функцию в $\mathrm{Re}(s) > 0$, мы получим две функции, которые аналитичны в $\mathrm{Re}(s) > 0$ и совпадают в $\mathrm{Re}(s) > 1$, откуда будет следовать, что они совпадают везде[2].
Положим

$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}}dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}dx - n\int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}}dx.$$

Первый интеграл аналитичен[3] в $\mathbb{C}$, второй отличается от первого просто сдвигом на 1.
Таким образом, $f_n(s)$ аналитична в $\mathbb{C}$. При $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \delta > 0$ получим, что

$$|f_n(s)| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} \leqslant \frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ сходится равномерно, поэтому задает аналитическую функцию. ■

Следствие 1.5. *У функции $\zeta(s)$ полюс первого порядка с вычетом 1, поскольку $\underset{1}{Res}\frac{1}{s-1} = 1$.*

Лемма 1.7. *При $\mathrm{Re}(s) > 1$ выполнено*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx.$$

Доказательство. При $\mathrm{Re}(s) > 1$ имеем

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Используя преобразование Абеля с параметрами $a_n = \Lambda(n), g(x) = \frac{1}{x^s}$ и тот факт, что $\sum\limits_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \psi(x)$ получим, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s\int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx.$$

Поскольку мы знаем, что у отношения $\frac{\psi(x)}{x}$ верхний и нижний пределы ограничены, то при $\mathrm{Re}(s) > 1$ $\frac{\psi(N)}{N^{1+s}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Таким образом, при $N \to \infty$ пределы выражений $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ и $s\int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx$ существуют и равны, откуда следует утверждение леммы. ■

[2]Теорема единственности
[3]При $s \neq 1$ это просто разность степеней, а почему есть аналитичность в точке $s = 1$? Упражнение!

Лемма 1.8. *Пусть* $0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leqslant 1.$$

Доказательство. Положим $M = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})|$. Тогда

$$\ln(M) = 3\ln(|1-r|) + 4\ln(|1-re^{i\varphi}|) + \ln(|1-re^{2i\varphi}|) = \mathrm{Re}\left(3\ln(1-r) + 4\ln(1-re^{i\varphi}) + \ln(1-re^{2i\varphi})\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\mathrm{Re}\left(3 + 4e^{in\varphi} + e^{2in\varphi}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\cos 2n\varphi + 4\cos n\varphi + 3\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}2\left(\cos n\varphi + 1\right)^2 \leqslant 0.$$

Следовательно, $M \leqslant 1$. ■

Лемма 1.9. *При* $s = \sigma + it, \sigma > 1$ *выполнено неравенство*

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geqslant 1.$$

Доказательство. Положим $r = \dfrac{1}{p^\sigma}, e^{i\varphi} = p^{-it}$. Применим лемму 1.8 и формулу Эйлера 1.6. ■

Теорема 1.8. $\zeta(1+it) \neq 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\zeta\left(1+it_0\right) = 0$. Тогда при $\sigma \to 1+:$
$\zeta^3(\sigma)\zeta^4\left(\sigma+it_0\right)\zeta\left(\sigma+2it_0\right) = O\left(\dfrac{1}{(\sigma-1)^3}(\sigma-1)^4\cdot 1\right) = O_{\sigma\to 1}(\sigma-1)$. (Т.к. $\zeta(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to 1+$, точнее, $\zeta(\sigma) = O\left(\dfrac{1}{\sigma-1}\right)$ ибо полюс порядка 1; $\zeta\left(1+it_0\right) = 0 \xRightarrow{\text{из мультипл.}} \zeta\left(\sigma+it_0\right) = O(\sigma-1)$; $\zeta\left(1+2it_0\right)$ — какая-то константа, полюса там нет из аналитичности функции в $\mathrm{Re}(s) > 0$ везде, кроме 1). Итак, получили $\zeta^3(\sigma)\zeta^4\left(\sigma+it_0\right)\zeta\left(\sigma+2it_0\right) = O_{\sigma\to 1}(\sigma-1)$, но по Лемме 1.9 её модуль $\geqslant 1$ при любом $\sigma > 1$. Противоречие.
(Из Леммы 1.9 также можно ещё одним способом получить, что в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 1$ у ζ-функции нет корней: если бы существовал корень $s = \sigma + it$, то $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(s)\zeta(\sigma+2it)| \geqslant 1$, противоречие). ■

Лемма 1.10. $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{1}{s-1}$ *аналитична при* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.

Доказательство. Знаем, что при $\mathrm{Re}(s) > 1$ оба слагаемых — аналитические функции. Мы также доказали, что $\zeta(s) = \dfrac{f(s)}{s-1}$, где $f(s)$ точно аналитична при $\mathrm{Re}(s) > 0$ и $f(s) \neq 0$ при $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. Отсюда следует, что $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \dfrac{f'(s)}{f(s)} - \dfrac{1}{s-1}$, где f аналитична при $\mathrm{Re}(s) > 0$, а значит, что f' тоже. В $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ у знаменателя нет нулей. ■

Положим $F(s) := -\dfrac{1}{s}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \dfrac{1}{s-1}$.

Лемма 1.11. *Справедливы следующие утверждения*

1) $F(s)$ *аналитична в* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.

2) $F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$ *при* $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Доказательство. По порядку.

1) $F(s) = -\frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{s}{s-1}\right) = -\frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} + 1\right)$ — $-\frac{1}{s}$ аналитична, а второй множитель аналитичен по Лемме 1.10.
2) При $\mathrm{Re}(s) > 1$ $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)dx}{x^{1+s}}$, $\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$. Оба интеграла сходятся абсолютно, поэтому можно их складывать:

$$F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)dx}{x^{1+s}} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx.$$

■

Теорема 1.9. *В интегральном представлении* $F(s)$ *можно перейти к пределу в* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *т.е.*

$$F(1) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx.$$

Лемма 1.12. *Если интеграл* $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$ *сходится (это будет следовать из Теоремы 1.9), то* $\psi(x) \sim x$.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$:

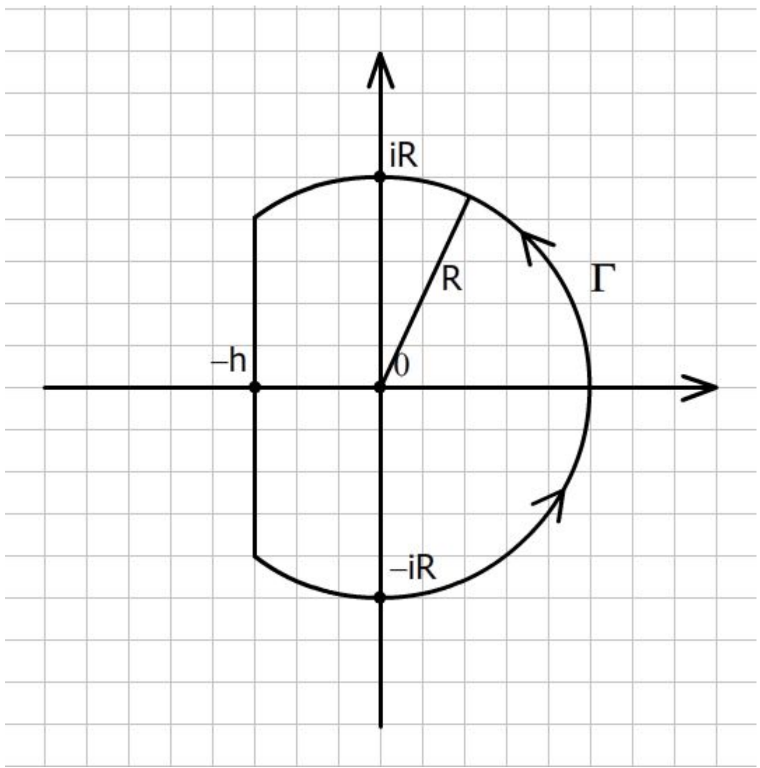
$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(u) - u}{u^2} du \geqslant \varepsilon x \frac{\psi(x) - (1+\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)^2 x^2} = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)\, x^2}\left(\frac{\psi(x)}{x} - (1+\varepsilon)\right).$$

Из сходимости интеграла слева при фиксированном ε получаем $\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(u) - u}{u^2} du \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\left(\frac{\psi(x)}{x} - (1+\varepsilon)\right) \leqslant 0$ при фиксированном ε. Отсюда $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1 + \varepsilon$, а т.к. это верно для любого x, то $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1$. И наоборот, меняя знак неравенства, получаем $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\psi(x)}{x} \geqslant 1 - \varepsilon$, а т.к. это верно для любого ε, то $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\psi(x)}{x} \geqslant 1$. ■

Доказательство. (Теоремы 1.9).
Положим $F_T(s) = \int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$, $T > 1$. Поскольку $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}$ — целая функция, т.к. $\psi(x)$ на отрезке $[n, n+1]$ постоянна, то $\int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$ является суммой целых функций вида $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \Rightarrow F_T(s)$ — целая. Нужно показать, что $F_T(1) \to F(1)$ при $T \to \infty$. По определению предела, возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим следующий интеграл

$$I(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (F(1+s) - F_T(1+s))\, T^s \left(\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s}\right) ds,\ \ R = \frac{1}{\varepsilon}.$$

$F(s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1 \ \Rightarrow\ F(1+s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$. То есть, она аналитична на отрезке $[-iR, iR]$ *(см. Рис. 1)*. Если $F(s)$ аналитична в точке, то она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Применяя это к каждой точке нашего отрезка, получаем его покрытие открытыми кругами и выделяем конечное подпокрытие по компактности $[-iR, iR]$. Теперь выбираем h так, чтобы прямоугольник был внутри объединения кругов, т.е. чтобы $F(1+s)$ была аналитична на нарисованном контуре ($h = h(\varepsilon)$).



(Рис. 1)

Значит, в $I(T):\ F(1+s)$ — аналитична в области (по построению), $F_T(1+s)$ — везде целая, T^s — целая (экспонента), $\dfrac{s}{R^2}$ — целая, $\dfrac{1}{s}$ — полюс порядка 1 в нуле. Следовательно, по теореме Коши о вычетах

$$I(T) = (F(1) - F_T(1))\, T^0 = F(1) - F_T(1).$$

$\blacksquare$

Лемма 1.13.
При $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0: \quad |F(1+s) - F_T(1+s)| \leqslant A\dfrac{T^{-\sigma}}{\sigma}$;
при $\sigma = \mathrm{Re}(s) < 0: \quad |F_T(1+s)| \leqslant A\dfrac{T^{-\sigma}}{-\sigma}$,
где A *такое, что* $\left|\dfrac{\psi(x)}{x} - 1\right| \leqslant A$ *при* $x \geqslant 1$.

Доказательство.

$$\sigma > 0: \quad |F(1+s) - F_T(1+s)| = \left|\int_T^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx\right| \leqslant A\int_T^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A\frac{T^{-\sigma}}{\sigma};$$

$$\sigma < 0: \quad |F_T(1+s)| = \left|\int_1^{T} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx\right| \leqslant A\int_1^{T} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A\frac{T^{-\sigma}}{-\sigma}.$$

$\blacksquare$

Лемма 1.14. *Если* $|s| = R$, *то* $\dfrac{s}{R^2} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(s)}{R^2}$

Доказательство.
$\dfrac{s}{R^2}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{s}{R}+\dfrac{R}{s}\right)=\dfrac{1}{R}\cdot 2\operatorname{Re}\left(\dfrac{s}{R}\right)=\dfrac{2\operatorname{Re}(s)}{R^2}.$ ■

Лемма 1.15. *При* $T>1$ *и* $x\in\mathbb{R}$ *выполнено* $xT^{-x}\leqslant\dfrac{1}{e\ln(T)}$.

Доказательство. Считаем производную $(xT^{-x})'=(1-x\ln(T))T^{-x}$. Она обращается в 0 в точке $x_0=\dfrac{1}{\ln(T)}$. Ну и несложно видеть, что функция при $x<x_0$ возрастает, при $x>x_0$ убывает, значит максимум значения функции равен $\dfrac{1}{\ln(T)}T^{-\frac{1}{\ln(T)}}=\dfrac{1}{e\ln(T)}$. ■

Положим $\Gamma_1=\Gamma\cap\{s\in\mathbb{C}|\operatorname{Re}(s)\geqslant 0\}$, $\Gamma_2=\Gamma\cap\{s\in\mathbb{C}|\operatorname{Re}(s)\leqslant 0\}$.
Тогда $I(T)=I_1(T)+I_2(T)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1}\ldots+\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\ldots$
По Лемме 1.13

$$|I_1(t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}A\frac{T^{-\sigma}}{\sigma}T^{\sigma}\frac{2\sigma}{R^2}ds=\frac{1}{2\pi}\frac{2A}{R^2}=A\varepsilon$$

$$I_2(T)=I_3(T)-I_4(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F(1+s)T^{\sigma}\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F_T(1+s)T^{\sigma}\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)ds.$$

По Лемме 1.13, $I_4(T)$ оценивается точно так же, как и $I_1(T)$, только надо заменить контур Γ_1 на Γ_3. Это можно сделать, так как у подынтегральной функции нет полюсов вне контура $\Gamma_3\cup\Gamma_2$ (полюс только 0). Таким образом, $|I_4(T)|\leqslant A\varepsilon$.
Осталось оценить $I_3(T)=\displaystyle\int_{\Gamma_2}F(1+s)T^s\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)$.
Заметим, что

1. на малых дугах $\left|T^s\left(\dfrac{s}{R^2}+\dfrac{1}{s}\right)\right|=\dfrac{2\sigma}{R^2}T^{\sigma}\underset{\text{Лемма 1.14}}{=}\dfrac{2\sigma T^{-|\sigma|}}{R^2}\underset{\text{Лемма 1.15}}{\leqslant}\dfrac{2}{R^2}\dfrac{1}{e\ln(T)}$;
2. на вертикальном отрезке $T^s=T^{-h}$;
3. на Γ_2 верно $|F(1+s)\left(\dfrac{s}{R^2}+\dfrac{1}{s}\right)|\leqslant C=C(\varepsilon)$ — не зависит от T.

Следовательно, $I_3(T)\to 0$ при $T\to+\infty$. То есть, $\exists T_0(\varepsilon):\forall T>T_0$ выполняется $|I_3(T)|<\varepsilon$.
Итак, $|I(T)|\leqslant|I_1(T)|+|I_4(T)|+|I_3(T)|\leqslant A\varepsilon+A\varepsilon+\varepsilon=(2A+1)\varepsilon$.
Теорема 1.9 $\Rightarrow$ Лемма 1.12. Леммы 1.1 и 1.12 $\Rightarrow$ Теорема 1.2 — АЗРПЧ.

2 Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях

Теорема 2.1 (Дирихле)**.** *Пусть $l, m \in \mathbb{Z}, (l, m) = 1, m \geqslant 2$. Тогда существует бесконечно много простых p таких, что $p \underset{m}{\equiv} l$.*

Замечание. *При фиксированном m таких прогрессий ровно $\varphi(m)$ штук.*
Число простых до x в этой прогрессии на самом деле $\frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\ln x}$, то есть эти простые распределены по прогрессии равномерно. Но доказывать мы это, конечно же, не будем.

2.1 Свойства характеров

Определение 2.1. Пусть $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$. Функция $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ называется *числовым характером (Дирихле) по модулю m*, если

1. $\forall a \in \mathbb{Z}$ выполняется $\chi(a + m) = \chi(a)$;
2. $\chi(a) = 0 \Leftrightarrow (a, m) \neq 1$;
3. $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

Замечание. *Несложно провести биекцию $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \leftrightarrow \overline{\chi} : \mathbb{Z}_m^* \to \mathbb{C}^*$.*

Замечание. *$|\chi(a)| = 0$, если $(a, m) \neq 1; 1$, иначе. Для начала заметим, что $\chi(1) = \chi(1 \cdot 1) = \chi(1)^2$, и поскольку $\chi(1) \neq 0$, то $\chi(1) = 1$. Вспомним, что если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \underset{m}{\equiv} 1$ (Малая теорема Ферма). Тогда $\chi(a)^{\varphi(m)} = \chi(a^{\varphi(m)}) = \chi(1) = 1$. Таким образом, мы получили, что $\chi(a) \in \sqrt[\varphi(m)]{1}$.*

Вспомним теорему с первого курса: $\mathbb{Z}_m^*$ циклическая $\Leftrightarrow m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$ для простого p. [4]

Предложение 2.1. *$\mathbb{Z}_m^*$ разлагается в прямое произведение циклических групп.*

Лемма 2.1. *Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_r$ — произвольный набор корней из 1 степеней $d_1, \ldots, d_r$ соответственно (т.е. $\eta_i^{d_i} = 1$). Тогда $\exists! \chi : \ \chi(g_i) = \eta_i$.*

Доказательство. Для $(a, m) = 1$ полагаем $\chi(a) = \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_r^{\alpha_r}$, где $\overline{a} = \overline{g}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{g}_r^{\alpha_r}$. Для $(a, m) \neq 1$ полагаем $\chi(a) = 0$. Достаточно проверить, что если $(a, m) = 1$, $(b, m) = 1$, то $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
Пусть $\overline{a} = \overline{g}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{g}_r^{\alpha_r}, \overline{b} = \overline{g}_1^{\beta_1} \ldots \overline{g}_r^{\beta_r}, \overline{c} = \overline{g}_1^{\gamma_1} \ldots \overline{g}_r^{\gamma_r}$, где $0 \leqslant \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leqslant d_1 - 1$, $i = 1 \ldots r$. Тогда $\gamma_i \equiv \alpha_i + \beta_i \pmod{d_i}$. Следовательно, т.к. η_i — корень из 1 степени d_i, получаем

$$\chi(a)\chi(b) = \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_r^{\alpha_r} \cdot \eta_1^{\beta_1} \ldots \eta_r^{\beta_r} = \eta_1^{\gamma_1} \ldots \eta_r^{\gamma_r} = \chi(ab).$$

∎

Лемма 2.2. *Если $a \not\equiv 1 \pmod{m}$, то $\exists \chi : \ \chi(a) \neq 1$.*

[4] Это эквивалентно наличию первообразного корня по искомому модулю

Доказательство. Очевидно из Леммы 2.1: если $(a,m)\neq 1$, то все характеры подходят; если $(a,m)=1$, то $\overline{a}=\overline{g}_1^{\alpha_1}\dots\overline{g}_r^{\alpha_r} \pmod m$, $0\leqslant \alpha_i\leqslant d_i-1$. Т.к. $a\not\equiv 1 \pmod m$, то $\exists \alpha_i\neq 0$, можно положить, что это $\alpha_1>0$.
Положим $\chi(g_1)=\eta_1=e^{\frac{2\pi i}{d_1}}$, $\chi(g_j)=\eta_j=1$, $\forall j=2,\dots,r$. Тогда, т.к. по Лемме 2.1 характер существует, то $\chi(a)=e^{\frac{2\pi i}{d_1}\alpha_1}\neq 1$. ∎

Определение 2.2. Характер χ_0, где $\chi_0(a)=\begin{cases}1, & (a,m)=1,\\ 0, & (a,m)\neq 1\end{cases}$ называется *главным характером.*

Ясно, что $\chi\cdot\chi_0=\chi$, где операция $\cdot$ — поточечное перемножение функций. Для любого χ существует обратное $\chi^{-1}:\ \chi^{-1}(a)=\begin{cases}\chi(a)^{-1}, & \chi(a)\neq 0,\\ 0, & \chi(a)=0.\end{cases}$ В общем, ясно, что характеры образуют группу.

Задача 2.1. *Доказать, что группа характеров изоморфна $\mathbb{Z}_m^*$.*

Характеров по модулю m ровно $\varphi(m)$ штук (следует из Леммы 2.1, $d_1\dots d_r=|\mathbb{Z}_m^*|=\varphi(m)$).

Лемма 2.3. *Справедливы следующие равенства*

1) $\displaystyle\sum_{a=1}^{m}\chi(a)=\begin{cases}\varphi(m), & \text{если } \chi=\chi_0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

2) $\displaystyle\sum_{\chi}\chi(a)=\begin{cases}\varphi(m), & \text{если } a\equiv 1 \pmod m,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Доказательство. По порядку.

1) Если $\chi=\chi_0$, то всё понятно.
Если $\chi\neq\chi_0$, то $\exists b\in\mathbb{Z}:\ \chi(b)\neq 0,\,1$. Положим $s=\sum\limits_{a=1}^{m}\chi(a)$, тогда $s\chi(b)=\sum\limits_{a=1}^{m}\chi(ab)=\sum\limits_{a=1}^{m}\chi(a)=s\ \Rightarrow\ s=0$.
2) Если $a\equiv 1 \pmod m$, то всё понятно.
Если $(a,m)\neq 1$, то сумма из нулей равна нулю (действительно).
Если $(a,m)=1$ и $a\not\equiv 1 \pmod m$, то по Лемме 2.2 можно взять характер $\chi_1:\ \chi_1(a)\neq 0,\,1$. Положим $s=\sum\limits_{\chi}\chi(a)$, тогда $s\chi_1(a)=\sum\limits_{\chi}\chi(a)\chi_1(a)=\sum\limits_{\chi}\chi(a)=s\ \Rightarrow\ s=0$.

∎

Следствие 2.1. *Если $\chi\neq\chi_0$, то* $\left|\sum\limits_{n=1}^{m}\chi(n)\right|\leqslant\varphi(m)$.

2.2 L-функции Дирихле

Пусть $m\geqslant 2$, χ — характер по модулю m.

Определение 2.3. $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ называется *L-функцией Дирихле.*

Лемма 2.4. *При* $\mathrm{Re}(s) > 1$

1) *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ *сходится абсолютно, задаёт аналитическую функцию;*
2) $L'(s, \chi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\ln(n)}{n^s}$*;*
3) $L(s, \chi) \neq 0$ *и* $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы очень схоже с доказательством теоремы 1.5. Напомним, что $s = \sigma + it$.

1) $\left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^\sigma}$ $\Rightarrow$ сходится абсолютно при $\sigma > 1$. Но для аналитичности предела нам необходима равномерная сходимость. В области $\Omega_\delta = \{\mathrm{Re}(s) > 1 + \delta\}$ $\left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}}$ — общий член сходящегося ряда. значит, по признаку Вейерштрасса в Ω_δ наша последовательность равномерна. Следовательно, по теореме 1.4 (Вейерштрасса) ряд сходится к аналитической функции.
2) В первом пункте мы воспользовались теоремой Вейерштрасса, которая, в частности, гласит, что наш ряд можно почленно дифференцировать.
3) $L(s, \chi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(k)\chi(n)\Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(kn)\Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ d|n}} \frac{\chi(n)\Lambda(d)}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)\ln(n)}{n^s} = -L'(s, \chi).$

   Итак, получили $L(s, \chi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = -L'(s, \chi)$.

   Если s_0 — ноль порядка $k \in \mathbb{N}$, то порядок нуля левой части будет больше или равен 0, т.к. мы умножаем на некую аналитическую функцию. Но порядок нуля правой части равен $k - 1$. Противоречие.

   Осталось показать, почему $L(s, \chi) \not\equiv 0$: $\left|\sum_{n=2}^{\infty}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{\alpha^\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\sigma}$ — первый множитель стремится к 0, второй множитель ограничен некой константой C $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

   Второе слагаемое по модулю стремится к 0 при $\sigma \to \infty$. Следовательно, $L(s, \chi) \neq 0$ для некоторого s.

∎

Лемма 2.5. *При* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *выполнено*

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Поскольку функция $\frac{\chi(p)}{p^s}$ вполне мультипликативна, то по лемме 1.4 все следует. ∎

Следствие 2.2.
$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Доказательство. Подставим $\chi=\chi_0$. χ — характер по модулю $m \Rightarrow \chi(p)=0 \Leftrightarrow p|m$. $\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, однако это представление верно только при $\mathrm{Re}(s)>1$. Равенство везде следует из аналитичности L-функции, ζ-функции и $\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$. ∎

Замечание. *Обобщенная гипотеза Римана звучит, что с некоторой оговоркой все нули L-функции Дирихле лежат на* $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

Следствие 2.3. *В* $\mathrm{Re}(s)>0$ *у* $L(s,\chi_0)$ *ровно один полюс в* $s=1$ *порядка* 1 *с вычетом* $\frac{\varphi(m)}{m}$, *и в* $\{\mathrm{Re}(s)>0\}\setminus\{1\}$ *функция* $L(s,\chi_0)$ *аналитична.*

Доказательство. Вспомним, что $\varphi(m)=m\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)$. У $\zeta(s)$ вычет в 1 равен 1, и функция $\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ аналитична в 1. ∎

Лемма 2.6. *Если* $\chi\neq\chi_0$, *то* $L(s,\chi)$ *аналитична при* $\mathrm{Re}(s)>0$ **(то есть полюс пропадает!).**

Доказательство. Применим преобразование Абеля к $a_n=\chi(n), g(x)=\frac{1}{x^s}$. Тогда $A(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)$, и используя следствие 2.1 $|A(x)|\leqslant\varphi(m)$.

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(s)}{n^s}=A(N)\frac{1}{N^s}+s\int_1^N\frac{A(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Так как $|A(N)|\leqslant\varphi(m)$, то первое слагаемое стремится к 0 при $N\to\infty$ и $\mathrm{Re}(s)>0$.
Рассмотрим $\int_1^N\frac{A(x)}{x^{1+s}}=\sum_{n-1}^{N-1}\varphi_n(s)$, где $\varphi_n(s)=\int_n^{n+1}\frac{A(x)}{x^{1+s}}$ — аналитическая в $\mathbb{C}$[5]
Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)$ задает аналитическую функцию в $\mathrm{Re}(s)>0$. При $\mathrm{Re}(s)>\delta>0$

$$|\varphi_n(s)|\leqslant\int_n^{n+1}\frac{\varphi(m)}{x^{1+\sigma}}dx\leqslant\frac{\varphi(m)}{n^{2+\sigma}}<\frac{\varphi(m)}{n^{2+\delta}}\text{ — общий член сходящегося ряда}\Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно при $\mathrm{Re}(s)>\delta\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ряд сходится к аналитической функции.
Тогда в предыдущем равенстве

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^s}=A(N)\frac{1}{N^s}+s\int_1^N\frac{A(x)}{x^{1+s}}dx$$

[5] Упражнение!

первое слагаемое стремится к 0, а второе сходится к аналитической функции, значит и вся сумма стремится к аналитической функции. ∎

Лемма 2.7. *При* $\chi \neq \chi_0$ *выполнено* $L(1,\chi) \neq 0$.

Доказательство.
Случай 1: $\chi^2 \neq \chi_0$. По лемме 1.8 из I части

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leqslant 1 \text{ при } 0<r<1.$$

Положим $r = \dfrac{1}{p^\sigma}, e^{i\varphi} = \chi(p)$ для каждого простого p.
Тогда при $\sigma > 1$:

$$|L^3(\sigma,\chi_0)L^4(\sigma,\chi)L(\sigma,\chi^2)| = \prod_p \left|\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^\sigma}\right)^3\left(1-\frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^4\left(1-\frac{\chi^2(p)}{p^\sigma}\right)\right|^{-1} \geqslant 1.$$

Поскольку $\chi^2 \neq \chi_0$, то у $L(\sigma,\chi^2)$ в 1 есть значение. Предположим, что $L(1,\chi)=0$. Тогда $L(\sigma,\chi) = O(\sigma-1)$ при $\sigma \to 1+0$.
При этом $L(\sigma,\chi_0) = O(\dfrac{1}{\sigma-1})$ при $\sigma \to 1+0$ — полюс порядка 1.
$L(\sigma,\chi^2) = O(1)$, т.к. $\chi^2 \neq \chi_0$. Отсюда $|L^3(\sigma,\chi_0)L^4(\sigma,\chi)L(\sigma,\chi^2)| = O(\dfrac{1}{(\sigma-1)^3}(\sigma-1)^4 \cdot 1) = O(\sigma-1)$ при $\sigma \to 1+0$, т.е. $\to 0$, что противоречит неравенству выше.
Случай 2: $\chi^2 = \chi_0$.
Заметим, что если рассуждать похожим образом, то мы получим $O(1)$, и ничего не выйдет.
Пусть $L(1,\chi)=0$. Рассмотрим $F(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$. Первая функция дает в точке 1 имеет полюс порядка 1, а вторая в точке 1 дает ноль порядка 1, значит она аналитична при $\mathrm{Re}(s)>1$. Докажем, что

1) ряд $F(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ сходится абсолютно при $\mathrm{Re}(s)>1$, причем $F^{(k)}(s) = (-1)^k\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)^k a_n}{n^s}$,
2) $a_n \geqslant 0$,
3) $a_{r^2} \geqslant 1, \forall r \in \mathbb{N}$,
4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ расходится при $s = \dfrac{1}{2}$.

Пункт 1):
Надо доказать, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^s}$ сходится при $\mathrm{Re}(s)>1$. При $\mathrm{Re}(s) > 1+\delta, \delta>0$ выполнено $\dfrac{a_n}{n^s} \leqslant \dfrac{|a_n|}{n^\sigma} < \dfrac{|a_n|}{n^{1+\delta}}$ — общий член сходящегося ряда. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ сходится равномерно. Но тогда по Теореме 1.4 Вейерштрасса этот ряд задаёт аналитическую функцию, причём его можно почленно дифференцировать.
Пункт 2):

$$a_n = \sum_{d|n}\chi(d) = \prod_{j=1}^{r}\sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j}\chi(p_j)^{\beta_j} = \prod_{j=1}^{r}a_{n_j},$$

$$\text{где } a_{n_j} = 1+\chi(p_j)+\dots+\chi(p_j)^{\alpha_j} = \begin{cases} 1, & \chi(p_j)=0,\\ \frac{1-\chi(p_j)^{1+\alpha_j}}{1-\chi(p_j)}, & \chi(p_j)\neq 0,1,\\ 1+\alpha_j, & \chi(p_j)=1.\end{cases}$$

То есть

$$a_{n_j} = \begin{cases} 1+\alpha_j, & \chi(p_j)=1, \\ 1, & \chi(p_j)=0 \text{ или } \chi(p_j)=-1,\ a_j \vdots 2, \\ 0, & \chi(p_j)=-1,\ \alpha_j \not\vdots 2. \end{cases}$$

Из того, что $a_{n_j} \geqslant 0$, следует $a_n \geqslant 0$.
Пункт 3)**:** Очевидно из 2).
Пункт 4)**:** Следует из 2) и 3).
$F(s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s) > 0$, поэтому в круге $|s-2| < 2$ на вещественной прямой выполняется

$$F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(2)}{k!}(\sigma-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma-2)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln n)^k a_n}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-\sigma)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k a_n}{n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln n)^k (2-\sigma)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} n^{2-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}.$$

В частности, при $\sigma = \frac{1}{2}$: $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}}$. Но мы доказали, что он расходится. Противоречие. ■

Доказательство. (Теоремы 2.1 Дирихле). При $\mathrm{Re}(s) > 1$ $-\dfrac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$.

Пусть далее $s = \sigma \in \mathbb{R}$, $s > 1$. $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^k,\ k \geqslant 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Тогда

$$-\frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} = \sum_p \frac{\ln p \chi(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p \cdot \chi\left(p^k\right)}{p^{ks}}$$

(первое слагаемое для $n = p$, второе — для $n = p^k$). Покажем, что второе слагаемое ограничено константой, не зависящей от s при $s > 1$:

$$\left| \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p \cdot \chi\left(p^k\right)}{p^{ks}} \right| \leqslant \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{ks}} = \sum_p \ln p \frac{1/p^2}{1-1/p} \leqslant 2 \sum_p \frac{\ln p}{p^2} < 2 \sum_n \frac{\ln n}{n^2} < \infty.$$

Итак, для любого характера χ по модулю m:

$$\sum_p \frac{\chi(p) \ln p}{p^s} = -\frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} + O(1). \qquad (*)$$

Поскольку $(l, m) = 1$, то $\exists v \in \mathbb{Z} :\ vl \equiv 1 \pmod{m}$ (т.е. обратный). Домножим $(*)$ на $\chi(v)$ и просуммируем по всем характерам:

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s} \sum_\chi \chi(pv) = -\sum_\chi \chi(v) \frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} + O(1),$$

$$\sum_\chi \chi(pv) = \begin{cases} 0, & pv \not\equiv 1 \pmod{m}, \\ \varphi(m), & pv \equiv \pmod{m}. \end{cases}$$

Но $pv \equiv 1 \pmod{m}$, следовательно, $p \equiv l \pmod{m}$ т.к. $pl \equiv 1 \pmod{m}$. Значит,

$$\sum_{p \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln p}{p^s} = -\frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \chi(v) \frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} + O(1).$$

Перейдём к пределу при $s \to 1+$. Если $p \equiv l \pmod m$ конечное количество, то слева предел конечен. Докажем, что правая часть стремится к бесконечности (т.е в левой части бесконечное число слагаемых):

При $\chi \neq \chi_0$ $\dfrac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} = O(1)$ при $s \to 1+$.

При $\chi = \chi_0$ $L(s,\,\chi) = \dfrac{f(s)}{s-1}$, где $f(s)$ аналитична в 1 и $f(1) \neq 0$.

Значит,

$$\frac{L'(s,\,\chi_0)}{L(s,\,\chi_0)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{f'(s)}{f(s)} = -\frac{1}{s-1} + O(1) \xrightarrow{\text{при } s\to 1+} \infty.$$

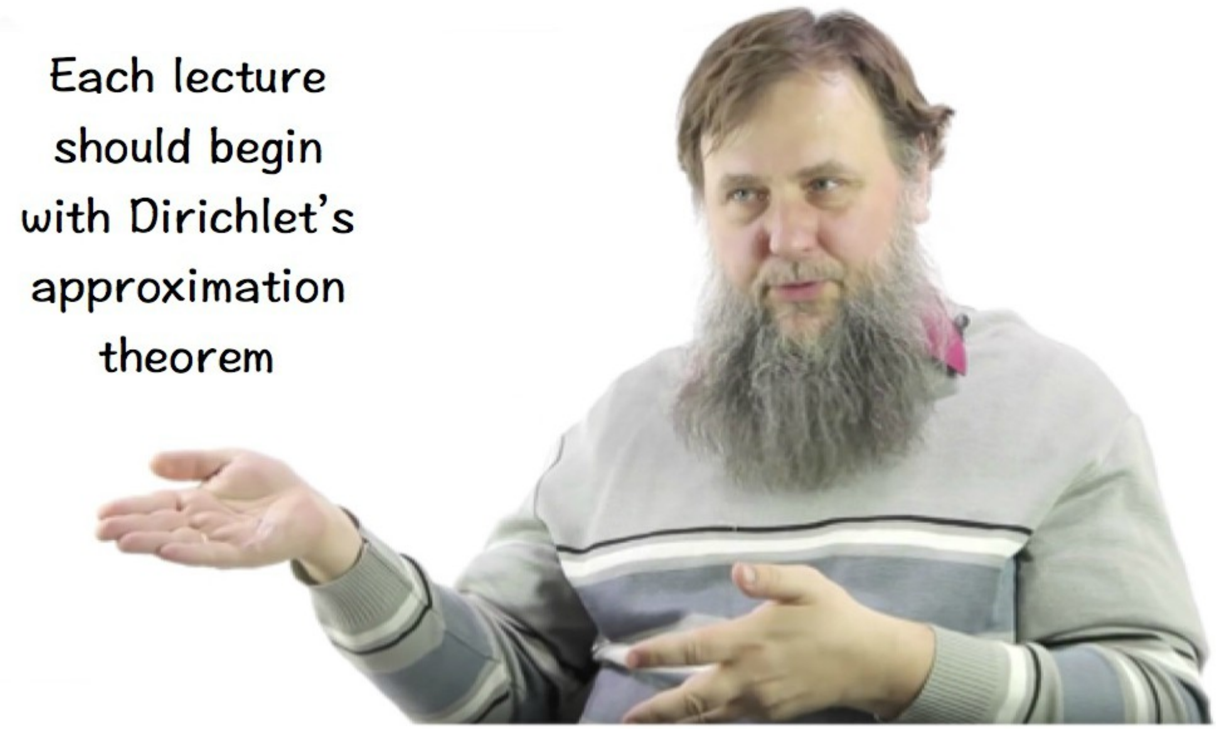
То есть мы показали, что правая часть стремится к бесконечности при $s \to 1+$. Следовательно,

$$\sum_{p \equiv l \pmod m} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)(s-1)} + O(1).$$

■

Из последнего равенства можно, в частности, получить, что $\displaystyle\sum_{p} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{s-1} + O(1)$.

3 Диофантовы приближения



3.1 Основные сведения

Пусть $\theta \in \mathbb{R}$. Насколько маленькой можно сделать разность $|\theta - \frac{p}{q}|$ так, чтобы $|\theta - \frac{p}{q}| < f(a)$ (p и q — не простые).
Характеристика θ: насколько хорошо она приближается $\frac{p}{q}$. Мы знаем, что существуют нерациональные числа ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots$). Легко доказать, что корни многочленов с целыми коэффициентами (алгебраические числа) не будут рациональными. Например, у многочлена $x^2 - x - 1 = 0$ корень $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а у него корни имею вид $\frac{\text{делитель } -1}{\text{делитель} 1} \in \{\pm 1\}$ — ± 1 оба не корни.
А вдруг все числа алгебраические? Нет, алгебраических чисел счётное количество. Это доказал Лиувилль через теорию приближений: он показал, что алгебраические числа не могут приближаться "слишком хорошо". Т.е. для алгебраических чисел не найдётся такой f, для которой будет бесконечно много решений.

Утверждение 3.1. Если $\theta = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$, то $\forall \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ такая, что $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1/b}{q}$.

Доказательство. $\left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{|aq - bp|}{bq} \geqslant \dfrac{1}{bq}$, т.к. $|aq - bp| \in \mathbb{Z} \neq 0$. ∎

Теорема 3.1 (Дирихле о приближении).
Пусть $\theta \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\exists \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \ \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT}, \ 1 \leqslant q \leqslant T.$

Доказательство.
Хотим: $|q\theta - p| < \dfrac{1}{T}$. Можно считать, что $\theta \in [0,\,1)$, потом просто прибавить целую часть.
Рассмотрим числа $\{n\theta\},\ n = 0, 1, \ldots, T$. Разобьём отрезок $[0,\,1]$ на полуинтервалы $\left[\dfrac{k}{T},\, \dfrac{k+1}{T}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, T-1$ (т.е на T равных). По принципу Дирихле $\exists n_1, n_2 :\ (n_1 - n_2)\,\theta - ([n_1\theta] - [n_2\theta]) < \dfrac{1}{T}$.
Остаётся положить $q = n_1 - n_2$, $p = [n_1\theta] - [n_2\theta]$; $q \geqslant 1$, $q \leqslant T$ (т.е. $n_1,\, n_2 \leqslant T$). ∎

Следствие 3.1. *Если $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, то неравенство $|\theta - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{q^2}$ имеет бесконечно много решений в $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. От противного: пусть $\dfrac{p_1}{q_1}, \ldots, \dfrac{p_k}{q_k}$ — все решения $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$. Положим $\delta = \min\limits_i \left|\theta - \dfrac{p_i}{q_i}\right| > 0$, $T = \lceil \dfrac{1}{\delta} \rceil$ (любое $T > \dfrac{1}{\delta}$). По теореме 3.1 Дирихле $\exists \dfrac{p}{q},\ q \leqslant T :\ \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT} \leqslant \dfrac{1}{q^2}$. Т.е. $\dfrac{p}{q}$ должно быть среди $\dfrac{p_i}{q_i}$. Но $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT} < \dfrac{\delta}{q} \leqslant \delta$, т.е. оно ближе, чем наименьшее δ. Противоречие. ∎

Мера иррациональности числа $\theta = \sup\limits_s :\ \{\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^s}$ имеет бесконечно много решений $\dfrac{p}{q}\}$.

В качестве $\dfrac{p}{q}$ можно брать подходящие дроби в разложении θ в цепную дробь.

Определение 3.1. Иррациональное число θ называется *плохо приближаемым*, если $\exists C = C(\theta) > 0$ такое, что $\forall \frac{p}{q}$ выполняется $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{C}{q^2}$.

Известно (существует такая теорема), что число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда неполные частные при разложении в цепную дробь ограничены. Например, для квадратичной иррациональности неполные частные периодичны [6], а значит и ограничены, т.е. квадратичные иррациональности плохо приближаемы.
Отныне и далее мы будем подразумевать, что θ — вещественное число, а α — комплексное.

Определение 3.2. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим, если существует ненулевой многочлен $f(x)$ с рациональными (или целыми) коэффициентами такой, что $f(\alpha) = 0$. Такой многочлен $f(x)$ называется аннулирующим многочленом для числа α.*

Определение 3.3. *Степенью алгебраического числа* $\deg\alpha$ называется минимальная степень аннулирующего многочлена.

Теорема 3.2 (Лиувилля)**.** *Пусть θ — вещественное алгебраическое число степени d. Тогда $\exists C = C(\theta) > 0$ такое, что для любого $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ справедливо $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{C}{q^d}$, или, другими словами, $\mu(\theta) \leqslant d$.*

Доказательство. Случай $d = 1$ уже доказан в первом утверждении в разделе.
Пусть далее $\theta \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим многочлен $f(x)$ степени d с целыми коэффициентами такой, что

[6] Теорема Лагранжа с 1-го курса

$f(\theta)=0$.

Заметим, что для любого $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ выполнено $f\left(\dfrac{p}{q}\right)\neq 0$. Действительно, так как иначе бы многочлен $\dfrac{f(x)}{x-\frac{p}{q}}$ был бы аннулирующим многочленом для α степени $d-1$.

Поскольку $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $q^d f\left(\dfrac{p}{q}\right)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left|q^d f\left(\dfrac{p}{q}\right)\right|\geqslant 1\Rightarrow\left|f\left(\dfrac{p}{q}\right)\right|\geqslant\dfrac{1}{q^d}$.

Если $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|\geqslant 1$, то для любого $\dfrac{p}{q}$ $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|\geqslant\dfrac{1}{q^d}$.

Пусть теперь $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|<1$, т.е. $\dfrac{p}{q}\in[\theta-1,\theta+1]$. Тогда

$$\frac{1}{q^d}\leqslant\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|f\left(\frac{p}{q}\right)-f\left(\theta\right)\right|=\left|\left(\frac{p}{q}-\theta\right)f'(\xi)\right|\leqslant M\cdot\left|\theta-\frac{p}{q}\right|,\ \text{ где } M=\max_{[\theta-1,\theta+1]}\left|f'(x)\right|.$$

Таким образом, $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|\geqslant\dfrac{1}{Mq^d}$, и искомое $C=\min\left(1,\dfrac{1}{M}\right)$. ∎

Определение 3.4. Если $\theta\in\mathbb{R}$ таково, что $\forall n\in\mathbb{N}$ неравенство $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^n}$ имеет бесконечное количество решений в $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, то число θ называется *луивиллевым* (= число Луивилля). Числа, не являющиеся луивиллевыми, называются *диофантовыми.*

Предложение 3.1. *Луивиллевы числа трансцендентны.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть θ алгебраическое. Тогда для него верна теорема Луивилля, а именно

$$\exists C>0:\forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\text{ выполнено }\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{C}{q^d}.$$

Тогда при $n\geqslant d$ из неравенства $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^{n+1}}$ следует, что $q\leqslant\dfrac{1}{C}$.

Кроме того, $|q\theta-p|\leqslant 1\Rightarrow|p|\leqslant 1+q|\theta|<1+\dfrac{|\theta|}{C}$.

То есть числа q и p ограничены, значит и количество решений. Противоречие. ∎

Пример 3.1. Число $\theta=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n!}}$ — луивиллево.

Доказательство. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Рассмотрим $N\geqslant m$. Обозначим через $\dfrac{p}{q}=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^{n!}}$. Тогда $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|=\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n!}}\leqslant 2\cdot\frac{1}{2^{(N+1)!}}=\frac{2}{q^{N+1}}\leqslant\frac{1}{q^N}\leqslant\frac{1}{q^m}$.

Таким образом, неравенство $\left|\theta-\dfrac{p}{q}\right|\leqslant\dfrac{1}{q^m}$ имеет бесконечное число решений. ∎

Кругозора ради добавим, что существует следующая очень сложная

Теорема 3.3 (Туэ-Зигеля-Рота)**.** *Пусть θ — иррациональное алгебраическое число. Тогда $\forall\varepsilon>0$ такое, что $\exists C=C(\theta,\varepsilon)$, что для любых $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ справедливо*

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{C}{q^{2+\varepsilon}}=\frac{2}{q^{N+1}}\leqslant\frac{1}{q^N}\leqslant\frac{1}{q^m}.$$

Таким образом, неравенство $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^m}$ *имеет бесконечное количество решений.*

3.2 Иррациональность e и π

Теорема 3.4. $e \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Вспомним, что $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Пусть $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Тогда $q!e \in \mathbb{N}$. Несложно видеть, что

$$\mathbb{N} \ni \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} \leqslant 1.$$

Получаем противоречие. ∎

Теорема 3.5. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Положим $f_n(x) = q^n \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(q - px)^n}{n!} = \frac{q(x)}{n!}$, где $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Рассмотрим $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x)\sin(x)dx$, $I_n \geqslant 0$.
Положим $F_n(x) = f_n(x) - f_n''(x) + f_n^{(4)}(x) + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$.
Поскольку $f_n(x) = f_n(\pi - x)$, то $f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(\pi - x)$ для чётных k. Из этого мы видим, что $F_n(x) = F_n(\pi - x)$.
Заметим, что $(F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)' = f_n(x)\sin x$.
$I_n = (F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)_0^{\pi} = F_n(0) + F_n(\pi)$.

$$|f(x)\sin x| \leqslant \frac{b^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$I_n = 2F_n(0) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Итак, последовательность $\{I_n\}$ положительна, целочисленна, и стремится к нулю, в чём и заключается противоречие. ∎

3.3 Трансцендентность числа e

Теорема 3.6. *Число e трансцендентно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\exists a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}: \ \sum\limits_{k=0}^{m} a_k e^k = 0$, где не все $a_k = 0$. Считаем, что $(a_0, \dots, a_m) = 1$. Ортогональным дополнением к $(a_0, \dots, a_m)$ является полуплоскость Π, проходящая через $\left(1, e, e^2, \dots, e^m\right)$. При этом в гиперплоскости можно выбрать базис из целочисленных векторов.

Разбиваем все точки $\mathbb{Z}^{m+1}$ на параллельные слои $\mathbb{Z}^m$ (любое $b \in \mathbb{Z}^{m+1}$ лежит в слое с номером $\langle a, b \rangle$). Расстояние между слоями одинаковое и (при условии, что $(a_0, \dots, a_m) = 1$) оно равно $\Delta = \dfrac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2}}$. Построим последовательность $\mathcal{B}^{(n)} \in \mathbb{Z}^{m+1}$ такую, что

1) расстояние от $\mathcal{B}^{(n)}$ до $\langle \left(1, e, e^2, \dots, e^m\right) \rangle$ меньше Δ,
2) точка $\mathcal{B}^{(n)}$ не лежит в Π.

Напомним, что $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$ Тогда можно брать $\displaystyle\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$ для многочленов f.

Положим $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}(x-1)^n \dots (x-m)^n}{(n-1)!}$. Возьмём $\mathcal{B}_k^{(n)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx, \ k = 0, \dots, m.$

Покажем, что $\mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$:

При $k = 0$ это просто 0. Пусть $k \neq 0$: $\left| \mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)} \right| = \left| e^k \displaystyle\int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_0^\infty f_n(x+k) e^{-x} dx \right| =$
$e^k \left| \displaystyle\int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_k^\infty f_n(y) e^{-y} dy \right| = e^k \left| \int_0^k f_n(x) e^{-x} dx \right| \leqslant e^m m \dfrac{m^{n+nm-1}}{(n-1)!} = \dfrac{e^m m^{m(n+1)}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$

То есть $\mathcal{B}_0^{(n)} \left(1, e, e^2, \dots, e^m\right)^T - \mathcal{B}^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Следовательно, последовательность точек $\mathcal{B}^{(n)}$ стремится к прямой $\langle \left(1, e, e^2, \dots, e^m\right) \rangle$ и, начиная с некоторого n, расстояние станет меньше Δ.

Покажем теперь, что $\mathcal{B}_k^{(n)} \in \mathbb{Z}$, где $k = 0, \dots, m$:

При $k = 0$:

$$\mathcal{B}_0^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_k \left[\text{коэффициент в } x^{n-1}(x-1)^n \dots (x-m)^n \text{ при } x^k\right] \cdot \int_0^\infty x^k e^{-x} dx =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} \left((-1)^{mn} m!^n (n-1)! + A_n n! + \dots + A_N N!\right) \equiv (-1)^{mn} m!^n \mod n.$$

При $k \geqslant 1$:

$$\mathcal{B}_k^{(n)} = \int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx = \sum_j \left[\text{коэффициент в } \frac{(x+k)^{n-1}(x+k-1)^n \dots x^n \dots}{(n-1)!} \text{ при } x^j\right] \cdot j! =$$
$$\frac{1}{(n-1)!} \left(C_n n! + C_{n+1}(n+1)! + \dots + C_N N!\right) \equiv 0 \mod n.$$

Покажем, наконец, что для бесконечно многих n $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \neq 0$ (то есть, что $\mathcal{B}^{(n)} \notin \Pi$):

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \equiv a_0 (-1)^{mn} m!^n \pmod n.$$

Тогда при $(n, \ a_0 m!) = 1$, где $a_0 m!$ — некоторое фиксированное число, ряд будет не равен нулю. ∎

4 Алгебраические и трансцендентные числа

4.1 Основные сведения

Множество алгебраических чисел будем обозначать $\mathbb{A}$.
Пусть $f(x) \in \mathbb{Q}[x], , f(\alpha) = 0, \deg f = \deg\alpha$. Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Следовательно, если $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $g(\alpha) = 0$, $\deg g = \deg\alpha (= \deg f)$, то НОД$(f(x), g(x)) = h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, при этом $h(\alpha) = 0 = \deg h = \deg f$, то есть, если $h|f$, $h|g, \deg h = \deg f = \deg f$ то они три все пропорциональны.

Определение 4.1. Унитарный многочлен $p_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ называется *минимальным многочленом* α, если $p_\alpha(\alpha) = 0$ и $\deg p_\alpha = \deg\alpha$.

Оказывается, что $\mathbb{A}$ — алгебраически замкнутое поле, т.е. корень многочлена с алгебраическими коэффициентами тоже будет алгебраическим числом.
Для доказательства нам сначала понадобятся несколько лемм.

Теорема 4.1 (О симметрических многочленах)**.**
Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.
Пусть $f(x_1, \ldots, x_m) \in R[x_1, \ldots, x_m]$ — симметрический многочлен.
Тогда $\exists g(x_1, \ldots x_m) \in R[x_1, \ldots, x_m]$: $f(x_1, \ldots, x_m) = g(s_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, s_m(x_1, \ldots, x_m))$, где $s_k(x_1, \ldots, x_m)$ — k-ый симметрический многочлен.

Лемма 4.1. *Пусть $f(x, y) \in R[x, y]$. Тогда $\exists g(x, y_1, \ldots, y_m) \in R[x, y_1, \ldots, y_m]$: $f(x, y_1) \cdot \ldots \cdot f(x, y_m) = g(x, s_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, s_m(y_1, \ldots, y_m))$.*

Доказательство. $f(x, y_1) \cdot \ldots \cdot f(x, y_m) \in R[x][y_1, \ldots, y_m]$, т.е. он симметричный по $y_1, \ldots, y_m$ над $R[x]$. По Теореме 4.1 существует искомый многочлен g, причём g — многочлен от $(x, y_1, \ldots, y_m$ над R. ■

Лемма 4.2. *Пусть $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\deg\alpha = n$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни $p_\alpha(x)$*[7]*. Тогда $F(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} f(x, \alpha_k) \in \mathbb{Q}[x]$.*

Доказательство. Применим Лемму 4.1:

$$\prod_{k=1}^{n} f(x, \alpha_k) = g(s_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, s_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

По теореме Виета все $s_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выражаются через коэффициенты многочлена p_α и, следовательно, $s_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$. ■

Теорема 4.2. $\mathbb{A}$ — *поле.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$. Хотим проверить что $\{\alpha @ \beta | @ \in \{+, -, /, \cdot\}\}$.
Сложение:
Рассмотрим $F_1(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x - \beta_k)$, где $\beta_1 = \beta$, $\beta_2, \ldots, \beta_m$ — корни $p_\beta(x)$. Тогда по Лемме 4.2:

[7] Они попарно различны как корни любого неприводимого многочлена $f(x)$. Иначе бы у $f'(x)$ и $f(x)$ был этот корень общим, но $\deg(f') < \deg(f)$ — противоречие с неприводимостью.

$F_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$. При этом $F_1(\alpha+\beta) = \dots \cdot p_\alpha(\alpha) \cdot \dots = 0$.
Вычитание:
Если β — алгебраическое, то алгебраическим будет и $-\beta$. Тогда $\alpha - \beta$ — тоже алгебраическое. Ну или так: $F_2(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x+\beta) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_2(\alpha-\beta) = 0$.
Деление:
$F_3(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x\beta_k) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = 0$.
Умножение:
$F_4(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} \beta_k^m p_\alpha\left(\dfrac{x}{\beta_k}\right) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_4(\alpha\beta) = 0$. ■

4.2 Целые алгебраические числа

Определение 4.2. Алгебраическое число α называется *целым алгебраическим*, если $p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Множество всех целых алгебраических чисел обозначим через $\mathbb{Z}_\mathbb{A}$.

Пример 4.1.

- Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$
- $a, b, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b\sqrt{d}\mathbb{Z}_\mathbb{A}$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$

Определение 4.3. Многочлен $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным*, если $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = 1$.

Лемма 4.3 (Гаусса)**.** *Произведение примитивных многочленов примитивно.*

Доказательство. Пусть $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0, g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1x + b_0$.
А также рассмотрим $h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \ldots + c_1x + c_0$.
Пусть существует простое p такое, что $p|c_k, \forall 0 \leqslant k \leqslant m+n$.

Пусть $r = \min k|a_k \vdots p, s = \min k|b_k \vdots p$.
Тогда $c_{r+s} = \sum\limits_{i+j=r+s} a_ib_j \equiv a_rb_s \not\equiv 0 \mod p$, т.е. $p \not| c_{r+s}$. Получаем противоречие. ■

Теорема 4.3. *Если существует унитальный многочлен $f(x) \neq 0 \in \mathbb{Z}[x] : f(\alpha) = 0$, то $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$.*

Доказательство. $p_\alpha(x)|f(x)$ в $\mathbb{Q}[x]$, т.е. $\exists g(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(x) = g(x)p_\alpha(x)$.
Покажем, что $g(x), p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Пусть A, B — НОК знаменателей коэффициентов $g(x)$ и $p_\alpha(x)$ соответственно. Тогда $Ag(x)$ и $Bp_\alpha(x)$ — примитивные многочлены.
$ABf(x) = Ag(x)Bp_\alpha(x)$ — примитивный многочлен по лемме 4.3 Гаусса. Тогда $AB = 1 \Rightarrow A = B = 1$.
■

Лемма 4.4. *Пусть $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$. Пусть $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — сопряженные к $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$. Тогда $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x, \alpha_i) \in \mathbb{Z}[x]$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.2. ■

Теорема 4.4. $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ — *кольцо.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$. Пусть $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — сопряженные к α, $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_m$ — сопряженные к β. Тогда, по Лемме 4.4:

$$F_1(x) = \prod_{i=1}^{m} p_\alpha(x - \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_2(x) = \prod_{i=1}^{m} p_\alpha(x + \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_3(x) = \prod_{i=1}^{m} \beta_i^{\deg p_\alpha} p_\alpha(x/\beta_i) \in \mathbb{Z}[x].$$

Тогда все три многочлена унитарны и $F_1(\alpha+\beta) = F_2(\alpha-\beta) = F_3(\alpha\beta) = 0$. Применив Теорему 4.3, получаем условие теоремы. ■

Задача 4.1. $\forall \alpha \in \mathbb{A}\ \exists d \in \mathbb{Z}$ *такое, что* $d\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$.

4.3 Конечные расширения $\mathbb{Q}$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные алгебраические числа.

Определение 4.4. $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{\dfrac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \mid |f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n], g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0\}$ — *расширение* $\mathbb{Q}$, порожденное $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Задача 4.2. *Доказать, что* $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — *минимальное по включению поле, содержащее и* $\mathbb{Q}$, *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Лемма 4.5. *Пусть* $E = \mathbb{Q}(\theta)$, $\deg(\theta) = n$. *Тогда любой элемент* $\alpha \in E$ *однозначно представим в виде* $\alpha = c_0 + c_1\theta + \ldots + c_{n-1}\theta^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{Q}$.

Доказательство.
Докажем существование: рассмотрим $\alpha = \dfrac{f(\theta)}{g(\theta)} \in E$. Заметим, что поскольку $g(\theta) \neq 0$, то $(p_\theta(x), g(x)) = 1$, т.е. $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x] :\ u(x)p_\theta(x) + v(x)g(x) = 1$.
Тогда $u(\theta)p_\theta(\theta) + v(\theta)g(\theta) = 1$. Отсюда $\dfrac{1}{g(\theta)} = v(\theta)$ и, стало быть, $\alpha = f(\theta)v(\theta)$.
Положим $h(x) = f(x)v(x)$. Поделим $h(x)$ с остатков на $p_\theta(x) : h(x) = q(x)p_\theta(x) + r(x), \deg r(x) < \deg\theta$.
Тогда $\alpha = h(\theta) = r(\theta)$, $\deg r(x) < n$, $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
Докажем единственность: пусть $\alpha = c_0 + c_1\theta + \ldots + c_{n-1}\theta^{n-1} = d_0 + d_1\theta + d_{n-1}\theta^{n-1}$. Тогда

$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)\theta + \ldots + (c_{n-1} - d_{n-1})\theta^{n-1} = 0$ — обнуляющий многочлен θ степени не более $\deg(\theta - 1)$.

Следовательно, по определению $\deg(\theta)$: $\forall i: \; c_i = d_i$. ■

Таким образом, $\mathbb{Q}(\theta)$ — линейное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности n с базисом $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$.

Теорема 4.5 (О примитивном элементе)**.** *Пусть* $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*. Тогда* $\exists \theta \in E : E = \mathbb{Q}(\theta)$*.*

Определение 4.5. Такое θ называется *примитивным элементом* E (над $\mathbb{Q}$).

Следствие 4.1. *Любое конечное расширение* $\mathbb{Q}$ *является конечномерным пространством над* $\mathbb{Q}$*.*

Определение 4.6. Размерность E как линейного пространства над $\mathbb{Q}$ называется *степенью расширения*. Обозначается $[E \colon \mathbb{Q}]$.

Обозначим $\mathbb{Z}_E = E \cap \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

Доказательство. (Теоремы 4.5)
Достаточно доказать для двух чисел: $E = \mathbb{Q}(\xi, \eta)$.
Пусть $\xi_1 = \xi, \xi_2, \dots, \xi_m$ — сопряженное к ξ, $\eta_1 = \eta, \eta_2, \dots, \eta_l$ — сопряженное к η. Возьмём $c \in \mathbb{Q}$: все числа $\xi_i + c\eta_j$ попарно различны. Положим $\theta = \xi + c\eta$, утверждается, что θ — искомое. Обозначим $K = \mathbb{Q}(\theta)$, тогда $\mathbb{Q} \subset K \subset E$ — расширение полей. Покажем, что $\xi, \eta \in K$ — отсюда будет следовать, что $E \subset K$, т.е. $E = K$.
Рассмотрим $p_\xi(x)$, $p_\eta(x)$, пусть $f(x) = p_\xi(\theta - cx)$, где $\theta \in K$, $c \in \mathbb{Q}$, $p_\xi \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда $f(x) \in K[x]$. Заметим, что

$$f(\eta) = p_\xi(\theta - c\eta) = p_\xi(\xi) = 0, \text{ т.е. } \eta \text{ — корень } f(x).$$

Так как f и p_η оба имеют коэффициенты из K, то рассмотрим $d(x) = \text{НОД}(f(x), p_\eta(x))$. Ясно, что $d(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; (x - \eta) | d(x)$; $p_\eta(x)$ имеет корни $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$. Поэтому, $d \subset \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l\}$.
Пусть $d(\eta_i) = 0$. Так как $d | f$, то $f(\eta_i) = 0$, но $f(\eta_i) = p_\xi(\theta - c\eta_i)$. То есть, $\theta - c\eta_i = \xi_j$ для некоторого j (корни p_ξ), но $\theta = \xi_j + c\eta_i$ только когда $i = j = 1$. Следовательно, η — единственный корень $d(x)$. Так как d делит p_η, и у p_η нет кратных корней, то $d(x) = x - \eta$. Но $d(x) \in K[x] \;\Rightarrow\; \eta \in K$. Тогда $\xi = \theta - c\eta \in K$, ведь $\theta \in K$ (по определению K), $c \in \mathbb{Q}$, $\eta \in K$. ■

Теорема 4.6.
Поле $\mathbb{A}$ *алгебраически замкнуто. То есть, если* $f(x) \in \mathbb{A}[x]$*, то* $\exists \beta \in \mathbb{A} : \; f(\beta) = 0$*.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{A}[x]$. Так как $\mathbb{A}$ — поле, то не теряя общности можно считать, что $\alpha_n = 1$. Рассмотрим $E = \mathbb{Q}\left(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\right)$. По теореме 4.5 о примитивном элементе: $E = \mathbb{Q}(\theta)$ для некоторого θ, $\deg(\theta) = m$. Тогда $\alpha_i = r_i(\theta)$, где $r_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r_i) \leqslant m - 1$. То есть

$$f(x) = x^n + r_{n-1}(\theta)x^{n-1} + \dots + r_1(\theta)x + r_0(\theta).$$

Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ — все сопряжены к θ. Рассмотрим

$$F(x) = \prod_{j=1}^{m} \left[x^n + r_{n-1}(\theta_j)x^{n-1} + \dots + r_1(\theta_j) + r_0(\theta_j)\right],$$

заметим, что $f(x, y) = x^n + r_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + r_1(y) + r_0(y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. По лемме 4.2: $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$, при этом $f(x) | F(x)$ в $\mathbb{C}[x]$. Следовательно, все корни $f(x)$ лежат в $\mathbb{A}$. ■

4.4 Нормальные расширения

Определение 4.7. Пусть E — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$. Отображение $\sigma\colon E \to \mathbb{C}$ называется *вложением*, если это инъективный гомоморфизм полей.

Теорема 4.7. *Если $[E\colon \mathbb{Q}] = n$, то существует ровно n различных вложений E в $\mathbb{C}$. При этом, если $E = \mathbb{Q}(\theta)$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — все сопряжены к θ, то отображение $\sigma\colon E \to \mathbb{C}$ $(\alpha \cdot r(\theta) \mapsto r(\theta_i),$ где $r(x) \in \mathbb{Q}[x])$ является вложением E в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Покажем, что любое $\alpha \in E$ при вложении переходит в какое-то своё сопряжённое:
Пусть σ — вложение. Тогда $0 \neq \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)\sigma(1) \;\Rightarrow \sigma(1) = 1$.
Тогда $\sigma(k) = \sigma(1+1+\cdots+1) = \sigma(1)+\sigma(1)+\cdots+\sigma(1) = k$, $\sigma(-1)+\sigma(1) = \sigma(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma(-1) = -1$.
Значит, $\forall k \in \mathbb{Z}\ \sigma(k) = k$.
Далее, $\forall k \in \mathbb{N}\ \sigma(k)\sigma\left(\frac{1}{k}\right) = \sigma(1) = 1$, откуда $\forall k \in \mathbb{Q}\ \sigma(k) = k$. Стало быть, если $f \in \mathbb{Q}[x]$, то $\forall \alpha \in E\ \sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$. В частности, $p_\alpha(\sigma(\alpha)) = \sigma(p_\alpha(\alpha)) = \sigma(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma(\alpha)$ — сопряжённое к α.
Возьмём $\alpha = \theta$, тогда $\sigma\colon \theta \mapsto \theta_i$, где i зависит от σ. И тогда $\forall r(x) \in \mathbb{Q}[x]:\; \sigma(r(\theta)) = r(\sigma(\theta)) = r(\theta_i)$.
Пусть $\sigma_i\colon E \to \mathbb{C}$ $(\alpha = r(\theta) \mapsto r(\theta_i))$. Почему это вложение?
Пусть $\alpha, \beta \in E$, $\alpha = r(\theta)$, $\beta = s(\theta)$, $r(x), s(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r) \leqslant n-1$, $\deg(s) \leqslant n-1$.
$\alpha + \beta = (r+s)(\theta)$, $\alpha \cdot \beta = u(\theta)$, где $u(x)$ — остаток от деления $r(x)s(x)$ на $p_\theta(x)$. Аналогично, $r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i)$.
Тогда

$$\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\beta) = r(\theta_i) + s(\theta_i) = (r+s)(\theta_i) = \theta_i((r+s)(\theta)) = \sigma_i(\alpha+\beta).$$

$$\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\beta) = r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i) = \sigma_i(u(\theta)) = \sigma_i(r(\theta)s(\theta)) = \sigma_i(\alpha\beta).$$

Если $\sigma_i(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \neq 0$, то $1 = \sigma_i(1 = \sigma_i(\alpha)\sigma_i(\alpha^{-1}) = 0$. Противоречие. ∎

Теорема 4.8. *Пусть $[E\colon \mathbb{Q}] = n$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — все вложения E в $\mathbb{C}$, $\alpha \in E$, $\deg(\alpha) = d$. Тогда $d|n$ и множество $\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)\}$ состоит из всех сопряжений к α, каждое из которых повторяется $\dfrac{n}{d}$ раз.*

Доказательство. $\alpha = r(\theta)$, $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r) \leqslant n-1$. Рассмотрим $F(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - \sigma_i)(\alpha)$. Тогда $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - r(\theta_i))$ и по лемме 4.2 $F(x) \in \mathbb{Q}[x] \;\Rightarrow\; p_\alpha(x)|F(x)$. Пусть k максимальное такое, что $p_\alpha^k(x)|F(x)$. Рассмотрим $\dfrac{F(x)}{p_\alpha^k(x)} = g(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Если у g есть корни (если $g \not\equiv const$), то его корни — какие-то сопряжённые с α. Следовательно, $p_\alpha(x)|g(x)$ — противоречие с максимальностью k. Значит, $g(x) = 1$, $F(x) = p_\alpha^k(x)$, $n = kd$. ∎

Следствие 4.2. *$\sigma(\alpha) = \alpha$ при всех вложениях E в $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство.
($\Leftarrow$) Очевидно.
($\Rightarrow$) Из теоремы 4.8. ∎

Определение 4.8. Если для любого вложения σ расширения E справедливо $\sigma(E) = E$, то E называется *нормальным*.

Лемма 4.6. *Пусть E — конечное расширение $\mathbb{Q}$, σ — вложение E в C. Пусть $\sigma(E) \subset E$. Тогда $\sigma(E) = E$.*

Доказательство. E — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{Q}$, $\sigma : E \to E$ — линейное отображение с нулевым ядром. Следовательно, $\dim \sigma(E) = \dim E$ и $\sigma(E) = E$. ∎

Пример 4.2.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — нормально;
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ — не нормально.

Теорема 4.9. *Пусть $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и пусть все сопряженные ко всем α_i лежат в E. Тогда E — нормально.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in E$. Тогда $\alpha = \frac{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}{g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}, f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$.
Если σ — вложение E в $\mathbb{C}$, то $\sigma(\alpha) = \frac{f(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_m))}{g(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_m))} \in E$.
Таким образом, $\sigma(E) \subset E$. Применяя лемму 4.6 получаем, что $\sigma(E) = E$, т.е. E нормально. ∎

Если E нормально, то все вложения E в $\mathbb{C}$ — автоморфизмы E. Можно брать их композиции, существует обратный элемент. Получается группа автоморфизмов E, называемой *группой Галуа*.

Пример 4.3. Группа Галуа $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Пусть E — конечное расширение $\mathbb{Q}, [E : \mathbb{Q}] = n$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — все вложения E в $\mathbb{C}$.

Определение 4.9. Для каждого $\alpha \in E$ *нормой относительно* E называется величина
$N(\alpha) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$.

Пример 4.4. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \; N(\alpha + \beta\sqrt{2}) = (\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2}) = \alpha^2 - 2\beta^2$.

Теорема 4.10.

1. *Если $\alpha \in E$ и $p_\alpha(x) = x^d + \ldots + a_1 x + a_0$, то $N(\alpha) = (-1)^n a_0^{\frac{n}{d}}$.*
2. *Если $\alpha \in E$, то $N(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_E = \mathbb{Z}_{\mathbb{A}} \cap E$, то $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
3. *$N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.*
4. *$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, $N(\frac{\alpha}{\beta}) = \frac{N(\alpha)}{N(\beta)}$.*

Доказательство.

1. Следует из теоремы 4.8 и теоремы Виета.
2. Следует из первого пункта.
3. Следует из определения вложения.
4. Следует из определения вложения.

∎

4.5 Трансцендентность π

Теорема 4.11 (Линдемана-Вейерштрасса). *Пусть* $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ *— различные алгебраические числа. Тогда* $e^{\alpha_0}, \ldots, e^{\alpha_m}$ *линейно независимы (ЛНЗ) над* $\mathbb{A}$.

Теорема 4.12 (Об экспоненциальной линейной форме). *Пусть* $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{A}, a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{A}$. *Пусть* $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k e^{\alpha_k x} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha_k^l}{l!} \right) x^l \in \mathbb{Q}[[x]] \setminus \{0\}$. *Тогда* $A(1) \neq 0$.

Теорема 4.13. *4.12* $\Rightarrow$ *4.11.*

Доказательство. Нужно показать, что $A(1) \neq 0$. Тогда мы применим 4.12 и получим, что $\forall a_0, \ldots, a_m$ $A(1) \neq 0$, т.е. линейная комбинация $e^{\alpha_0}, \ldots, e^{\alpha_m}$ не 0, и утверждение теоремы выполнено.
Можно считать, что все $a_0, \ldots, a_m \neq 0$.
Тогда $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k e^{\alpha_k x} \neq 0$, т.к. вронскиан W

$$W(e^{\alpha_0 x, \ldots, \alpha_m x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_0 x} & e^{\alpha_1 x} & \ldots & e^{\alpha_m x} \\ \alpha_0 e^{\alpha_0 x} & \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \ldots & \alpha_m e^{\alpha_m x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_0^m e^{\alpha_0 x} & \alpha_1^m e^{\alpha_1 x} & \ldots & \alpha_m^m e^{\alpha_m x} \end{vmatrix} = \exp\left(\left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \right) x \right) V(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \neq 0,$$

где $V(x_1, \ldots, x_m)$ является Вандермондом для чисел $x_1, \ldots, x_m$.
Почему $A(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$? Рассмотрим нормальное расширение E поле $\mathbb{Q}$, содержащее $a_0, \ldots, a_m, \alpha_0, \ldots, \alpha_m$. (Например, можно взять все сопряженные к ним и добавить к $\mathbb{Q}$, по теореме 4.9 будет нормальное расширение).
Пусть $[E : \mathbb{Q}] = \eta, \sigma_1, \ldots, \sigma_\eta$ — все автоморфизмы E над $\mathbb{Q}$. Тогда $A(x) = E[[x]]$.
Определим $\sigma_1, \ldots, \sigma_\eta$ на $E[[x]]$ так:

$$\sigma_i : \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^l \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_i(\gamma_l) x^l$$

$$\sigma_i(A(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_i(a_k) \frac{\sigma_i(\alpha_k)^l}{l!} \right) x^l = \sum_{k=0}^{m} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = A_i(x)$$

Поскольку $A(x) \neq 0$, то $A_i(x) \neq 0$.
Рассмотрим $B(x) = \prod\limits_{i=1}^{\eta} A_i(x) \in E[[x]], B(x) \not\equiv 0$.
Заметим, что

$$\sigma_i(B(x)) = \sigma_i\left(\prod_{i=1}^{\eta} A_i(x) \right) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma(A_i(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_i(\sigma_j(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_j(A_i(x)) = B(x) \Rightarrow B(x) \in \mathbb{Q}[[x]].$$

$$B(x) = \prod_{i=1}^{\eta} \sum_{k=0}^{n} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = \sum_{l=0}^{L} b_l e^{\beta_l x}.$$

По Теореме 4.12 $B(1) \neq 0$. Тогда $B(1) = \prod\limits_{j=1}^{\eta} A_j(1) \neq 0 \Rightarrow \forall j \; A_j(1) \neq 0$. А для тождественного σ_j имеем $A_j(x) = A(x)$ получаем, что $A(1) \neq 0$. ∎

Лемма 4.7. *Пусть* $b_0, \dots, b_m, \beta_0, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$, *пусть* $\sum\limits_{k=0}^{m} b_k e^{\beta_k} = 0$. *Рассмотрим многочлен* $f(x) = f_n(x) = (x-\beta_0)^n (x-\beta_1)^{n+1} \dots (x-\beta_m)^{n+1}$, *пусть* $g(x) = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{l \geqslant n} f^{(n)}(x)$ *(с некоторого* l *они все станут равны нулю). Тогда*

$$\left| \sum_{k=0}^{m} b_k g(\beta_k) \right| \leqslant \frac{c^{n+1}}{n!}, \quad \text{где } c = c(b_0, \dots, b_m, \beta_0, \dots, \beta_m) \text{ — не зависит от } n.$$

Доказательство. Положим $F(x) = \sum\limits_{l \geqslant 0} f^{(l)}(x)$. Нужно доказать, что $\left| \sum\limits_{k=0}^{m} b_k F(\beta_k) \right| \leqslant c^{n+1}$. Заметим, что $F(0)e^{\beta_k} - F(\beta_k) = e^{\beta_k} \int\limits_0^{\beta_k} e^{-z} f(z) dz$ (по частям).
Домножим на b_k и просуммируем по k от 0 до m:
$F(0) \sum\limits_{k=0}^{m} b_k e^{\beta_k} - \sum\limits_{k=0}^{m} b_k F(\beta_k) = \sum\limits_{k=0}^{m} \left[b_k \int\limits_0^{\beta_k} e^{\beta_k - z} f(z) dz \right]$ — хотим оценить модуль правой части.

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \left[b_k \int_0^{\beta_k} e^{\beta_k - z} f(z) dz \right] \right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} |b_k| e^r \cdot (2r)^{(m+1)(n+1)} \leqslant c^{n+1}, \text{ где } r = \max_{0 \leqslant k \leqslant m} |\beta_k|$$

$$\text{для } c = (2r)^{m+1} e^r \cdot \max\left(1, \sum_{k=0}^{m} |b_k|\right).$$

■

Доказательство. (теоремы об экспоненциальной линейной форме (Т.Э.Л.Ф.)).
Пусть E — нормальное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее $a_0, \dots, a_m, \alpha_0, \dots, \alpha_m$, $[E\colon \mathbb{Q}] = \nu$, $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ — все автоморфизмы E над $\mathbb{Q}$ (аналогично доказательству теоремы 4.13 о Т.Э.Л.Ф. $\Rightarrow$ Т.Л.—В.). Можно считать, что $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_A$ ($\in \mathbb{Z}_E$), так как существует $\tilde{d} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ такое, что все $\tilde{d}a_0, \tilde{d}a_1, \dots, \tilde{d}a_m \in \mathbb{Z}_A$. От замены то, что дано, и то. что требуется доказать, не поменяется.
Пусть $d \in \mathbb{N}$ — такое, что $d\alpha_0, d\alpha_1, \dots, d\alpha_m \in \mathbb{Z}_E$. Предположим противное: пусть $A(1) = 0$. Тогда продлеваем наши автоморфизмы $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ на $E[[x]]$ как в доказательстве теоремы о Т.Э.Л.Ф $\Rightarrow$ Т.Л.—В. То есть можно рассматривать $(\sigma_i A)(x)$.
Так как $A(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$, то $(\sigma_i A)(x) = A(x)$ $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$. Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{m} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k)x} = (\sigma_i A)(x) = A(x)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{m} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k)} = A(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

Положим $f(x) = f_n(x) = (x-\alpha_0)^n (x-\alpha_1)^{n+1} \dots (x-\alpha_m)^{n+1}$, $g(x) = g_n(x) = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{l \geqslant n} f^{(l)}(x)$. Положим $I = I_n = d^{m(n+1)} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k g(\alpha_k)$. Покажем, что $I \in \mathbb{Z}_E$:
$I = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \sum\limits_{l \geqslant n} d^{m(n+1)} \dfrac{1}{n!} f^{(l)}(\alpha_k) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \cdot$ (целое алгебраическое число), т.к. $d^{m(n+1)} f(x) = d^{-n} h(dx)$, где $h(t) = (t - d\alpha_0)^n (t - d\alpha_1)^{n+1} \dots (t - d\alpha_m)^{n+1}$ (т.е. $h(t) \in \mathbb{Z}_E$). Следовательно, $d^{m(n+1)} \dfrac{1}{l!} f^{(l)}(\alpha_k) =$

$d^{-n+l}\dfrac{1}{l!}h^{(l)}(d\alpha_k) \in \mathbb{Z}_E$ при $l \leqslant n$. Далее,

$I = d^{m(n+1)}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha_0) + (n+1)\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l\geqslant n+1} a_k \dfrac{l!}{(n+1)!}d^{m(n+1)}\dfrac{1}{l!}f^{(l)}(\alpha_k) = a_0\prod\limits_{k=1}^{m}(d\alpha_0 - d\alpha_k)^{n+1} + (n+1)J,$

где $J \in \mathbb{Z}_E$.

Следовательно, $I \in \mathbb{Z}_E$, причём $I \neq 0$, если $\left(n+1,\, N\left(a_0\prod\limits_{k=1}^{m}(d\alpha_0 - d\alpha_k)\right)\right) = 1$.

Таких n бесконечно много: $n+1$ — простое, $\to \infty$. Но тогда и $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$ и $\sigma_i(I) \neq 0$ при "хороших"n.

Но $\sigma_i(I) = d^{m(n+1)}\sum\limits_{k=0}^{m}\sigma_i(a_k)g_i(\sigma_i(\alpha_k))$, где $f_i(x) = (\sigma_i f)(x) = (x - \sigma_i(\alpha_0))^n(x - \sigma_i(\alpha_1))^{n+1}\ldots(x - \sigma_i(\alpha_m))^{n+1}$, $g_i(x) = (\sigma_i g)(x) = \frac{1}{n!}\sum\limits_{l\geqslant n} f_i^{(l)}(x)$. Применим Лемму 4.7 для $b_k = \sigma_i(a_k)$, $\beta_i = \sigma_i(\alpha_k)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Получим

$$|\sigma_i(I)| \leqslant d^{m(n+1)}\frac{c_i^{n+1}}{n!} \leqslant \frac{c^{n+1}}{n!}, \text{ где } c = d^m \max_i(c_i).$$

Итак, все $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$, $\sigma_i(I) \neq 0$ при "хороших"n, $\sigma_i(I) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $N(I) = \prod\limits_{i=1}^{\nu}\sigma_i(I) \to 0$ при $n \to \infty$ и $N(I) \neq 0$ при "хороших"n. Но $N(I) \in \mathbb{Z}$! Противоречие. ■

Следствие 4.3 (из теоремы Л.—В.). *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$, то $e^\alpha \notin \mathbb{A}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$. По теореме Л.—В. $e^{\alpha_0} = 1$ и $e^{\alpha_1} = e^\alpha$ линейно независимы над $\mathbb{A}$. ■

Следствие 4.4. *Число π — трансцендентно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = i\pi$. По теореме Л.—В. $e^{\alpha_0} = 1$, $e^{\alpha_1} = -1$ линейно независимы над $\mathbb{A}$, но они линейно зависимы. Противоречие. ■

Следствие 4.5. *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{1\}$, то $\ln(\alpha) \notin \mathbb{A}$.*

Следствие 4.6. *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$, то $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha) \notin \mathbb{A}$.*

Доказательство. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}e^{i\alpha} - \frac{1}{2i}e^{-i\alpha}$. $i\alpha \neq -i\alpha$ и принадлежит $\mathbb{A} \Rightarrow$ для $0, i\alpha, -i\alpha$ по теореме Л.—В. 1, $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ ЛНЗ, а если бы $\sin(\alpha) \in \mathbb{A}$, то это было бы ЛЗ. ■

Следствие 4.7. *Если $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{A}$ ЛНЗ над $\mathbb{Q}$, то $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_k}$ — алгебраически независимы над $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{A}[x_1, \ldots, x_k]$. Тогда $f(e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_k}) =$
$= \sum\limits_{(n_1,\ldots,n_k)} a_{n_1\ldots n_k}e^{n_1\beta_1+\ldots+n_k\beta_k} =: \alpha_{n_1\ldots n_k}$ — все попарно различны, т.к. $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ЛНЗ над $\mathbb{Q}$. По теореме Л.—В. $e^{n_1\beta_1+\ldots+n_k\beta_k}$ ЛНЗ над $\mathbb{A}$, следовательно, вся сумма не обращается в ноль. ■