

# Normalverteilung - Hausaufgabe vom 16.01.18

*Jonas Stock*

*21 January 2018*

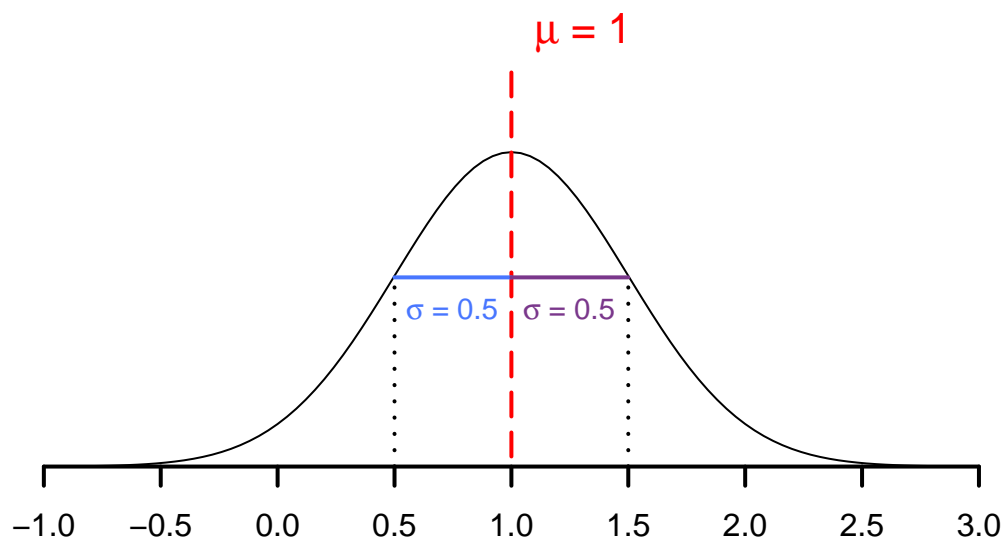
## Erklärung:

Die Normalverteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die angewendet werden kann, wenn Messwerte symmetrisch um einen Erwartungswert liegen. Eine solche Verteilung wird auch Gauss-Kurve genannt.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Die Gauss-Kurve ist immer durch einen Erwartungswert  $\mu$  und eine Standardabweichung  $\sigma$  definiert. Während  $e^{-x^2}$  für die Grundform der Glockenkurve verantwortlich ist, sorgt der Zähler im Exponent für die Verschiebung nach rechts oder links zum Erwartungswert  $\mu$ . Der Nenner im Exponent macht die Kurve schmäler oder breiter, und der Vorfaktor vor dem e streckt oder staucht die Kurve.

Der Erwartungswert  $\mu$  ist der höchste Wert der Kurve. Die Standardabweichung  $\sigma$  beschreibt die Distanz zwischen  $\mu$  und der Stelle, an der die Gauss-Kurve die größte Steigung hat, jeweils in beide Richtungen:



Um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, wird die Fläche unter der Kurve berechnet. Man kann daher Wahrscheinlichkeiten nur noch für einen Bereich, aber nicht mehr für diskrete Werte berechnen. Die Fläche unter der gesamten Kurve muss eins ergeben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

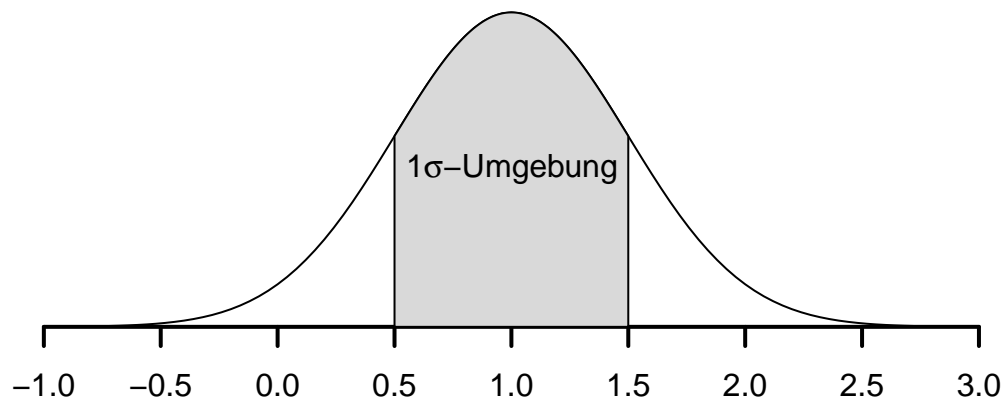
Es sind  $\sigma$ -Umgebungen um den Erwartungswert  $\mu$  und die Fläche, die sie umschließen, definiert:

$$p(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 68.3\%$$

$$p(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 95.4\%$$

$$p(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 99.7\%$$

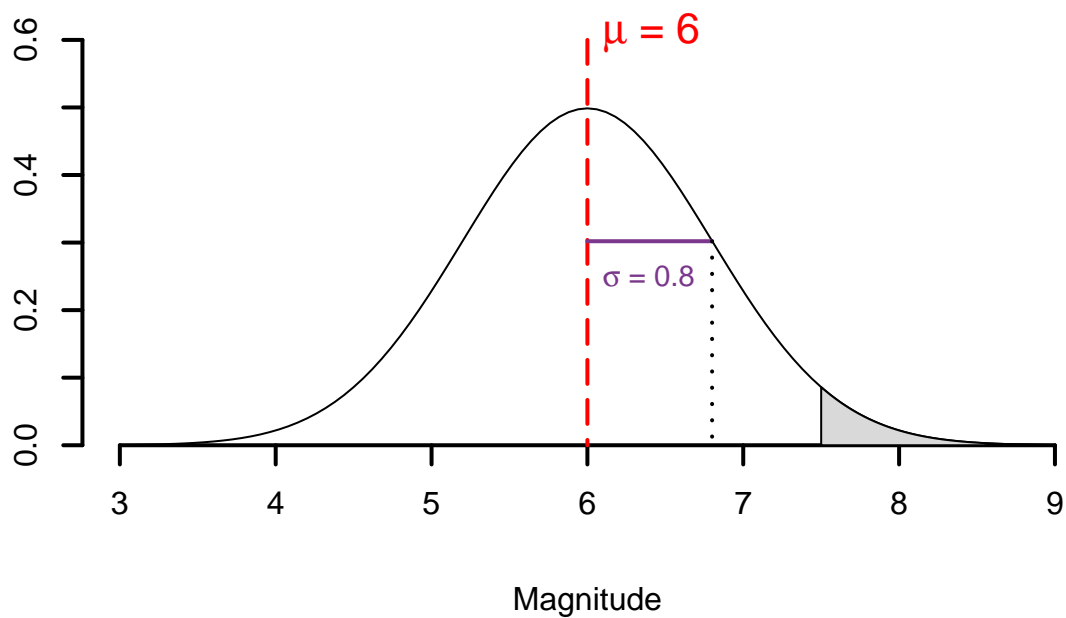
Diese heißen respektive 1-, 2- und 3- $\sigma$ -Umgebung. Folgender Graph zeigt die 1- $\sigma$ -Umgebung:



### Beispielaufgabe:

Für Erdbeben in einer Region sind die Magnituden normalverteilt. Die meisten Erdbeben besitzen eine Magnitude von 6, die Standardabweichung beträgt 0.8. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das nächste Erdbeben eine Magnitude von 7.5 oder höher?

Folgender Graph zeigt die Gauss-Kurve für diesen Fall. Die graue Fläche ist gesucht.



Gesucht ist also:

$$\int_{7.5}^{\infty} f(x) dx$$

Mit R lässt sich das Integral berechnen:

```
f <- function(x) dnorm(x, mean = 6, sd = 0.8, log = FALSE)
integrate(f, 7.5, 99, subdivisions = 100L)
```

```
## 0.03039636 with absolute error < 3.9e-09
```

Die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Erdbeben eine Magnitude von 7.5 oder höher hat, beträgt also ungefähr 3.04%.