

双曲函数的数学内在联系与外延应用

Shuyong Chen

2023 年 12 月 5 日

—题记：双曲难解圆周率，孪生未逢相对时。

1 简介

三角函数和双曲函数是数学分析中的基本组成部分，它们在多个领域内扮演着至关重要的角色。它们不仅构成了数学分析的基础，而且在物理科学、工程学以及其他应用科学领域中都有着广泛的应用。本文的目的是深入探讨这些函数及其内在的数学联系，以及它们在实际中的应用。

三角函数，包括正弦、余弦和正切 ($\sin / \cos / \tan$)，在几何学和振动分析中是众所周知的工具。它们在描述圆形和周期性行为时尤为重要。与之相对的双曲函数——双曲正弦、余弦和正切 ($\sinh / \cosh / \tanh$)——尽管在形式上与三角函数相似，但却展示出独特的性质，特别是在处理双曲几何问题时。本文将从基本原理出发，详细推导这两类函数之间的转换关系，并探究它们在几何和物理上的意义。

此外，文章还将探讨双曲函数的一个关键性质——等面积变换。我们将介绍并证明双曲函数的输入值与其上向量扫掠过的面积之间的直接关系。这种性质不仅在数学上有趣，而且在物理学中的意义尤为深远，例如在描述相对论效应时。

双曲函数与圆形三角函数之间微妙的联系，通过欧拉公式被巧妙地桥接。本文将展示这些函数是如何交织在数学分析体系中的，以及它们是如何共同构成一个丰富而又神奇的数学世界的。本文不仅会介绍它们的数学原理和证明，还会探究它们在描述时空结构的相对论中所扮演的角色。

通过对这些基本但强大的数学工具的全面描述，本文旨在揭示双曲三角函数的起源、它们与欧拉公式的相互关系，以及它们在现代科学和工程中的应用。

2 三角函数之间的关系

常用的三角函数之间的数值关系与恒等式见图 1：

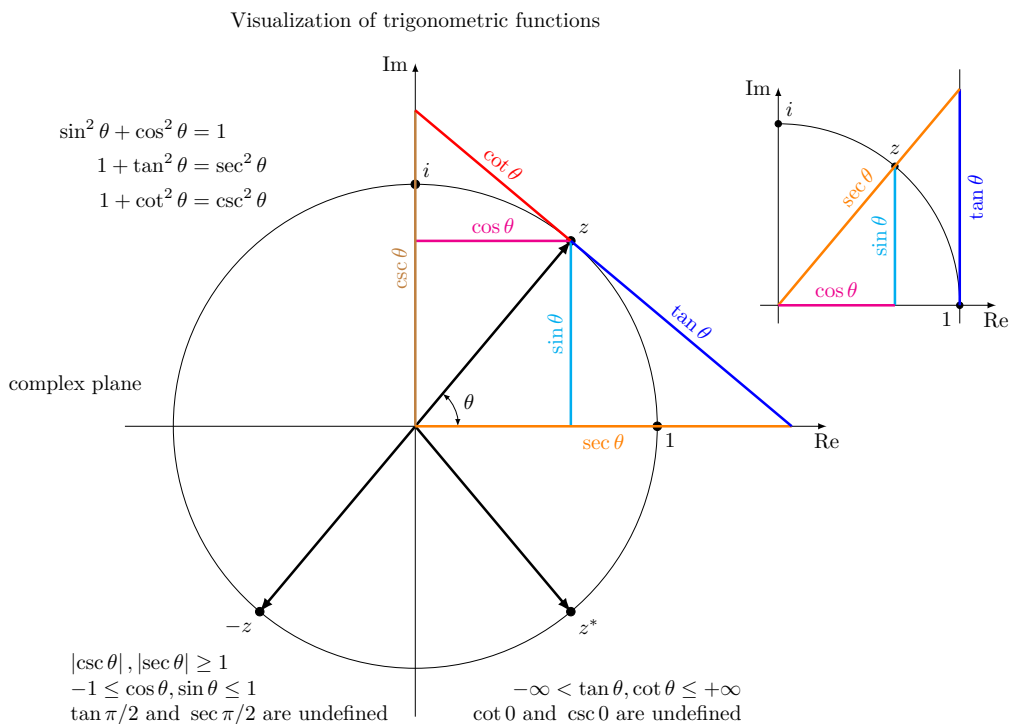


图 1: 三角函数的可视化

此外，三角函数之间还有以下这些恒等式：

正割函数 $\cot \theta$ 和余割函数 $\csc \theta$ 之间的关系：

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

则两者之间有：

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

这可以从三角函数的原始定义出发推导。由定义，

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

两边除以 $\sin^2 \theta$ ：

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

即：

$$\csc^2 \theta + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

同样，也可以给出正切函数 $\tan \theta$ 和余割函数的关系：

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

以及正割函数和正切函数之间的关系：

$$\cot^2 \theta + \tan^2 \theta = 1$$

分别得到实部和虚部：

$$\begin{aligned}\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

通过逐项比较，我们发现 $\cosh(x)$ 和 $\sinh(x)$ 实际上是余弦和正弦的双曲形式。余弦是偶函数而正弦是奇函数，同样双曲余弦 \cosh 是偶函数而双曲正弦 \sinh 是奇函数。关键的区别在于 $\cos'(x) = -\sin(x)$ 而 $\cosh'(x) = \sinh(x)$ 。并且从正切的形式看，它们的形式也有相似性：

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}, \\ \tanh \theta &= \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.\end{aligned}$$

几何上， $\cos(x)$ 和 $\sin(x)$ 勾画出单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ ，而 $\cosh(x)$ 和 $\sinh(x)$ 勾画出单位双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右半部分。这反映了指数函数和三角函数的不同几何结构。

另外，双曲余弦函数和正弦函数可以几何地解释为某些微分方程的解。例如，函数 $\cosh(x)$ 是如下微分方程的解：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$$

该微分方程类似于余弦函数的微分方程：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

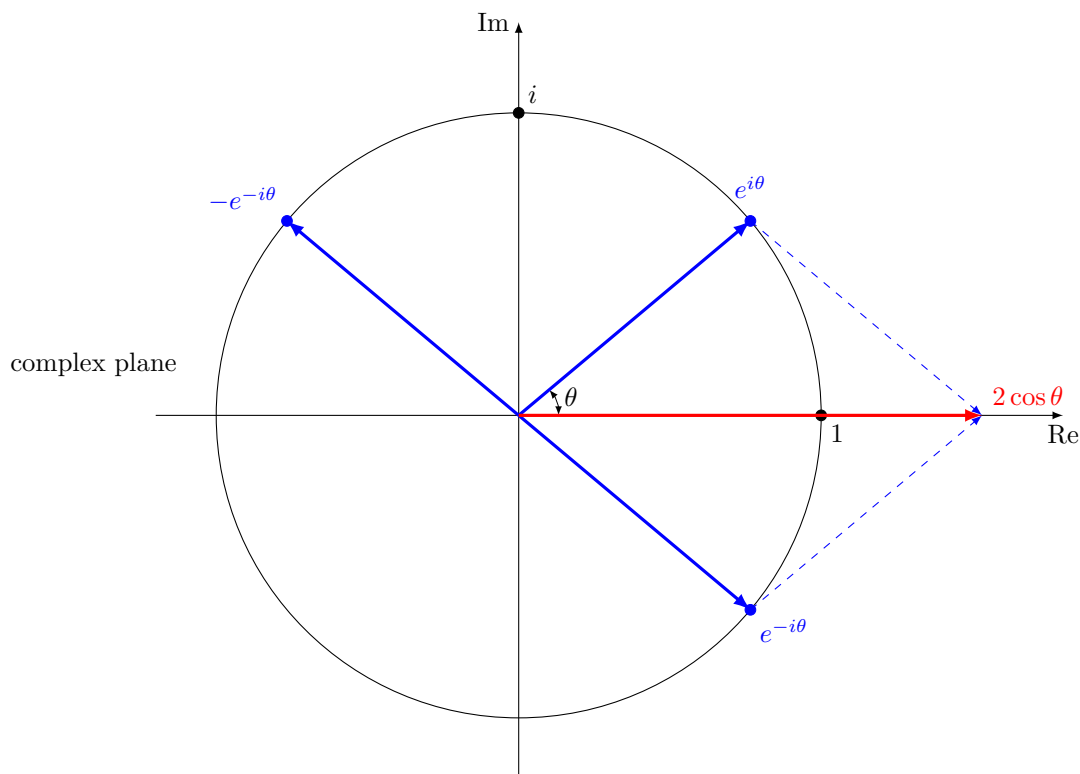
这种类比进一步强化了这样一种观点，即双曲函数是正弦函数和余弦函数的“双曲”版本。

2.2 复平面中圆形函数和双曲函数之间的关系

像 i 的乘积与单位圆和单位双曲线之类的东西都有几何解释，但是三角函数，不论圆形函数 (circular) 还是双曲函数 (hyperbolic)，实际上只是为实数输入而几何定义的。它们以及密切相关的指数函数 (exponential function) 通过解析延拓 (analytic continuation) 扩展到非实数输入：本质上，通过声明幂级数或微分方程也将其用作非实数输入的定义。我们可以使用几何来考虑圆形三角函数或双曲函数 (但不能同时考虑两者)，然后将方程的边与指数函数 (或类似函数) 连接起来。这被称为“半角几何”参数。

2.2.1 \cos 与 \cosh

在几何术语中， $\cos \theta$ 是单位圆上点的 x 坐标， θ (弧度) 的旋转是从正 x 轴 (以 θ 的角度) 的逆时针旋转。考虑 $\cos \theta + 0i$ 作为复平面中的一个向量是有帮助的。现在， $\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{i(-\theta)}}{2}$ 。所以必须论证 $2\cos \theta = e^{i\theta} + e^{i(-\theta)}$ 。但对于实数 φ (包括 $\varphi = \pm\theta$)， $e^{i\varphi}$ 是单位圆上一个 φ 角度的点。可以用几何形式将这两个表达式连接起来，参见图 3：

Visualization of trigonometric functions : $\cos \theta$ 图 3: \cos image

这表明, 当 $e^{i\theta}$ 和 $e^{i(-\theta)}$ 用向量相加时, 将得到两倍的水平分量: $2\cos\theta$, 因为逆时针旋转 θ 和顺时针旋转 θ 的水平分量是相同的。

如果 $z = -i\alpha$, 则 $\cos\theta$ 变为 “ $\cos(-i\alpha) = \cosh(\alpha)$ ”。设 $f(w) = \cosh(w) + i\sinh(w)$ 给出单位双曲函数上的点 (参数化为从原点开始的线段所对应的有符号面积的两倍), 这类似于 $\cos w + i\sin w = e^{iw}$ 在单位圆上给出的点。那么 $\cos w = \frac{f(iw) + f(-iw)}{2}$ (通过上述的圆形几何参数, 这至少满足实数 w 的情况)。所以我们有 $\cos(-i\alpha) = \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}$, 并且必须论证 $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2\cosh(\alpha)$ 。该图像与余弦的非常相似, 参见图 4:

Visualization of hyperbolic functions : $\cosh(\alpha)$

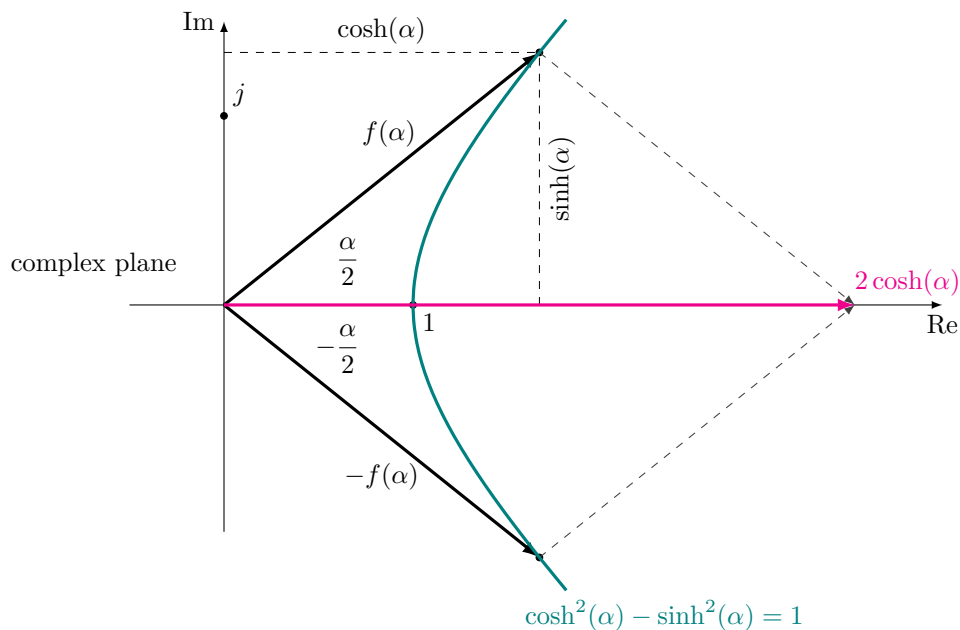


图 4: cosh image

这表明，当 $f(\alpha)$ 和 $f(-\alpha)$ 用向量相加时，得到的是两倍的水平方向的分量： $2 \cosh \alpha$ ，因为对于水平分量，在水平轴上方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积，与水平轴下方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积相同。

2.2.2 sin 与 sinh

对于 $\sin \theta$ ，有一个非常相似的故事。 $\sin \theta$ 是在 θ 角度处的 y 坐标，并且 $-i \sinh(i\theta) = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ 。因为 $-i = \frac{1}{i}$ ，我们只需要讨论为什么 $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{i(-\theta)}$ 。 $i \sin \theta$ 是在 θ 角度处的一个点的垂直向量的 y 坐标，参见图 5：

Visualization of trigonometric functions : $\sin \theta$

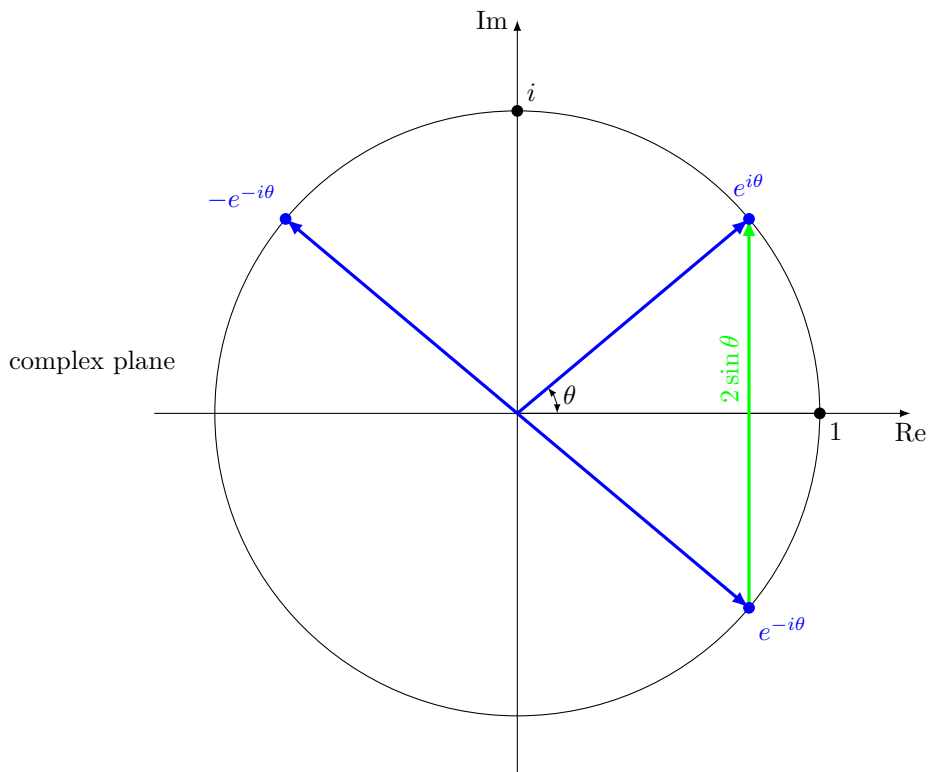


图 5: \sin image

这表明，当 $e^{i\theta}$ 与 $e^{i(-\theta)}$ 用向量相减时，得到两倍的垂直分量： $2i \sin \theta$ ，因为逆时针和顺时针旋转相同角度的垂直分量大小相等，方向相反。

如果 $z = -i\alpha$ ，则 $\sin \theta$ 变为 “ $\sin(-i\alpha) = -i \sinh(\alpha)$ ”。用上面的 f ，我们有 $\sin w = \frac{f(iw) - f(-iw)}{-2}$ （通过上述的圆形几何参数，这至少满足实数 w 的情况），这产生 $\sin(-i\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{-2}$ ，所以我们必须论证 $f(\alpha) - f(-\alpha) = 2i \sinh \alpha$ 。向量减法使得该图像与正弦的非常相似，参见图 6：

Visualization of hyperbolic functions : $\sinh(\alpha)$

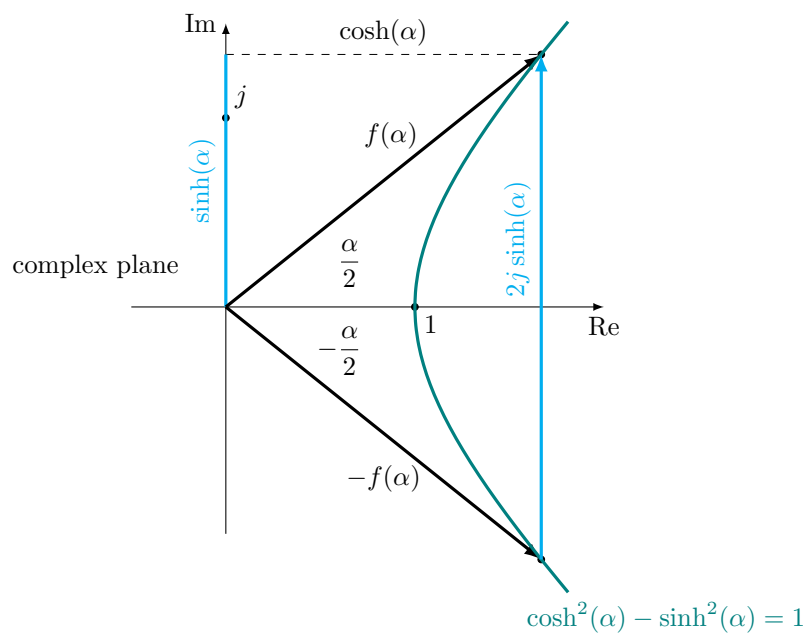
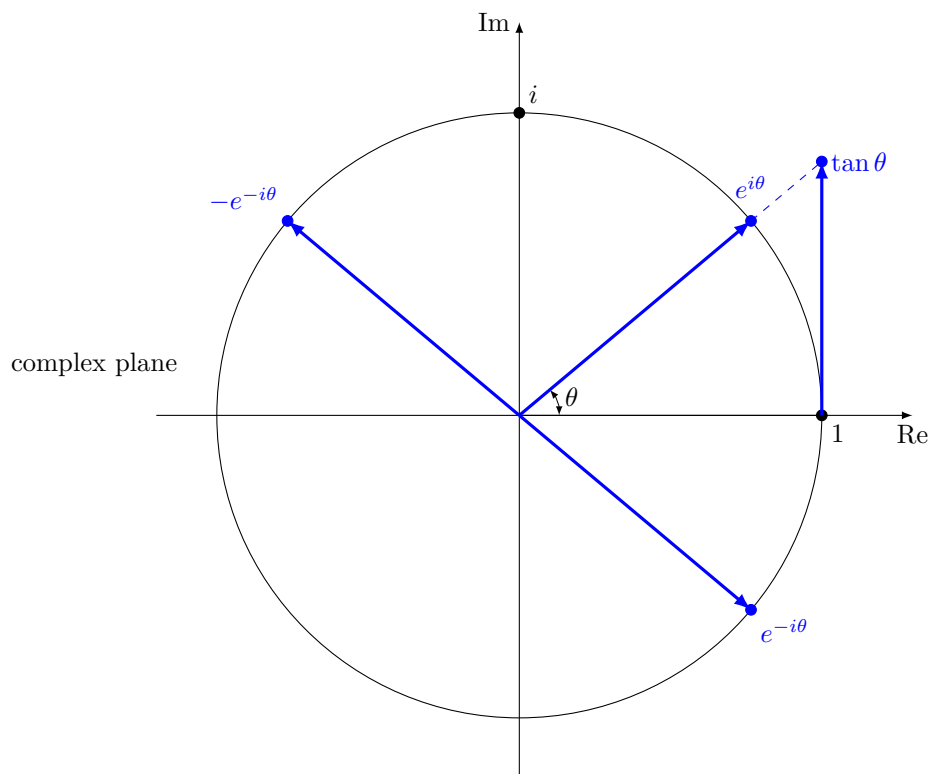


图 6: \sinh image

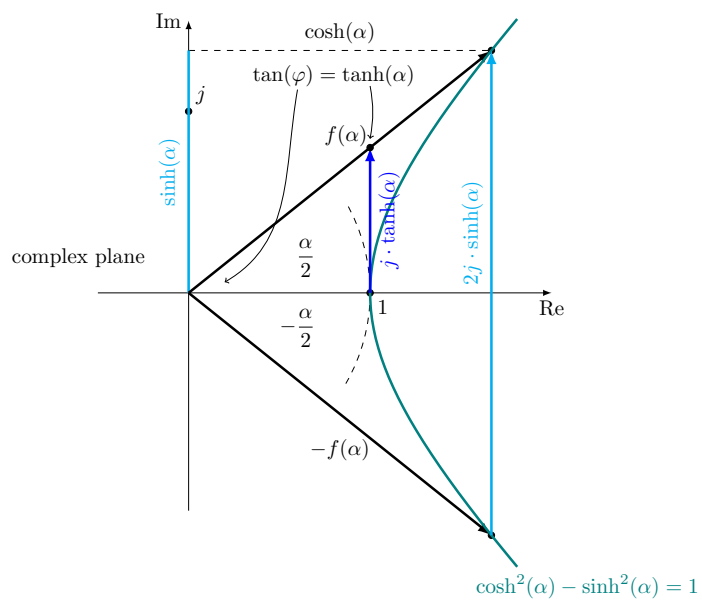
这表明，当 $f(\alpha)$ 和 $f(-\alpha)$ 用向量相减时，得到两倍的垂直分量： $2i \sinh \alpha$ ，因为水平轴上方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积与水平轴下方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积垂直分量大小相等，方向相反。

2.2.3 \tan 与 \tanh

\tan 是 \sin 与 \cos 的比值，参见图 7：

Visualization of trigonometric functions : $\tan \theta$ 图 7: \tan image

\tanh 是 \sinh 与 \cosh 的比值, 参见图 8:

Visualization of hyperbolic functions : $\tanh(\alpha)$ 图 8: \tanh image

注意: \tan 与 \tanh 比较特殊, 在点 $(1, 0)$ 处的圆形函数和双曲函数共享切线, 这显示三角正切函数和双曲正切函数共享一个数值:

$$\tan(\varphi) = \tanh(\alpha)$$

$$\varphi = \arctan(\tanh(\alpha))$$

其中, $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ 。需要 4 条双曲函数的曲线才能覆盖 2π , 并且 $y = x$ 和 $y = -x$ 是渐近线。

3 双曲函数等面积变换的证明

根据第 2.2 节的公式对比, 我们注意到, 双曲函数的输入 α 是一个面积角, 而圆形三角函数的输入 θ 是一个弧度角。

对于圆形三角函数, 同样可以输入面积角。根据圆形的面积公式 $A = \pi r^2$ 和圆周公式 $S = 2\pi r$ 的比值, 当 $r = 1$ 时, 系数为 $1/2$, 也就是在单位圆上, 扇形的面积是对应弧长的 $1/2$ 。并且我们还有扇形的面积公式 $A = \frac{1}{2}\theta r^2$ 。

所以, 我们现在的的问题是: 有一条曲线 $x^2 - y^2 = 1$, 以及一个输入 $\alpha \in \mathbb{R}$ 。则该曲线经过点 $(1, 0)$ 和 $(x_0, y_0) = (x(\alpha), y(\alpha))$ 。我们需要根据 α 写出 x, y 的方程, 并论证 OAP 的面积为 $\alpha/2$, 如图 9 所示。

Visualization of hyperbolic functions : the input (α) is twice of the area

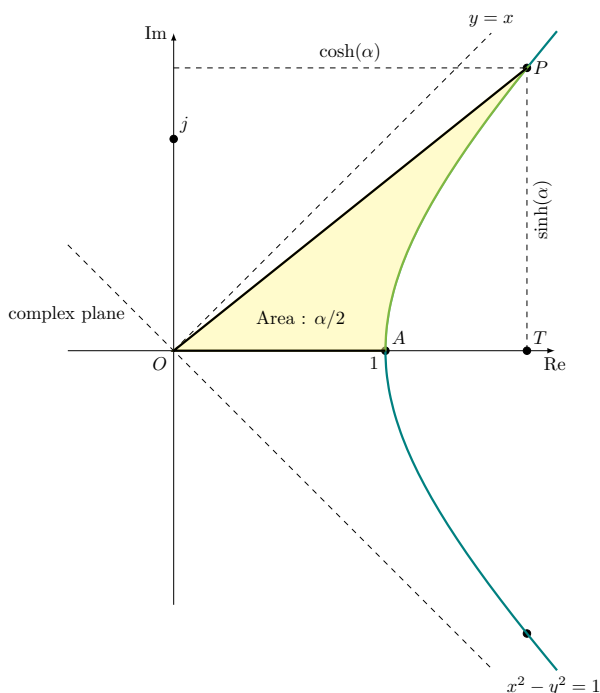


图 9: Hyperbolic trig function, the input is twice of the area

我们主要有两种经典的证明方法。

3.1 直接积分法

对于曲线 $x^2 - y^2 = 1$ ，它经过点 $(1, 0)$ 和 $(x_0, y_0) = (x(\alpha), y(\alpha))$ 。设图 9 中的点 P 为 (x_0, y_0) 。因此我们有 $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$ ，则有 $y_0 = \sqrt{x_0^2 - 1}$ 。

设 OAP 的面积为 A_R 。我们需要证明：对于输入 α ， $A_R = \alpha/2$ 。

STEP 1. 参数化与初始化

1. 参数化曲线 $x^2 - y^2 = 1$ ：

取参数 t ，使 $x = \cosh t, y = \sinh t$ ，则有：

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

这满足原方程。

2. 初始化参数 t 表达起点和端点坐标：

起点为 $t = 0$ ，有 $x = 1, y = 0$ ；

端点为任意 t ，则端点坐标为： $x = \cosh t, y = \sinh t$ 。

STEP 2. 设 OTP 的三角形面积为 A_T ，它是三角形底边为 x_0 ，高为 y_0 的面积，则其面积为

$$A_T = \frac{1}{2}x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2}x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1}$$

设 OAP 的面积为 $A_R = \alpha/2$ ，并设 ATP 的面积为 A_H ，则我们有

$$A_T = A_R + A_H$$

$$A_R = \alpha/2$$

$$\begin{aligned} A_H &= A_T - A_R \\ &= \frac{1}{2}x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

现在问题的关键是找到另一种计算双曲函数下面积 A_H 的方法。

STEP 3. 对于面积 A_H ，采用定积分方法计算

$$A_H = \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

已知三角形恒等式 $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$ ，并且割线满足 $x = \sec(\theta), \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \tan(\theta)$ 。计算初始值 $1 = \sec(\theta) \Rightarrow \theta = 0$ ，并且 $x_0 = \sec(\theta) \Rightarrow \theta = \sec^{-1}(x_0)$ 。这些线段与 θ 角的关系参见图 10。

因此我们有

$$dx/d\theta = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \sec(\theta) \tan(\theta)$$

$$dx = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$

STEP 4. 根据 STEP 1 的结果, 我们有

$$\begin{aligned} A_H &= \frac{1}{2}x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_0^2 - 1} \cdot x_0 - \ln \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \right) \right) &= \frac{1}{2}x_0 \cdot \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha &= \ln \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

这是 α 以 x_0 参数表示的形式。

STEP 5. 接下来的目标是根据 α 求解 x_0 :

$$\begin{aligned} \alpha &= \ln \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \right) \\ x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} &= e^\alpha \\ \sqrt{x_0^2 - 1} &= e^\alpha - x_0 \\ x_0^2 - 1 &= (e^\alpha - x_0)^2 \\ x_0^2 - 1 &= e^{2\alpha} - 2x_0e^\alpha + x_0^2 \\ 2x_0e^\alpha &= e^{2\alpha} + 1 \\ x_0 &= \frac{e^{2\alpha} + 1}{2e^\alpha} \\ &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \\ &= \cosh(\alpha) \end{aligned}$$

接着根据 α 求解 y_0

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{x_0^2 - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha}}{4} - 1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{e^{2\alpha} - 2 + e^{-2\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(e^\alpha - e^{-\alpha})^2} \\ &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \\ &= \sinh(\alpha) \end{aligned}$$

STEP 6. 因此, 对于单位双曲函数 $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$, OAP 的面积为 $\alpha/2$, 输入参数的一半。

此外，对于位于双曲函数上的一个点，当已知 x 坐标值时，我们也可以快速计算出 α 的值

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha) &= x \\ \alpha &= \cosh^{-1}(x) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{for } x \geq 1\end{aligned}$$

这个等式给出了双曲余弦逆函数的一个实用的表示法，特别是当直接使用 $\cosh^{-1}(x)$ 的形式不方便时。

3.2 间接积分法

上述直接积分方法，使用难度较高的积分换元法，暴力求解，不易理解。因此我们需要换一个视角，用一种简单的积分计算 OAP 的面积为 $\alpha/2$ 。

给定函数 $x^2 - y^2 = a^2$ ，我们可以将其逆时针旋转 45° ，得到一个新的函数，我们所使用的旋转矩阵 \mathbf{R} 为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

设新的变量 z 和 w ，表示旋转后的坐标。根据逆时针旋转的变换公式，我们有：

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ w &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\end{aligned}$$

我们需要将原函数中的 x 和 y 用 z 和 w 表示，则将其代入原函数，得到新的函数，解出 x 和 y 为：

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z + w) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(w - z)\end{aligned}$$

将上述结果代入原函数 $x^2 - y^2 = a^2$ ：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z + w)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(w - z)\right)^2 = a^2$$

化简上式，我们得到：

$$\frac{1}{2} [(z + w)^2 - (w - z)^2] = a^2$$

继续化简，我们得到：

$$\frac{1}{2} [4zw] = a^2$$

最后，我们得到旋转后的函数为：

$$zw = \frac{a^2}{2}$$

因此，原函数 $x^2 - y^2 = a^2$ 经过逆时针旋转 45° 后，得到的新函数为 $zw = \frac{a^2}{2}$ 。因此设一个双曲函数 $x^2 - y^2 = (\sqrt{2})^2$ ，将其逆时针旋转 45° 后，得到倒数函数 $x \cdot y = 1$ 。这个倒数函数 $x \cdot y = 1$ 有一些有趣的性质，参见图 11：

$$\begin{aligned}|\overline{OQ}| \cdot |\overline{QP}| &\equiv 1 \rightarrow v = \frac{1}{2} \\ |\overline{OQ}| \cdot |\overline{QP}| &\equiv 1 \rightarrow u = \int_1^{|\overline{OQ}|} \frac{1}{t} dt = \ln |\overline{OQ}|\end{aligned}$$

图中两块 v 的面积相等，并且两块 u 的面积也相等，则计算 u 的面积可以转换为一个简单的定积分。

Visualization of hyperbolic functions : reciprocal curve $y \cdot x = 1$

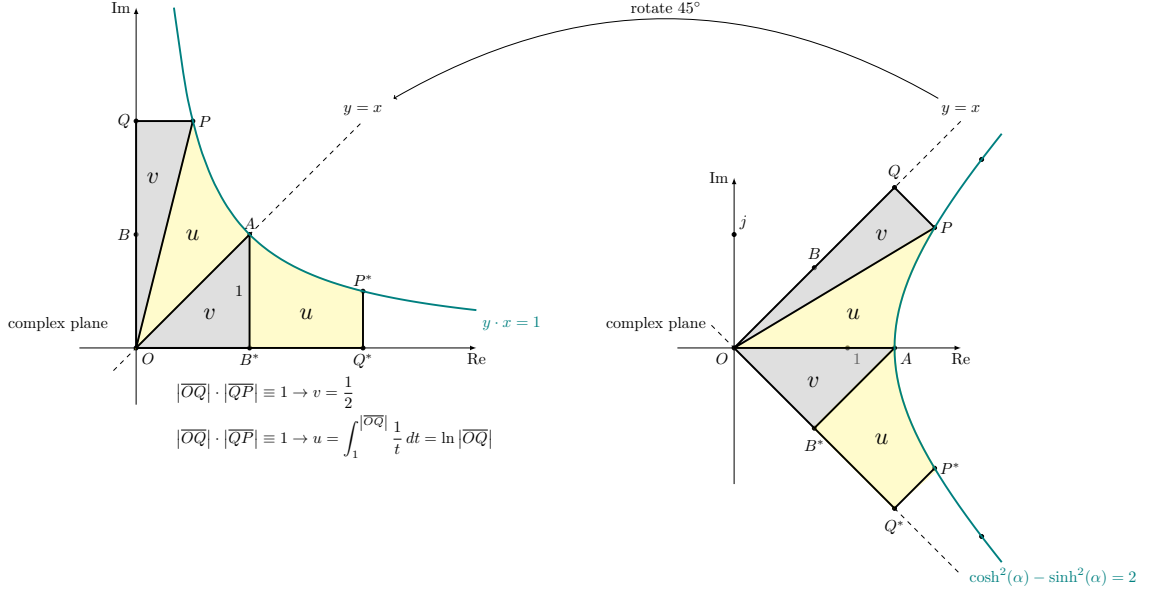


图 11: reciprocal curve $y \cdot x = 1$

对于单位双曲函数满足 $x^2 - y^2 = 1$ ，并且我们对 $x > 0$ 的分支感兴趣，我们可以通过替换 $x - y = z\sqrt{2}$ 和 $x + y = w\sqrt{2}$ 来旋转 $\frac{\pi}{4}$ 。等式则变成 $zw = 1/2$ ，并且我们对 $z, w > 0$ 的分支感兴趣。考虑如下的图 12 (图中的数值为显示方便已经放大 $\sqrt{2}$ 倍)，其中 \overrightarrow{OQ} 为正 z 轴， A 为点 $(z, w) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ，以使得 $(x, y) = (1, 0)$ ， P 是 $(z, w) = (p_1, p_2)$ 的任意点， B 是 $(z, w) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 的点，并且 Q 是 $(z, w) = (p_1, 0)$ 的点：

这个定义满足对数的一些基本性质。例如, 当 $x > 1$ 时, $\ln x$ 是正的; 当 $x = 1$ 时, $\ln x = 0$; 而当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x$ 是负的。此外, 由于 $\frac{1}{t}$ 的积分是 $\ln|t| + C$, 所以我们可以得出 $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ 这一重要性质。

然后, 我们可以通过对数函数来定义指数函数。对于实数 x , 自然指数函数 e^x 定义为满足 $y' = y$ 和 $y(0) = 1$ 的函数 $y(x)$ 。换句话说, e^x 是微分方程 $y' = y$ 的唯一解, 满足初始条件 $y(0) = 1$ 。

这个定义自然满足 $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ 这一基本的指数性质。此外, 由于 $(e^x)' = e^x$, 我们可以得出 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ 这一重要性质。

最后, 我们可以扩展这些函数的定义, 使其适用于所有的复数。对于复数 $z = x + yi$, 我们定义 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 和 $\ln z = \ln|z| + i \arg(z)$, 其中 $\arg(z)$ 是 z 的辐角。这样就可以得到欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 这是复分析中的一个重要结果。

总的来说, 通过这种方式定义指数函数和对数函数, 我们可以获得一个完整和一致的理论框架, 这个框架既包括实数和复数, 也包括微分、积分和微分方程。

3.3 基于面积比的参数化

本节是对前面内容的补充。我们需要寻找更自然的双曲三角函数定义: 通过输入 α 为位于双曲函数其上的向量扫掠过的面积的 2 倍的定义, 参数化 $x^2 - y^2 = 1$ 的右半部分。

我们定义 \tanh 函数为

$$\tanh(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)}$$

并根据双曲三角函数的恒等式, 我们有

$$\begin{aligned}\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) &= 1 \\ 1 - \tanh^2(\alpha) &= \frac{1}{\cosh^2(\alpha)} \\ \cosh^2(\alpha) &= \frac{1}{1 - \tanh^2(\alpha)}\end{aligned}$$

如图 13 所示, 在 $x = 1$ 上, $(1, \tanh(\alpha)) = (1, \tan(\varphi))$, 因此 $\tanh(\alpha) = \tan(\varphi)$, 这就将面积角 α 和弧度角 φ 相关联, 因此也将双曲函数 $x^2 - y^2 = 1$ 与圆形函数 $x^2 + y^2 = 1$ 相关联, 其中, 面积角的增量 $d\alpha/2$ 一阶近似为弧度角增量 $d\varphi$ 所对应扇形面积:

$$\begin{aligned}|\overline{AC}| &= \tanh(\alpha) = \tan(\varphi) \\ |\overline{OP}| &= \sqrt{\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha)} \\ \text{Area } d\alpha/2 &= \frac{1}{2} |\overline{OP}|^2 d\varphi \text{ (to first order)}\end{aligned}$$

接下来的问题就是: 如何使用 $x^2 - y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 计算 $\frac{d}{d\alpha} \cosh(\alpha)$ 。

如图 13 所示, 根据面积角增量 $d\alpha/2$ 与弧度角增量 $d\varphi$ 的对应关系, 我们有

$$\begin{aligned}d\alpha/2 &= \frac{1}{2} |\overline{OP}|^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + \tanh^2(\alpha)}{1 - \tanh^2(\alpha)} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + \tan^2(\varphi)}{1 - \tan^2(\varphi)} d\varphi \\ \frac{d\varphi}{d\alpha} &= \frac{1 - \tan^2(\varphi)}{1 + \tan^2(\varphi)}\end{aligned}$$

们设 $\cosh(\alpha) = ay_1 + by_2$ ，根据初始条件：

$$\begin{aligned} ay_1(0) + by_2(0) = 1 &\rightarrow a + b = 1 & a = \frac{1}{2} \\ ay_1'(0) + by_2'(0) = 0 &\rightarrow a - b = 0 & b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{2}e^{\alpha} + \frac{1}{2}e^{-\alpha},$$

类似地，

$$\sinh(\alpha) = \frac{1}{2}e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{-\alpha}.$$

由此，我们根据 \tanh 函数的定义，推导出了 \cosh 函数和 \sinh 函数，并将双曲函数 $x^2 - y^2 = 1$ 与圆形函数 $x^2 + y^2 = 1$ 关联起来。

3.4 小结

在本章中，我们用三种方法严谨地证明了双曲函数中的输入参数 α 与位于双曲函数其上的向量扫掠过的面积之间的关系，即面积为 $\alpha/2$ 。每种方法都从不同的数学分支提供了独特的视角，丰富了对双曲函数深层次理解的维度。

1. 直接积分法：通过直接对双曲函数的定义进行积分，我们展示了位于双曲函数其上的向量扫掠的面积与输入参数的线性关系。这种方法的直观性和数学上的直接性使得它成为了验证双曲函数等面积特性的一个简洁途径。
2. 间接积分法：通过旋转变换技术，将复杂的积分简化为标准形式。该方法不仅提供了一个优雅的证明策略，而且揭示了双曲函数如何与复数平面上的其他函数相联系，从而在更一般的背景下理解了双曲函数的几何性质。这是一种更加本质的证明。
3. 基于面积比的参数化：通过将双曲函数视为围绕等面积的轨迹，我们通过参数化方法得出了双曲函数等面积的性质。这种方法不仅将双曲函数与物理运动联系起来，而且还提供了一种从动力学系统角度来观察数学结构的框架。

总之，我们从积分计算、坐标变换、参数化等不同视角，采用多种方法证明了双曲函数的等面积特性。这体现了数学证明的多样性，也让我们从更多角度理解了双曲函数面积角为 $\alpha/2$ 这个重要的数学结论。

4 经典应用的物理意义

双曲函数的发现，起源于求解垂链线，但如今更知名的是狭义相对论的洛伦兹变换 (Lorentz Transformation / Lorentz Boost)。在狭义相对论中，双曲函数 $\cosh(\alpha)$ 和 $\sinh(\alpha)$ 经常出现在 Lorentz 变换中，它们描述了在从一个惯性参考系到另一个相对运动的惯性参考系的转换中，时间和空间坐标的变化。这种变换的形式派生自光速在所有惯性参考系中的不变性。

从 \tanh 函数的定义出发, 根据双曲函数恒等式, 我们有

$$\begin{aligned}\tanh(\alpha) &= \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} \\ \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) &= 1 \\ 1 - \tanh^2(\alpha) &= \frac{1}{\cosh^2(\alpha)} \\ \cosh^2(\alpha) &= \frac{1}{1 - \tanh^2(\alpha)} \\ \cosh(\alpha) &= \sqrt{\frac{1}{1 - \tanh^2(\alpha)}} \\ \sinh(\alpha) &= \cosh(\alpha) \tanh(\alpha)\end{aligned}$$

其中,

- $\tanh(\alpha)$ 表示相对速度与光速的比值

$$\tanh(\alpha) = \frac{v}{c}$$

其中 v 是两个参考系之间的相对速度, c 是光速, 这个比值也称 β 。在这里, 参数 α 通常表示为"快度"(rapidity), 它是一种替代相对速度的参数, 更适合描述相对论效应。快度的定义为:

$$\alpha = \tanh^{-1} \left(\frac{v}{c} \right).$$

并且面积 $\alpha/2$ 通常解释与物体的固有时 (proper time) 相关。固有时也称为物体的本征时或恰当时间, 它是物体自身观察到的时间, 与观察者的惯性参考系无关。

- $\cosh(\alpha)$ 是时间膨胀 (time dilation) 因子 γ , 又称洛伦兹因子 (Lorentz factor),

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha) &= \gamma \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\end{aligned}$$

它描述了在不同参考系中观察到的时间的变化。当两个参考系以接近光速的速度相对运动时, 这种效应会变得非常显著。

- $\sinh(\alpha)$ 与空间坐标的变化有关

$$\sinh(\alpha) = \gamma \cdot \frac{v}{c}$$

这描述了在不同参考系中观察到的空间长度的变化, 称为长度收缩 (length contraction)。

- 指数和对数关系: 由上述的表达式可以得到

$$\begin{aligned}e^{\alpha} &= \gamma(1 + \beta) = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \\ e^{-\alpha} &= \gamma(1 - \beta) = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \\ \alpha &= \ln[\gamma(1 + \beta)] = -\ln[\gamma(1 - \beta)]\end{aligned}$$

其中 α 又称为相对论的多普勒效应因子 k 。

洛伦兹变换 (Lorentz transformation), 它描述了使用相对速度 (relative velocity) v , 时空坐标如何从一个使用坐标 (x, y, z, t) 的惯性系变化到另一个使用坐标 (x', y', z', t') 的惯性系。它最简单的情況是一维的 x 方向的变换, 因此对于时间坐标 t 和空间坐标 x (一维情况), Lorentz 变换可以写为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t \cosh(\alpha) - x \sinh(\alpha) \\ -t \sinh(\alpha) + x \cosh(\alpha) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 t' 和 x' 是在新的惯性参考系中的时间和空间坐标。在复平面的单位圆上执行坐标变换的 2D 旋转矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

其中 θ 为旋转弧度角, 并且向量长度的不变量是: $x^2 + y^2 = 1$ 。把洛伦兹变换看成一种类似的坐标旋转, 在复平面的单位双曲函数上执行坐标变换的 2D 双曲旋转矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix}$$

其中 α 为旋转面积角, 并且向量长度平方差的不变量是: $x^2 - y^2 = 1$ 。所以洛伦兹变换数学上等同于双曲角旋转。

上述变换的推论是:

- 时间膨胀 (Time dilation): 在时钟移动的帧中测量的两个刻度之间的时间 ($\Delta t'$) 比在时钟的其余帧中测量的两个刻度之间的时间 (Δt) 长:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t.$$

- 长度收缩 (Length contraction): 对象在其移动的帧中测量的长度 ($\Delta x'$) 小于其自身静止帧中的长度 (Δx):

$$\Delta x' = \Delta x / \gamma.$$

所以, 传统解释面积角 α 为动量与能量的比值, 因为一个非零 (静止) 质量 m 粒子的能量 E 以及动量的大小 $|\mathbf{p}|$ 为:

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ |\mathbf{p}| &= \gamma m \mathbf{v} \end{aligned}$$

通过快度 α 的定义

$$\alpha = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}$$

并且

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \cosh \left(\operatorname{artanh} \frac{v}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \\ \sinh \alpha &= \sinh \left(\operatorname{artanh} \frac{v}{c} \right) = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta \gamma \end{aligned}$$

能量和动量大小可以被表示为

$$E = mc^2 \cosh \alpha$$

$$|\mathbf{p}| = mc \sinh \alpha$$

所以快度可以用测量到的能量与动量大小通过下式来计算得出：

$$\alpha = \operatorname{artanh} \frac{|\mathbf{p}|c}{E} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\mathbf{p}|c}{E - |\mathbf{p}|c}$$

然而实验粒子物理学家常使用修改过的、相对于粒子束的快度定义

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z c}{E - p_z c}$$

其中 p_z 是沿着粒子束方向的动量分量。

此外，另一种关于面积 $\alpha/2$ 解释是：它实际对应于物体的固有时。在这种情况下，位于双曲函数的向量扫过的面积 $\alpha/2$ 可以看作是物体从初始时间到现在经过的固有时。这个面积随着物体的快度 α 的增加而增加，这反映了物体自身观察到的时间的增加。面积 $\alpha/2$ 的变化率，对应于固有时间的变化率。在物理学中，这通常被解释为固有时间的流逝速度。

双曲正弦函数和双曲余弦函数的导数（即 $\sinh'(\alpha)$ 和 $\cosh'(\alpha)$ ）与 Lorentz 变换中的时间膨胀和长度收缩的速度相关。这些速度描述了随着相对速度（或者说快度）的变化，这些效应如何变化，参见图 14。

- $\sinh'(\alpha)$ 是双曲正弦函数 $\sinh(\alpha)$ 的导数，对应于时间膨胀因子 $\cosh(\alpha)$ 。这描述了时间膨胀因子随着快度 α 的变化而变化的速度。在物理上，这可以解释为，当两个惯性参考系的相对速度改变时，一个参考系中观察到的另一个参考系的时间膨胀效应是如何变化的。
- $\cosh'(\alpha)$ 是双曲余弦函数 $\cosh(\alpha)$ 的导数，对应于长度收缩因子 $\sinh(\alpha)$ 。这描述了长度收缩因子随着快度 α 的变化而变化的速度。在物理上，这可以解释为，当两个惯性参考系的相对速度改变时，一个参考系中观察到的另一个参考系的长度收缩效应是如何变化的。
- 面积 $\alpha/2$ 相对于速度比值 β 的导数公式为

$$\alpha = \tanh^{-1}(\beta)$$

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \tanh^{-1}(\beta)$$

$$= \frac{1}{1 - \beta^2} \quad |\beta| < 1$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

即是时间膨胀因子的平方。在物理学中，这通常被解释为惯性系观察到的物体的固有时间的流逝速度，即相对速度越大，时间膨胀效应就越明显。

Visualization of hyperbolic functions : Derivatives

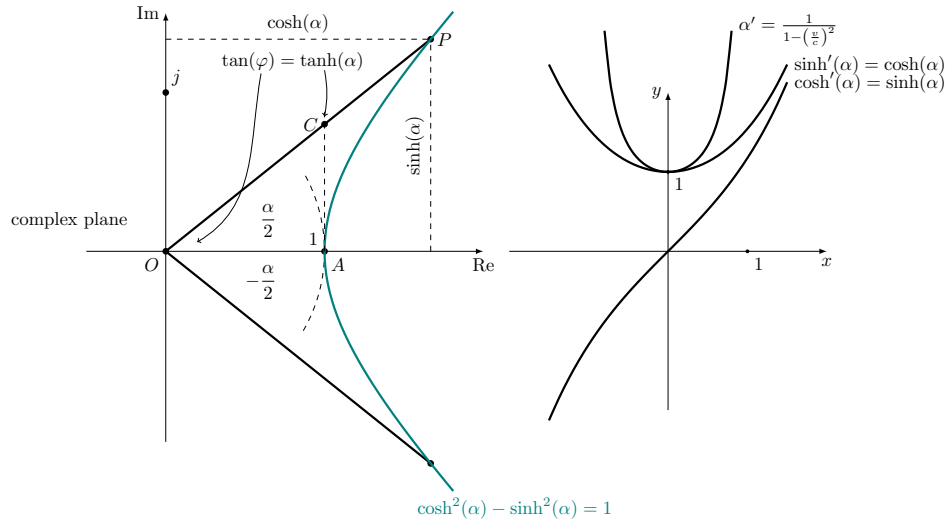


图 14: Derivatives image

5 用拆分复数表示双曲函数

在几何代数 (Geometric Algebra) 中, 有两种复数 (Complex Numbers) 系统。

一种是传统的复数 (Complex Numbers) \mathbb{C} , 设复数 i , 有 $i^2 = -1$ 。将复数 i 代入指数映射公式得到著名的欧拉公式:

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \cdot \sin \theta,$$

即复平面中的圆周函数。如果将复数 i 以矩阵形式表示, 有

$$1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

复数 i 一个反对称矩阵。对于一个复数 $z = a + bi$, 可表示为

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \det(z) &= a^2 + b^2 \\ |z|^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

将复数 z 代入指数映射公式我们得到

$$\exp(a + bi) = \exp(a) \exp(bi)$$

其中, $\exp(bi)$ 表示旋转, $\exp(a)$ 表示旋转后向量的缩放。在复平面的 2D 旋转矩阵为

$$\exp(i\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

欧拉公式 $\exp(i\theta)$ 天然适合表示复平面中的旋转运动, 其中 θ 为旋转弧度角, 并且 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 为其约束, 表现为单位向量在旋转后的范数始终保持为 1。

另外一种复数系统, 称之为拆分复数 (Split Complex Numbers) \mathbb{C}_s , 设复数 j , 有 $j^2 = 1$ 。将复数 j 代入指数映射公式得到欧拉公式的变种:

$$\exp(j\alpha) = \cosh \alpha + j \cdot \sinh \alpha,$$

即复平面中的双曲 (Hyperbola) 函数。如果将复数 j 以矩阵形式表示, 有

$$1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

复数 j 一个零对称矩阵。对于一个复数 $z = a + bj$, 可表示为

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \det(z) &= a^2 - b^2 \\ |z|^2 &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

将复数 z 代入指数映射公式我们得到

$$\exp(a + bj) = \exp(a) \exp(bj)$$

其中, $\exp(bj)$ 表示双曲旋转, $\exp(a)$ 表示旋转后向量的缩放。并且洛伦兹变换的 2D 双曲旋转矩阵可表示为

$$\exp(-j\alpha) = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix}$$

拆分复数的指数公式 $\exp(-j\alpha)$ 可以表示复平面中的双曲旋转 (Hyperbolic rotation) 运动, 其中 α 为旋转面积角, 并且 $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ 为其约束, 表现为向量在旋转后的坐标平方差值始终保持为 1, 如图 15 所示。在图 15 中, 随着点 P 的移动, 两块标记为蓝色三角形的区域的面积始终为 $\frac{1}{2} \sinh(\alpha)$, 因为三角形的底边为约束 1。

使用复数系统或四元数系统的好处是, 我们可以在切空间这个线性空间中使用向量的加减算法, 从而可以使用已经成熟的线性的估计算法和优化算法, 对结果 (切向量) 使用收回 (retraction), 也就是指数映射函数, 就得到最终的流形元素。这比直接在流形上直接进行复杂的计算要方便得多、快速得多。并且有时候无法在流形上直接定义和计算某些数学对象, 就需要在局部切空间中进行并使用收回。值得注意的是, 在复平面中的指数映射的乘法, 可以直接将指数相加后就进行收回, 因为在复平面中复数乘法是可交换的; 但是在 3D 空间中的四元数或矩阵乘法不可交换, 这时候需要使用 BCH 公式进行近似处理再进行收回。

总之, 复平面上的双曲函数是 $\exp(j\alpha) = \cosh(\alpha) + j \cdot \sinh(\alpha)$, 对应于超复数 (hypercomplex numbers) 或者双曲复数 (hyperbolic complex numbers), 这是一个扩展了实数的数学系统。复平面中的双曲函数的经典应用与洛伦兹变换 (Lorentz transformation) 相关, 与狭义相对论 (Special Relativity) 相关。

Visualization of hyperbolic functions : Constraint $x^2 - y^2 = 1$

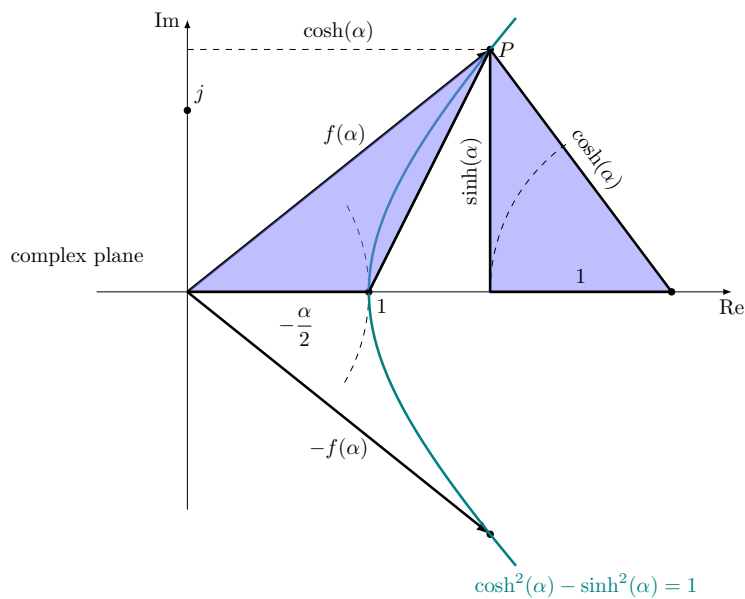


图 15: Constraint $x^2 - y^2 = 1$

6 基于等面积变换的直觉

本节从李群视角探讨等面积变换的几何直觉。

对于表示 2D 旋转的 $SO(2)$ 群，对于流形与切空间之间的关系，常见的理解如图 16 所示：

Visualization of trigonometric functions and exponential function : arc

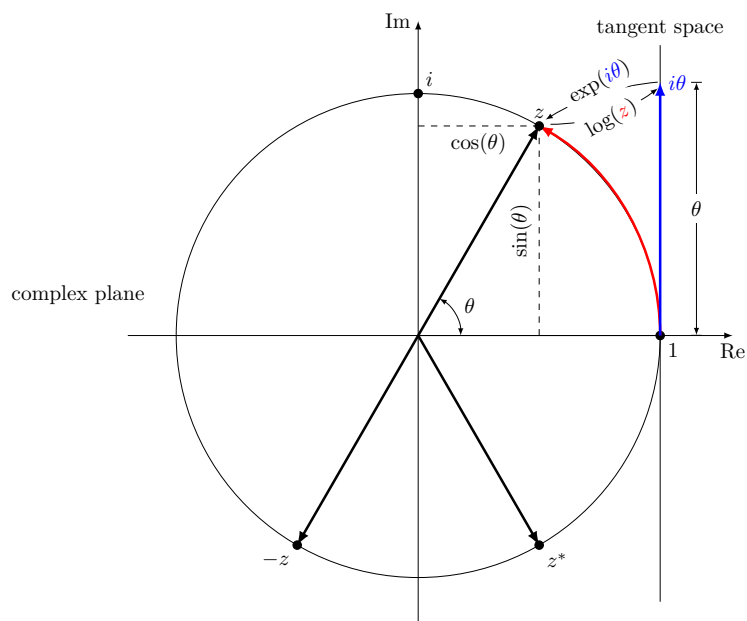


图 16: The trigonometric functions and exponential function : arc

我们是在局部切空间中测量速度，并计算线性空间中的位移，最终将这个向量收回到流形上得到物体新的状态，状态点所走过的路径即为测地线。这种映射属于等距投影 (Equidistant)，向量的模长与测地线的积分长度是一个固定比率，并且体现了以直代曲的思想。

以上是基于等距离的变换，其实我们也可以用等面积变换的思路理解 $x^2 + y^2 = 1$ ，如图 17 所示：

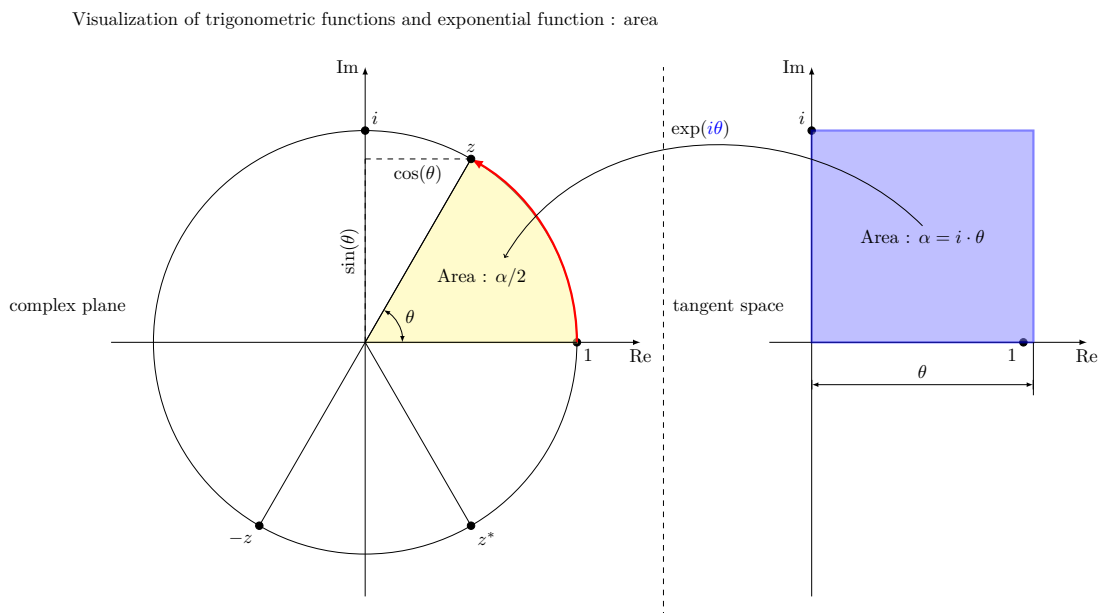


图 17: The trigonometric functions and exponential function : area

在局部切空间中，我们需要赋予实数轴和虚数轴以新的物理意义。动量 (Momentum)，定义为应用于停止运动的量，实际上是力 (随时间) 的度量。动量是力-时间曲线下的面积。所以如果我们赋予实数轴为时间的含义，虚数轴则为物体所受的外力，面积则为动量。这种映射体现了动量守恒原理。从经典牛顿力学的角度看，这只是一个多此一举的数学小游戏。但是从狭义相对论的角度看，则有新的含义。

在狭义相对论中，我们会有两种时间：

- 固有时间 (proper time) 是在相对论中与事件位在同处的时钟所测量的唯一时间，他不仅取决于事件，时钟也在事件的行动之中。对同一个事件，一个加速中的时钟所测得的固有时间会比在非加速 (惯性) 中时钟的固有时间为短。
- 相对的，坐标时间 (coordinate time) 能由一个与事件有一段距离的观测者来应用。在狭义相对论中，坐标时间总是由在惯性系统内有关联的观测者计算，而固有时间则由同在加速中的观测者测量。

在相对论中，沿着类时世界线的固有时间 (来自拉丁语，意思是自己的时间) 被定义为沿着这条线的时钟测量的时间。一条世界线上两个事件之间的固有时间间隔是固有时间的变化，它与坐标无关，是一个洛伦兹标量。间隔是感兴趣的量，因为固有时间本身是固定的，只有一个任意的可加常数，即在某个事件沿着世界线设置时钟。

两个事件之间的固有时间间隔不仅取决于事件，还取决于连接它们的世界线，因此也取决于时钟在事件之间的运动。它表示为世界线上的积分 (类似于欧氏空间中的弧长)。加速时钟测量的两个事

件之间经过的时间比相同两个事件之间非加速 (惯性) 时钟测量的时间要小。孪生悖论就是这种效应的一个例子。

按照惯例, 固有时间通常用希腊字母 (τ) 表示, 以区别于用 t 表示的坐标时间。坐标时间是观察者使用自己的时间分配方法测量的两个事件之间的时间。在狭义相对论中惯性观测器的特殊情况下, 时间是使用观测器的时钟和观测器的同时性定义来测量的。

在相对论中, 洛伦兹因子定义为:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dt}{d\tau}$$

其中, v 为两惯性系之间的相对速度, c 为真空中光速, β 为相对速度 v 与光速 c 的比值, t 为坐标时间, τ 为观察者的固有时 (在观察者自己的框架内测量时间间隔)。

固有速度 (Proper velocity, 也称作 Celerity) 是在 (坐标) 速度以外可用来测量运动的物理量。固有速度 $w = dx/d\tau$ 是 (坐标) 速度 $v = dx/dt$ 与洛伦兹因子 $\gamma = dt/d\tau$ 的乘积。

$$w = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v\gamma(v)$$

相对论性条件 (近光速) 下, 物体的总能量 E 与动量 \mathbf{p} 可以通过洛伦兹因子 γ 简单写为:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot mc^2$$

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot m\mathbf{v}$$

其中 m 为静止质量。在四维向量描述下, 能量-动量向量则成为:

$$\mathbf{p}^{(4)} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = m(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = m\mathbf{v}^{(4)}$$

这与牛顿力学的三维动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 定义相似。

应用动量守恒 (conservation of momentum) 和能量守恒 (conservation of energy) 可以得到以下结果:

- 相对论质量 (Relativistic mass): 运动物体的质量 m 取决于 γ 和静止质量 m_0 :

$$m = \gamma m_0.$$

- 相对论动量 (Relativistic momentum): 相对论动量关系采用与经典动量相同的形式, 但使用上述相对论质量:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}.$$

- 相对论动能 (Relativistic kinetic energy): 相对论动能关系采用稍加修正的形式:

$$E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

由于 γ 是 $\frac{v}{c}$ 的函数, 非相对论的极限给出 $\lim_{v/c \rightarrow 0} E_k = \frac{1}{2}m_0 v^2$, 这正是经典牛顿力学的形式。

因此，双曲函数的面积角 α 也可来自等面积变换，如图 18 所示：

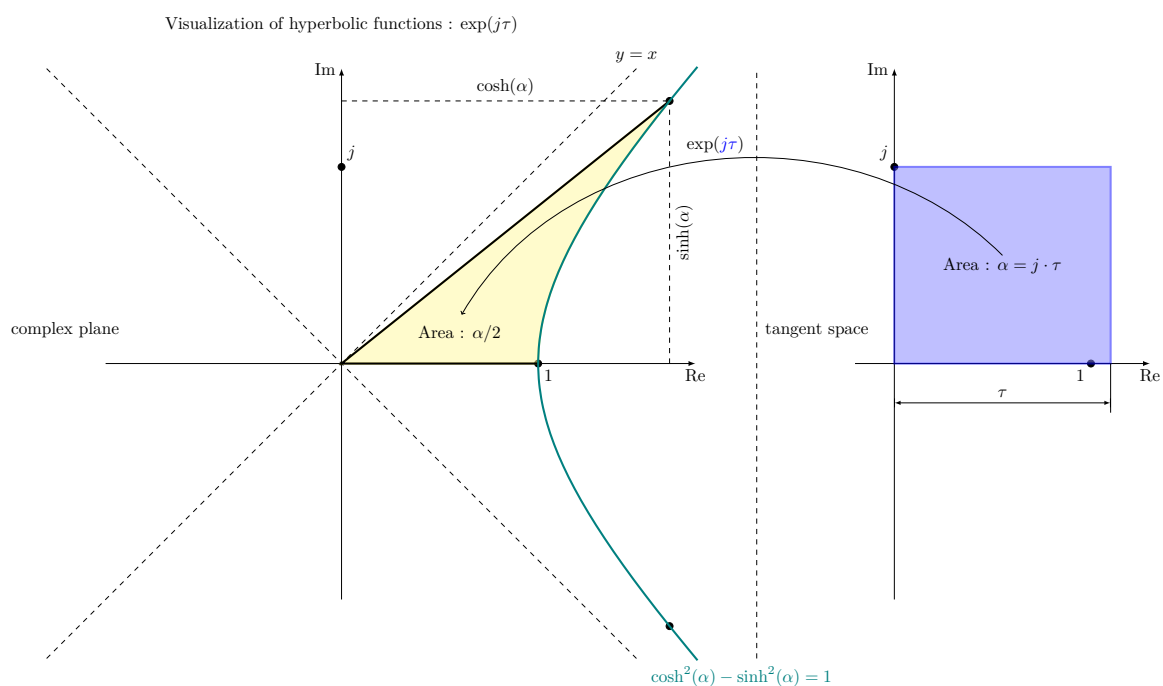
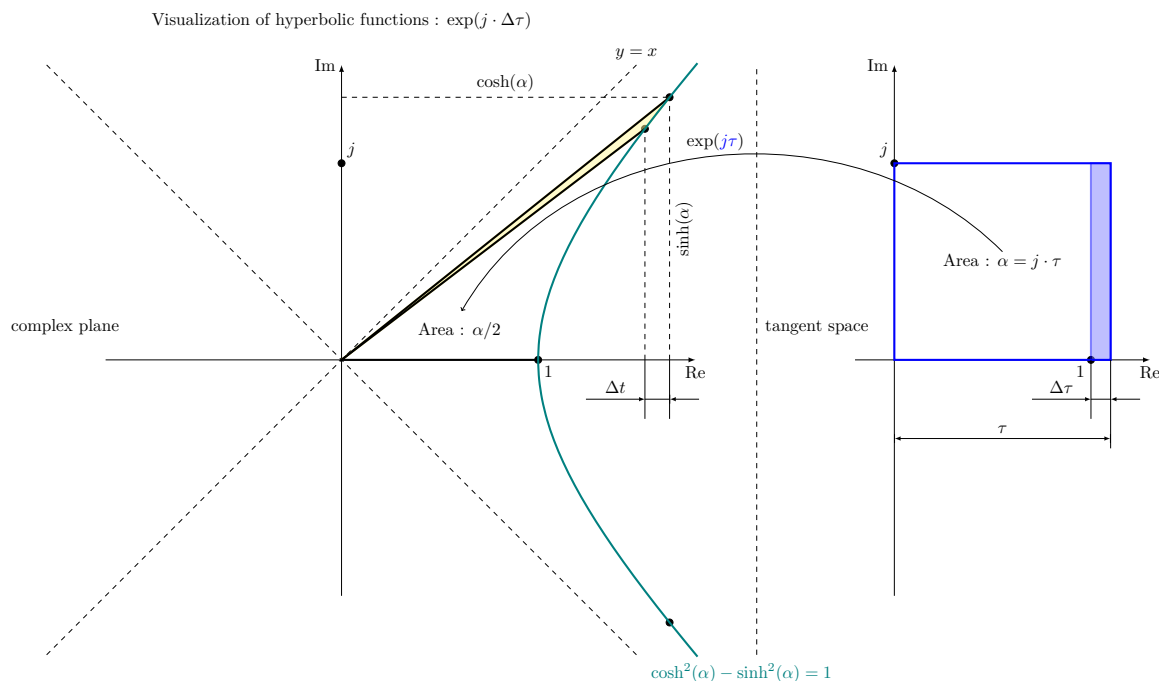


图 18: $\exp(j\tau)$ image

我们还是在局部切空间中测量时间和速度，但是要考虑洛伦兹因子 γ 的影响，则时间为固有时间 (proper time) τ ，我们将其赋予实数轴，面积则为相对论动量。在运动坐标系 (局部切空间) 中看到的矩形面积，在惯性坐标系 (流形) 中变换为双曲面积，等面积变换体现了动量守恒定律，同样也体现了以直代曲的思想。并且从动量的变化量看，如图 19 所示：

图 19: $\exp(j \cdot \Delta\tau)$ image

在局部切空间中的固有时间 τ 增量，变换成为流形中坐标时间 t 的增量，即 $\Delta t = \Delta\tau \cdot \gamma$ ，这体现洛伦兹因子 γ 的影响。从公式中可以看出，当相对速度 v 接近光速时，坐标时间 Δt 会趋于无穷大。这意味着，对于高速运动的物体，在惯性参考系中的时间会变得非常缓慢。即，固有时是物体自身观察到的时间，与观察者的惯性参考系无关，当物体以接近光速的速度相对于观察者运动时，固有时会比观察者的坐标时间更小，这就是著名的时间膨胀效应。

因为实数轴通常被赋予时间的含义，虚数轴则被赋予空间的含义，那么面积角 α 可以被认为是时空面积。时空面积是物体在时空中的运动轨迹所包围的面积。它是一个标量，具有大小但不具有方向。它可以用来计算运动物体的能量、动量和质量。

7 双曲函数的等面积变换特性

对于双曲函数等面积变换的特性，在解析和几何方面，总是存在着不同的角度和方法来理解和证明这一概念。

7.1 雅可比行列式的证明

在本节中我们将使用李群的雅可比行列式证明双曲函数的等面积变换。雅可比行列式是一个函数从其定义域到值域的局部缩放因子，它描述了函数在某点附近的非线性映射对体积（或面积）的影响。对于一个 2×2 的矩阵 A ，其雅可比行列式为：

$$|A| = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中， a_{ij} 是矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素。

现在, 我们考虑一个由一维双曲旋转生成的变换, 这个变换可以通过 $SO(1, 1)$ 群的一个元素来表示:

$$A(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

我们想要证明的等面积特性指的是, 当我们应用变换 $A(-\alpha)$ 到双曲平面上的一个区域时, 这个区域的面积保持不变。

为了证明这一点, 我们需要计算变换 $A(-\alpha)$ 在双曲平面上的作用。变换 $A(\alpha)$ 会将坐标 (x, y) 映射到新的坐标 (x', y') , 具体为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(-\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha)x - \sinh(\alpha)y \\ -\sinh(\alpha)x + \cosh(\alpha)y \end{pmatrix}.$$

我们需要计算这个变换的雅可比行列式 $\det(J)$, 其中 J 是变换的雅可比矩阵。雅可比矩阵由变换的偏导数组成:

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}.$$

则雅可比行列式 $\det(J)$ 是:

$$\det(J) = \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha).$$

使用双曲函数的基本恒等式 $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$, 我们得到:

$$\det(J) = 1.$$

这意味着变换 $A(-\alpha)$ 保持了面积不变。因此, 我们可以说双曲旋转是等面积的。

7.2 复积分的证明

在本节中, 我们使用复分析方法, 即利用复积分证明双曲函数等面积变换特性。考虑函数 $\cosh(\alpha)$ 和 $\sinh(\alpha)$ 在复平面的路径积分, 通过适当选择积分路径, 可以展示积分与双曲函数等面积变换的关系。

STEP 1. 定义路径积分的概念:

对于复函数 $f(z)$, 在复平面中从点 z_1 到点 z_2 的路径 C 上的积分定义为

$$\int_C f(z) dz.$$

STEP 2. 定义复指数与双曲函数:

复指数函数:

$$e^z = e^{a+jb} = e^a(\cosh b + j \sinh b)$$

双曲函数:

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \end{aligned}$$

其中, 双曲函数满足: $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$.

STEP 3. 计算复变函数的路径积分：

我们考虑在复平面上的路径积分。为了证明等面积特性，我们需要考虑函数 e^α 在适当选择的路径上的积分。我们选择路径 C 从 $\alpha = a$ 到 $\alpha = a + bj$ (其中 a 和 b 是实数)，这个路径对应了从点 e^a 到点 e^{a+bj} 的直线路径。我们计算以下积分：

$$\int_C e^z dz,$$

其中 z 沿着路径 C 变化。

由于 e^z 是整函数，它在复平面上处处解析，所以我们可以应用柯西积分定理，得到这样的积分与选择的路径无关。因此，我们可以直接计算如下：

$$\int_C e^z dz = \int_a^{a+bj} e^z dz = \int_0^b e^{a+tj} dt j = j \int_0^b e^a (\cosh(t) + j \sinh(t)) dt.$$

分离实部和虚部，我们得到

$$\begin{aligned} j e^a \left[\int_0^b \cosh(t) dt + j \int_0^b \sinh(t) dt \right] &= j e^a [\sinh(b) + j \cosh(b)] \\ &= e^a (\cosh(b) + j \sinh(b)). \end{aligned}$$

实部代表 \sinh 函数的积分，而虚部代表 \cosh 函数的积分。

STEP 4. 路径积分与面积关系：

上式表明， $\cosh \alpha + i \sinh \alpha$ 作为复变函数，在复平面上的积分等于其函数值。由柯西积分定理，这与该函数所围区域的面积变化成正比。由于 \sinh 和 \cosh 在实轴上的积分给出的是面积，我们可以看到这两个积分的线性组合确实与路径 C 上的积分一致，从而证明了等面积特性，即证明了双曲函数的参数 α 与其围成的面积之比例关系。

所以，通过复分析的路径积分方法，我们递推证明了双曲函数的等面积特性。这体现了复分析与双曲几何的内在联系。

7.3 哈密顿系统的证明

在本节中，我们将利用哈密顿系统的性质来证明双曲函数的等面积特性。我们的目标是证明，在适当的约束条件下，系统的动力学轨迹在相空间中围绕的面积与双曲函数的图形下的面积相等，从而证明了双曲函数的等面积特性。

在经典力学中，哈密顿系统为系统的动力学提供了一种描述方式。系统的哈密顿量 H 与系统的总能量相对应，在不含时的保守系统中， H 是守恒的。

在欧几里得空间中，自由粒子的哈密顿量通常定义为：

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

其中 $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ 分别是沿三个坐标轴方向上的动量分量， m 是粒子的质量。

然而，在双曲空间中，由于度量的不同，哈密顿量采取不同的形式。为了描述双曲平面上自由粒子的运动，我们定义哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 - p_y^2),$$

这里的负号反映了双曲几何的特征，即双曲空间中速度的组合不遵循欧几里得空间中的简单线性叠加法则。

给定哈密顿量 H ，可以通过哈密顿正则方程得到系统状态的时间演化。对于自由粒子在双曲面上的运动，正则方程为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} & \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = -\frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

由于 $\dot{p}_x = \dot{p}_y = 0$ ，我们得知 p_x 和 p_y 是常数。这表明粒子在 x 方向和 y 方向的速度也是常数。

接下来我们将展示如何通过哈密顿系统的性质来证明双曲函数的等面积特性。

考虑粒子在双曲面上的运动轨迹，其位置 (x, y) 与动量 (p_x, p_y) 满足以下关系：

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + \frac{p_x}{m}t \\ y(t) &= y(0) - \frac{p_y}{m}t\end{aligned}$$

其中 $\frac{p_x}{m}, \frac{p_y}{m}$ 为常数速度。若选择适当的参数 a 和 b ，则粒子的运动轨迹可以用双曲函数表示为：

$$\begin{aligned}x(t) &= \cosh(at) \\ y(t) &= \sinh(bt)\end{aligned}$$

其中参数 a, b 与初始速度相关。这条轨迹围绕的面积我们标记为 A_{xy} 。

根据哈密顿系统的面积守恒定律，相空间中的轨迹所围绕的面积是守恒的。我们将在相空间中的面积表示为 A_{ps} ，并证明其与双曲函数图形下的面积 A_{xy} 等价。

由于动量分量 p_x 和 p_y 是常数，相空间中的轨迹是一条直线，且由哈密顿运动方程得：

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = 0.$$

因此，状态点在相空间中的轨迹所围绕的面积是常数。

至此，我们将双曲运动轨迹的面积与哈密顿系统的面积守恒联系起来。由于动量分量是常数，我们得到：

$$A_{ps} = A_{xy} = \text{const.}$$

这意味着对于给定的能量 H ，粒子在双曲面上的运动路径将围绕一个等面积的区域，这与双曲函数的图形一致，从而证明了双曲函数满足等面积特性。

本节通过哈密顿系统的性质，严格证明了双曲函数的等面积特性。我们展示了如何将哈密顿系统中自由粒子的动力学轨迹与双曲函数的几何图形联系起来，并利用面积守恒定律来说明这一特性。这不仅增强了对双曲函数性质的理解，也为数学和物理的交叉领域提供了有趣视角。

8 总结

本文系统地勾勒了三角函数与双曲函数之间的内在联系，并深入探讨了它们在数学分析、物理学以及工程技术中的广泛应用。从三角函数与欧拉公式的关系出发，本文阐明了三角函数 ($\sin / \cos / \tan$) 和双曲函数 ($\sinh / \cosh / \tanh$) 之间的内在联系，以及它们在复平面上的几何解释。

本文的重点是用多种方法严谨证明了双曲函数的等面积变换特性：输入参数 α 与其上向量扫掠过的面积之比为 $2:1$ 。这些方法从不同的角度揭示了双曲函数的等面积变换这一独特性质，增强了我们对这些数学结构深层次理解的能力。

在本文中讨论了双曲函数的典型应用——狭义相对论的洛伦兹变换，这里双曲函数以其参数化形式出现，描述时空的扭曲。此外双曲函数在机器学习中也有重要应用。

为更深入理解，本文引入了拆分复数系统，为双曲函数提供了一个强大的代数框架，并从更抽象的李群等面积变换视角解析了双曲旋转的几何意义，从而使得我们对双曲旋转和双曲函数的性质有了更深刻的洞察。

在探索等面积变换的直觉基础上，本文进一步强化了双曲函数与相空间流动、守恒定律以及动力学系统之间的联系。这不仅在数学上有其独特之处，而且在物理世界中的应用也是至关重要的。

总之，通过上述内容的展开，我们完整地描述了双曲函数与三角函数的关系，解析了它们的数学本质，以及在物理与工程学科等交叉领域中的重要应用。

9 参考资料

- Hyperbolic functions
- What's the intuition behind the identities $\cos(z)=\cosh(iz)$ and $\sin(z)=-i\sinh(iz)$?
- Alternative definition of hyperbolic cosine without relying on exponential function
- HYPERBOLIC FUNCTIONS
- Hyperbolic trig function, the input is twice of the area
- Derivation of cosh and sinh
- What is the deal with (hyperbolic) trig functions?
- Hyperbolic Trig Functions THE HARD WAY