向量场的李括号

Wikipedia

27 October 2023

在微分拓扑的数学领域中，**向量场的李括号** (**Lie bracket of vector fields**)，也称为**雅可比李括号** (**Jacobi-Lie bracket**) 或**向量场的对易子** (**commutator of vector fields**)，是一个算子，它将在光滑流形 M 上的任意两个向量场 X 和 Y 赋给第三个向量场，其标志为 $[X,Y]$。

从概念上讲，李括号 $[X,Y]$ 是 Y 沿着由 X 生成的流的导数，有时标志为 $\mathcal{L}_X Y$（“Y 沿着 X 的李导数”）。这推广到任意张量场沿着 X 生成的流的李导数。

李括号是一个 **R** 双线性运算，它将在流形 M 上所有光滑向量场的集合转化为 (无限维的) 李代数。

李括号在微分几何和微分拓扑中起着重要作用，如 Frobenius 可积定理，也是非线性控制系统几何理论的基础。[1]

1 定义

定义李括号有三种概念上不同但等效的方法：

1.1 向量场作为导子

每个在流形 M 上的平滑向量场 $X : M \to TM$，当我们定义 $X(f)$ 为另一个函数，其在一个点 p 处的值为 f 在点 p 处沿着方向 $X(p)$ 的方向导数 (directional derivative) 时，可视为一个微分算子 (differential operator)，它作用在光滑函数 $f(p)$ (其中 $p \in M$ 并且 f 为 $C^\infty(M)$ 级) 上。这样，每个光滑向量场 X 就成为在 $C^\infty(M)$ 上的导子 (derivation)。此外，在 $C^\infty(M)$ 上的任意导子都来自于唯一的光滑向量场 X。

通常，任意两个导子 δ_1 和 δ_2 的对易子 (commutator) $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$ 也是一个导子，其中 $\circ$ 标志算子的分量。这可用于将李括号定义为对应于对易子导数的向量场：

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \text{ for all } f \in C^\infty(M).$$

1.2 流与极限

设 Φ_t^X 是与向量场 X 相关联的流 (flow)，并设 D 为标志切映射的导数算子。则 X 和 Y 在点 $x \in M$ 处的李括号可定义为李导数 (Lie derivative)：

$$[X,Y]_x = (\mathcal{L}_X Y)_x := \lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{D}\Phi_{-t}^X)\, Y_{\Phi_t^X(x)} - Y_x}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{D}\Phi_{-t}^X)\, Y_{\Phi_t^X(x)}.$$

这也会测量在连续方向 $X, Y, -X, -Y$ 中的流返回到点 x 的失败：

$$[X,Y]_x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=0}\left(\Phi^Y_{-t}\circ\Phi^X_{-t}\circ\Phi^Y_{t}\circ\Phi^X_{t}\right)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\left(\Phi^Y_{-\sqrt{t}}\circ\Phi^X_{-\sqrt{t}}\circ\Phi^Y_{\sqrt{t}}\circ\Phi^X_{\sqrt{t}}\right)(x).$$

1.3 在坐标中

尽管上述李括号的定义是内在的 (不依赖在流形 M 上的坐标的选择)，但在实践中，人们通常希望根据特定的坐标系统 $\{x^i\}$ 来计算括号。对于关联的切丛的局部基，我们写为 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$，以使得对于光滑函数 $X^i, Y^i : M \to \mathbb{R}$，一般向量场可以写为 $X = \sum_{i=1}^n X^i\partial_i$ 和 $Y = \sum_{i=1}^n Y^i\partial_i$。则李括号可计算为：

$$[X,Y] := \sum_{i=1}^n \left(X\left(Y^i\right) - Y\left(X^i\right)\right)\partial_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i\right)\partial_i.$$

如果 M 是 $\mathbf{R}^n$ 的 (一个开子集)，则向量场 X 和 Y 可以写为形式 $X : M \to \mathbb{R}^n$ 和 $Y : M \to \mathbb{R}^n$ 的光滑映射，并且李括号 $[X,Y] : M \to \mathbb{R}^n$ 给出为：

$$[X,Y] := J_Y X - J_X Y$$

其中，J_Y 和 J_X 是 $n\times n$ 雅可比矩阵 ($\partial_j Y^i$ 和 $\partial_j X^i$ 分别使用索引表示法) 乘以 $n\times 1$ 列向量 X 和 Y。

2 性质

向量场的李括号等价于在 M 上的所有向量场的实向量空间 $V = \Gamma(TM)$ (即切丛 $TM \to M$ 的光滑截面)，它们带有一个李代数的结构，这意味 $[\cdot,\cdot]$ 是一个映射 $V\times V \to V$，具有性质：

- $\mathbf{R}$ 双线性性
- 反对称，$[X,Y] = -[Y,X]$
- 雅可比恒等式，$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$

第二个性质的直接结果是，对于任意 X，$[X,X] = 0$。

此外，对于李括号还有一个 “乘积规则”。给定在 M 上的一个光滑 (标量值) 函数 f 和在 M 上的一个向量场 Y，通过在每个点 $x\in M$ 处将向量 Y_x 乘以标量 $f(x)$ 得到一个新的向量场 fY。则：

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y],$$

其中，我们将标量函数 $X(f)$ 与向量场 Y 相乘，将标量函数 f 与向量场 $[X,Y]$ 相乘。这会将带有李括号的向量场转化为李代数胚 (Lie algebroid)。

X 和 Y 的李括号消失意味着跟随在这些方向中的流定义了一个嵌入在 M 中的表面，其中 X 和 Y 为坐标向量场：

定理. *$[X,Y] = 0$ 当且仅当 X 和 Y 的流在局部可交换时，意味着 $\left(\Phi^Y_t\Phi^X_s\right)(x) = \left(\Phi^X_s\Phi^Y_t\right)(x)$ 对于所有 $x\in M$ 和足够小的 s,t 成立。*

这是 Frobenius 可积定理的一个特例。

3 示例

对于一个李群 G，对应的李代数 $\mathfrak{g}$ 是在恒等式 T_eG 处的切空间，其可用 G 上的左不变向量场的向量空间来识别。两个左不变向量场的李括号也是左不变的，其定义了 Jacobi 李括号运算 $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$。

对于元素为矩阵 $g\in G\subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的一个矩阵李群，每个切空间可以表示为矩阵：$T_gG = g\cdot T_IG\subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$，其中 $\cdot$ 表示矩阵乘法，并且 I 表示单位矩阵。由 $X_g = g\cdot X\in T_gG$ 给出了 $X\in\mathfrak{g}=T_IG$ 对应的不变向量场，并且计算表明在 $\mathfrak{g}$ 上的李括号对应于矩阵的一般对易子：

$$[X,Y]=X\cdot Y-Y\cdot X.$$

4 推广

如上所述，李导数可以看作是李括号的推广。李括号（向量-值微分形式）的另一个推广是 Frölicher-Nijenhuis 括号。

References

1. Isaiah 2009, pp. 20-21, nonholonomic systems; Khalil 2002, pp. 523-530, feedback linearization.
2. "Lie bracket" (`https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lie_bracket`), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]
3. Isaiah, Pantelis (2009), "Controlled parking [Ask the experts]", IEEE Control Systems Magazine, 29 (3): 17-21, 132, doi:10.1109/MCS.2009.932394 (`https://doi.org/10.1109%2FMCS.2009.932394`), S2CID 42908664 (`https://api.semanticscholar.org/CorpusID:42908664`)
4. Khalil, H.K. (2002), Nonlinear Systems (`http://www.egr.msu.edu/khalil/NonlinearSystems/`) (3rd ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, ISBN 0-13-067389-7
5. Kolář, I., Michor, P., and Slovák, J. (1993), Natural operations in differential geometry (`http://www.emis.de/monographs/KSM/index.html`), Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, ISBN 3-540-56235-4 Extensive discussion of Lie brackets, and the general theory of Lie derivatives.
6. Lang, S. (1995), Differential and Riemannian manifolds, Springer-Verlag, ISBN 978-0-38794338-1 For generalizations to infinite dimensions.
7. Lewis, Andrew D., Notes on (Nonlinear) Control Theory (`http://penelope.mast.queensu.ca/math890-03/ps/math890.pdf`) (PDF)
8. Warner, Frank (1983) [1971], Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, New York-Berlin: Springer-Verlag, ISBN 0-387-90894-3