恒等式 $\cos(z) = \cosh(iz)$ 和 $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ 背后的直觉是什么？

Mark S.

Apr 16, 2016

1 Question

我试图以直观的方式理解复平面中圆形函数和双曲函数之间的关系，即：

$$\cos(z) = \cosh(iz)$$
$$\sin(z) = -i\sinh(iz)$$

其中 z 是复数。

从几何学的角度看，我所理解的是 cos 是通过 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转，然后与 cosh 复合，并且 sin 是通过 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转，然后与 sinh 复合，然后通过 $-\frac{\pi}{2}$ 旋转 (其中 $\sin, \cos, \sinh, \cosh$ 定义为复函数)。

这个连接来自哪里？是否有某种方法可以用复数映射来可视化它？(我不是要恒等式证明，我已经知道了)。

2 一般性评论

2.1 免责声明

在我尽最大努力激发这些恒等式/绘制一些几何直觉之前，我想解释一下为什么我认为不会有一个非常令人满意的答案。

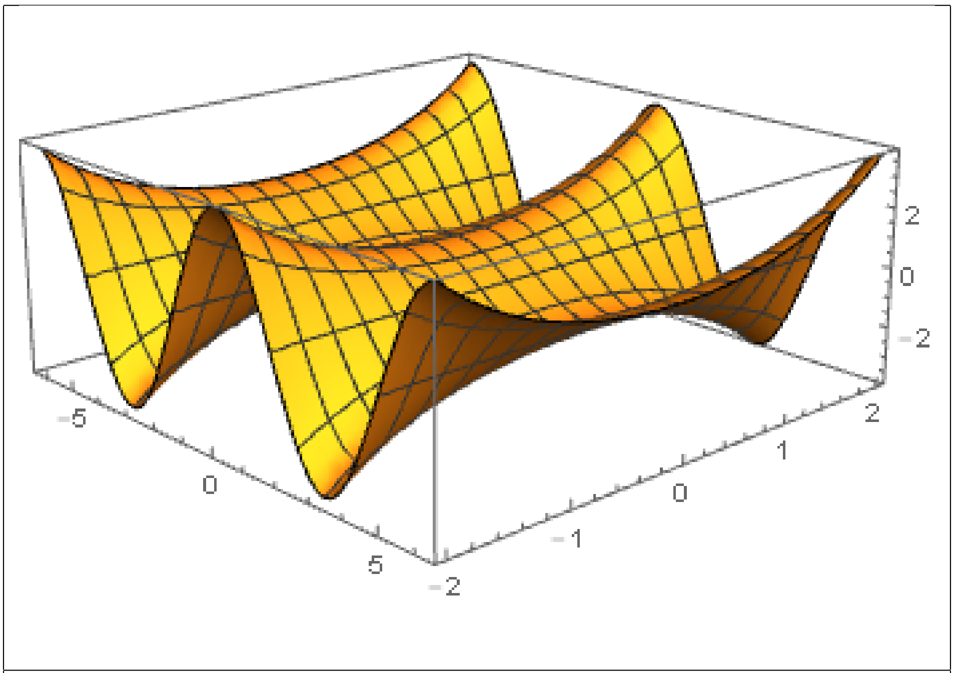
当然，像 i 的乘积与单位圆和单位双曲函数之类的东西都有几何解释，但是三角函数，不论圆形函数 (circular) 还是双曲函数 (hyperbolic)，实际上只是为实数输入而几何定义的。它们以及密切相关的指数函数 (exponential function) 通过解析延拓 (analytic continuation) 扩展到非实数输入：本质上，通过 fiat 声明幂级数或微分方程也将用作非实数输入的定义。因为这一步不是非常几何，我不认为有一个整洁的故事，只存在于几何领域。然而，我们可以使用几何来考虑圆形三角函数或双曲函数 (但不能同时考虑两者)，然后将方程的边与指数函数 (或类似函数) 连接起来。

2.2 一个复数图像

既然问题是“是否有某种方法可以用复数映射来可视化它？”我想指出，在这些东西存在的地方有相关的 4D 图片。不幸的是，我们只能看到 3D 切片，但你仍然可以看到相关的关系。请注意，假设等式中的恒等式，我们得到如下结果：$\cos(x+iy) = \dfrac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}$。这

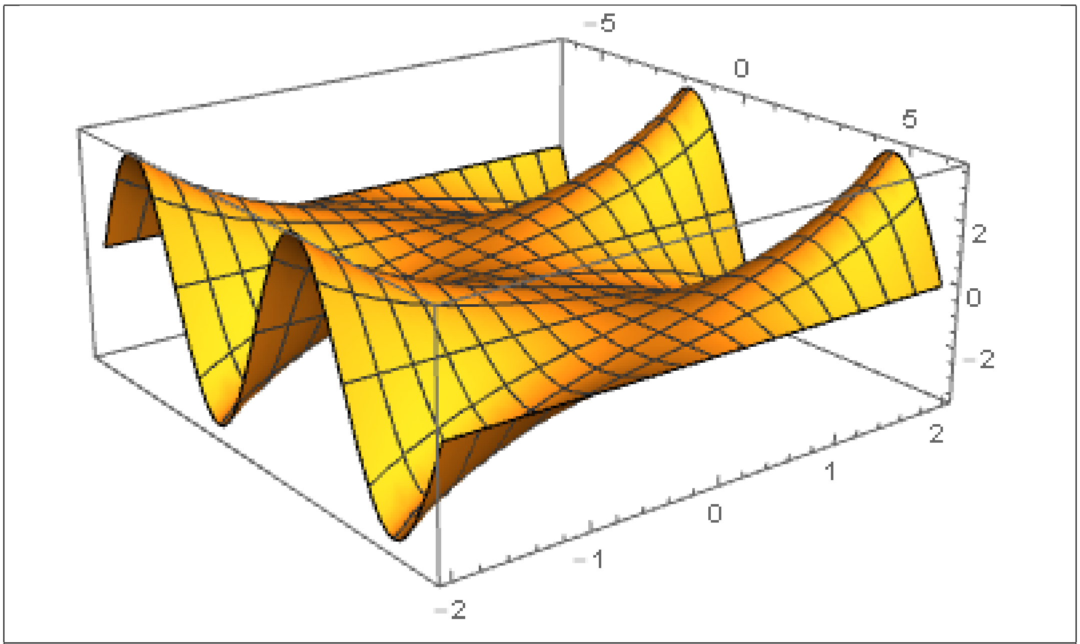
扩展到 $\dfrac{e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)}{2}=\cosh y\cos x-i\sinh y\sin x$。对于实数 x 和 y，我们可以说实部为 $\cos\left(x+iy\right)=\cosh y\cos x$，虚部为 $-\sinh y\sin x$。

这将产生如下图像：



re(cos($x+iy$))

这显示 $\cosh y\cos x$。你可以在 Wolfram|Alpha 中看到类似的图像。



im(cos($x+iy$))

这显示 $-\sinh y\sin x$。你可以在 Wolfram|Alpha 中看到类似的图像。

从 $\sin\left(x+iy\right)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 可以得到与其他恒等式相关的非常相似的图像。

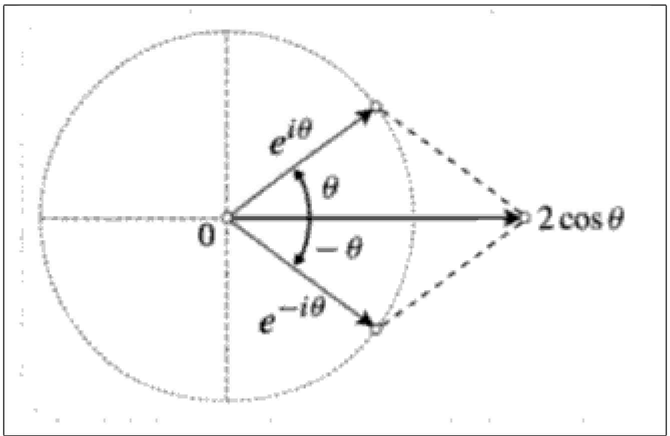
3 “半角几何”参数

3.1 圆形几何

因为问题是“不要求证明”，所以这里我只关注 z 是一个实数 θ 的情况。

3.1.1 cos 与 cosh

在几何术语中，$\cos\theta$ 是单位圆上点的 x 坐标，θ (弧度) 的旋转是从正 x 轴 (以 θ 的角度) 的逆时针旋转。考虑 $\cos\theta+0i$ 作为复平面中的一个向量是有帮助的。现在，$\cosh(i\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}}{2}$。所以我们必须论证 $2\cos\theta=e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}$。但对于实数 φ (包括 $\varphi=\pm\theta$)，$e^{i\varphi}$ 是单位圆上一个 φ 角度的点 (参见附录)。我在笔记本上画了一张图片，以几何形式将这两个表达式连接起来，但结果与我在后面列出的书籍中发现的基本相同：the preview of the text Visual Complex Analysis by Tristan Needham (specifically in II.4)：

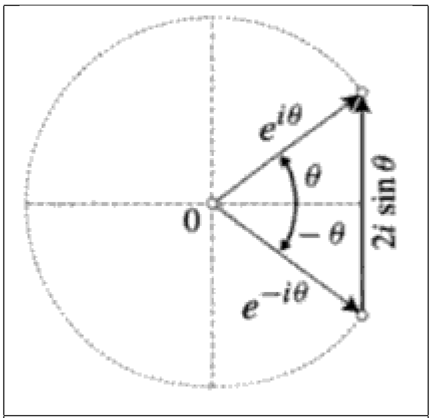


cos image

这表明，当 $e^{i\theta}$ 和 $e^{i(-\theta)}$ 用向量相加时，将得到两倍的水平分量：$2\cos\theta$，因为逆时针旋转 θ 和顺时针旋转 θ 的水平分量是相同的。

3.1.2 sin 与 sinh

对于另一个恒等式，有一个非常相似的故事。$\sin\theta$ 是在 θ 角度处的 y 坐标，并且 $-i\sinh(i\theta)=-i\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$。因为 $-i=\dfrac{1}{i}$，我们只需要讨论为什么 $2i\sin\theta=e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}$。$i\sin\theta$ 是在 θ 角度处的一个点的垂直向量的 y 坐标，并且向量减法使得下图与之相关 (同样来自上述的“可视化复分析”的 II.4)：



sin image

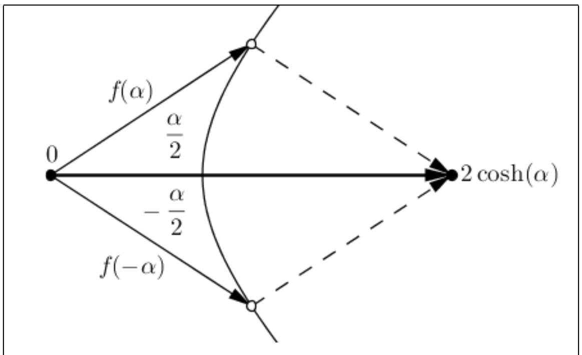
这表明，当 $e^{i\theta}$ 与 $e^{i(-\theta)}$ 用向量相减时，得到两倍的垂直分量：$2i\sin\theta$，因为逆时针和顺时针旋转相同角度的垂直分量大小相等，方向相反。

3.2 双曲几何

因为问题是“不要求证明”，所以这里我只关注 z 是“纯虚”数 (对于某些实数 r 为 ir) 的情况。

3.2.1 cos 与 cosh

如果 $z=-i\alpha$，则第一个恒等式变为“$\cos(-i\alpha)=\cosh(\alpha)$”。设 $f(w)=\cosh(w)+i\sinh(w)$ 给出单位双曲函数上的点 (参数化为从原点开始的线段所对应的有符号面积的两倍)，这类似于 $\cos w+i\sin w=e^{iw}$ 在单位圆上给出的点。那么 $\cos w=\dfrac{f(iw)+f(-iw)}{2}$ (通过上述的圆形几何参数，这至少满足实数 w 的情况)。所以我们有 $\cos(-i\alpha)=\dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$，并且必须论证 $f(\alpha)+f(-\alpha)=2\cosh(\alpha)$。图片与余弦的非常相似：



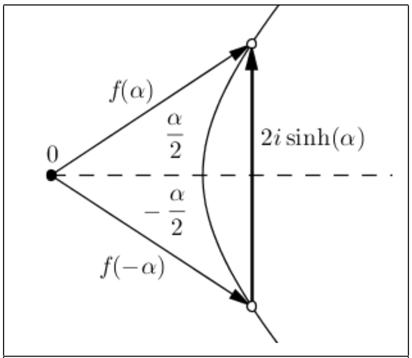
cosh image

这表明，当 $f(\alpha)$ 和 $f(-\alpha)$ 用向量相加时，得到的是两倍的水平方向的分量：$2\cosh\alpha$，因为对于水平分量，在水平轴上方的 $\left|\dfrac{\alpha}{2}\right|$ 的面积，与水平轴下方的 $\left|\dfrac{\alpha}{2}\right|$ 的面积相同。

3.2.2 sin 与 sinh

对于另一个恒等式，有一个非常相似的故事。如果 $z=-i\alpha$，则第二个恒等式变为“$\sin(-i\alpha)=-i\sinh(\alpha)$”。用上面的 f，我们有 $\sin w=\dfrac{f(iw)-f(-iw)}{-2}$ (通过上述的圆形几何参数，这至少满足

实数 w 的情况)，这产生 $\sin(-i\alpha) = \dfrac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{-2}$，所以我们必须论证 $f(\alpha) - f(-\alpha) = 2i\sinh\alpha$。向量减法使得以下图片与之相关：



sinh image

这表明，当 $f(\alpha)$ 和 $f(-\alpha)$ 用向量相减时，得到两倍的垂直分量：$2i\sinh\alpha$，因为水平轴上方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积与水平轴下方的 $\left|\frac{\alpha}{2}\right|$ 的面积的垂直分量大小相等，方向相反。

A 附录：指数函数

上述"半角几何"参数依赖于实数输入的 sin, cos, sinh, cosh 的几何意义与指数函数之间的联系。这里我将对这些联系进行扩展。

A.1 单位圆

关于为什么 $e^{i\theta}$ 应该等价于 $\cos\theta + i\sin\theta$，有许多论点。我最喜欢的推理方式之一是基于向量函数和导数。考虑一个粒子以单位速度绕复平面中的单位圆逆时针移动 (从 $1 + 0i$ 开始)。根据弧度、正弦和余弦的定义，其在复平面上在时间 t 时的位置由 $\mathsf{s}(t) = \cos\theta + i\sin\theta$ 给出。因为一个圆的切线形成一个直角，与 i 相乘使物体逆时针旋转一个直角 (x+iy 被发送到 −y+ix)，对于一些正实数 k，我们有 $\mathsf{s}'(t) = ki\mathsf{s}(t)$。因为它以单位速度运动，我们有 $|\mathsf{s}'(t)| = 1$，所以 $k = 1$，得到 $|\mathsf{s}(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$。现在我们只需要找到一个复函数，其中 $\mathsf{s}(0) = 1$ ，并且 $\mathsf{s}'(t) = i\mathsf{s}(t)$。由于指数函数是它自己的导数，微分的链式法则告诉我们可以使用 $\mathsf{s}(t) = e^{it}$。这个论点在"可视化复分析 (Visual Complex Analysis)"中的 II.2"移动粒子参数"一节有更详细的讨论。

A.2 单位双曲函数

关于为什么 $(\cosh a, \sinh a)$ 是单位双曲函数上 $a/2$ 面积对应的点，可能有很多论点，但我不知道有任何非常整洁的论点。一个简单但非常繁琐的方法是将面积设置为一个积分，然后通过几个三角积分进行转换，如这个文档：`http://www.mathed.soe.vt.edu/Undergraduates/EulersIdentity/HyperbolicTrig.pdf`。然而，这可以用一种稍微聪明一点的方法来完成，首先把它旋转到第一象限，然后进行一些观察。以下内容与 James B.Calvert 博士在文档 `http://mysite.du.edu/~jcalvert/math/hyperb.htm` 中的"双曲函数"下的论述密切相关，我进行了一些编辑性修改；我没有独立地得出这种方法：

单位双曲函数满足 $x^2 - y^2 = 1$，并且我们对 $x > 0$ 的分支感兴趣。我们可以通过替换 $x - y = z\sqrt{2}$ 和 $x + y = w\sqrt{2}$ 来旋转 $\dfrac{\tau}{8} = \dfrac{\pi}{4}$。等式则变成 $zw = 1/2$，并且我们对 $z, w > 0$ 的分支感兴趣。考

虑如下的图，其中 $\overrightarrow{OQ}$ 为正 z 轴，A 为点 $(z,w)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，以使得 $(x,y)=(1,0)$，P 是 $(z,w)=(p_1,p_2)$ 的任意点，B 是 $(z,w)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 的点，并且 Q 是 $(z,w)=(p_1,0)$ 的点：

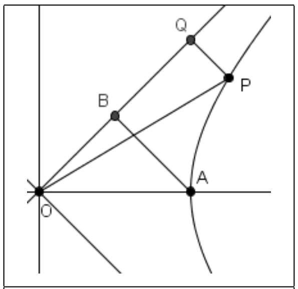


diagram as described

我们寻求的 OAP 的面积是 area$OAPQ-$area$\triangle OPQ$ 的差异面积。现在，$\triangle OPQ$ 有面积 $\frac{1}{2}p_1p_2$。但由于 P 位于双曲函数上，$p_1p_2=\frac{1}{2}$，并因此 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{1}{4}$。注意，这也是 $\triangle OAB$ 的面积，因为三角形的底和高度等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。因此，我们只需要找到 area$OAPQ-$area$\triangle OAB$，这是在 zw 平面上的一个直接积分：$\int_{1/\sqrt{2}}^{p_1}\frac{1}{2z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left(\ln|p_1|-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}p_1\right)$。如果 P 的 xy 坐标为 (x,y)，则 $\sqrt{2}p_1=x+y$，并且我们发现这个面积为 $\frac{1}{2}\ln(x+y)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=\frac{1}{2}\sinh^{-1}y$，当 $\sinh t$ 由 $\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ 定义时，这正是我们所要寻找的。一旦我们有这个 $\sinh t$ 正确的定义，我们就可以使用 $x^2-y^2=1$ 和 $x>0$ 来求解 $\cosh t$。

我发现有趣的是 sinh 的反函数得出的什么结果。我模模糊糊地记得几年前读过关于 sin 的反函数自然得出结果的文章。当然，也有椭圆函数的结果，反函数更自然地出现。这个面积的事实就是它们被称为双曲 sin 和双曲 cos 的原因。同样的性质也适用于具有 sin 和 cos 的单位圆的扇形面积，只是对于圆形，弧长是面积的两倍，所以我们通常考虑弧度角。