Portfolio Optimierung nach Markowitz

Harry Markowitz hat 1952 sein berühmtes Paper veröffentlicht, was den Grundstein zur „Modern Portfolio Theory“ gelegt hat. In dem Paper geht darum, mit einer Portfolio Optimierung (präziser: „Mean-Variance-Optimization“) die Assets in einem Portfolio so zu gewichten, dass das Portfolio „effizient“ ist. Das Portfolio ist effizient wenn:

1. Es kein anderes Portfolio mit der gleichen Rendite aber einer geringeren Standardabweichung gibt.
2. Es kein anderes Portfolio mit der gleichen Standardabweichung aber einer höheren Rendite gibt.

Berechnet man nun für alle möglichen Portfoliokombinationen die erwartete Rendite μ und die Standardabweichung σ, so kann man diese in ein „Mü-Sigma“-Diagramm plotten (siehe Abb. 1). Die effizienten Portfolios liegen nun auf dem oberen, äußeren Rand, welchen man auch „efficient Frontier“ nennt.

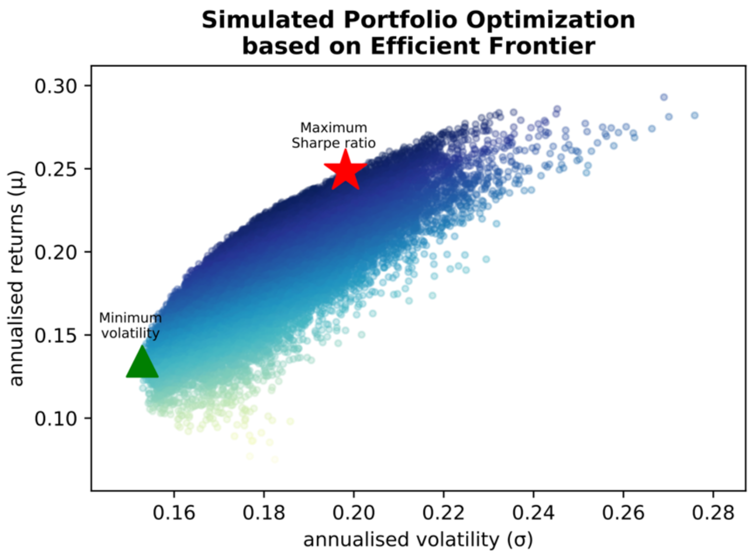

Abb. 1: „Mü-Sigma“-Diagramm in dem alle möglichen Kombinationen eines Portfolios, bestehend aus 5 Assets, geplottet wurden. Die zugrundeliegenden Daten waren auf Tagesbasis, daher wurden die Returns und die Standardabweichung auf Jahresbasis gebracht bzw. Annualisiert. Ein Jahr hat $t = 250$ Handelstage, daher ist $\mu_{ann.} = \mu * t$ und $\sigma_{ann.} = \sigma * \sqrt{t}$.

Aber wie wählt man nun aus, welches Portfolio für einen Investor das „beste“ ist? Wir haben ja schließlich eine ganze Bandbreite an effizienten zur Verfügung! Das kommt ganz darauf an, wie risikoavers bzw. -affin ein Investor ist. Ist für ein Investor das Risiko genauso wichtig wie die Rendite, so ist das Portfolio mit dem Maximalen Sharpe Ratio für ihn die beste Wahl. Das Sharpe Ratio ist als $\frac{\mu - r_f}{\sigma}$ definiert, wobei wir von der Risikofreien Rendite r_f (i.d.R. der Zinssatz der 10-Jährigen Staatsanleihen) wegen Vernachlässigbarkeit absehen.

Ist ein Investor aber z.B. risikoaverser, d.h. er ist nur bereit eine Einheit mehr Risiko einzugehen, wenn er dafür mit mehr als einer Einheit Rendite entschädigt wird, kann man die z.B. die recht simple Nutzenfunktion $U = \mu - \beta\sigma^2$ aufstellen, mit $\beta > 1$. Wenn wir nun nach

μ umformen, können wir U (eine sogenannte Indifferenzkurve) in das „Mü-Sigma"-Diagramm einzeichnen. Wir müssen nun ein U finden, was die „efficient Frontier" tangiert. Das wäre dann das beste Portfolio bei der gegebenen Risikoaversion (siehe Abb. 2).

Um die Rendite eines Portfolios zu erhalten, nehmen wir den Gewichteten Durchschnitt der Renditen: $\mu \coloneqq \sum_{i=0}^{n} w_i * r_i$, mit w_i als die Gewichte der Assets. Eine bessere Schreibweise, gerade bei der Implementierung, ist die Matrixschreibweise $\mu = w * r$ wobei w ein (1 x n) Vektor und r ein (n x 1) Vektor ist.

Die Portfoliovarianz ist ein wenig kniffliger zu bestimmen, da man nicht einfach, wie bei der Rendite, den gewichteten Durchschnitt der Varianzen nehmen kann, sondern auch die Kovarianzen berücksichtigen muss. Aus diesem Grund gibt es die Varianz-Kovarianz Matrix, eine symmetrische, quadratische und invertierbare Matrix, mit den Varianzen auf der Hauptdiagonalen (denk dran: die Kovarianz zwischen Asset x und Asset x ist das gleiche wie die Varianz) und den Kovarianzen jenseits der Hauptdiagonalen. Die Matrixschreibweise für die Portfoliovarianz ist nun definiert als $\sigma^2 \coloneqq w\Sigma w^T$ mit Σ der Varianz-Kovarianz Matrix, wobei $\Sigma \coloneqq \frac{1}{n}(r - \bar{r})^T(r - \bar{r})$ mit $\bar{r}$ dem Vektor mit den Durchschnittsrenditen.

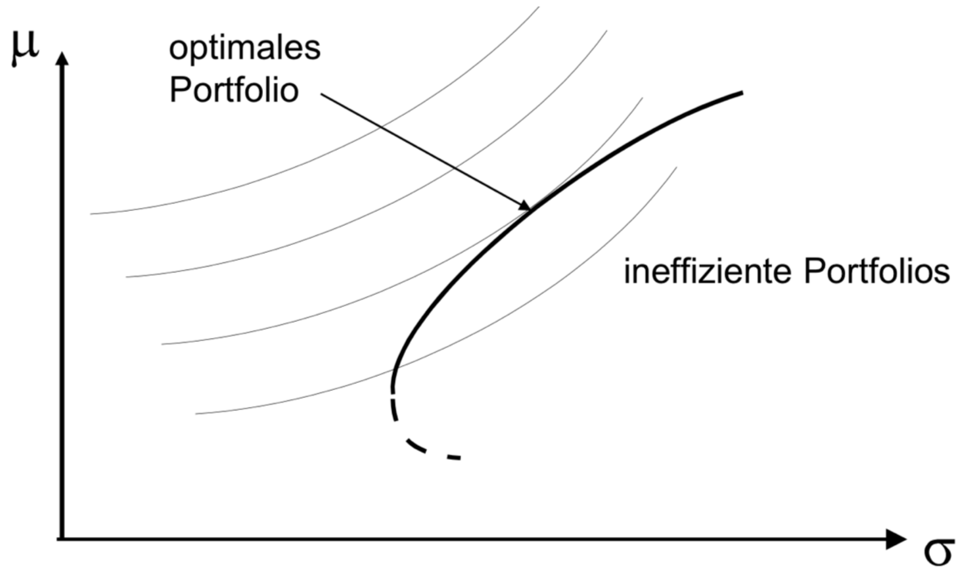

Abb. 2: „Mü-Sigma"-Diagramm in dem die „efficient Frontier" eines Portfolios eingezeichnet wurde. Des Weiteren sieht man eine Nutzenfunktion der Form $U = \mu - \beta\sigma^2$ mit vier unterschiedlichen Nutzenniveaus von U. Das Portfolio, das von der Indifferenzkurve tangiert wird, ist das bestmögliche Portfolio, bei den gegebenen Risikopräferenzen.

Literatur

- Markowitz, Harry (1952): Portfolio Selection
  https://www.jstor.org/stable/2975974
- Markowitz, Harry (1991): Foundations of Portfolio Theory
  http://www.jstor.com/stable/2328831
- Sharpe, William (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk
  https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x