双曲余弦不依赖指数函数的替代定义

Blue

Apr 17, 2014

1 Question

一般的三角函数是独立于指数函数定义的，然后用欧拉公式证明它与指数函数是相关的。

我们能否将双曲余弦

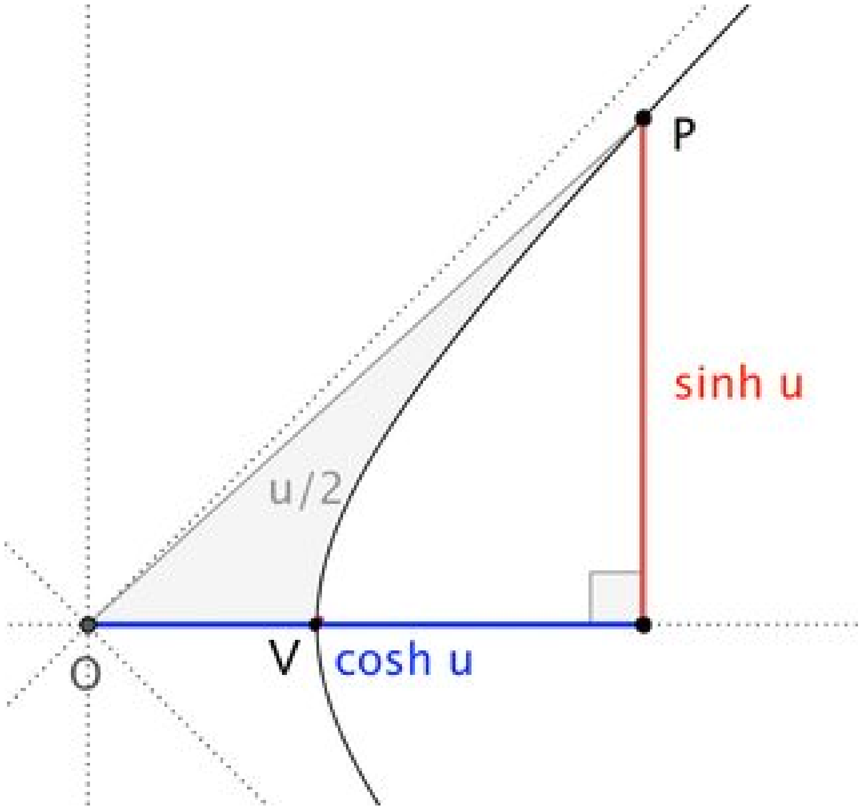
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

定义成为所需要证明的东西?

2 Answer

我们可以将 $\cosh u$ 和 $\sinh u$ 几何定义为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的双曲函数类似物，取 $(\cosh u, \sinh u)$ 为“单位双曲函数” $(x^2 - y^2 = 1)$ 上的点。在这种情况下，这些值和指数之间的关系确实需要证明。(我可能在某个时候在 MSE 上发布了一个。)

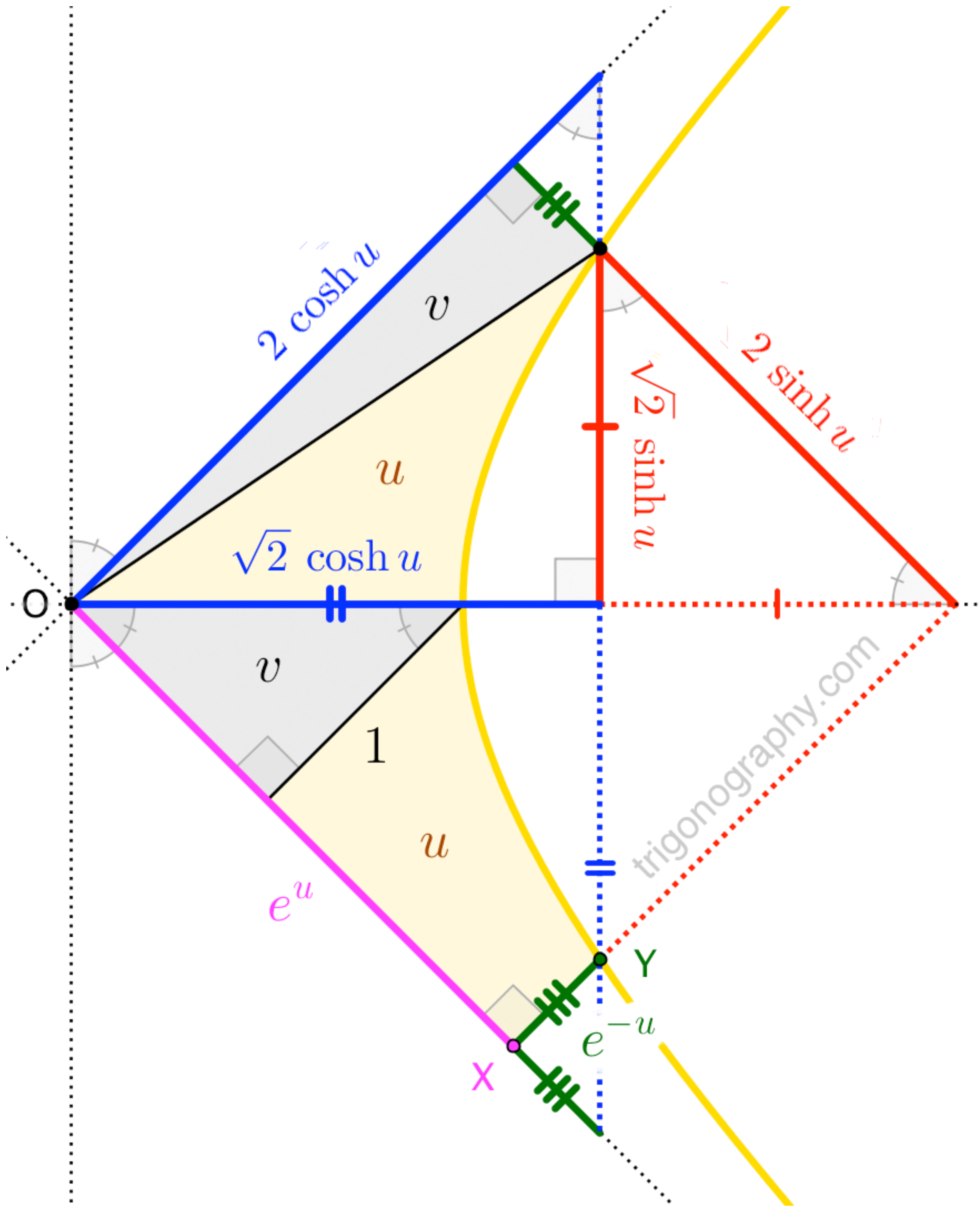
我们当中比较有几何学头脑的人直接采用与 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 类似的方式，通过“单位双曲函数” , $x^2 - y^2 = 1$, 来定义 $\cosh u$ 和 $\sinh u$ 。具体地说，给定 P 为双曲函数上的一个点，该函数具有顶点 V，并且定义 u 为双曲函数扇形 OVP 的面积的两倍，则 $\cosh u$ 和 $\sinh u$ 分别是 P 的 x 坐标和 y 坐标。



就像在圆周三角中一样，我们可以将度量 u (在“双曲弧度”中) 指定给角度 --- 从垂直角度 (当 $u=0$) 到半个直角 (当 $u=\infty$) --- 并将这些度量与相应的 $\cosh u$ 和 $\sinh u$ 线段的长度相关联。而且，正如在圆周三角 (在虚数出现之前) 中，我们可能会怀疑对应关系 $u \longleftrightarrow \cosh u$ 和 $u \longleftrightarrow \sinh u$ 是“非算术的”，也就是说：没有算术公式将角度的度量值转换为其相关的三角值。

然而，事实证明，这些对应不是非算术的；为了找到合适的算术转换公式，我们只需要一点微积分...

Edit. (Two years later!) 查看编辑历史中的一个不优雅的论点，我现在借助于这个三角图形来简化它，在这个三角图形中，单位双曲函数的长度放大 $\sqrt{2}$ 倍，(因此，面积乘以 2 倍)：



因为双曲函数是矩形的，所以 $|OX|\cdot|XY|$ 是一个常数 (这里是 1)，这保证标记为 v 的区域具有相同的面积 (即 1/2)，因此标记为 u 的区域具有相同的面积 (即 u)。现在，用我承诺的微积分，计算 u 为倒数曲线 (reciprocal curve) 下的面积：

$$u=\int_1^{|OX|}\frac{1}{t}dt=\ln|OX| \quad\to\quad |OX|=e^u \quad\to\quad |XY|=\frac{1}{e^u}$$

有了这些，我们显然有

$$2\sinh u \;=\; e^u-e^{-u} \qquad\qquad 2\cosh u \;=\; e^u+e^{-u}$$

为我们所需要的。轻松点！

End of edit.

双曲函数弧度是通过双曲函数扇形面积的两倍来定义的，这似乎与圆弧长度方面的常用定义不一致，但鉴于上述公式的优雅性，很难与之成功争辩。即使如此，双曲函数扇形面积定义可以被视为直接类似于圆形情况，因为圆形弧度也可定义为“扇形面积的两倍”：在单位圆中，具有角度测量值为 $\pi/2$ 弧度的扇形具有面积 $\pi/4$ (它是四分之一圆)，具有角度测量值为 π 弧度的扇形有面积为 $\pi/2$ (它是半圆)，并且角度测量值为 2π 弧度的“扇形”有面积为 π (它是整圆)；在这些和所有其他情况下，角度测量值是扇形面积的两倍。

如果 z 给出了从顶点到双曲函数 $x^2 - y^2 = r^2$ 上的点 (x, y) 的弧长，根据 y 是正是负，带正负符号，那么 $\cosh z$ 也可以定义为比率 x/r，并且 $\sinh z$ 可以定义为 y/r，那么我的假设是否正确？然后在单位双曲函数中，这些比值简单地约化到坐标，弧长变成扇形面积的一半？这将是一个更好的类比圆周三角。

你可以根据弧长参数 (z) 定义 cosh 和 sinh ；然而，双曲弧长不能用初等函数来表示。(曲线长度计算起来几乎总是比它们所限定的面积要复杂；圆周与直线是主要的例外。) 弧长 $V'P'$ 涉及积分 $\int \sqrt{1+x^4}/x^2 dx$，这是非常不平凡的，所以双曲三角值实际上是基于弧长的角度测量的“非算术”函数。当然，弧长不是扇形面积的两倍。

我意识到这是一个很老的帖子，但我不太明白双曲函数是矩形意味着 $|\overline{OX}| \cdot |\overline{XY}|$ 是一个常数。据我所知，矩形双曲函数是渐近线垂直的双曲函数，但我不太确定结果是如何得出的。

“我不太明白双曲函数是矩形意味着 $|\overline{OX}| \cdot |\overline{XY}|$ 是一个常数。”最不受启发的方法是取矩形双曲函数方程 $x^2 - y^2 = a^2$ ，并进行旋转 $45°$ 的坐标变换 (使渐近线与坐标轴对齐)；结果的形式为 $xy = k^2$。乘积 $|\overline{OX}| \cdot |\overline{XY}|$ 对应于该关系中的 $x \cdot y$。我相信有一个很好的使用基本双曲函数性质的该关系的几何证明，但我现在不能想起这个证明。

使用矩阵，我发现如果我们将图逆时针方向旋转 $45°$，方程 $x^2 - y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ 等于 $x \cdot y = 1$ 。(这是有意义的，因为在这两种情况下，离原点最近的点是 $\sqrt{2}$ 个单位。) 我喜欢这个答案，因为它解释了双曲函数是如何连接到指数的：定义指数函数的一种常见方法是首先将对数定义为 $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$。并且 $y = 1/t$ 的图是一条双曲函数！

给定函数 $x^2 - y^2 = a^2$，我们要将其逆时针旋转 $45°$，得到一个新的函数。我们可以使用旋转变换的方法来进行推导。

设新的变量 u 和 v，表示旋转后的坐标。根据逆时针旋转的变换公式，我们有：

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

我们要将原函数中的 x 和 y 用 u 和 v 表示，然后将其代入原函数，得到新的函数。

首先，我们可以解出 x 和 y：

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u)$$

将上述结果代入原函数 $x^2-y^2=a^2$：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(v-u)\right)^2=a^2$$

化简上式，我们得到：

$$\frac{1}{2}\left[(u+v)^2-(v-u)^2\right]=a^2$$

继续化简，我们得到：

$$\frac{1}{2}\left[4uv\right]=a^2$$

最后，我们得到旋转后的函数为：

$$uv=\frac{a^2}{2}$$

因此，原函数 $x^2-y^2=a^2$ 经过逆时针旋转 45° 后，得到的新函数为 $uv=\frac{a^2}{2}$。

好的吧，通常这只是一个简单的定义，给出为

$$\cos x=\cosh ix$$

你可能需要证明

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

根据泰勒定理，我们知道

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

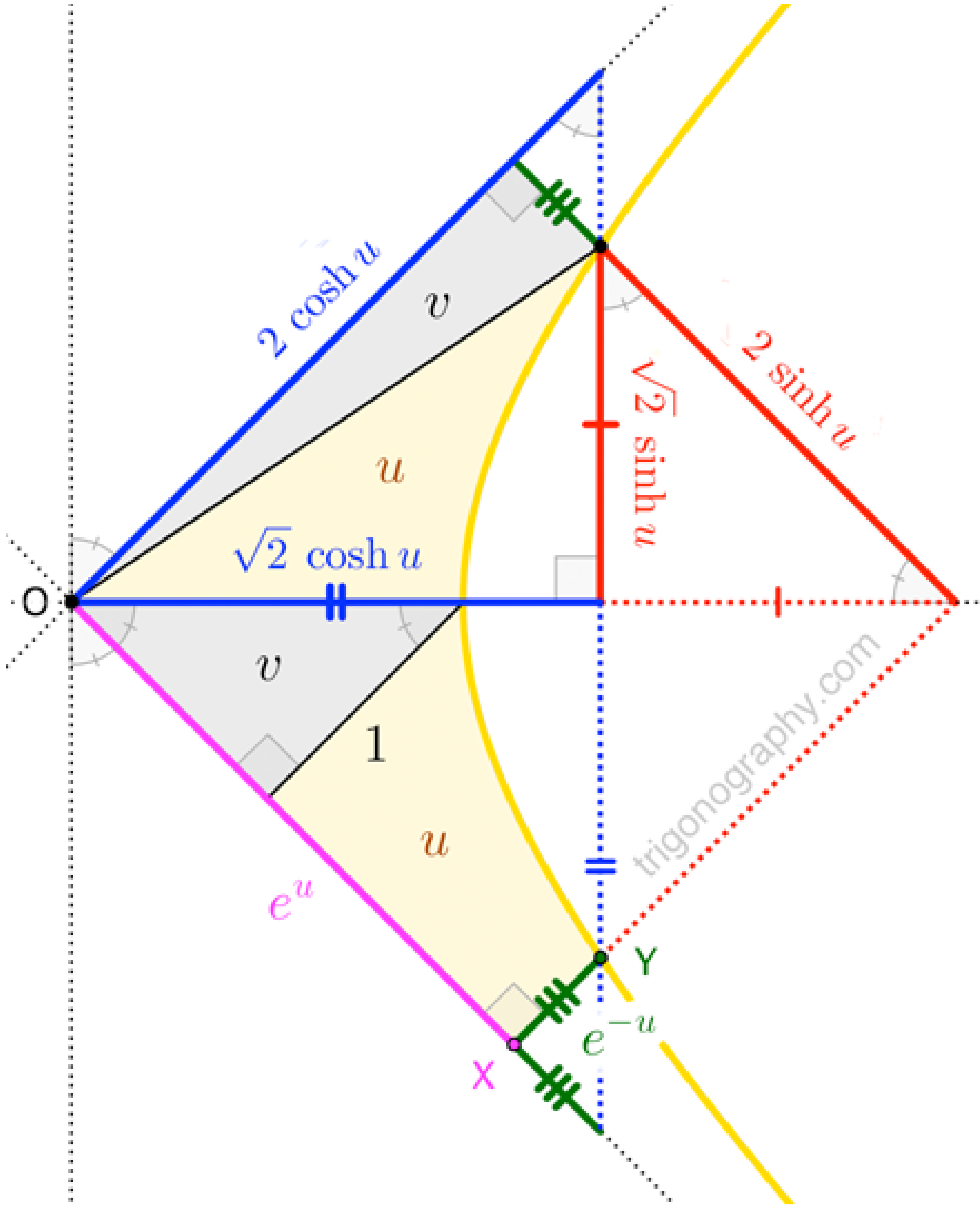
所以

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos x+i\sin x$$

使用 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ，根据 $\cos x$ 表达 $e^{ix}+e^{-ix}$，注意余弦函数为偶函数，正弦函数为奇函数。

3 双曲正弦和余弦的指数形式

18 July, 2016



$$2\sinh u \;=\; e^u - e^{-u}$$

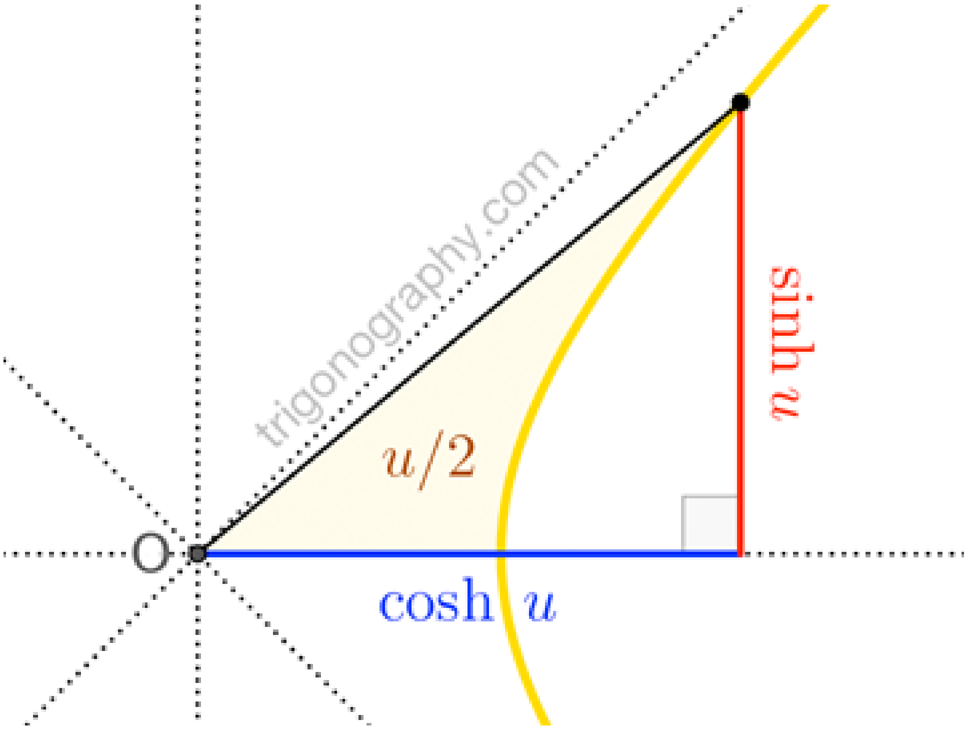
$$2\cosh u \;=\; e^u + e^{-u}$$

$$|\overline{OX}|\cdot|\overline{XY}| \;\equiv\; 1 \quad\rightarrow\quad u = \int_1^{|\overline{OX}|}\frac{1}{t}dt \;=\; \ln|\overline{OX}|$$

$$\rightarrow\quad |\overline{OX}| = e^u \quad \text{and} \quad |\overline{XY}| = e^{-u}$$

本文的一些背景。几何上，我们通过用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的直接类比来定义 $\sinh u$ 和 $\cosh u$：通过与"单位双曲函数"$(x^2-y^2=1)$ 的弧相关联的某些垂直段。

虽然 θ 通常被解释为圆弧的长度，但我们注意到它也是相应圆周扇形面积的两倍。双曲函数参数 u 也通过面积来解释；今天的三角图形显示了原因：



可以方便地将单位双曲函数图中的长度标度为 $\sqrt{2}$ —并因此，将面积标度为 2 —我们可以看到 $\sinh u$ 和 $\cosh u$ 可通过指数函数从 u 中直接计算！

(事实上，我们可以说 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是一样的，但是我们需要复指数。)