Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

L3 Mathématiques

Semestre 1

U.E : Maths en Jean

Classification topologique des noeuds

KEBIR Younes
GEYER Rayane
GAFFIERO Karim
MALEK Paul

---

26 Décembre 2021

Table des matières

Abstract

The subject of this study is the classification of nodes. After defining some topological notions, we will focus on the notion of node diagram, allowing us to study nodes in a theoretical way. The canonical form of the node will allow us to illustrate the first classification of nodes: the Tait table. Afterwards, we will study the methods of classification by invariant. To do this we will introduce the notion of Reidemeister movements. We will be interested in tricolourability invariants (p-colourability in general with p a prime number) and in some polynomial invariants. This study closes with a study of compound knots and some important results on knot theory.

1 Théorie topologique des Noeuds

1.1 Plongement

Afin de définir la notion de plongement, nous allons définir les notions de chemin et de lacet.
On appelle chemin sur $\mathbb{R}^3$ toute application continue $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.
On appelle lacet un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.
Finalement, un plongement est un lacet injectif sur $[0,1[$.

1.2 Déformation continue

Afin d'étudier les noeuds, il est nécessaire de définir la notion d'homéomorphisme. Un homéomorphisme est un isomorphisme entre deux espaces topologiques. Ainsi, il s'agit d'une bijection continue d'un espace dans l'autre, dont la réciproque est aussi continue.
En mathématiques, une déformation continue est une isotopie.

Deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ sont dites isotopes s'il existe une application $H : X \times [0,1] \rightarrow Y$ tel que :

1. $\forall x \in X\ H(x,0) = f(x)$.
2. $\forall x \in X\ H(x,1) = g(x)$.
3. Pour $t \in [0,1]$, la fonction $H(x,t)$ définie une application homéomorphe.

1.3 Noeud et plongement

Mathématiquement, on appelle noeud le plongement d'un cercle topologique dans l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$. On dit que deux noeuds sont équivalents si ils représentent le même plongement à déformation continues près.

1.4 Définitions utiles

Enfin, on vient a définir des notions permettant de caractériser les espaces topologiques étudiés.

On dit d'un espace qu'il est ouvert si il s'agit d'un sous-ensemble d'un espace topologique démunie de ses frontières.
On dit d'un espace topologique A qu'il est connexe s'il ne s'écrit pas comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides. Plus simplement, A n'est fait que d'un seul morceau.

2 Table de noeud

2.1 Diagramme de noeud

Un entrelacs est un ensemble de courbes de l'espace, fermées et d'intersection vide deux à deux. Ainsi, le noeud est un entrelacs à un brin. Afin d'étudier les noeuds plus simplement, nous allons introduire la notion de diagramme de noeud. Un diagramme de noeud est une représentation du noeud dans le plan qu'on obtient en effectuant une projection du noeud depuis $\mathbb{R}^3$ vers le plan $\mathbb{R}^2$. La perte d'une dimension implique le respect de certaines conditions afin de pouvoir étudier le noeud via son diagramme. Ainsi, une telle projection doit respecter certaines conditions :

1. Les courbes doivent être lisses.
2. Deux portions de courbes de peuvent pas être tangentes.
3. Les croisements doivent toujours n'impliquer que deux portions de courbes.

Il ne faut pas faire confondre noeud et diagramme de noeud. En effet, le noeud a proprement parler est un objet topologique contrairement au diagramme de noeud. Voici pour exemple le diagramme du noeud de trèfle.

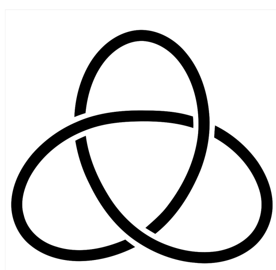

Fig. *1 – Diagramme du noeud de trèfle.*

2.2 Table de Tait

On appelle forme canonique du diagramme de noeud la forme dans laquelle le noeud possède le moins de croisements. Prenons pour exemple les 2 noeuds ci-dessous. Il s'avère que le premier noeud à 4 croisements est une forme secondaire du noeud de trèfle. La forme canonique de ce noeud est donc le noeud de trèfle.

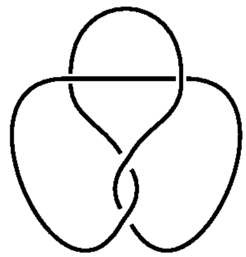

Fig. *2 – Diagramme du noeud de trèfle en dehors de sa forme canonique.*

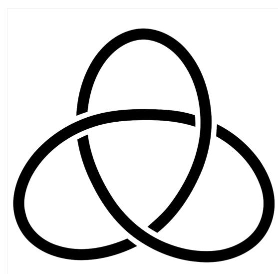

Fig. *3 – Diagramme du noeud de trèfle.*

Le noeud de trèfle est d'autant plus intéressant car il s'agit de l'unique noeud dont la forme canonique du diagramme a 3 noeuds. On suppose ici ignorer l'image de ce même noeud dans un miroir plan.

Une première classification des noeuds fût proposée en classant les noeuds par nombre de croisements de leur diagramme sous forme canonique. Cette première classification appelée table de Tait est la suivante [7] .

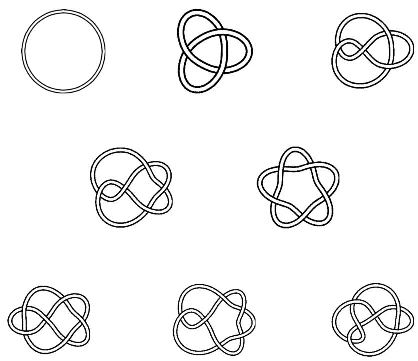

Fig. 4 – *Table de Tait pour les noeuds de* 0 *à* 6 *croisements.*

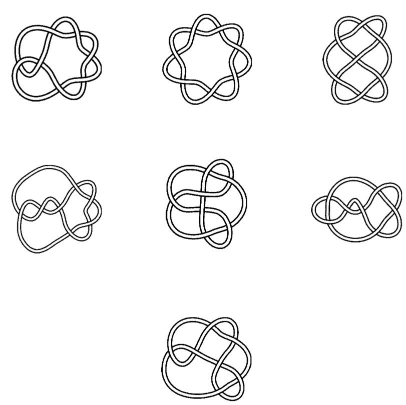

Fig. 5 – *Table de Tait pour les noeuds à* 7 *croisements.*

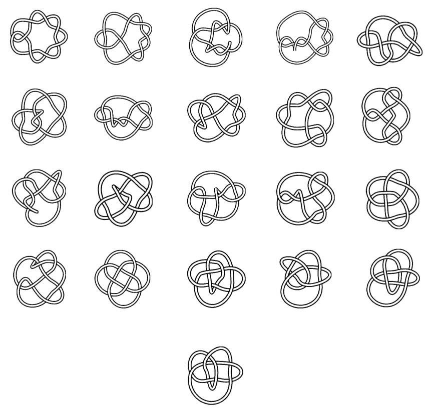

Fig. *6 – Table de Tait pour les noeuds à* 8 *croisements.*

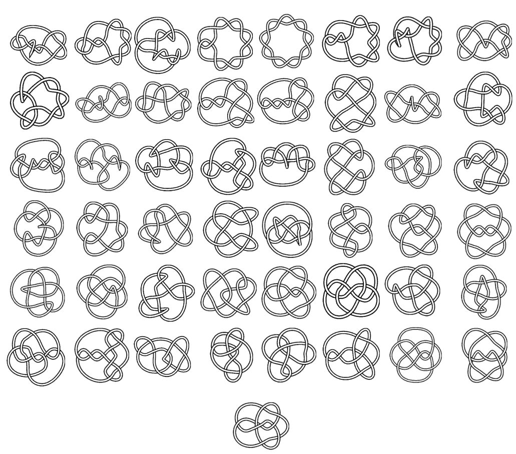

Fig. *7 – Table de Tait pour les noeuds à* 9 *croisements.*

3 Invariants classiques

Afin de déterminer si deux nœuds sont équivalents, il faut introduire la notion d'*invariant*.

3.1 Définition

Un invariant d'un nœud est une quantité qui est identique pour deux nœuds équivalents. Ce peut être un nombre, un polynôme, une propriété... En général, un invariant est une implication. Un invariant de nœuds vérifie :

Deux nœuds sont équivalents $\Longrightarrow$ leurs invariants sont identiques.

L'intérêt des invariants est de montrer la contraposée pour prouver que deux nœuds ne sont pas équivalents.

3.2 Mouvements de Reidemeister

Les mouvements de Reidmeister [3] sont des mouvements de brins d'un nœud appliqués aux diagrammes de nœuds. Il existe trois types de mouvements comme le montre la figure ci-dessous.

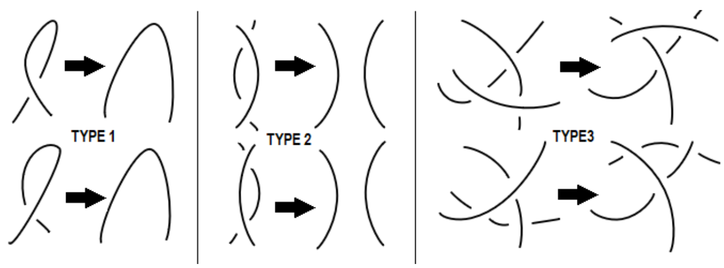

FIG. *8 – Les trois types de mouvements de Reidmeister.*

- TYPE 1 : création/suppression d'une boucle.
- TYPE 2 : création/suppression de deux croisements.
- TYPE 3 : déplacement d'un brin passant au-dessus ou au-dessous d'un croisement.

En ayant introduit cette notion on peut donner une nouvelle définition de l'équivalence entre deux noeuds.
Deux nœuds sont équivalents si et seulement si on peut passer du diagramme de l'un au diagramme de l'autre par un nombre fini des mouvements de Reidemeister.

3.3 Invariant de tricolorabilité

Un nœud est dit tricolorable si l'on peut colorier son diagramme plan sous les conditions suivantes [1]:

- Chaque brin est colorié avec une seule des trois couleurs
- Lorsqu'un brin passe au dessus d'un croisement, le brin qui le prolonge est de même couleur
- A chaque croisement, soit une seule couleur est présente, soit les trois couleurs sont présentes
- Sur les trois couleurs, on en utilise au moins deux pour colorier le diagramme

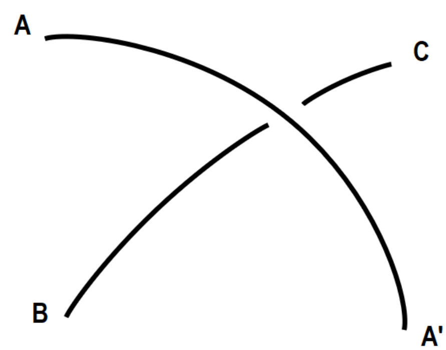

FIG. *9 – La règle de la tricolorabilité.*

Afin d'utiliser l'invariant de tricolorabilité il est nécessaire de respecter certaines règles. Prenons pour cause le schéma ci-dessus.

- A et A' ont la même couleur
- A ou (A'), B et C soit ils sont tous de la même couleur soit les trois en trois couleurs différentes.

Prenons pour exemple avec le nœud de trèfle. Pour le diagramme du nœud de trèfle et pour le choix des couleurs (rouge, bleu et vert), on peut colorier le diagramme de la façon suivante :

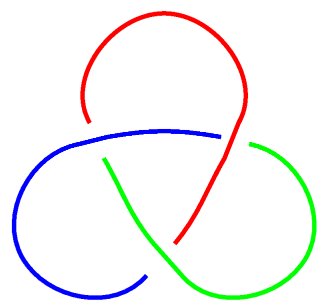

Fig. *10 – Le diagramme du nœud de trèfle tricolorable.*

Proposition : Le nœud de trèfle ne se dénoue pas. Son nombre de croisements minimal dans son diagramme canonique est 3.

Lemme : La tricolorabilité est compatible avec les mouvements de Reidemeister. Ainsi, la tricolorabilité définie un invariant de noeud. [4]

Pour démontrer le lemme, on considère un diagramme de nœud D_1. En appliquant les mouvements de Reidemeister, on le transforme en un autre diagramme D_2. On suppose que D_1 est tricolorable et on veut montrer que :

$$D_1 \text{ est tricolorable} \Longleftrightarrow D_2 \text{ est tricolorable}$$

Pour cela, en partant d'un coloriage triple de D_1, on montre comment on peut avoir un coloriage triple pour D_2 pour chaque type des mouvements de Reidemeister en tenant compte des règles de la tricolorabilité.
Pour le mouvement de TYPE 1, une seule situation est possible, les brins d'une boucle sont de la même couleur, donc pour obtenir une tricolorabilité de D_2 (et inversement) il suffit de conserver la même couleur, comme le montre la figure (11).

Fig. *11 – Le Type 1 des mouvements de Reidemeister*

Pour le mouvement de TYPE 2, deux cas apparaissent :

1. 3 couleurs apparaissent dans chaque croisement, pour avoir une coloration de D_2 on choisit deux couleurs. La figure (12) illustre ce premier cas.

2. Une seule couleur, on garde la même couleur pour D_2 comme le montre la figure (13) du deuxième cas.

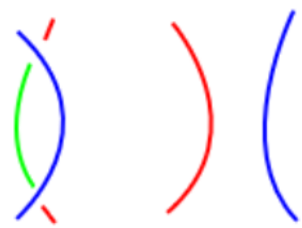

Fig. *12 – Le Type 2 des mouvements de Reidemeister - premier cas*

Fig. *13 – Le Type 2 des mouvements de Reidemeister - deuxieme cas*

Pour le mouvement de TYPE 3 on distingue 6 cas différents. On montre la propriété pour un seul cas sachant que les autres se traitent d'une façon similaire.

Fig. *14 – Le Type 3 des mouvements de Reidemeister*

L'invariant de tricolorabilité n'est pas le seul invariant utilisant une méthode de coloration spécifique. En effet, cet invariant peut s'étendre à la p-colorabilité où p est un nombre premier.

4 Dénouement de noeuds

4.1 Équivalence au noeud trivial

Une application importante des mouvements de Reidemeister consiste a déterminer si un noeud est dénouable. Cela revient a déterminer si le noeud considéré est équivalent au noeud trivial.

Pour déterminer si un noeud est dénouable, on effectue une suite de mouvements de Reidemeister dans le but d'arriver au noeud trivial. Voici un exemple de dénouement de noeud qui paraît à première vue compliqué :

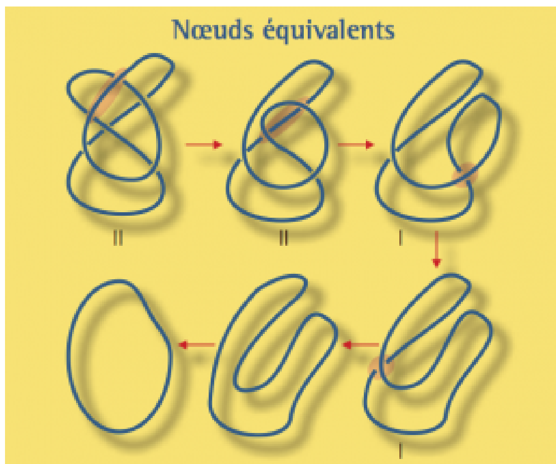

Fig. 15 – *Dénouement d'un noeud au digramme à 6 croisements*

En général pour dénouer un noeud il ne suffit pas d'appliquer à chaque étape le mouvement de Reidemeister qui semble le plus simple (qui réduit le nombre de croisement du diagramme), il faut parfois compléxifier le noeud pour faire apparaître une simplification plus tard.

Il existe des algorithmes qui permettent de tester si un noeud est dénouable. En effet, un résultat intéressant montre que si un noeud à c croisements est dénouable alors le nombre de mouvements de Reidemesiter nécessaire pour le dénouer est majorée par $(236 \cdot c)^{11}$. Cela signifie que l'on peut tester toutes les combinaisons possibles de mouvement de Reidemeister et voir si on peut dénouer le noeud, il s'agit d'un algorithme naïf. C'est un algorithme ayant une compléxité exponentielle, de ce fait, son utilisation est vite limitée lorsque le nombre de croisements d'un diagramme de noeud est trop important.

Néanmoins, il existe un autre algorithme qui permet de tester si un noeud est dénouable qui a une compléxité quasi-pôlynomiale c'est-à-dire en $n^{\ln(n)}$. Celui-ci réside en des arguments topologiques qui dépassent le cadre de notre étude.

Cela nous laisse comprendre qu'il est peut-être possible de trouver un algorithme à la complexité polynomiale, cela faciliterait grandement l'étude de certains nœuds.

4.2 Équivalence entre noeuds

Pour savoir que deux noeuds sont équivalents, il suffit de déterminer est-ce qu'il existe une suite de mouvement de Reidemesiter qui permet de passer d'un diagramme de noeud à l'autre.

5 Invariants polynômiaux

James Alexander publie en 1927 un livre sur la théorie des nœuds *Topological invariants of knots and links* où il y introduit un nouvel invariant : *Le polynôme d'Alexander*.

Alexander a remarqué que l'on peut attribuer à chaque nœud un polynôme à coefficients entiers, en calculant le déterminant d'une matrice caractérisant ce nœud construite d'une certaine méthode en prenant le nombre et le type des croisements.

La définition mathématique de cet invariant nécessite des notions avancées en topologie. On traitera dans cette étude une méthode efficace pour le calcul de ce polynôme.

Avant toute chose, on définit ce qu'est *la matrice d'incidence* [5]. Pour un graphe orienté, on appelle la matrice d'incidence d'un graphe $G = (V,E)$, une matrice de dimension $V \times E$ dans laquelle :

- le coefficient $a_{i,j} = 1$ si si l'arc numéroté j admet le sommet i comme origine.
- le coefficient $a_{i,j} = -1$ si l'arc numéroté j admet le sommet i comme arrivé.
- 0 sinon.

5.1 Calcul du polynôme d'Alexander

On considère le diagramme orienté d'un nœud de n croisements, le diagramme partage le plan en $n+2$ régions. On construit la matrice d'incidence de taille $(n,n+2)$, les n lignes correspondent aux croisements, les $n+2$ colonnes correspondent aux régions, on considère à chaque fois l'entrée correspondant à une région et à un croisement.
Si la région n'est pas voisine du croisement, l'entrée vaut 0, dans les autres cas, on suit les règles suivantes (compte tenu de la position de la région vue du point de vue de la ligne entrante passant par-dessous l'autre) [5]:

- à gauche avant le croisement, on met $-t$
- à droite avant le croisement, on met 1

– à gauche après le croisement, on met t
– à droite après le croisement, on met -1

On obtient une matrice, on supprime deux colonnes correspondant à des régions adjacentes, on obtient une matrice de taille (n,n), on calcule le déterminant de cette dernière, on obtient le polynôme d'Alexander.
Le polynôme d'Alexander est symétrique et il vaut 1 ou -1 pour $t = 1$.
On traite un exemple avec le diagramme de trèfle suivant, orienté dans le sens inverse de l'horloge la matrice d'incidence correspondant à ce diagramme est

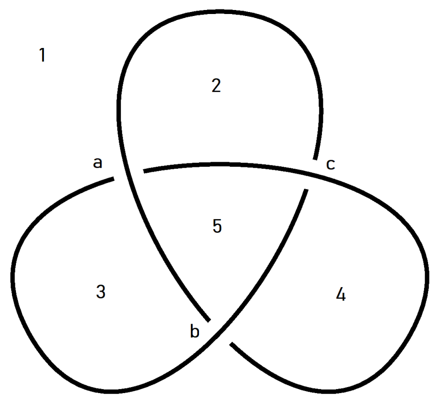

Fig. *16 – Les croisements et les régions du diagramme du noeud de trèfle.*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & t & 0 & -t \\ -1 & 0 & 1 & t & -t \\ -1 & t & 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

en supprimant les deux dernières colonnes (régions adjacentes), on trouve :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$$

en calculant le déterminent de cette matrice, on trouve $-t^2 + t - 1$, qu'on peut écrire $t - 1 + t^{-1}$.

5.2 Du polynôme d'Alexander à la tricoloriabilité

Le polynôme d'Alexander engendre la tricolorabilité, ce qui veut dire que pour savoir si un nœud est tricoloriable, on considère son polynôme d'Alexander, on remplace notre variable par -1 et on calcule le résultat, si ce résultat est un multiple de 3, on peut affirmer que notre nœud est tricoloriable.

5.3 Les limites du polynôme d'Alexander

Malheureusement, le polynôme d'Alexander, présente une faille. On considère le nœud de *Conway*, un noeud à 11 croisements. Si on calcule son polynôme d'Alexander on trouve 1 qui est aussi le polynôme d'Alexander du nœud trivial. Ainsi on peut se demander : est-ce que le nœud de Conway est équivalent au nœud trivial ?
La réponse est non, mais pour le prouver, il faut considérer un autre type d'invariant polynomial, le *Polynôme de Jones*
A titre d'information, l'un des derniers résultats dans la théorie des nœuds consistait à montrer que le nœud de Conway n'est pas bordant ! (et la démonstration dépasse le cadre de notre étude).

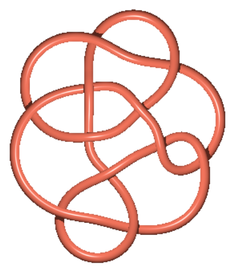

FIG. *17 – Le nœud de Conway.*

6 Noeuds composés

6.1 Définition

Tous les nœuds étudiés jusqu'ici sont des nœuds dits 'premiers'. En respectant les règles de la topologie, on peut effectuer des compositions de nœuds. Afin d'obtenir un noeud composé, on effectue la somme connexe de 2 noeuds. Pour rappel, on dit qu'un objet est connexe si il ne s'écrit pas comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides [9].

6.2 Application

Pour comprendre ces applications, nous allons prendre les deux exemples les plus simples. On considère les noeuds composés ci-dessous. Le nœud de vache est un nœud composé obtenu en effectuant la somme connexe de deux nœuds de trèfle identiques. Le nœud plat quant à lui est la somme de deux nœuds de trèfles images dans un miroir plan. Pour rappel, le noeud de trèfle est le noeud non trivial le plus simple. Ainsi, via la composition effectuée pour obtenir ces 2 noeuds, on en déduit que ce sont les noeuds composés les plus simples. L'étude des noeuds composés se restreint à l'étude des noeuds premiers étant donné que la loi de composition des noeuds est compatible avec la relation d'isotopie.

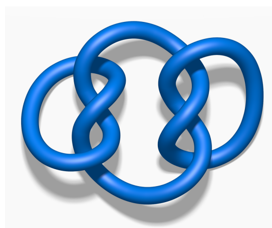

Fig. *18 – Noeud de vache.*

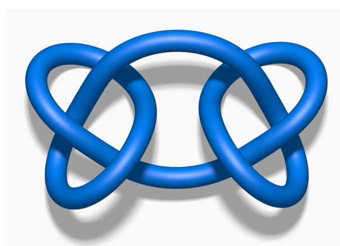

Fig. *19 – Noeud plat.*

7 Types de problèmes

De nombreux problèmes se présentent lors de l'étude des nœuds. Ces problèmes peuvent être classés en deux catégories [1] : problèmes locaux et problèmes globaux.

7.1 Problèmes globaux

Les problèmes globaux concernent l'ensemble des nœuds,en voici quelques uns.

Classification des noeuds On souhaite créer une table de noeuds complète de tel sorte que si deux noeuds équivalents, l'un d'eux est dans la table et quel que soit le noeud choisi, on y retrouvera aussi son équivalent.

Un invariant complet Comme on verra dans la prochaine section, l'invariant de noeud est un élément essentiel dans la notion d'équivalence de nœud. L'un des problèmes majeur de la théorie des nœuds est de trouver un invariant *complet* qui permettra la classification de ces derniers.

7.2 Problèmes locaux

Les problèmes locaux concernent le nœud.

Quand est ce qu'un noeud est son image miroir sont équivalent ? On obtient l'image miroir d'un nœud en prenant sa symétrie par rapport à un miroir plan. Si un nœud n'est pas équivalent à son image miroir, il est appelé *chiral*. Un nœud et son image miroir ont le même nombre de croisements, mais ne sont pas forcément équivalents.

Quand est ce qu'un noeud est premier ? Un nœud composé est le résultat d'un chaînage de deux ou plusieurs nœuds, on peut formuler une des questions de la façon suivante : Est-ce que tout nœud K non trivial admet deux nœuds non triviaux K_1 et K_2 tel que K est le résultat de chaînage de K_1 et K_2 ? La réponse est non dans l'exemple du *nœud de trèfle*.

8 Conclusion

La théorie des noeuds est un domaine topologique encore encré dans la recherche. L'étude des noeuds est un domaine qui fait l'objet de beaucoup de recherches. De nombreux résultats sont découverts régulièrement. Cette étude centrée sur le problème de classification aura nécessiter dans un premier temps de définir les notions fondamentales tel que le noeud mathématique, son diagramme associé, la notion d'invariant etc. L'étude des invariants nous a permis de nous intéresser au dénouement des noeuds et aux notions d'équivalences entre noeuds. En ce qui concerne la classification des noeuds, certains pensent qu'il est impossible de trouver un invariant complet. Néanmoins, il existe des invariants relativement puissant par rapport à ceux présentés dans ce rapport citons par exemple le polynôme de HOMFLY permettant une classification des noeuds assez correcte mais malgré tout incomplète.

Les applications de cette théorie sont nombreuses. L'étude des brins d'ADN, la mécanique des fluides ou encore l'interaction de force dans la couronne solaire en sont des exemples. En effet, ceci est traduit par le fait que les noeuds sont des outils très précis en ce qui concerne la description d'un espace à 3 dimensions.

La théorie des nœuds est très proche d'une autre théorie appelée *Théorie des tresses*. Cette théorie possède diverses applications : physique statistique, mécanique quantique ou encore informatique théorique [10].

Références

[1] Kunia Murasugi (1929) *KNOT THEORY and ITS APPLICATIONS*, International series of monographs on physics.

[2] Arnaud de Mesmay (2019) *Exposé Bourbaki 1121 : Nœuds, mouvements de Reidemeister et algo-rithmes (d'après Lackenby)*, Asterisque, Société Mathématique de France, 27–52.

[3] Serge Mehl *Notions sur la théorie des nœuds*, http://serge.mehl.free.fr/anx/th_noeuds.html.

[4] Eva BAYER-FLUCKIGER *Le noeud de trèfle ne se dénoue pas*, http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/0013noeu_bayer/0013noeu_bayer.html.

[5] Wikipedia *Polynôme d'Alexander*, shorturl.at/hzFT6.

[6] Wikipedia *Nœud (mathématiques)*, https://fr.Wikipedia.org/wiki/N%C5%93ud_(math%C3%A9matiques).

[7] katlas *The Rolfsen Knot Table*, http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table.

[8] Marc Laforest et Jean Guérin *Un polynôme pour les Nœuds*, https://accromath.uqam.ca/2010/06/un-polynome-pour-les-noeuds/.

[9] Wikipedia *Nœud de vache (mathématiques)*, https://fr.Wikipedia.org/wiki/N%C5%93ud_de_vache_(math%C3%A9matiques).

[10] Wikipedia *Tresse (mathématiques)*, https://fr.Wikipedia.org/wiki/Tresse_(math%C3%A9matiques).