对易子

Wikipedia

3 November 2023

在数学中，**对易子** (**commutator**) 表明一个二元运算不能交换的程度。在群论和环论中有不同的定义。

1 Group theory

一个群 G 的两个元素 g 和 h 的**对易子** (**commutator**) 是元素

$$[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh.$$

该元素等价于群的恒等式当且仅当 g 和 h 交换 (根据定义 $gh=hg[g,h]$，即 $[g,h]$ 等价于恒等式当且仅当 $gh=hg$)。

在群运算下，一个群的所有对易子的集合一般是不封闭的，但由所有对易子生成的 G 的子群是封闭的，称为导群 (*derived group*) 或 G 的对易子子群 (*commutator subgroup*)。对易子被用于定义幂零可解群和最大阿贝尔商群。

在本文的整篇文章中使用了上述对易子的定义，但许多其他群理论家将对易子定义为 [1][2]

$$[g,h]=ghg^{-1}h^{-1}.$$

1.1 恒等式 (群论)

对易子恒等式是群论中的一个重要工具。[3] 表达式 a^x 标志 a 通过 x 的共轭，定义为 $x^{-1}ax$。

1. $x^y=x[x,y]$.
2. $[y,x]=[x,y]^{-1}$.
3. $[x,zy]=[x,y]\cdot[x,z]^y$ and $[xz,y]=[x,y]^z\cdot[z,y]$.
4. $[x,y^{-1}]=[y,x]^{y^{-1}}$ and $[x^{-1},y]=[y,x]^{x^{-1}}$.
5. $\left[\left[x,y^{-1}\right],z\right]^y\cdot\left[\left[y,z^{-1}\right],x\right]^z\cdot\left[\left[z,x^{-1}\right],y\right]^x=1$ and $[[x,y],z^x]\cdot[[z,x],y^z]\cdot[[y,z],x^y]=1$.

恒等式 (5) 也被称为 Hall-Witt 恒等式 (*Hall-Witt identity*)，由 Philip Hall 和 Ernst Witt 提出。这对于环理论对易子 (见下一节) 是一个雅可比恒等式的群论类似物。

注意：上述 a 通过 x 的共轭的定义被一些群理论家使用。[4] 许多其他的群理论家将 a 通过 x 的共轭定义为 xax^{-1}。[5] 这通常写为 ${}^xa$。类似的恒等式适用于这些约定。

许多恒等式被用来表示某些子群的真模 (true modulo)。这在可解群和幂零群的研究中特别有用。例如，在任意群中，二次幂表现良好：

$$(xy)^2 = x^2 y^2 [y,x] [[y,x],y].$$

如果导子群 (derived subgroup) 为中心，则

$$(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

2 环理论

环通常不支持除法。因此，一个环 (或任意结合代数) 的两个元素 a 和 b 的**对易子** (**commutator**) 的定义是不同的，为

$$[a,b] = ab - ba.$$

当且仅当 a 和 b 交换时，对易子为零。在线性代数中，如果一个空间的两个自同态用交换矩阵表示为一个基，则它们就用每个基来表示。通过使用对易子作为李括号，每个结合代数都可以转化为李代数。

环或结合代数的两个元素 a 和 b 的**反对易子** (**anticommutator**) 定义为

$$\{a,b\} = ab + ba.$$

有时 $[a,b]_+$ 被用于标志反对易子，而 $[a,b]_-$ 则被用于标志对易子。[6] 反对易子使用较少，但可用于定义 Clifford 代数和 Jordan 代数，也可用于推导粒子物理中的 Dirac 方程。

作用于 Hilbert 空间的两个算子的对易子是量子力学中的一个中心概念，因为它量化这些算子所描述的两个可观测量同时被测量的程度。根据 Robertson-Schrödinger 关系，测不准原理最终是一个关于此类对易子的定理。[7] 在相空间中，函数的星乘积 (star-products) 的等价对易子称为 Moyal 括号 (Moyal brackets)，它完全同构于上述 Hilbert 空间对易子结构。

2.1 恒等式 (环理论)

对易子具有以下性质：

2.1.1 李代数恒等式

1. $[A+B,C] = [A,C] + [B,C]$
2. $[A,A] = 0$
3. $[A,B] = -[B,A]$
4. $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

关系 (3) 称为反可交换性，而 (4) 称为雅可比恒等式。

2.1.2 附加恒等式

1. $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
2. $[A, BCD] = [A, B]CD + B[A, C]D + BC[A, D]$
3. $[A, BCDE] = [A, B]CDE + B[A, C]DE + BC[A, D]E + BCD[A, E]$
4. $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
5. $[ABC, D] = AB[C, D] + A[B, D]C + [A, D]BC$
6. $[ABCD, E] = ABC[D, E] + AB[C, E]D + A[B, E]CD + [A, E]BCD$
7. $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$
8. $[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$
9. $[AB, CD] = A[B, C]D + [A, C]BD + CA[B, D] + C[A, D]B = A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B$
10. $[[A, C], [B, D]] = [[[A, B], C], D] + [[[B, C], D], A] + [[[C, D], A], B] + [[[D, A], B], C]$

如果 A 是一个环 R 的一个固定元素，则恒等式 (1) 可以解释为对于由 $\mathrm{ad}_A(B) = [A, B]$ 给出的映射 $\mathrm{ad}_A : R \to R$ 的一个 Leibniz 规则。换句话说，映射 ad_A 定义在环 R 上的一个导子 (derivation)。恒等式 (2), (3) 表示两个以上因子的 Leibniz 规则，并且对任意导子都有效。恒等式 (4)-(6) 也可以解释为 Leibniz 规则。恒等 (7), (8) 表示 Z-双线性性。

由恒等式 (9) 可知，环元素整数次幂的对易子为：

$$\left[A^N, B^M\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} A^n B^m [A, B] A^{N-n-1} B^{M-m-1}$$

使用上述 $\pm$ 下标符号，可以将上述恒等式中的一些恒等式扩展到反对易子。[8] 例如：

1. $[AB, C]_\pm = A[B, C]_- + [A, C]_\pm B$
2. $[AB, CD]_\pm = A[B, C]_- D + AC[B, D]_- + [A, C]_- DB + C[A, D]_\pm B$
3. $[[A, B], [C, D]] = \left[[[B, C]_+, A]_+, D\right] - \left[[[B, D]_+, A]_+, C\right] + \left[[[A, D]_+, B]_+, C\right] - \left[[[A, C]_+, B]_+, D\right]$
4. $[A, [B, C]_\pm] + [B, [C, A]_\pm] + [C, [A, B]_\pm] = 0$
5. $[A, BC]_\pm = [A, B]_- C + B[A, C]_\pm = [A, B]_\pm C \mp B[A, C]_-$
6. $[A, BC] = [A, B]_\pm C \mp B[A, C]_\pm$

2.1.3 指数恒等式

考虑一个环或代数，其中指数 $e^A = \exp(A) = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$ 可以有意义地定义，如一个 Banach 代数或一个形式幂级数的环。

在这样一个环中，应用于嵌套对易子的 Hadamard 引理给出：

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots = e^{\mathrm{ad}_A}(B).$$

(对于上一表达式，参见下面的“伴随导子”一节。) 该公式是 $\log(\exp(A)\exp(B))$ 的 Baker-Campbell-Hausdorff 展开式的基础。

类似的，根据一系列嵌套的对易子 (李括号)，表达式 e^A(类似于一个李群元素) 的群对易子的扩展表达为

$$e^A e^B e^{-A} e^{-B} = \exp\left([A,B] + \frac{1}{2!}[A+B,[A,B]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}[A,[B,[B,A]]] + [A+B,[A+B,[A,B]]]\right) + \cdots\right).$$

3 分级环与代数

当处理分级代数时，通常用**分级对易子 (graded commutator)**，在齐次分量中定义为

$$[\omega,\eta]_{gr} := \omega\eta - (-1)^{\deg\omega \deg\eta}\,\eta\omega.$$

4 伴随导子

特别是当人们处理在一个环 R 中的多个对易子时，另一种表示法是有用的。对于一个元素 $x \in R$，我们定义伴随映射 $\mathrm{ad}_x : R \to R$ 为：

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x,y] = xy - yx.$$

该映射是在环 R 上的一个导子 (derivation)：

$$\mathrm{ad}_x(yz) = \mathrm{ad}_x(y)\,z + y\,\mathrm{ad}_x(z).$$

根据 Jacobi 恒等式，它也是在交换运算之上的一个导子：

$$\mathrm{ad}_x[y,z] = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)].$$

组合这些的映射，例如我们得到 $\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y(z) = [x,[y,z]]$，以及

$$\mathrm{ad}_x^2(z) = \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_x(z)) = [x,[x,z]].$$

我们可以把 ad 本身看作一个映射，$\mathrm{ad} : R \to \mathrm{End}(R)$，其中 $\mathrm{End}(R)$ 是从 R 到其自身的映射环，其组合是乘法运算。则 ad 是一个李代数同态，保持对易子：

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y].$$

相反，它**并不总是**一个环同态：通常是 $\mathrm{ad}_{xy} \neq \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$。

4.1 一般 Leibniz 规则

一般的 Leibniz 规则，扩展一个乘积的重复导数，可以使用伴随表示抽象地写为：

$$x^n y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ad}_x^k (y)\, x^{n-k}.$$

用微分算子 ∂ 替换 x，并用乘法算子 $m_f : g \mapsto fg$ 替换 y，我们得到 $\operatorname{ad}(\partial)(m_f) = m_{\partial(f)}$，并将两侧都应用于一个函数 g，恒等式变成第 n 阶导数 $\partial^n (fg)$ 的常用 Leibniz 规则。

See also

- Anticommutativity
- Associator
- Baker-Campbell-Hausdorff formula
- Canonical commutation relation
- Centralizer a.k.a. commutant
- Derivation (abstract algebra)
- Moyal bracket
- Pincherle derivative
- Poisson bracket
- Ternary commutator
- Three subgroups lemma

Notes

1. Fraleigh (1976, p. 108)
2. Herstein (1975, p. 65)
3. McKay (2000, p. 4)
4. Herstein (1975, p. 83)
5. Fraleigh (1976, p. 128)
6. McMahon (2008)
7. Liboff (2003, pp. 140-142)
8. Lavrov (2014)

References

- Fraleigh, John B. (1976), A First Course In Abstract Algebra (https://books.google.com/books?id=hyHvAAAAMAAJ&q=commutator) (2nd ed.), Reading: Addison-Wesley, ISBN 0-201-01984-1
- Griffiths, David J. (2004), Introduction to Quantum Mechanics (https://archive.org/details/introductiontoel00grif_0) (2nd ed.), Prentice Hall, ISBN 0-13-805326-X
- Herstein, I. N. (1975), Topics In Algebra (2nd ed.), Wiley, ISBN 0471010901
- Lavrov, P.M. (2014), "Jacobi -type identities in algebras and superalgebras", Theoretical and Mathematical Physics, 179 (2): 550-558, arXiv:1304.5050 (https://arxiv.org/abs/1304.5050), Bibcode:2014TMP...179..550L (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014TMP...179..550L), doi:10.1007/s11232-014-0161-2 (https://doi.org/10.1007%2Fs11232-014-0161-2), S2CID 119175276 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119175276)
- Liboff, Richard L. (2003), Introductory Quantum Mechanics (4th ed.), Addison-Wesley, ISBN 0-8053-8714-5
- McKay, Susan (2000), Finite p-groups, Queen Mary Maths Notes, vol. 18, University of London, ISBN 978-0902480-17-9, MR 1802994 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1802994)
- McMahon, D. (2008), Quantum Field Theory, McGraw Hill, ISBN 978-0-07-154382-8

Further reading

- McKenzie, R.; Snow, J. (2005), "Congruence modular varieties: commutator theory" (https://www.researchgate.net/publication/226377308), in Kudryavtsev, V. B.; Rosenberg, I. G. (eds.), Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, NATO Science Series II, vol. 207, Springer, pp. 273-329, doi:10.1007/14020-3817-8_11 (https://doi.org/10.1007%2F1-4020-3817-8_11), ISBN 9781402038174

External links

- "Commutator" (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Commutator), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]