

李导数

Wikipedia

30 October 2023

在微分几何中，**李导数** (**Lie derivative** (/li:/ LEE)) 由 Władysław Ślebodziński [1][2] 以 Sophus Lie 的名字命名，它用于评估一个张量场 (包括标量函数、向量场和一元形式) 沿另一个向量场定义的流的变化。这种变化是坐标不变的，因此在任意可变流形上都可以定义李导数。

函数、张量场以及它们的形式可以相对于向量场进行微分。如果 T 是一个张量场，并且 X 是一个向量场，则 T 相对于 X 的李导数标志为 $\mathcal{L}_X T$ 。微分算子 $T \mapsto \mathcal{L}_X T$ 是底层流形张量场代数的一个导子 (derivation)。

李导数与收缩 (contraction) 和外导数 (exterior derivative) 在微分形式 (differential forms) 上交换。

尽管微分几何中有许多求导的概念，但当被微分的表达式是一个函数或标量场时，它们都是一致的。因此，在这种情况下，“Lie” 一词被去掉，人们只说函数的导数。

一个向量场 Y 相对于另一向量场 X 的李导数称为 X 和 Y 的“李括号 (Lie bracket)”，通常标志为 $[X, Y]$ 以替代 $\mathcal{L}_X Y$ 。向量场的空间形成相对于这个李括号的李代数。李导数构成了这个李代数的无穷维李代数李代数表示，是由于以下恒等式

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} T = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y T - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X T,$$

适用于任意向量场 X 和 Y 以及任意张量场 T 。

考虑到向量场是在 M 上的无穷小流的生成元 (即一维微分同胚群)，李导数是张量场上微分同胚群表示的微分，类似于李群论中与群表示相关的无穷小表示的李代数表示。

对于旋量场，带有一个连通的纤维丛，以及向量-值微分形式，都存在李导数的扩展。

1 动机

要定义张量场相对于向量场的导数，一种“幼稚”尝试是取张量场的分量，并取每个分量相对于向量场的方向导数 (directional derivative)。但是，这种定义是不可取的，因为它在坐标系变化时并不是不变的，例如，用极坐标或球面坐标表达的幼稚导数与用笛卡尔坐标表达的分量的幼稚导数是不同的。在抽象的流形上，这样的定义是没有意义且定义不清的。在微分几何中，张量场的微分有三种主要的坐标无关的表示法：李导数，相对于连通的导数，以及完全反对称协变张量的外导数，即微分形式。李导数和相对于连通的导数之间的主要区别在于，后者是张量场相对于切向量的导数。它是定义良好的，即使没有指定如何将切向量扩展到向量场。但是，一个连通需要在流形上选择额外的几何结构 (例如一个黎曼度量或仅是一个抽象连通)。相反，当取一个李导数时，流形上不需要额外的结构，但不可能讨论张量场相对于单个切向量的李导数，因为张量场相对于向量场

X 在点 p 处的李导数的值还取决于 p 的邻域中 X 的值，而不仅仅是 p 本身的值。最后，微分形式的外导数不需要任何额外的选择，但仅是一个微分形式 (包括函数) 的定义良好的导数。

2 定义

李导数可以用几种等价的方法定义。为了简单起见，我们先定义作用于标量函数和向量场的李导数，然后再定义一般张量的李导数。

2.1 函数的 (Lie) 导数

定义在一个流形上的一个函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 的导数是个问题，因为当位移 $x+h$ 未定义时，无法确定其差分商 $(f(x+h) - f(x))/h$ 。

一个函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 相对于一个向量场 X 在一点 $p \in M$ 处的李导数是函数

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi_X^t)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_X^t(p)) - f(p)}{t}$$

其中 $\Phi_X^t(p)$ 由向量场 X 定义的流所到达的点，在时间瞬间 t 它映射到点 p 。在 $t=0$ 附近， $\Phi_X^t(p)$ 是一阶自治 (即与时间无关) 微分方程的系统的唯一解

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t \Phi_X^t(p) = X(\Phi_X^t(p)),$$

其中 $\Phi_X^0(p) = p$ 。

设置 $\mathcal{L}_X f = \nabla_X f$ 以识别一个带有方向导数的函数的李导数。

2.2 向量场的李导数

如果 X 和 Y 都是向量场，则 Y 相对于 X 的李导数也被称为 X 和 Y 的李括号，有时标志为 $[X, Y]$ 。定义李括号有几种方法，它们都是等价的。在这里我们列出两个定义，对应于上面给出的向量场的两个定义：

- 在局部坐标中， X 和 Y 在 p 处的李括号由以下公式给出

$$\mathcal{L}_X Y(p) = [X, Y](p) = \partial_X Y(p) - \partial_Y X(p),$$

其中 ∂_X 和 ∂_Y 分别标志取相对于 X 和 Y 的方向导数的运算。在这里我们把 n 维空间中的向量看作 n 元组，因此它的方向导数就是由它的坐标的方向导数组成的元组。尽管在这个定义中出现的最终表达式不取决于局部坐标的选择，但单个项 $\partial_X Y(p)$ 和 $\partial_Y X(p)$ 确实取决于坐标的选择。

- 根据第二种定义，如果 X 和 Y 是在一个流形 M 上的向量场，则算子 $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ 由以下公式定义

$$[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

是 M 的光滑函数代数的一个零阶导数，即根据第二种定义，该算子是一个向量场。

2.3 张量场的李导数

2.3.1 根据流来定义

李导数是张量场由流引起的空间形变作用下的变化速度。

形式上, 在一个光滑流形 M 上给定一个可微 (与时间无关) 向量场 X , 设 $\Phi_X^t : M \rightarrow M$ 为相应的局部流。由于 Φ_X^t 对每一个 t 都是一个局部微分同构, 它因此产生了张量场的一个回拉 (pullback)。对于协变张量, 这只是回拉映射的多线性扩展

$$(\Phi_X^t)_p^* : T_{\Phi_X^t(p)}^* M \rightarrow T_p^* M, \quad (\Phi_X^t)_p^* \alpha(X) = \alpha(T_p \Phi_X^t(X)), \quad \alpha \in T_{\Phi_X^t(p)}^* M, X \in T_p M$$

对于逆变张量, 人们可以扩展微分 $T_p \Phi_X^t$ 的逆为

$$(T_p \Phi_X^t)^{-1} : T_{\Phi_X^t(p)} M \rightarrow T_p M,$$

因此, 对于每一个 t , 都有一个与 T 类型相同的张量场 $(\Phi_X^t)^* T$ 。

如果 T 是一个 $(r, 0)$ 或 $(0, s)$ 类型的张量场, 则 T 的李导数 $\mathcal{L}_X T$ 沿着一个向量场 X 在点 $p \in M$ 处的定义为

$$\mathcal{L}_X T(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left((\Phi_X^t)^* T \right)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_X^t)_p^* T_{\Phi_X^t(p)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_X^t)^* T_{\Phi_X^t(p)} - T_p}{t}.$$

得到的张量场 $\mathcal{L}_X T$ 与 T 的类型相同。

更一般地说, 对于每一个微分同胚的光滑的单参数族 Φ_t , 它积分一个向量场 X , 即满足 $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t = X \circ \Phi_0$, 人们有

$$\mathcal{L}_X T = (\Phi_0^{-1})^* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* T = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^{-1})^* \Phi_0^* T.$$

2.3.2 代数定义

我们现在给出一个代数定义。张量场李导数的代数定义遵循以下四个公理:

公理 1. 函数的李导数等价于函数的方向导数。这一事实通常用以下公式表达为

$$\mathcal{L}_Y f = Y(f)$$

公理 2. 李导数遵循莱布尼茨规则 (*Leibniz's rule*) 的以下版本: 对于任意张量场 S 和 T , 我们有

$$\mathcal{L}_Y (S \otimes T) = (\mathcal{L}_Y S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_Y T).$$

公理 3. 李导数遵循相对于收回 (*contraction*) 的莱布尼茨规则:

$$\mathcal{L}_X (T(Y_1, \dots, Y_n)) = (\mathcal{L}_X T)(Y_1, \dots, Y_n) + T((\mathcal{L}_X Y_1), \dots, Y_n) + \dots + T(Y_1, \dots, (\mathcal{L}_X Y_n))$$

公理 4. 李导数与函数的外导数交换:

$$[\mathcal{L}_X, d] = 0$$

如果这些公理都成立, 那么把李导数 \mathcal{L}_X 应用于关系 $df(Y) = Y(f)$, 就会发现

$$\mathcal{L}_X Y(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

这是李括号的标准定义之一。

李导数在一个微分形式上的作用是内积 (interior product) 与外导数的反对易子 (anticommutator)。因此, 如果 α 是一个微分形式,

$$\mathcal{L}_Y \alpha = i_Y d\alpha + di_Y \alpha.$$

这就很容易通过检查表达式是否与外导数交换、是否是一个导子 (作为分级导数的反对易子), 以及是否对函数做了正确的操作来实现。

显式地, 设 T 为 (p, q) 型张量场。考虑 T 是一个可微的多线性映射, 作用于余切丛 T^*M 的光滑截面 $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^p$, 以及正切丛 TM 的截面 X_1, X_2, \dots, X_q , 记作 $T(\alpha^1, \alpha^2, \dots, X_1, X_2, \dots)$, 其结果是实数 \mathbf{R} 。通过公式定义 T 沿着 Y 的李导数为

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_Y T)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, X_1, X_2, \dots) &= Y(T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, X_1, X_2, \dots)) \\ &\quad - T(\mathcal{L}_Y \alpha_1, \alpha_2, \dots, X_1, X_2, \dots) - T(\alpha_1, \mathcal{L}_Y \alpha_2, \dots, X_1, X_2, \dots) - \dots \\ &\quad - T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \mathcal{L}_Y X_1, X_2, \dots) - T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, X_1, \mathcal{L}_Y X_2, \dots) - \dots \end{aligned}$$

利用前推的性质和微分的莱布尼兹规则, 可以证明解析定义和代数定义是等价的。李导数与收回交换。

2.4 微分形式的李导数

张量场的一个特别重要的类型是微分形式。李导数对微分形式空间的限制与外导数密切相关。李导数和外导数都试图以不同的方式捕捉导数的概念。这些差异可以通过引入内积 (interior product) 的概念来弥合, 这之后, 这些关系就会以一种称为 **Cartan 公式 (Cartan's formula)** 的形式出现。Cartan 公式也可用作微分形式空间上的李导数的定义。

设 M 是一个流形, 并且 X 是在 M 上的一个向量场。设 $\omega \in \Lambda^{k+1}(M)$ 是一个 $(k+1)$ 形式, 即对于每一个 $p \in M$, $\omega(p)$ 是一个从 $(T_p M)^{k+1}$ 到实数的交替多线性映射。 X 和 ω 的内积是一个 k 形式 $i_X \omega$, 定义为

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(X, X_1, \dots, X_k)$$

微分形式 $i_X \omega$ 也称为 ω 对 X 的**收回 (contraction)**, 并且

$$i_X : \Lambda^{k+1}(M) \rightarrow \Lambda^k(M)$$

是一个 \wedge 反导子 (antiderivation), 其中 \wedge 是微分形式的楔积。也就是, i_X 是 \mathbf{R} -线性的, 并且

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X \eta)$$

对于 $\omega \in \Lambda^k(M)$ 和 η 是另一种微分形式。同样, 对于一个函数 $f \in \Lambda^0(M)$, 即在 M 上的实值函数或复值函数, 人们有

$$i_{fX} \omega = f i_X \omega$$

其中 fX 标志 f 和 X 的乘积。外导数和李导数之间的关系可总结如下。首先, 由于一个函数 f 相对于一个向量场 X 的李导数与方向导数 $X(f)$ 相同, 因此它也与 f 对 X 的外导数的收回相同:

$$\mathcal{L}_X f = i_X df$$

对于一般微分形式, 考虑到 X 的变化, 李导数同样是一种收回:

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega).$$

这个恒等式被称为 **Cartan 公式** (Cartan formula), **Cartan 同伦公式** (Cartan homotopy formula) 或 **Cartan 魔法公式** (Cartan's magic formula)。详情参见内积资料。Cartan 公式可用作一个微分形式的李导数的一个定义。Cartan 公式特别表明

$$d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(dw).$$

李导数还满足关系

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega.$$

3 坐标表达式

在局部坐标符号中, 对于一个 (r, s) 型张量场 T , 沿着 X 的李导数为

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= X^c (\partial_c T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}) \\ &\quad - (\partial_c X^{a_1}) T^{ca_2 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} - \dots - (\partial_c X^{a_r}) T^{a_1 \dots a_{r-1} c}_{b_1 \dots b_s} \\ &\quad + (\partial_{b_1} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{cb_2 \dots b_s} + \dots + (\partial_{b_s} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_{s-1} c} \end{aligned}$$

这里, 符号 $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ 是指相对于坐标 x^a 取偏导数。或者, 如果我们使用无扭连通 (例如, Levi Civita 连通), 则偏导数 ∂_a 可以被协变导数替代, 也就是将 $\partial_a X^b$ (通过滥用符号) 替换为 $\nabla_a X^b = X^b_{;a} := (\nabla X)^b_a = \partial_a X^b + \Gamma^b_{ac} X^c$, 其中 $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ 是 Christoffel 系数 (Christoffel coefficients)。

张量的李导数是同一类型的另一个张量, 也就是, 即使表达式中的单个项取决于坐标系统的选择, 表达式作为一个整体也会产生一个张量

$$(\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_r} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_s}$$

它独立于任意坐标系, 并且类型与 T 相同。

该定义可以进一步扩展到张量密度。如果 T 是某个实值权重 w 的张量密度 (例如权重为 1 的体积密度), 则其李导数是同类型且同权重的张量密度。

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= X^c (\partial_c T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}) - (\partial_c X^{a_1}) T^{ca_2 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} - \dots - (\partial_c X^{a_r}) T^{a_1 \dots a_{r-1} c}_{b_1 \dots b_s} + \\ &\quad + (\partial_{b_1} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{cb_2 \dots b_s} + \dots + (\partial_{b_s} X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_{s-1} c} + w(\partial_c X^c) T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \end{aligned}$$

请注意表达式末尾处的新项。

对于一个线性连通 $\Gamma = (\Gamma^a_{bc})$, 沿着 X 的李导数为 [3]

$$(\mathcal{L}_X \Gamma)^a_{bc} = X^d \partial_d \Gamma^a_{bc} + \partial_b \partial_c X^a - \Gamma^d_{bc} \partial_d X^a + \Gamma^a_{dc} \partial_b X^d + \Gamma^a_{bd} \partial_c X^d$$

3.1 示例

为清楚起见, 我们现在用局部坐标符号展示以下示例。

对于一个标量场 $\phi(x^c) \in \mathcal{F}(M)$, 我们有:

$$(\mathcal{L}_X \phi) = X(\phi) = X^a \partial_a \phi.$$

因此, 对于标量场 $\phi(x, y) = x^2 - \sin(y)$ 和向量场 $X = \sin(x) \partial_y - y^2 \partial_x$, 相应的李导数变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \phi &= (\sin(x) \partial_y - y^2 \partial_x) (x^2 - \sin(y)) \\ &= \sin(x) \partial_y (x^2 - \sin(y)) - y^2 \partial_x (x^2 - \sin(y)) \\ &= -\sin(x) \cos(y) - 2xy^2 \end{aligned}$$

对于一个更高秩的微分形式的示例, 考虑 2-形式 $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dz$, 以及来自上一示例的向量场 X 。则,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \omega &= d(i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}((x^2 + y^2) dx \wedge dz)) + i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}(d((x^2 + y^2) dx \wedge dz)) \\ &= d(-y^2(x^2 + y^2) dz) + i_{\sin(x)\partial_y - y^2\partial_x}(2y dy \wedge dx \wedge dz) \\ &= (-2xy^2 dx + (-2yx^2 - 4y^3) dy) \wedge dz + (2y \sin(x) dx \wedge dz + 2y^3 dy \wedge dz) \\ &= (-2xy^2 + 2y \sin(x)) dx \wedge dz + (-2yx^2 - 2y^3) dy \wedge dz\end{aligned}$$

一些更抽象的例子。

$$\mathcal{L}_X(dx^b) = di_X(dx^b) = dX^b = \partial_a X^b dx^a.$$

因此, 对于一个协向量场, 即一个微分形式, $A = A_a(x^b) dx^a$, 我们有:

$$\mathcal{L}_X A = X(A_a) dx^a + A_b \mathcal{L}_X(dx^b) = (X^b \partial_b A_a + A_b \partial_a(X^b)) dx^a$$

最后一个表达式的系数是李导数的局部坐标表达式。

对于一个协变秩 2 张量场 $T = T_{ab}(x^c) dx^a \otimes dx^b$, 我们有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T) &= (\mathcal{L}_X T)_{ab} dx^a \otimes dx^b \\ &= X(T_{ab}) dx^a \otimes dx^b + T_{cb} \mathcal{L}_X(dx^c) \otimes dx^b + T_{ac} dx^a \otimes \mathcal{L}_X(dx^c) \\ &= (X^c \partial_c T_{ab} + T_{cb} \partial_a X^c + T_{ac} \partial_b X^c) dx^a \otimes dx^b\end{aligned}$$

如果 $T = g$ 是对称度量张量, 它相对于 Levi-Civita 连通 (又称协变导数) 是平行的, 并且使用该连通会产生结果。这具有用协变导数替换所有导数的效果, 给出

$$(\mathcal{L}_X g) = (X^c g_{ab;c} + g_{cb} X^c_{;a} + g_{ac} X^c_{;b}) dx^a \otimes dx^b = (X_{b;a} + X_{a;b}) dx^a \otimes dx^b$$

4 性质

李导数具有许多性质。设 $\mathcal{F}(M)$ 为定义在流形 M 上的函数的代数。则

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

是一个在代数 $\mathcal{F}(M)$ 上的导数。也就是, \mathcal{L}_X 是 \mathbf{R} -线性的, 并且

$$\mathcal{L}_X(fg) = (\mathcal{L}_X f)g + f\mathcal{L}_X g.$$

类似地, 它是一个在 $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{X}(M)$ 上的导数, 其中 $\mathcal{X}(M)$ 是在 M 上的向量场集合 (参见文章中的定理 6: Nichita, F.F. Unification Theories: New Results and Examples. Axioms 2019, 8, 60):

$$\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f\mathcal{L}_X Y$$

这也可以用等价符号写为

$$\mathcal{L}_X(f \otimes Y) = (\mathcal{L}_X f) \otimes Y + f \otimes \mathcal{L}_X Y$$

这里使用张量乘积符号 \otimes 来强调一个函数与一个向量场的乘积是在整个流形之上进行的。

其它附加性质与李括号的一致。因此, 例如, 考虑做为在一个向量场上的一个导子,

$$\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$$

人们会发现上述公式就是雅可比恒等式 (Jacobi identity)。因此, 人们就有一个重要的结果, 在 M 之上的向量场空间, 配备李括号, 就形成一个李代数。

当作用于微分形式时, 李导数也具有重要性质。设 α 和 β 是在 M 上的两个微分形式, 并设 X 和 Y 是两个向量场。则

- $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta)$
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\alpha := \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\alpha - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\alpha = \mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha$
- $[\mathcal{L}_X, i_Y]\alpha = [i_X, \mathcal{L}_Y]\alpha = i_{[X,Y]}\alpha$, 其中 i 标志上面定义的内积, 并且这很清楚, $[\cdot, \cdot]$ 标志的即是对易子也是向量场的李括号。

5 推广

李导数的各种推广在微分几何中起着重要作用。

5.1 旋量场的李导数

在一般 (伪) 黎曼流形上沿着一般时空向量场 (不一定是 Killing 场) 旋量的 Lie 导数的定义, 在 1971 年已经由 Yvette Kosmann 提出。[4] 后来, 有人提供了一个几何框架, 证明她在纤维丛上的李导数的一般框架内的特殊规定是正确的 [5], 在规范自然丛的显式上下文中, 规范自然丛被证明是 (规范变分) 场理论的最合适的领域。[6]

在一个给定的旋量流形中, 也就是在一个容许旋量结构的黎曼流形 (M, g) 中, 一个旋量场 ψ 的李导数可首先通过局部表达式相对于无穷小等距变换 (Killing 向量场) 来定义, 该定义由 André Lichnerowicz 在 1963 年首次给出: [7]

$$\mathcal{L}_X\psi := X^a\nabla_a\psi - \frac{1}{4}\nabla_a X_b \gamma^a \gamma^b \psi,$$

其中 $\nabla_a X_b = \nabla_{[a} X_{b]}$, 假设 $X = X^a \partial_a$ 是 Killing 向量场, 并且 γ^a 是狄拉克矩阵。

然后, 通过保留 Lichnerowicz 对于一个一般向量场 X 的局部表达式, 但仅显式地取 $\nabla_a X_b$ 的反对称部分, 就可以将 Lichnerowicz 的定义扩展到所有向量场 (一般无穷小变换)。[4] 更明确地说, 在 1972 年给出的 Kosmann 局部表达式为: [4]

$$\mathcal{L}_X\psi := X^a\nabla_a\psi - \frac{1}{8}\nabla_{[a} X_{b]} [\gamma^a, \gamma^b] \psi = \nabla_X\psi - \frac{1}{4}(dX^\flat) \cdot \psi,$$

其中, $[\gamma^a, \gamma^b] = \gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a$ 是对易子, d 是外导数, $X^\flat = g(X, -)$ 是对应于 X 在度量 (即指数降低) 下的对偶 1-形式, 并且 \cdot 是 Clifford 乘法。

值得注意的是, 旋量李导数与度量无关, 并因此也与连通无关。从 Kosmann 局部表达式的右侧看, 这一点并不明显, 因为右侧似乎通过旋量连通 (协变导数)、向量场的对偶化 (降低指数) 以及在旋量丛上的 Clifford 乘法依赖于度量。情况并非如此: Kosmann 局部表达式右侧的量合并, 使得所有与度量和连通相关项都被消除了。

为了更好地理解长期争论不休的旋量场李导数的概念, 可以参考原始文献 [8][9], 其中旋量场李导数的定义被置于纤维丛截面李导数理论的更一般框架中, 并且 Y. Kosmann 对旋量情形的直接方法被推广到被称为 Kosmann 提升 (Kosmann lift) 的新几何概念的形式规范自然丛。

5.2 协变李导数

如果我们在流形 M 之上有一个以 G 为结构群的主丛，并且我们选择 X 作为主丛切空间截面的协变向量场 (即它有水平和垂直分量)，则协变李导数就是在主丛之上相对于 X 的李导数。

现在，如果我们在 M 之上给定一个向量场 Y (但不是主丛)，但我们在主丛之上也有一个连通，我们就可以在主丛之上定义一个向量场 X ，使其水平分量与 Y 匹配，垂直分量与连通一致。这就是协变李导数。

详情参见连通形式 (connection form)。

5.3 Nijenhuis-Lie 导数

另一种推广，由 Albert Nijenhuis 提出，允许我们定义沿着在正切丛中具有值的微分形式的任意丛 $\Omega^k(M, TM)$ 的截面的微分形式的李导数。如果 $K \in \Omega^k(M, TM)$ ，并且 α 是一个微分 p -形式，那么可以定义 K 和 α 的内积 $i_K \alpha$ 。Nijenhuis-Lie 导数则是内积和外导数的反对易子：

$$\mathcal{L}_K \alpha = [d, i_K] \alpha = di_K \alpha - (-1)^{k-1} i_K d\alpha$$

6 历史

在 1931 年，Władysław Ślebodziński 引入了一种新的微分算子，后来被 David van Dantzig 称为李导数，它可以应用于标量、向量、张量和仿射联络，并在自同构群研究中证明了其强大的作用。

一般几何对象 (即自然纤维丛的截面) 的李导数由 A. Nijenhuis、Y. Tashiro 和 K. Yano 进行了研究。

很长一段时间以来，物理学家一直在使用李导数，而没有参考数学家的工作。在 1940 年，Léon Rosenfeld [10] —以及在他之前 (在 1921 年 [11]) 的 Wolfgang Pauli [12] —引入了他所称的几何对象 A 的“局部变分” $\delta^* A$ ，该变分是由一个向量场 X 生成的坐标的无穷小变换约化而成。人们可以很容易地证明他的 $\delta^* A$ 就是 $\mathcal{L}_X(A)$ 。

7 See also

- Covariant derivative
- Connection (mathematics)
- Frölicher-Nijenhuis bracket
- Geodesic
- Killing field
- Derivative of the exponential map

8 Notes

1. Trautman, A. (2008). "Remarks on the history of the notion of Lie differentiation". In Krupková, O.; Saunders, D. J. (eds.). *Variations, Geometry and Physics: In honour of Demeter Krupka's sixty-fifth birthday*. New York: Nova Science. pp. 297-302. ISBN 978-1-60456-920-9.
2. Ślebodziński, W. (1931). "Sur les équations de Hamilton". *Bull. Acad. Roy. D. Belg.* 17 (5): 864-870.
3. Yano, K. (1957). *The Theory of Lie Derivatives and its Applications* (<https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp>). North-Holland. p.8 (<https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp/page/n25>). ISBN 978-0-7204-2104-0.
4. Kosmann, Y. (1971). "Dérivées de Lie des spineurs". *Ann. Mat. Pura Appl.* 91 (4): 317-395. doi:10.1007/BF02428822 (<https://doi.org/10.1007%2FBF02428822>). S2CID 121026516 (<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121026516>).
5. Trautman, A. (1972). "Invariance of Lagrangian Systems". In O'Raifeartaigh, L. (ed.). *General Relativity: Papers in honour of J. L. Synge*. Oxford: Clarendon Press. p. 85. ISBN 0-19-851126-4.
6. Fatibene, L.; Francaviglia, M. (2003). *Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theories*. Dordrecht: Kluwer Academic.
7. Lichnerowicz, A. (1963). "Spineurs harmoniques". *C. R. Acad. Sci. Paris.* 257: 7-9.
8. Fatibene, L.; Ferraris, M.; Francaviglia, M.; Godina, M. (1996). "A geometric definition of Lie derivative for Spinor Fields". In Janyska, J.; Kolář, I.; Slovák, J. (eds.). *Proceedings of the 6th International Conference on Differential Geometry and Applications, August 28th-September 1st 1995 (Brno, Czech Republic)*. Brno: Masaryk University. pp. 549-558. arXiv:gr-qc/9608003v1 (<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9608003v1>). Bibcode:1996gr.qc....8003F (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996gr.qc....8003F>). ISBN 80-210-13699.
9. Godina, M.; Matteucci, P. (2003). "Reductive G-structures and Lie derivatives". *Journal of Geometry and Physics.* 47 (1): 66-86. arXiv:math/0201235 (<https://arxiv.org/abs/math/0201235>). Bibcode:2003JGP...47...66G (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003JGP...47...66G>). doi:10.1016/S0393-0440(02)00174-2 (<https://doi.org/10.1016%2FS0393-0440%2802%2900174-2>). S2CID 16408289 (<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16408289>).
10. Rosenfeld, L. (1940). "Sur le tenseur d'impulsion-énergie". *Mémoires Acad. Roy. D. Belg.* 18 (6): 1-30.
11. Pauli's book on relativity.
12. Pauli, W. (1981) [1921]. *Theory of Relativity* (First ed.). New York: Dover. ISBN 978-0-486-64152-2. See section 23

References

- Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. (1978). Foundations of Mechanics. London: Benjamin-Cummings. ISBN 0-8053-0102-X. See section 2.2.
- Bleecker, David (1981). Gauge Theory and Variational Principles (https://archive.org/details/gaugetheoryvaria00blee_0). Addison-Wesley. ISBN 0-201-10096-7. See Chapter 0.
- Jost, Jürgen (2002). Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer. ISBN 3-54042627-2. See section 1.6.
- Kolář, I.; Michor, P.; Slovák, J. (1993). Natural operations in differential geometry (<http://www.emis.de/monographs/KSM/index.html>). Springer-Verlag. ISBN 9783662029503. Extensive discussion of Lie brackets, and the general theory of Lie derivatives.
- Lang, S. (1995). Differential and Riemannian manifolds. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-94338-1. For generalizations to infinite dimensions.
- Lang, S. (1999). Fundamentals of Differential Geometry. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-98593-0. For generalizations to infinite dimensions.
- Yano, K. (1957). The Theory of Lie Derivatives and its Applications (<https://archive.org/details/theoryofliederiv029601mbp>). North-Holland. ISBN 978-0-7204-2104-0. Classical approach using coordinates.

External links

- "Lie derivative" (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lie_derivative), Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]

译注

在微分几何中, "in"、"on"和"over"的使用通常与流形 M 的概念一起引入, 因此理解这些术语的含义和用法需要理解流形的基本性质。在微分几何中, "流形"被视为允许进行微积分运算的空间。

1. 在... 中 (... in M): 通常指的是点、向量或其他对象存在于流形" M "的内部。例如, 当我们说函数定义在流形" M "中时, 我们的意思是函数的定义域包括" M "中的所有点。
2. 在... 上 (... on M): 这个术语通常用于描述在流形" M "上定义的对象, 例如向量场、张量场或函数。这些对象在" M "的每一点都有定义。例如, 当我们说在" M "上定义了一个向量场时, 我们的意思是在" M "的每一点都定义了一个向量。
3. 在... 之上 (... over M): 这个术语一般用于描述在流形" M "上定义的纤维丛结构, 例如正切向量丛或余切向量丛。"在... 之上"强调了这些对象是在" M "的每一点上存在的, 并且每一点都有一个与之关联的空间 (例如, 切空间)。例如, 当我们说一个向量场定义在" M "之上时, 我们是指在" M "的每一点上都有一个切向量。

这些术语都用于描述在给定流形上定义的各种数学对象。虽然这些术语在日常语言中可能有相似的使用法, 但在微分几何中, 它们具有特定的含义和用法。