Black Litterman Modell

Das Black Litterman Modell verbindet die Idee der „Mean-Variance“ Optimierung nach Markowitz (1952) mit dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) von Sharpe (1964) und Lintner (1965).

Das Problem der „Mean-Variance“ Optimierung ist, dass man ohne Restriktionen gerne mal Portfoliogewichte erhält, die in der Praxis nicht verwendbar sind (siehe Abb. 1):

Asset	Facebook	Apple	Amazon	Netflix	Google	Summe
Weights	0%	4500%	-4400%	0%	0%	100%

Abb. 1: Ein Beispiel, wie die Portfolio Gewichte aussehen könnten, wenn man mit „Mean-Variance“ optimiert.

Große Long- und Short Positionen und eine Konzentration auf wenige Titel. Dadurch, dass in drei von fünf Assets nicht mehr Investiert wird, sinkt die Diversifikation, welche wir aber unbedingt beibehalten wollen. Das oben zu sehende Portfolio ist nämlich nur optimal für den Beobachtungszeitraum, auf dessen Grundlage wir die Optimierung vorgenommen haben. Das heißt aber noch lange nicht, dass diese Portfolio Konstellation auch optimal für die kommende Periode sein wird. Daher ist die oberste Priorität immer ein diversifiziertes und einigermaßen ausgeglichenes Portfolio zu haben. Und da kommt das Black Litterman Modell ins Spiel.

Die Implikation des CAPM ist, dass sich die Preise so lange anpassen, bis allen Investoren Wohl dabei ist, die Assets zu dem aktuellen Preis zu halten und bis der relative Anteil der Marktkapitalisierung eines Assets, gemessen an der weltweiten Marktkapitalisierung, die optimalen Gewichte approximiert.

Die optimalen Gewichte hätten wir (relative Marktkapitalisierung). Daraus können wir nun die Returns berechnen, die nötig wären, damit die Gewichte zum optimalen Portfolio mit dem höchsten Sharpe-Ratio führen. Diese Returns nennt man dann „implied equilibrium returns“ (Π).

Die Besonderheit dieses Modells ist es Π mit den individuellen „Views“ eines Investors zu verknüpfen. Es gibt insgesamt drei verschiedene Arten von Views:

1. Absolute Views: „Apple mach in der nächsten Periode +15%“.
2. Relative Views: „Apple outperformed Amazon um 2 Prozent Punkte“.
3. „Apple und Google outperformen Amazon um 3 Prozent Punkte“.

Die Aufgabe des Black Litterman Modells ist es nun mit den Views Π auf sinnvolle Art und Weise zu verändern und zwar mit

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Diese Gleichung ist im Endeffekt nichts anderes als ein wahnsinnig komplizierter, gewichteter Durchschnitt. Gehen wir die Variablen einmal kurz durch bei einem Portfolio mit $n = 5$ Assets:

- τ: Ein Skalar, den ich auf 1 gesetzt habe.
- Σ: Die Varianz-Kovarianz Matrix der Dimension $n \times n$.

- P: Eine $K \times n$ Matrix (K ist die Anzahl der Views) die mit einer 1 angibt, welche Assets in einem View vertreten sind, sonst 0.
- Ω: Auch eine Varianz-Kovarianz Matrix ($K \times K$) mit den Varianzen der Views auf der Diagonalen und den Rest 0.
- Π: Wie oben schon erwähnt ein $n \times 1$ Vektor mit den „implied equilibrium returns".
- Q: Der $K \times 1$ Vektor mit den Views.

Um wieder den Vergleich zu der „Mean-Variance" Optimierung zu ziehen, könnte man für die Views z.B. die jeweilig erwarte Rendite der Assets als absolute Views nehmen.

Asset	Facebook	Apple	Amazon	Netflix	Google	Summe
Markt-kapitalisierung	617,88	1580	1310	174,41	852,77	4535,06
MK-Gewichte	14%	35%	29%	4%	19%	100%
BlackLitterman Gewichte	8%	32%	39%	12%	10%	100%

Abb. 2: Marktkapitalisierung in Mrd. € (Quelle: finanzen.net). Der Betrachtungszeitraum zur Berechnung der Black-Litterman Gewichte ist vom 01.01.2015 bis 01.01.2020, wobei für die Views die durchschnittliche Rendite der Assets, über den genannten Zeitraum, genommen wurde (Quelle: Yahoo! Finance).

In Abb. 2 sieht man, dass die optimalen Portfoliogewichte, die man mit Hilfe des Black Litterman Modells berechnet hat, sich durch die Views deutlich verändert haben, aber immer noch ein gut diversifiziertes und ausgeglichenes Portfolio bilden, so wie es sein sollte.

Sagen wir, wir haben die Daten von 2015-2020 zur Berechnung der Portfolio Gewichte benutzt. Wenn wir jetzt das erwartete Sharpe Ratio berechnen wollen um die Performance vom Black Litterman Modell mit der „Mean-Variance" Optimierung zu vergleichen, wäre der intuitivste Ansatz, auch wieder die Daten von 2015-2020 zu nutzen. In dem Fall wird die „Mean-Variance" Optimierung auf jeden Fall besser abschneiden, da die Gewichte ja extra auf dieses Sample, gefitted wurde und die Performance Messung in-sample erfolgt. Das sagt aber noch nichts darüber aus, wie die beiden Modelle out-of-sample performen, und das ist das eigentliche, was interessiert. Out-of-sample heißt, man teilt die Daten auf. Z.B. nutzt man die eine Hälfte um die Portfolio Gewichte zu berechnen und testet die Performance dann aber mit der anderen Hälfte, also mit den für das Modell „unbekannten" Daten. Dieses Verfahren nennt man Cross Validation.

Für nähere Angaben zu den Berechnungen der einzelnen Variablen siehe man die unten genannten Paper und den zugehörigen Python-Code.

Beachte bei letzterem zwei kleine Abweichungen zur Literatur. Zunächst einmal werden im Code keine Marktkapitalisierungsgewichte genommen, sondern alle Assets gleich Gewichtet um das lästige Heraussuchen von Marktkapitalisierungen zu ersparen. Um eine literaturnähere Version zu erhalten:

wmarket = np.array([$MarktKap_1$, … , $MarktKap_n$])
wmarket /= np.sum(wmarket).reshape(wmarket.shape[0], 1)

Des Weiteren, kann es trotzdem noch vorkommen, dass man negative Gewichte und unausgeglichene Portfolios bekommt. Das hängt damit zusammen, dass die Views teilweise zu stark von Π abweichen, oder wir uns in einem allgemeinen Abschwung befinden. Daher können die Views folgendermaßen adjustiert werden, indem man die oben genannte Unterschiedlichkeit herausnimmt:

$$Q = \Pi + \delta * (\bar{r} - \Pi)$$

δ kann dabei nach Belieben angepasst werden und liegt zwischen null und eins.

Literatur

- Black, Fischer/Litterman, Robert (1991): Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium
- Black, Fischer/Litterman, Robert (1992): Global Portfolio Optimization
- Idzorek, Thomas (2007): Forecasting Expected Returns in the Financial Markets – A step- by-step guide to the Black-Litterman model https://doi.org/10.1016/B978-075068321-0.50003-0
- Lintner, John (1965): The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets https://www.jstor.org/stable/1926735
- Markowitz, Harry (1952): Portfolio Selection https://www.jstor.org/stable/2975974
- Sharpe, William (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x