

向量场的李括号

Wikipedia

27 October 2023

在微分拓扑的数学领域中，**向量场的李括号** (Lie bracket of vector fields)，也称为**雅可比李括号** (Jacobi-Lie bracket) 或**向量场的对易子** (commutator of vector fields)，是一个算子，它将在光滑流形 M 上的任意两个向量场 X 和 Y 赋给第三个向量场，其标志为 $[X, Y]$ 。

从概念上讲，李括号 $[X, Y]$ 是 Y 沿着由 X 生成的流的导数，有时标志为 $\mathcal{L}_X Y$ (“ Y 沿着 X 的李导数”)。这推广到任意张量场沿着 X 生成的流的李导数。

李括号是一个 \mathbf{R} 双线性运算，它将在流形 M 上所有光滑向量场的集合转化为 (无限维的) 李代数。

李括号在微分几何和微分拓扑中起着重要作用，如 Frobenius 可积定理，也是非线性控制系统几何理论的基础。[1]

1 定义

定义李括号有三种概念上不同但等效的方法：

1.1 向量场作为导子

每个在流形 M 上的平滑向量场 $X : M \rightarrow TM$ ，当我们定义 $X(f)$ 为另一个函数，其在一个点 p 处的值为 f 在点 p 处沿着方向 $X(p)$ 的方向导数 (directional derivative) 时，可视为一个微分算子 (differential operator)，它作用在光滑函数 $f(p)$ (其中 $p \in M$ 并且 f 为 $C^\infty(M)$ 级) 上。这样，每个光滑向量场 X 就成为在 $C^\infty(M)$ 上的导子 (derivation)。此外，在 $C^\infty(M)$ 上的任意导子都来自于唯一的光滑向量场 X 。

通常，任意两个导子 δ_1 和 δ_2 的对易子 (commutator) $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$ 也是一个导子，其中 \circ 标志算子的分量。这可用于将李括号定义为对应于对易子导数的向量场：

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \text{ for all } f \in C^\infty(M).$$

1.2 流与极限

设 Φ_t^X 是与向量场 X 相关联的流 (flow)，并设 D 为标志切映射的导数算子。则 X 和 Y 在点 $x \in M$ 处的李括号可定义为李导数 (Lie derivative)：

$$[X, Y]_x = (\mathcal{L}_X Y)_x := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t}^X)^* Y_{\Phi_t^X(x)} - Y_x}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_{-t}^X)^* Y_{\Phi_t^X(x)}.$$

这也会测量在连续方向 $X, Y, -X, -Y$ 中的流返回到点 x 的失败:

$$[X, Y]_x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t}^Y \circ \Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X)(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-\sqrt{t}}^Y \circ \Phi_{-\sqrt{t}}^X \circ \Phi_{\sqrt{t}}^Y \circ \Phi_{\sqrt{t}}^X)(x).$$

1.3 在坐标中

尽管上述李括号的定义是内在的 (不依赖在流形 M 上的坐标的选择), 但在实践中, 人们通常希望根据特定的坐标系统 $\{x^i\}$ 来计算括号。对于关联的切丛的局部基, 我们写为 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, 以使得对于光滑函数 $X^i, Y^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, 一般向量场可以写为 $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ 和 $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$ 。则李括号可计算为:

$$[X, Y] := \sum_{i=1}^n (X(Y^i) - Y(X^i)) \partial_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \partial_i.$$

如果 M 是 \mathbf{R}^n 的 (一个开子集), 则向量场 X 和 Y 可以写为形式 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的光滑映射, 并且李括号 $[X, Y] : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 给出为:

$$[X, Y] := J_Y X - J_X Y$$

其中, J_Y 和 J_X 是 $n \times n$ 雅可比矩阵 ($\partial_j Y^i$ 和 $\partial_j X^i$ 分别使用索引表示法) 乘以 $n \times 1$ 列向量 X 和 Y 。

2 性质

向量场的李括号等价于在 M 上的所有向量场的实向量空间 $V = \Gamma(TM)$ (即切丛 $TM \rightarrow M$ 的光滑截面), 它们带有一个李代数的结构, 这意味 $[\cdot, \cdot]$ 是一个映射 $V \times V \rightarrow V$, 具有性质:

- **R** 双线性性
- 反对称, $[X, Y] = -[Y, X]$
- 雅可比恒等式, $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

第二个性质的直接结果是, 对于任意 X , $[X, X] = 0$ 。

此外, 对于李括号还有一个“乘积规则”。给定在 M 上的一个光滑 (标量值) 函数 f 和在 M 上的一个向量场 Y , 通过在每个点 $x \in M$ 处将向量 Y_x 乘以标量 $f(x)$ 得到一个新的向量场 fY 。则:

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y],$$

其中, 我们将标量函数 $X(f)$ 与向量场 Y 相乘, 将标量函数 f 与向量场 $[X, Y]$ 相乘。这会将带有李括号的向量场转化为李代数胚 (Lie algebroid)。

X 和 Y 的李括号消失 (为零) 意味着在这些方向中跟随着流定义了一个嵌入在 M 中的曲面, 其中 X 和 Y 为坐标向量场:

定理. $[X, Y] = 0$ 当且仅当 X 和 Y 的流在局部可交换时, 意味着 $(\Phi_t^Y \Phi_s^X)(x) = (\Phi_s^X \Phi_t^Y)(x)$ 对于所有 $x \in M$ 和足够小的 s, t 成立。

这是 Frobenius 可积定理的一个特例。

3 示例

对于一个李群 G ，对应的李代数 \mathfrak{g} 是在恒等式 $T_e G$ 处的切空间，其可用在 G 上的左不变向量场的向量空间来识别。两个左不变向量场的李括号也是左不变的，其定义了 Jacobi 李括号运算 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 。

对于元素为矩阵 $g \in G \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 的一个矩阵李群，每个切空间可以表示为矩阵： $T_g G = g \cdot T_I G \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ，其中 \cdot 表示矩阵乘法，并且 I 表示单位矩阵。由 $X_g = g \cdot X \in T_g G$ 给出了 $X \in \mathfrak{g} = T_I G$ 对应的不变向量场，并且计算表明在 \mathfrak{g} 上的李括号对应于矩阵的一般对易子：

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X.$$

4 推广

如上所述，李导数可以看作是李括号的推广。李括号（向量-值微分形式）的另一个推广是 Frölicher-Nijenhuis 括号。

References

1. Isaiah 2009, pp. 20-21, nonholonomic systems; Khalil 2002, pp. 523-530, feedback linearization.
2. "Lie bracket" (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lie_bracket), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]
3. Isaiah, Pantelis (2009), "Controlled parking [Ask the experts]", IEEE Control Systems Magazine, 29 (3): 17-21, 132, doi:10.1109/MCS.2009.932394 (<https://doi.org/10.1109/2FMCS.2009.932394>), S2CID 42908664 (<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:42908664>)
4. Khalil, H.K. (2002), Nonlinear Systems (<http://www.egr.msu.edu/khalil/NonlinearSystems/>) (3rd ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, ISBN 0-13-067389-7
5. Kolář, I., Michor, P., and Slovák, J. (1993), Natural operations in differential geometry (<http://www.emis.de/monographs/KSM/index.html>), Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, ISBN 3-540-56235-4 Extensive discussion of Lie brackets, and the general theory of Lie derivatives.
6. Lang, S. (1995), Differential and Riemannian manifolds, Springer-Verlag, ISBN 978-0-38794338-1 For generalizations to infinite dimensions.
7. Lewis, Andrew D., Notes on (Nonlinear) Control Theory (<http://penelope.mast.queensu.ca/math890-03/ps/math890.pdf>) (PDF)
8. Warner, Frank (1983) [1971], Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, New York-Berlin: Springer-Verlag, ISBN 0-387-90894-3