

---

**L3 Mathématiques Générales**  
**Semestre 5**

---

**Aix-Marseille Université**  
**U.E : Modélisation mathématique**

---

**Autour de la circulation thermohaline**  
**Atlantique Nord**

---

**TRAVARE Baba**  
**GEYER Rayane**  
**KA Mbissane**

---

26th February 2024

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Le Gulf Stream</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Le modèle de deux boîtes</b>	<b>4</b>
2.1	Présentation du modèle . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Une première approche du modèle</b>	<b>7</b>
3.1	Comprendre les équations . . . . .	7
3.2	Les équations de températures . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Le modèle réduit</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>États d'équilibres</b>	<b>32</b>
5.1	Étude théorique des états d'équilibre . . . . .	32
5.2	La méthode de Newton . . . . .	38
5.3	Etude numérique des états d'équilibre . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>55</b>
<b>8</b>	<b>Références</b>	<b>63</b>

**Abstract**

---

In this project, we will focus on the Gulf Stream phenomenon, which is part of one of the major issues of the 21st century: the climate. The Gulf Stream is a surface current phenomenon due to differences in the density of water in the Atlantic Ocean. We will see that it can be influenced by certain events, such as a period of sunshine, rainfall, etc. We will use a simple mathematical representation: a two-box model. Each box is considered to represent a defined geographical area of the ocean. We will model the changes in temperature and salinity of the waters by a system of mathematical sequences. Their study will allow us to introduce a reduced model of the phenomenon and to better understand some of its aspects. The studies will allow us to introduce a reduced model of the phenomenon and to better understand some of its aspects, such as the notion of relaxation  $t_r$ , which corresponds to the time needed for the water in a box to reach its so-called equilibrium temperature  $T_e$ . Finally, via a discrete dynamic system simplifying the study of our system of sequences, we will be interested in the study of the points of equilibrium of the system in particular by using a method of numerical calculation of the zero of a function called Newton's method.

---

# 1 Le Gulf Stream

Le sujet d'étude de ce projet est le Gulf Stream, un phénomène de courant de surface dont l'origine est la différence de densité volumique des eaux de l'océan Atlantique entre deux différentes zones géographiques. Dans les zones où l'eau est très dense, cette dernière a tendance à plonger en profondeur créant un courant sous-marin, compensé par un courant de surface : le Gulf Stream. La densité volumique d'une eau est une grandeur dépendante de sa température et ainsi que de sa salinité, défini comme la concentration en sels dissous dans l'eau. Nous verrons que l'ensoleillement propre aux différentes zones géographiques joue un rôle important dans le phénomène de Gulf Stream.

L'objectif de cette étude est d'étudier un modèle mathématique du phénomène de Gulf Stream que l'on nomme également circulation thermohaline Atlantique Nord, afin de mieux en comprendre l'origine et les caractéristiques. L'intérêt porté dans ce projet est d'autant plus important étant donné qu'il fait parti des grandes problématiques du monde actuelle notamment accès sur le climat.

## 2 Le modèle de deux boîtes

### 2.1 Présentation du modèle

Afin d'étudier le phénomène de Gulf Stream on se propose d'utiliser un modèle à deux boîtes. On considère que l'océan Atlantique est séparé en deux zones géographiques modélisées par deux boîtes  $B^{[1]}$  et  $B^{[2]}$ . La boîte  $B^{[1]}$  représente la partie de l'océan Atlantique proche de la mer des Caraïbes tandis que la boîte  $B^{[2]}$  représente quant à elle la partie de l'océan Atlantique proche du pôle Nord. Chacune des eaux présentes dans les boîtes possèdent ses propres caractéristiques i.e température, salinité et densité volumique. Pour  $j \in \{1, 2\}$ , la température de la boîte la boîte  $B^{[j]}$  sera notée  $T^{[j]}$ , la salinité  $S^{[j]}$  et la densité volumique sera noté  $\rho^{[j]}$ .

Pour étudier le phénomène de Gulf Stream avec un tel modèle, il faut considérer certaines hypothèses simplificatrices.

- (H1) Nous savons d'ores et déjà que la densité volumique de l'eau dépend de sa température et de sa salinité. On va considérer que la température

et la salinité dans l'océan restant relativement proches d'un même état de référence caractérisé par  $T_0$ ,  $S_0$  et  $\rho_0$  qui sont des constantes réelles. Pour  $j \in \{1, 2\}$ , on peut approcher numériquement la densité volumique  $\rho^{[j]}$  de l'eau de la boîte  $B^{[j]}$  à température  $T^{[j]}$  et salinité  $S^{[j]}$  par une fonction affine :

$$\rho^{[j]} = \rho_0 + \alpha_S(S^{[j]} - S_0) - \alpha_T(T^{[j]} - T_0) \quad (1)$$

où  $\alpha_T$  et  $\alpha_S$  sont des constantes strictement positives.

- (H2) On suppose que les deux boîtes sont isolées du reste des océans.
- (H3) Le phénomène d'ensoleillement fait varier la température de l'eau dans chaque boîte et donc influe directement sur la salinité de l'eau par évaporation et précipitation.
- (H3T) Le phénomène d'ensoleillement dans chaque boîte fait tendre la température de l'eau dans cette boîte vers une température d'équilibre notée  $T_e^{[j]}$ . Le temps mis par la boîte pour atteindre la température d'équilibre est appelé temps de relaxation noté  $t_r$ .
- (H3S) On supposera qu'il y a conservation de la quantité d'eau : l'eau évaporée dans une boîte retombe intégralement en précipitation dans l'autre boîte.
- (H4) Les échanges entre les deux boîtes influent a priori sur la température et la salinité dans chaque boîte. Cet échange n'existe que grâce à la différence de densité volumique de l'eau dans chaque boîte. Il est essentiellement lié à un phénomène de courant : en surface de l'eau peu dense se déplace vers les zones d'eau plus dense pendant qu'en profondeur, la même quantité d'eau se déplace dans l'autre sens. Ces échanges complexes sont résumés par le terme de conduction thermohaline. La conductivité thermohaline donne la quantité de masse d'eau échangée entre les deux boîtes par unité de temps. Des modèles physiques permettent de l'exprimer comme une fonction de  $\rho$  :

$$Q := \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho \longrightarrow 1 + C\rho^2 \end{cases}$$

où  $C > 0$  est une constante physique du problème et  $\rho = \rho^{[1]} - \rho^{[2]}$ .

- (H4T) On suppose pour simplifier que les variations de température liées aux échanges d'eau entre les boîtes sont négligeables par rapport aux variations liées au phénomène d'ensoleillement.
- (H4S) Les variations de salinité induites par l'échange d'eau entre les boîtes ne sont pas négligeables. Ce dernier induit un échange de sel qui suit la loi de modération : La variation de salinité par unité de temps entre  $B^{[1]}$  et  $B^{[2]}$  est égale à :

$$-Q(\rho)S \quad S = S^{[1]} - S^{[2]}$$

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de ces différentes quantités. Nous allons utiliser des temps discrets, i.e pour  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit le temps  $t_n = n\delta t$  où  $\delta t > 0$  est une constante. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note respectivement  $S_n^{[j]}$ ,  $T_n^{[j]}$  et  $\rho_n^{[j]}$  la salinité, la température et la densité volumique pour  $j \in \{1, 2\}$  au temps  $t_n$ . De même, les différences de salinité et de densité volumique entre les deux boîtes au temps  $t_n$  sont notées :

$$S_n = S_n^{[1]} - S_n^{[2]} \quad \rho_n = \rho_n^{[1]} - \rho_n^{[2]}$$

Les hypothèses ci-dessus nous amènent à considérer, pour  $j \in \{1, 2\}$  les suites  $(T_n^{[j]})_{n \geq 0}$  et  $(S_n^{[j]})_{n \geq 0}$  suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{n+1}^{[1]} = T_n^{[1]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[1]} - T_e^{[1]}) \\ T_{n+1}^{[2]} = T_n^{[2]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[2]} - T_e^{[2]}) \\ S_{n+1}^{[1]} = S_n^{[1]} + \frac{1}{2}\delta t(F - Q(\rho_n)S_n) \\ S_{n+1}^{[2]} = S_n^{[2]} - \frac{1}{2}\delta t(F - Q(\rho_n)S_n) \end{array} \right. \quad (2)$$



Figure 1 – Illustration du phénomène du Gulf Stream issu de [SciJinks](#)

Notons pour la suite que  $T_0^{[1]}, T_0^{[2]}, S_0^{[1]}, S_0^{[2]}$  et  $F$  sont des constantes réelles données du problème.

### 3 Une première approche du modèle

#### 3.1 Comprendre les équations

Dans un premier temps nous allons nous intéresser aux hypothèses de modélisation pour comprendre au mieux les différents phénomènes concernés. Nous allons notamment nous intéresser aux équations définies dans (2).

#### Des hypothèses aux équations

On donne la densité  $\rho$  tel que :

$$\rho = \rho^{[1]} - \rho^{[2]}$$

avec  $\rho^{[j]}$  exprimé en  $kg.m^{-3}$   $j \in \{1; 2\}$ .

Pour mieux comprendre le phénomène, commençons par déterminer le signe de  $\rho$  de nos jours. D'après l'hypothèse (H4), les échanges entre les boîtes n'existent que grâce à la différence de densité volumique de l'eau de chaque boîte. En surface, de l'eau peu dense se déplace vers les zones d'eau plus dense pendant qu'en profondeur, la même quantité d'eau se déplace dans l'autre

sens. D'après la figure ci-dessus, le courant de surface provient des Caraïbes et arrive en direction du Pôle Nord. On en déduit donc immédiatement que:

$$\begin{aligned}\rho^{[1]} < \rho^{[2]} &\iff \rho^{[1]} - \rho^{[2]} < 0 \\ &\iff \rho < 0\end{aligned}$$

De nos jours, on constate que  $\rho < 0$ .

Intéressons nous maintenant aux équations définies dans (2) . Nous allons commencer par celle concernant la salinité :

$$\begin{cases} S_{n+1}^{[1]} = S_n^{[1]} + \frac{\delta t}{2}(F - Q(\rho_n)S_n) \\ S_{n+1}^{[2]} = S_n^{[2]} - \frac{\delta t}{2}(F - Q(\rho_n)S_n) \end{cases} \quad (3)$$

En observant ces deux équations on comprend aisément d'après les hypothèses que le coefficient  $F$  modélise les échanges d'eau ayant lieu entre les deux boîtes par évaporation puis précipitation. Concrètement, de l'eau s'évapore d'une boîte pour être ensuite précipiter dans l'autre boîte. Nous allons nous intéresser aux hypothèses liées à ce coefficient  $F$ .

$F$  dépend des hypothèses :

- (H2) En effet, pour avoir conservation de la quantité d'eau dans le système  $[B^{[1]} + B^{[2]}]$ , il faut considérer ce système comme étant isolé. Ainsi, les échanges ne pourront avoir lieu qu'entre les deux boîtes considérées. Si (H2) n'était pas respecté, on peut imaginer que l'eau évaporée de la boîte  $B^{[j]}$  pour  $j \in \{1; 2\}$  pourrait être amenée a retomber dans aucune des deux boîtes considérées, par exemple dans un autre océan.
- (H3)(H3S) Le coefficient  $F$  décrit l'échange d'eau via l'évaporation puis retombée de cette même eau dans la seconde boîte.  $F$  dépend donc directement de l'ensoleillement. En effet, plus l'eau est chaude, plus elle s'évapore facilement, plus il y'a d'échange d'une boîte à l'autre. De plus, il faut aussi noter que  $F$  dépend de (H3S) étant donné que l'eau évaporée dans une boîte doit intégralement retomber en précipitation dans l'autre boîte pour respecter la conservation de l'eau dans notre système.

Pour conclure sur le sens de  $F$  on peut préciser pour la suite que :

$F$  dépend des hypothèses (H2),(H3),(H3S).



On observe de plus que  $F$  apparaît dans les équations d'évolutions à un signe près. En effet,  $F$  apparaît de cette façon pour respecter le principe de conservation de salinité dans notre système isolé  $[B^{[1]} + B^{[2]}]$ . Pour le remarquer, il suffit de sommer les deux équations du système (3).

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{[1]} + S_{n+1}^{[2]} &= S_n^{[1]} + \frac{\delta t}{2}(F - Q(\rho_n)S_n) + S_n^{[2]} - \frac{\delta t}{2}(F - Q(\rho_n)S_n) \\ \implies S_{n+1}^{[1]} + S_{n+1}^{[2]} &= S_n^{[1]} + S_n^{[2]} \end{aligned}$$

$F$  apparaît dans deux termes opposés pour respecter la conservation de salinité.

Intéressons nous au cas où  $F > 0$  pour comprendre au mieux ce qu'il se passe. On distingue deux cas :

1. Si  $F > Q(\rho_n)S_n$ , on constate que  $S_{n+1}^{[1]} > S_n^{[1]}$ . Ainsi la salinité dans la boîte  $B^{[1]}$  augmente.
2. Si  $F < Q(\rho_n)S_n$ , la salinité dans la boîte  $B^{[2]}$  augmente.

Désormais, nous allons démontrer que pour notre système isolé, il y'a conservation de salinité. Mathématiquement, il faut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n^{[1]} + S_n^{[2]} = S_0^{[1]} + S_0^{[2]}$$

Initialisation : Pour  $n = 0$  la relation est triviale. La propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons que  $S_n^{[1]} + S_n^{[2]} = S_0^{[1]} + S_0^{[2]}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que la relation est aussi vraie au rang  $n + 1$ .

D'après les équations couplées et en sommant notamment celles concernant la salinité :

$$S_{n+1}^{[1]} + S_{n+1}^{[2]} = S_n^{[1]} + S_n^{[2]}$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$S_n^{[1]} + S_n^{[2]} = S_0^{[1]} + S_0^{[2]}$$

D'où,

$$S_{n+1}^{[1]} + S_{n+1}^{[2]} = S_0^{[1]} + S_0^{[2]}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n^{[1]} + S_n^{[2]} = S_0^{[1]} + S_0^{[2]}$$

En s'intéressant aux termes  $Q(\rho_n)S_n$  dans les équations d'évolution de salinités on comprend que :

$$Q(\rho_n)S_n \text{ dépend des hypothèses (H2),(H4),(H4T),(H4S)}$$

On remarque tout comme pour  $F$  que les termes en  $Q(\rho_n)S_n$  sont présent avec des signes opposés dans les équations de salinité. Le principe est le même que pour  $F$ , il faut respecter la conservation de la salinité.

$$Q(\rho_n)S_n \text{ sont présents à signes près pour respecter conservation de la salinité.}$$

Remarquons par ailleurs que dans les équations d'évolution de températures il n'y a pas de termes en  $Q(\rho_n)$  car d'après l'hypothèse (H4T) on suppose que les variations de température liées aux échanges d'eau entre les boîtes sont négligeables par rapport aux variations liées au phénomène d'ensoleillement.

Pour la suite de notre étude, on considérera que  $0 < \delta t < t_r$ .

### 3.2 Les équations de températures

Après avoir étudié les équations de salinité du système (2) nous allons nous intéresser dans cette partie aux équations d'évolution de température du système (2) i.e que l'on va s'intéresser au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T_{n+1}^{[1]} = T_n^{[1]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[1]} - T_e^{[1]}) \\ T_{n+1}^{[2]} = T_n^{[2]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[2]} - T_e^{[2]}) \end{cases}$$

Au vu de la symétrie des équations on étudiera de manière plus générale:

$$T_{n+1}^{[j]} = T_n^{[j]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[j]} - T_e^{[j]}) \quad j \in \{1; 2\}$$

### Évolution de la température

Notons tout d'abord que  $n = 0 \implies t_n = 0$ . Ainsi,

$$T_0^{[j]} \text{ est la température initiale dans la boîte } B^{[j]} \text{ pour } j \in \{1; 2\}$$

On rappelle pour la suite que  $T_e^{[j]}$  est la température d'équilibre de l'eau contenue dans la boîte  $B^{[j]}$ . Supposons que la température initiale de l'eau de notre boîte  $B^{[j]}$  soit à l'équilibre. Mathématiquement, cela revient à dire que  $T_0^{[j]} = T_e^{[j]}$ . Dans ce cas, on vérifie immédiatement que:

$$\text{La température est à l'équilibre si } T_0^{[j]} = T_e^{[j]}.$$

Avec un raisonnement purement mathématique, il suffit d'étudier la suite de température  $T_n^{[j]}$ . Pour  $n = 0$  i.e pour  $T_0^{[j]} = T_e^{[j]}$  déterminons le terme consécutif de la suite, c'est à dire  $T_1^{[j]}$ .

$$\begin{aligned} T_1^{[j]} &= T_0^{[j]} - \frac{\delta t}{t_r}(T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) \\ &\implies T_1^{[j]} = T_0^{[j]} \end{aligned}$$

Par récurrence, on vérifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \{1; 2\}, \quad T_{n+1}^{[j]} = T_n^{[j]}$$

La suite des températures est donc une suite constante. Ainsi on vérifie une fois de plus que:

$$\text{La température est à l'équilibre si } T_0^{[j]} = T_e^{[j]}.$$

Pour approfondir notre étude, nous allons maintenant exprimer  $T_n^{[j]}$  comme une fonction de  $n$ . Il s'avère que la suite des température peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall j \in \{1; 2\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : T_n^{[j]} = \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]}$$

Montrons cette relation par un raisonnement par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$  la relation est évidente d'après ce qui précède. La propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons que  $T_n^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que la relation est aussi vraie au rang  $n + 1$ . D'après l'équation de la température généralisée à nos deux boîtes :

$$T_{n+1}^{[j]} = T_n^{[j]} - \frac{\delta t}{t_r} (T_n^{[j]} - T_e^{[j]})$$

Par hypothèse de récurrence :

$$T_{n+1}^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]} - \frac{\delta t}{t_r} \left( (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]} - T_e^{[j]} \right)$$

$$\implies T_{n+1}^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n \left( (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) - \frac{\delta t}{t_r} (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) \right) + T_e^{[j]}$$

$$\implies T_{n+1}^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n \left( (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) (1 - \frac{\delta t}{t_r}) \right) + T_e^{[j]}$$

$$\implies T_{n+1}^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^{n+1} (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall j \in \{1; 2\}, \forall n \in \mathbb{N} : T_n^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]} (*)}$$

Notre équation peut se ré-écrire sous la forme :

$$\forall j \in \{1; 2\}, \forall n \in \mathbb{N} : T_n^{[j]} - T_e^{[j]} = (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]})$$

Sachant que  $0 < \delta t < t_r \implies (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc :

$$\boxed{T_n^{[j]} - T_e^{[j]} \text{ est du même signe que } T_0^{[j]} - T_e^{[j]}}$$

Considérons deux cas :

1. Si la boîte  $B^{[j]}$  est à l'équilibre ( $T_0^{[j]} = T_e^{[j]}$ ), alors d'après (\*)  $T_n^{[j]} = T_e^{[j]}$
2. Si la boîte  $B^{[j]}$  n'est pas à l'équilibre ( $T_0^{[j]} \neq T_e^{[j]}$ ) étant donné que par hypothèse  $\delta t < t_r$  alors  $(1 - \frac{\delta t}{t_r}) \neq 0$  donc  $\forall n \in \mathbb{N} \ T_n^{[j]} \neq T_e^{[j]}$

Ainsi, pour la suite  $(T_n^{[j]})_{n \geq 0}$  on a l'alternative suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ T_n^{[j]} = T_e^{[j]} \text{ ou } T_n^{[j]} \neq T_e^{[j]}}$$

Maintenant, on peut se demander que se passerait-il si  $n \rightarrow +\infty$  (donc  $t_n \rightarrow +\infty$ ). Pour ce faire on considère la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n^{[j]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) + T_e^{[j]}$$

Par hypothèse,

$$0 < \delta t < t_r \implies 1 - \frac{\delta t}{t_r} \in ]0, 1[$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\delta t}{t_r})^n = 0$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n^{[j]} = T_e^{[j]}}$$

Le résultat était évidemment prévisible étant donné que plus l'expérience avance dans le temps, plus la température de l'eau de chaque boîte va tendre vers sa température d'équilibre.

On se propose à présent d'écrire un script Python permettant de visualiser l'évolution des suites de températures  $T_n^{[1]}$  et  $T_n^{[2]}$ . Pour ce faire, on considère:

$$T_0^{[1]} = 28, \quad T_e^{[1]} = 25, \quad T_0^{[2]} = 7, \quad T_e^{[2]} = 9, \quad t_r = \frac{2}{3}, \quad \delta t = 10^{-1}.$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T_0_1=28
T_e_1=25

T_0_2=7
T_e_2=9

tr=2/3
dt=10**-1

def temperature(n,T0,Te):
    return ((1-dt/tr)**n)*(T0-Te)+Te

n=[i for i in range(0,30)]
t_n=[i*dt for i in range(0,30)]
T_n_1=[temperature(k,T_0_1,T_e_1) for k in n]
T_n_2=[temperature(j,T_0_2,T_e_2) for j in n]

plt.subplot(2,1,1)
plt.scatter(t_n,T_n_1,s=10,c='blue',label=r'$y=T_{n}^{\{1\}}$')
plt.plot([0,2.5],[25,25],c='orange',label=r'$y=T_{e}^{\{1\}}$')
plt.ylabel(r'$T_{n}^{\{1\}}$')
plt.xlim(0,2.5)
plt.ylim(24,28)
plt.legend(loc='upper right')

plt.subplot(2,1,2)
plt.scatter(t_n,T_n_2,s=10,c='blue',label=r'$y=T_{n}^{\{2\}}$')
plt.plot([0,2.5],[9,9],c='orange',label=r'$y=T_{e}^{\{2\}}$')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel(r'$t_n$')
plt.ylabel(r'$T_{n}^{\{2\}}$')
plt.xlim(0,2.5)
plt.ylim(7,10)

plt.show()

```

Le code ci-dessus nous permet d'obtenir la figure suivante :

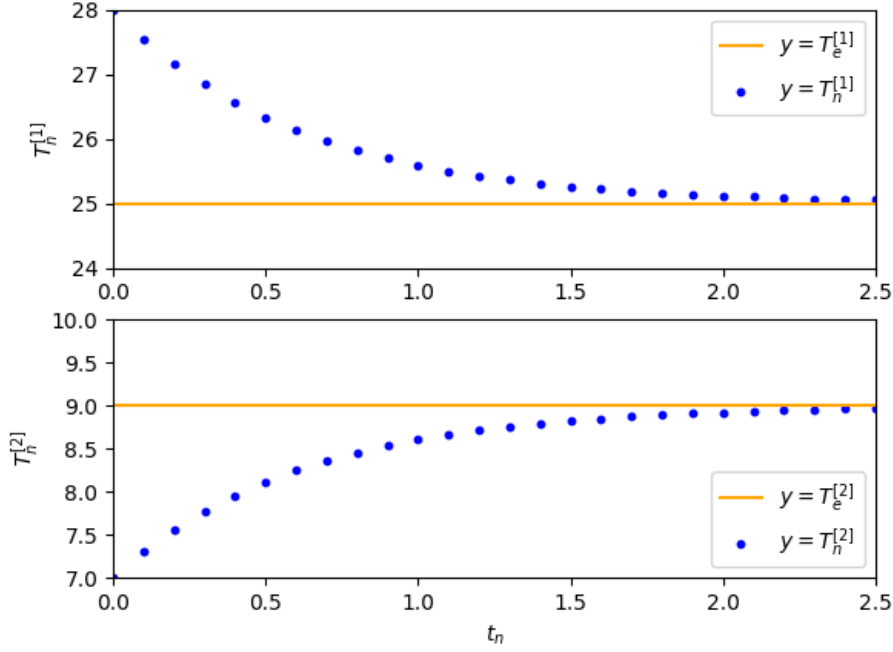


Figure 2 –  $T_n^{[j]}$  en fonction de  $t_n$  pour  $j \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$  avec  $T_0^{[1]} = 28$ ,  $T_e^{[1]} = 25$ ,  $T_0^{[2]} = 7$ ,  $T_e^{[2]} = 9$ ,  $t_r = \frac{2}{3}$ ,  $\delta t = 10^{-1}$ .

### Le temps de relation $t_r$

Notre objectif est maintenant de mieux comprendre la notion de temps de relaxation  $t_r$ . Pour cela on introduit :

$$N_r = \lfloor \frac{t_r}{\delta t} \rfloor$$

avec  $\lfloor \cdot \rfloor$  la fonction partie entière.

On suppose de plus que  $T_0 \neq T_e$ . On pose cette condition pour évidemment éviter le cas où  $t_r = 0$ .

D'après ce qui précède on sait que :

$$T_n^{[j]} - T_e^{[j]} = \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^n (T_0^{[j]} - T_e^{[j]})$$

En posant  $n = n_0 + N_r$  on obtient :

$$T_{n_0+N_r}^{[j]} - T_e^{[j]} = \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^{n_0+N_r} (T_0^{[j]} - T_e^{[j]})$$

$$\implies T_{n_0+N_r}^{[j]} - T_e^{[j]} = \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^{n_0} \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^{N_r} (T_0^{[j]} - T_e^{[j]})$$

Or,

$$\left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^{n_0} (T_0^{[j]} - T_e^{[j]}) = T_{n_0}^{[j]} - T_e^{[j]}$$

Donc,

$$\boxed{T_{n_0+N_r}^{[j]} - T_e^{[j]} = \left(1 - \frac{\delta t}{t_r}\right)^{N_r} (T_{n_0}^{[j]} - T_e^{[j]})}$$

On note a présent :

$$\gamma(\delta t) = \frac{T_{n_0+N_r}^{[j]} - T_e^{[j]}}{T_{n_0}^{[j]} - T_e^{[j]}}$$

On se propose de déterminer la limite en 0 de  $\gamma(\delta t)$ . Par définition de  $N_r$  :

$$N_r \leq \frac{t_r}{\delta t} < N_r + 1$$

$$1 \leq \frac{t_r}{\delta t} \cdot \frac{1}{N_r} < 1 + \frac{1}{N_r}$$

En passant à la limite quand  $\delta t \rightarrow 0$  on peut conclure par théorème d'encadrement que la limite est 1. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\delta t \rightarrow 0} \gamma(\delta t) = e^{-1}}$$

En physique, on entend souvent dire que le temps de relaxation est le temps qu'il faut attendre pour réduire la distance de  $T_n^{[j]}$  à l'équilibre d'environ 37%. Pour rappel, on a posé que  $n = n_0 + N_r$  donc :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{T_n^{[j]} - T_e^{[j]}}{T_{n_0}^{[j]} - T_e^{[j]}} = e^{-1}$$



Or après calcul,  $e^{-1} = 0.37$ . On vérifie bien que le temps de relaxation est le temps qu'il faut attendre pour réduire la distance de  $T_n^{[j]}$  à l'équilibre d'environ 37%.

On peut aussi entendre que l'équilibre thermique est atteint au bout de  $5t_r$ . Nous allons le vérifier.

$$\begin{aligned} T_{n+1}^{[j]} &= T_n^{[j]} - \frac{\delta t}{t_r}(T - T_e) \\ \Leftrightarrow T_{n+1}^{[j]} - T_n^{[j]} &= -\frac{\delta t}{t_r}(T_n^{[j]} - T_e^{[j]}) \end{aligned}$$

On a donc une équation de la forme :

$$\begin{aligned} dT &= -dt \left( \frac{T - T_e}{t_r} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} &= - \left( \frac{T - T_e}{t_r} \right) \end{aligned}$$

On résout l'équation homogène associée :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{t_r}$$

Notre solution homogène est donc de la forme :

$$T(t) = \lambda e^{-\frac{t}{t_r}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$T = T_e$  est une solution particulière évidente. En effet on vérifie aisément que :

$$\cancel{\frac{dT_e}{dt}} = - \cancel{\left( \frac{T_e - T_e}{t_r} \right)}$$

Donc notre solution générale est de la forme :

$$T(t) = \lambda e^{-\frac{t}{t_r}} + T_e, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Or, on sait que  $T(0) = T_0$  :

$$\lambda = T_0 - T_e$$

Et donc,

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-\frac{t}{\tau_r}} + T_e$$

Pour que l'équilibre thermodynamique soit atteint il faut que  $T = T_e$ , i.e qu'il faut que  $(T_0 - T_e)e^{-\frac{t}{\tau_r}} = 0$ . On observe une décroissance exponentielle et on peut considérer qu'à partir de  $5\tau_r$  elle est suffisamment proche pour être négligée. En d'autres termes :

$$T(5\tau_r) = \cancel{(T_0 - T_e)}e^{-\frac{5\tau_r}{\tau_r}} + T_e$$

Ainsi, à partir de  $5\tau_r$  on peut considérer que l'équilibre thermodynamique est atteint.

## 4 Le modèle réduit

L'existence de la circulation thermohaline Atlantique Nord est une conséquence de la différence de densité des eaux et donc, des différences de salinité et de température dans nos différentes boîtes. Dans ce paragraphe, on se propose d'établir un modèle réduit du phénomène.

### *Établir le modèle réduit*

Dans le début de cette étude, nous allons commencer par étudier les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies pour tout  $n$  telles que :

$$x_n = \frac{T_n^{[1]} - T_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}}$$

$$y_n = \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \left( \frac{S_n^{[1]} - S_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \right)$$

Notre relation étant vraie pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ :

$$x_{n+1} = \frac{T_{n+1}^{[1]} - T_{n+1}^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_{n+1} &= \frac{T_n^{[1]} - \frac{\delta t}{t_r} \left( T_n^{[1]} - T_e^{[1]} \right) - T_n^{[2]} + \frac{\delta t}{t_r} \left( T_n^{[2]} - T_e^{[2]} \right)}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \\
\Rightarrow x_{n+1} &= \frac{T_n^{[1]} - T_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} - \frac{\delta t}{t_r} \left( \frac{(T_n^{[1]} - T_n^{[2]}) - (T_e^{[1]} - T_e^{[2]})}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \right) \\
\Rightarrow &\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{\delta t}{t_r} (x_n - 1)}
\end{aligned}$$

Voyons maintenant pour la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \left( \frac{S_{n+1}^{[1]} - S_{n+1}^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \right)$$

Avec  $S_{n+1}^{[1]} = S_n^{[1]} + \frac{\delta t}{2} \left( F - \frac{\delta t}{2} Q(\rho_n) S_n \right)$  et  $S_{n+1}^{[2]} = S_n^{[2]} - \frac{\delta t}{2} \left( F - \frac{\delta t}{2} Q(\rho_n) S_n \right)$ .

En remplaçant  $S_{n+1}^{[1]}$  et  $S_{n+1}^{[2]}$  par leurs expressions respectives, on obtient que :

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{S_n^{[1]} - S_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} + \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{\delta t}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \left( F - Q(\rho_n) S_n \right)$$

Sachant que  $Q(\rho_n) = 1 + C\rho_n^2$  et  $S_n = S_n^{[1]} - S_n^{[2]}$  :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{\delta t}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \left( F - (1 + C\rho_n^2)(S_n^{[1]} - S_n^{[2]}) \right) \\
\Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \delta t \left( \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{F}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} - \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \left( \frac{(1 + C\rho_n^2)(S_n^{[1]} - S_n^{[2]})}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Posons :

$$p = \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{F}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \delta t (p - (1 + C\rho_n^2) y_n)$$

Sachant que :

$$\rho_n^{[j]} = \rho_0 + \alpha_S (S_n^{[j]} - S_0) - \alpha_T (T_n^{[j]} - T_0)$$

Et que :

$$\begin{aligned}\rho_n &= \rho_n^{[1]} - \rho_n^{[2]} = \alpha_s(S_n^{[1]} - S_n^{[2]}) - \alpha_T(T_n^{[1]} - T_n^{[2]}) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \delta t \left[ p - \left[ 1 + C(\alpha_s(S_n^{[1]} - S_n^{[1]}) - \alpha_T(T_n^{[1]} - T_n^{[1]}))^2 \right] y_n \right] \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + \delta t \left[ p - \left[ 1 + \alpha_T^2 C \left( T_e^{[1]} - T_e^{[1]} \right)^2 \left[ \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \left( \frac{S_n^{[1]} - S_n^{[1]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[1]}} \right) - \left( \frac{T_n^{[1]} - T_n^{[1]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[1]}} \right) \right]^2 \right] y_n \right]\end{aligned}$$

En posant  $a = \alpha_T^2 C (T_n^{[1]} - T_n^{[1]})^2$  on obtient que :

$$y_{n+1} = y_n + \delta t \left( p - (1 + a(y_n - x_n)^2) y_n \right)$$

D'après nos calculs le système vérifié par  $(x_n)$  et  $(y_n)$  est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\delta t}{t_r} (x_n - 1) \\ y_{n+1} = y_n + \delta t (p - (1 + a(y_n - x_n)^2) y_n) \end{cases} \quad (4)$$

Déterminons maintenant les dimension physiques de  $x_n$  et  $y_n$ .

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{T_n^{[1]} - T_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \\ \Rightarrow [x_n] &= \frac{[T_n^{[1]}] - [T_n^{[2]}]}{[T_e^{[1]}] - [T_e^{[2]}]} \\ &= \frac{[T_n]}{[T_e]} = 1\end{aligned}$$

D'après (1):

$$[\alpha_s][S] = [\alpha_T][T]$$

Or,

$$\begin{aligned}[y_n] &= \frac{[\alpha_s][S_n]}{[\alpha_T][T]} \\ \Rightarrow [y_n] &= 1\end{aligned}$$

$x_n$  et  $y_n$  sont des grandeurs physiques sans dimensions.

Pour continuer notre étude, on suppose maintenant que  $T_e^{[1]} - T_e^{[2]} > 0$ . Par définition de  $\rho$  on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_n &= \rho_n^{[1]} - \rho_n^{[2]} \\
 &= \alpha_s(S_n^{[1]} - S_n^{[2]}) - \alpha_T(T_n^{[1]} - T_n^{[2]}) \\
 &= \alpha_T\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_T}(S_n^{[1]} - S_n^{[2]}) - (T_n^{[1]} - T_n^{[2]})\right) \\
 &= \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_T} \frac{S_n^{[1]} - S_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} - \frac{T_n^{[1]} - T_n^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}}\right) \\
 &= \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})(y_n - x_n)
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\rho_n = \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})(y_n - x_n)$$

Ainsi,

Le signe de  $\rho_n$  dépend seulement de celui de  $y_n - x_n$  car  $\alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]}) > 0$

Donc nous avons affaire à deux cas :

Si  $(y_n - x_n) > 0$  : L'eau se déplace en surface de la boîte  $B^{[2]}$  vers la boîte  $B^{[1]}$ . En profondeur l'eau se déplace dans le sens inverse.  
 Si  $(y_n - x_n) < 0$  : L'eau se déplace de la boîte  $B^{[1]}$  vers la boîte  $B^{[2]}$ . En profondeur l'eau se déplace en sens inverse.

Nous allons enfin écrire un script Python qui permet de calculer et visualiser les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jusqu'à un certain rang  $N_0$ . On prendra pour valeurs :

$$p = 1.5 \quad x_0 = 2 \quad y_0 = -2 \quad t_r = 10^{-1} \quad a = 1 \quad \delta t = 10^{-3}.$$

Avec le code présent ci-dessous, on obtient la figure suivante :

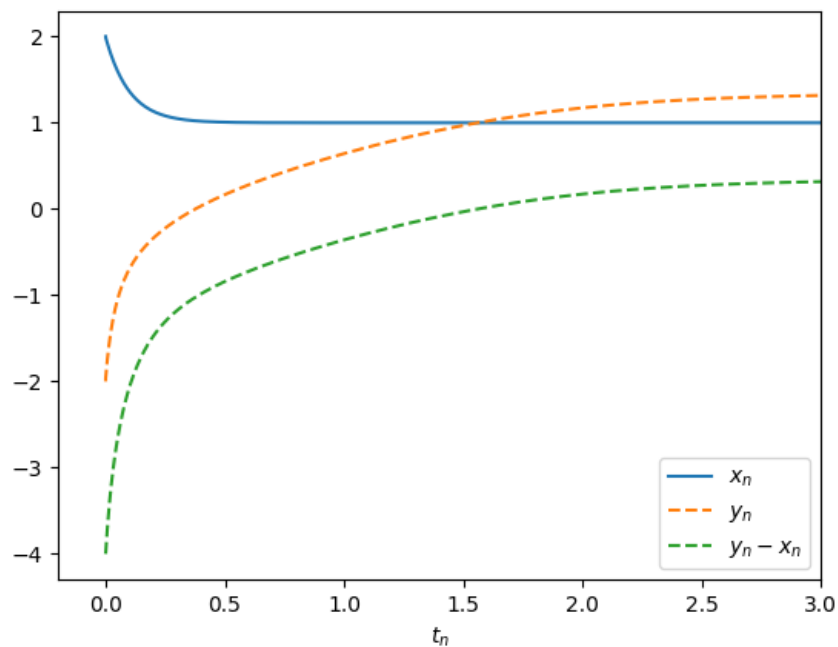


Figure 3 – Évolution des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n - x_n)_{n \geq 0}$  pour  $p = 1.5$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -2$ ,  $t_r = 10^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

```
#import des modules nécessaires
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#création des listes avec les premiers termes des suites

Xn=[2]
Yn=[-2]
Dn=[-4] #ici -4=-2-2

dt, p, tr, a=10**-3, 1.5, 10**-1, 1 ##constantes

N0=10000 #on choisit un N0 arbitraire

liste=[0] #liste d'abscisse temporaire

for i in range(0,N0+1):
    Xn.append(Xn[i]-(dt/tr)*(Xn[i]-1))
    liste.append(i) ##on l'incrémente
    Yn.append(Yn[i]+dt*(p-(1+a*(Yn[i]-Xn[i])**2)*Yn[i]))
    Dn.append(Yn[i]-Xn[i])

t_n=[i*dt for i in liste] #liste d'abscisse pour t_n

plt.plot(t_n,Xn,label=r"$x_{n}$")
plt.plot(t_n,Yn,"--",label=r"$y_{n}$")
plt.plot(t_n,Dn,"--",label=r"$y_{n}-x_{n}$")
plt.xlim(-0.2,3)
plt.legend(loc="lower right")
plt.xlabel(r'$t_{n}$')

plt.show()
```

Si  $t_r$  est assez petit, ce qui est physiquement le cas, on peut considérer directement le cas où  $x_0 = 1$ . Nous allons tester numériquement cette approximation.

### *Vers un modèle encore plus réduit*

Sur la simulation précédemment effectuée, on observe que le terme général de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  tend rapidement vers 1. Cela est en accord avec tout ce qui précède, les températures d'équilibres de chaque boîtes sont atteintes assez rapidement.

Nous allons ré-effectuer la simulation précédente en changeant uniquement la valeur de  $x_0$  pour voir comment se comporte la suite. On choisi de poser  $x_0 = 1$ . Le code utilisé est évidemment le même que le précédent, on initialise nos listes en changeant les valeurs initiales uniquement.

On obtient la figure suivante avec le code ci-dessous.

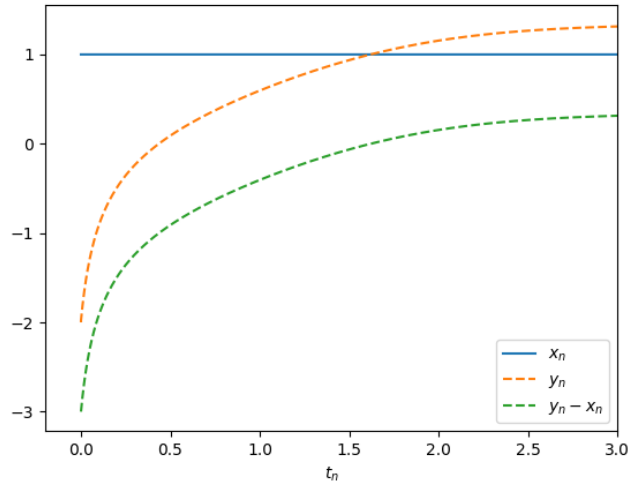


Figure 4 – Évolution des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n - x_n)_{n \geq 0}$  pour  $p = 1.5$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -2$ ,  $t_r = 10^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .



```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Xn=[1]
Yn=[-2]
Dn=[-3] #ici -3=-2-1

dt, p, tr, a=10**-3, 1.5, 10**-1, 1

N0=10000 #on choisit un N0 arbitraire

liste=[0]

for i in range(0,N0+1):
    Xn.append(Xn[i]-(dt/tr)*(Xn[i]-1))
    liste.append(i)
    Yn.append(Yn[i]+dt*(p-(1+a*(Yn[i]-Xn[i])**2)*Yn[i]))
    Dn.append(Yn[i]-Xn[i])

t_n=[i*dt for i in liste] #liste d'abscisse pour t_n

plt.plot(t_n,Xn,label=r"$x_{n}$")
plt.plot(t_n,Yn,"--",label=r"$y_{n}$")
plt.plot(t_n,Dn,"--",label=r"$y_{n}-x_{n}$")
plt.xlim(-0.2,3)
plt.legend(loc="lower right")
plt.xlabel(r'$t_{n}$')

plt.show()
```

En ayant choisi  $x_0 = 1$  la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  devient la suite constante de valeur 1.

Dans le cas étudié on remarque que  $y_0 - x_0 = -3 < 0$ .

On observe que  $(y_n)_{n \geq 0}$  est croissante  $y_0 - x_0 < 0$ .

Qu'en est-il pour  $y_0 - x_0 > 0$ . Traçons une fois de plus l'évolution des suites mais en changeant la valeur initiale de  $y_0$ . On prendra  $y_0 = 2$  pour avoir  $y_0 - x_0 = 2 - 1 = 1 > 0$ .

On obtient la figure suivante grâce une fois de plus le même code que précédemment en changeant uniquement les valeurs initiales.

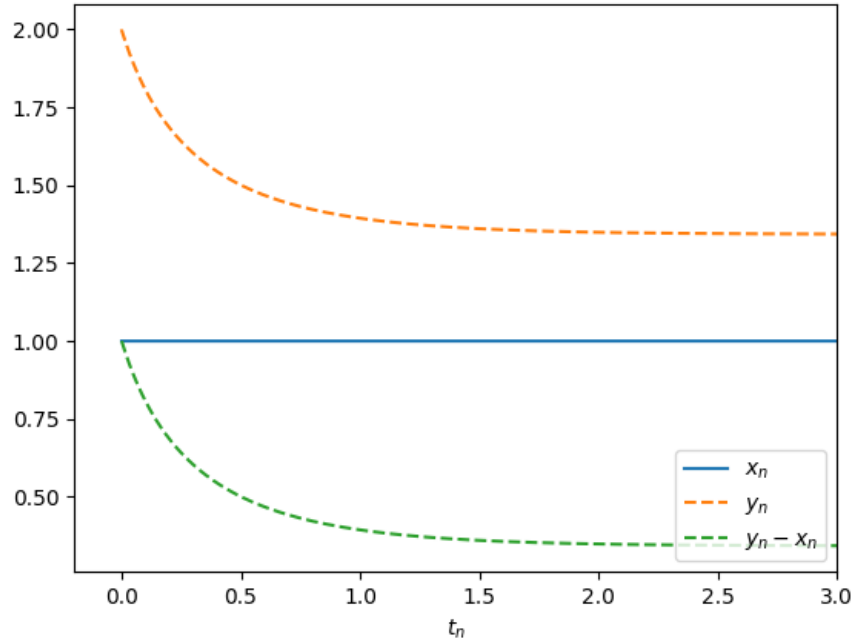


Figure 5 – Évolution des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n - x_n)_{n \geq 0}$  pour  $p = 1.5$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $t_r = 10^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

On observe que  $(y_n)_{n \geq 0}$  est décroissante pour  $y_0 - x_0 > 0$ .

Pour conclure nous allons tracer sur un même graphique les courbes obtenues pour différentes valeurs de  $x_0$ . On prendra  $x_0 = 1, 10, 50$ . Le code est présent en annexe de ce projet.

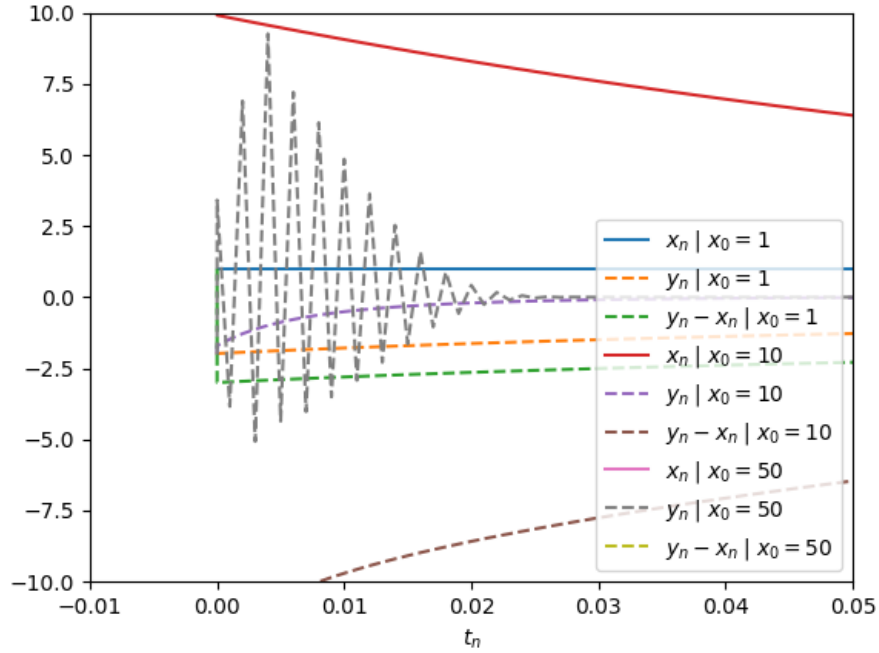


Figure 6 – Évolution des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n - x_n)_{n \geq 0}$  avec pour  $p = 1.5$ ,  $y_0 = -2$ ,  $t_r = 10^{-1}$ ,  $a = 1$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_0 = 10$ ,  $x_0 = 50$ .

On constate que lorsque  $x_0$  est relativement grand, la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oscille et converge autour de d'une valeur  $\alpha$  proche de 0.

**Étude de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas  $p = 0$  et  $x_0 = 1$**

Sous réserve d'hypothèse le système (4) devient donc :

$$y_{n+1} = y_n + \delta t(1 + a(y_n - 1)^2)y_n \quad (5)$$

On va supposer pour la suite de notre étude  $p = 0$  et  $1 - (a + 1)\delta t > 0$  et que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite notée  $\ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$  i.e :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Dans un premier temps nous allons montrer que  $\ell$  est racine d'un polynôme  $P$  de degré 3. D'après (5) et la valeur de la limite de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\ell = \ell + \delta t(1 + a(\ell - 1)^2)\ell \implies \delta t(1 + a(\ell - 1)^2)\ell = 0$$

Donc  $\ell$  est racine d'un polynôme  $P$  de degré 3 noté :

$$\boxed{P : X \longmapsto \delta t(1 + a(X - 1)^2)X}$$

Déterminons la valeur de cette limite  $\ell$ . Par définition de la racine d'un polynôme :

$$P(\ell) = 0 \implies \delta t(1 + a(\ell - 1)^2)\ell = 0$$

Ainsi,

$$\ell = 0 \text{ ou } (\ell - 1)^2 = -\frac{1}{a}$$

Pour rappel,  $a = C\alpha_T^2(T_e^{[1]} - T_e^{[1]})^2 > 0$  car  $C > 0$ .

$$a > 0 \implies (\ell - 1)^2 \neq -\frac{1}{a}$$

Finalement,

$$\boxed{\ell = 0}$$

Pour rappel,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha_s}{\alpha_T} \left( \frac{S_{n+1}^{[1]} - S_{n+1}^{[2]}}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}} \right)$$

D'après l'hypothèse (H1),  $\alpha_S$  et  $\alpha_T$  sont des constantes strictement positives. D'où si on suppose que  $\ell = 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{[1]} - S_n^{[2]} = 0$$

Donc  $S_n^{[1]}$  et  $S_n^{[2]}$  convergent vers la même limite.

Maintenant nous allons introduire une fonction  $h$  telle que :  $y_{n+1} = h(y_n)$ . On déduit directement que la fonction  $h$  est définie comme suit :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - x\delta t(1 + a(x-1)^2) \end{cases}$$

On vérifie aisément que la fonction polynomiale  $h$  est de degré 3.

Nous allons maintenant déterminer les racines de  $h$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  racine de  $h$ .

$$h(x_0) = 0 \iff x_0(1 - \delta t(1 + ax_0^2 - 2ax_0 + a)) = 0$$

$$\iff x_0(1 - \delta t - a\delta tx_0^2 + 2a\delta tx_0 - a\delta t) = 0$$

$$\iff x_0(-a\delta tx_0^2 + 2a\delta tx_0 + 1 - \delta t(a+1)) = 0$$

$$\iff x_0 = 0 \text{ ou } -a\delta tx_0^2 + 2a\delta tx_0 + 1 - \delta t(a+1) = 0$$

Le discriminant du polynôme du second degré en  $x_0$  est :

$$\Delta = 4a^2(\delta t)^2 + 4a\delta t(1 - \delta t(a+1)) \geq 0$$

$\Delta \geq 0$  étant donné qu'il s'agit d'une somme de termes positifs.

D'où,

$$\Delta = 4a\delta t(1 - \delta t)$$

On déduit les racines du polynôme  $h$  :

$$\boxed{\beta_1 = 1 - \sqrt{\frac{1-\delta t}{a\delta t}}, \quad \beta_2 = 1 + \sqrt{\frac{1-\delta t}{a\delta t}}, \quad \beta = 0}$$

On vérifie que  $\beta_1 < \beta < \beta_2$ .

En effet,

$$\begin{aligned} 1 - (a+1)\delta t > 0 &\implies 1 - \delta t > a\delta t \\ &\implies \sqrt{\frac{1-\delta t}{a\delta t}} > 1 \end{aligned}$$

Déterminons le signe de  $h$ . Pour ce faire on construit un tableau de signe.

On a pour  $y \in \mathbb{R}$  |  $h(y) = -(y - \beta_1)(y - \beta)(y - \beta_2)$ . Le tableau de signe est donné ci-dessous :

Tableau de signe de  $h$

$y$	$-\infty$	$\beta_1$	$\beta$	$\beta_2$	$+\infty$	
$-(y-\beta_1)$	+	0	-	-	-	
$-y-\beta$	-	-	0	+	+	
$y-\beta_2$	-	-	-	0	+	
$h(y)$	+	0	0	+	0	-

D'après le tableau de signe on a:

$$\boxed{\begin{cases} h < 0 \text{ si } y \in ]\beta_1, \beta] \cup [\beta_2, +\infty[ \\ h \geq 0 \text{ si } y \in ]-\infty, \beta_1[ \cup ]\beta, \beta_2[ \end{cases}}$$

Indiquons à présent le signe de  $y \rightarrow h(y) - y$  selon les valeurs de  $y$ .

On commence en sachant que :

$$h(y) - y = -y\delta t(1 + a(y - 1)^2)$$

Or,

$$\delta t(1 + a(y - 1)^2) \geq 0$$

Donc le signe de  $h(y) - y$  est celui de  $-y$  d'où :

$$\boxed{h(y) - y \geq 0 \text{ sur } ]-\infty; 0] \text{ et } h(y) - y < 0 \text{ sur } ]0; +\infty[}$$

Enfin, nous allons étudier les conséquences induites par le choix de la valeur initiale  $y_0$ .

Sachant  $\beta = 0$  si la suite  $y_n$  converge, elle converge vers le point d'équilibre  $h(y) = y$ .

Montrons que si  $\beta_1 < y_0 < \beta$  alors  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge vers  $\ell$ .

Si  $y_0 \in ]\beta_1, \beta[ \subset ]-\infty, 0[$  alors,  $h(y) - y > 0$  donc,  $y_{n+1} - y_n > 0$ . Par définition  $y_n$  est croissante et :

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} h(y) = 0^-, \quad \lim_{y \rightarrow \beta_1^+} h(y) = \beta_1^+ - \beta_1^+ \delta t (1 + a(\beta_1^+ - 1)^2) > \beta_1^+$$

car  $h(y) - y > 0$ . Ainsi  $]\beta_1, \beta[$  est invariant par  $h$  i.e que  $h(]\beta_1, \beta[) \subset ]\beta_1, \beta[$ . Dans le cas où  $y_0 \in ]\beta_1, \beta[$  alors  $y_n \in ]\beta_1, \beta[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $\beta$ . Ainsi elle converge vers le point d'équilibre  $h(y) = y$  qui est  $\ell = 0$ .

Montrons que si  $\beta < y_0 < \beta_2$  alors  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et converge vers  $\ell$ .

Si  $y_0 \in ]\beta, \beta_2[ \subset ]0, +\infty[$  alors,  $h(y) - y < 0$  d'où  $y_{n+1} - y_n < 0$ . Par définition  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} h(y) \rightarrow 0^+, \quad \lim_{y \rightarrow \beta_2^-} h(y) \rightarrow \beta_2^- - \beta_2^- \delta t (1 + a(\beta_2^- - 1)^2) < \beta_2^-.$$

Donc  $]\beta, \beta_2[$  est invariant par  $h$  c'est à dire que  $h(]\beta, \beta_2[) \subset ]\beta, \beta_2[$ . Ainsi, si  $y_0 \in ]\beta, \beta_2[$  alors  $y_n \in ]\beta, \beta_2[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $\beta$  donc elle converge vers le point d'équilibre  $h(y) = y$  qui est  $\ell = 0$ .

Conclusion :

$$\boxed{\forall y_0 \in ]\beta_1, \beta_2[ (y_n) \text{ converge vers } \ell = 0.}$$

Dans notre modèle on a considéré que  $p = 0$ . Dans ce cas, l'unique limite possible pour  $y_n$  est  $\ell = 0$ . En pratique,  $p \neq 0$ . En effet, pour rappel :

$$p = \frac{\alpha_S}{\alpha_T} \frac{F}{T_e^{[1]} - T_e^{[2]}}$$

Cependant d'après (H1)  $\alpha_S > 0$  et  $\alpha_T > 0$ . Donc,

$$p = 0 \implies F = 0$$

Or, on ne peut pas négliger les échanges ayant lieu entre les boîtes par les phénomènes d'ensoleillement d'évaporation et de précipitation. Donc  $p \neq 0$ . Par la suite on retourne au modèle réduit complet donné par le système (4) et nous allons chercher les vers lesquelles pourraient converger les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas où elles convergent. C'est ce que l'on appelle les états d'équilibre d'un système.

## 5 États d'équilibres

### 5.1 Étude théorique des états d'équilibre

On introduit une fonction  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et on considère le système dynamique discret :

$$X_{n+1} = X_n + G(X_n), \quad X_0 \in \mathbb{R}^2 \quad (6)$$

Par définition, les points d'équilibres de ce système dynamique discret sont les valeurs  $X_{eq}$  pour lesquelles la suite constante  $(X_{eq})_{n \in \mathbb{N}}$  est solution de (6). Ici, ce sont donc les solutions de  $G(X) = 0$ .

Dans cette première partie, nous allons nous intéresser à la notion d'état d'équilibre.

#### Généralités sur les états d'équilibres

Soit  $X \in \mathbb{R}^d$  un point d'équilibre pour le système défini par (6).

Montrons que s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X_n = X$  alors la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire en une certaine valeur que l'on précisera.

Supposons que il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X_n = X$ . Sachant (6) :

$$\begin{aligned} X &= X + G(X) \implies G(X) = 0 \\ &\implies X = X_{eq} \end{aligned}$$

Donc  $X_{n+1} = X = X_{eq}$ . Par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad X_{n+k} = X_{eq} \text{ est stationnaire à partir du rang } n = x_{eq}}$$



On suppose à présent que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie en (6) possède une limite notée  $X_\infty \in \mathbb{R}$  et que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ . On va montrer que dans un tel cas,  $X_\infty$  est un point d'équilibre du système dynamique défini par (6). Puisque  $G$  est continue et  $X_n$  converge vers  $X_\infty$  alors  $G(X_n)$  converge vers  $G(X_\infty)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ce qui permet d'écrire :

$$X_\infty = X_\infty + G(X_\infty) \implies G(X_\infty) = 0$$

Donc,

$$\boxed{X_\infty \text{ est un point d'équilibre du système dynamique défini par (6).}}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ . Les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont définies dans le système (4).

Le système (4) peut se ré-écrire sous la forme de :

$$X_{n+1} = X_n + \delta t \left( p \frac{1-x_n}{t_r} - (1 + a(y_n + x_n)^2 y_n) \right)$$

On pose la fonction  $\tilde{G}$  définie telle que :

$$\tilde{G} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) & \longmapsto \left( \frac{1-x_n}{t_r}, p - (1 + a((y_n + x_n)^2 y_n)) \right) \end{cases}$$

Ainsi, (4) devient :

$$\boxed{X_{n+1} = X_n + \delta t \tilde{G}(X_n), X_0 \in \mathbb{R}^2 (*)}$$

On peut maintenant se demander si il y a un phénomène de circulation thermohaline entre les boîtes  $B^{[1]}$  et  $B^{[2]}$  si le système (\*) est dans un état d'équilibre. Pour rappel, il y'a échange entre les boîtes si  $\rho = \rho^{[1]} - \rho^{[2]} \neq 0$ . Supposons  $\rho_n = 0$ . A l'équilibre  $G(X_n) = 0$  donc,

$$\begin{cases} x_n = 1 \\ y_n = p - (1 - a((y_n - x_n)^2 y_n)) = 0 \end{cases}$$

Si  $x_n = 1$  alors  $T_n^{[1]} - T_n^{[2]} = T_e^{[1]} - T_e^{[2]}$  par définition de  $x_n$  dans (4).

D'où,  $\rho_n = \alpha_s(S_n^{[1]} - S_n^{[2]}) - \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})$ .

En factorisant par  $\alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})$  on obtient :

$$\rho_n = \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})(y_n - 1)$$

Avec  $\rho_n = 0$  on obtient  $y_n = 1$ . Donc  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante ce qui contredit le système (4).

Si  $\rho_n \neq 0$  il y'a échange entre les boîtes  $B^{[1]}$  et  $B^{[2]}$

### Équilibres

Maintenant que nous connaissons bien les propriétés associées à un état d'équilibre, nous allons démontrer l'existence d'états d'équilibres pour le système (4).

En utilisant l'équation (\*) on peut montrer qu'un état d'équilibre

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du système vérifie :

$$x = 1, \quad ay^3 - 2ay^2 + (a + 1)y = p$$

En effet à l'équilibre,

$$\begin{aligned} X_n = X &\iff \tilde{G}(X) = 0 \\ &\iff \tilde{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \frac{1-x}{t_r} = 0, \quad p - (1 - a((y-x)^2y)) = 0 \\ &\iff x = 1, \quad ay^3 - 2ay^2 + (a + 1)y = p \end{aligned}$$

D'où,

$$X_n = X \iff \begin{cases} x = 1 \\ ay^3 - 2ay^2 + (a + 1)y = p \end{cases}$$

On introduit de plus la fonction  $f$  définie comme suit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & ay^3 - 2ay^2 + (a+1)y \end{cases}$$

On va montrer dans un premier temps que si  $a \in [0, 3]$  alors le système admet un unique état d'équilibre.

Soit  $a \in [0, 3]$ . Pour montrer l'existence d'un unique état d'équilibre, il faut montrer que pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(y) = p$  admet une unique solution. Sachant que  $f : y \rightarrow ay^3 - 2ay^2 + (a+1)y$  est continue dérivable sur  $\mathbb{R}$  car polynomiale, sa dérivée existe et est donné par :

$$f'(y) = 3ay^2 - 4ay + (a+1)$$

Déterminons le signe de  $f'$  pour cela résolvons

$$f'(y) = 0 \iff 3ay^2 - 4ay + (a+1) = 0$$

$$\Delta = 16a^2 - 12a(a+1) = 4a(a-3) \leq 0$$

On note que si  $\Delta = 0$  alors  $a = 0$  ou  $a = 3$ . De plus,  $\Delta$  est positif pour  $a \in ]0, 3[$ .

A présent, on a affaire à plusieurs cas :

1.  $a = 0 \implies \forall y \in \mathbb{R} \ f(y) = y$  et  $f'(y) = 1$ .  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  d'où  $f$  est strictement croissante. De plus  $f$  est bijective et :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$$

D'après le théorème de la bijection  $f(y) = p$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

2. si  $a \in ]0, 3[ \implies \Delta < 0$ . Donc  $f'$  est strictement positive ce qui implique que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De même que le cas précédent  $f$  bijective et :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$$

D'après le théorème de la bijection  $f(y) = p$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

3. Si  $a = 3$ ,  $f'(y) = 0$  admet une unique solution  $y_{sol} = \frac{2}{3}$  donc  $f'$  positive. Aussi,  $f$  est strictement positive et son graphe admet une tangente en  $y_{sol}$ . Finalement  $f$  est bijective et

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$$

D'après le théorème de la bijection  $f(y) = p$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

Conclusion :

$$\boxed{\forall a \in [0, 3] \text{ l'équation } f(y) = p \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}}$$

Notons cette solution  $m$ . Par conséquence le système (4) admet un unique point d'équilibre noté :

$$X_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Dorénavant, on suppose que  $a > 3$  et on pose :

$$y_{\pm} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{a}}, \quad p_{\pm} = f(y_{\pm})$$

Nous devons ré-étudier la fonction  $f$  car notre condition sur  $a$  change. Pour rappel  $f'(y) = 3ay^2 - 4ay + (a + 1)$ . Le discriminant de  $f'$  ne change pas. Son signe quant à lui change étant donné que  $a > 3$ .  $\Delta = 4a(a - 3) > 0$  Donc  $f'$  admet deux solutions réelles  $y_+$  et  $y_- \in \mathbb{R}$ . En découle le tableau de variation de  $f$  ci-dessous :

Tableau de variation de  $f$  pour  $a > 3$

$y$	$-\infty$	$y_-$	$y_+$	$+\infty$			
$f'(y)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	$p_+$	$\searrow$	$p_-$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après une ressource fournie, on peut généraliser  $f$  et la schématiser telle que :

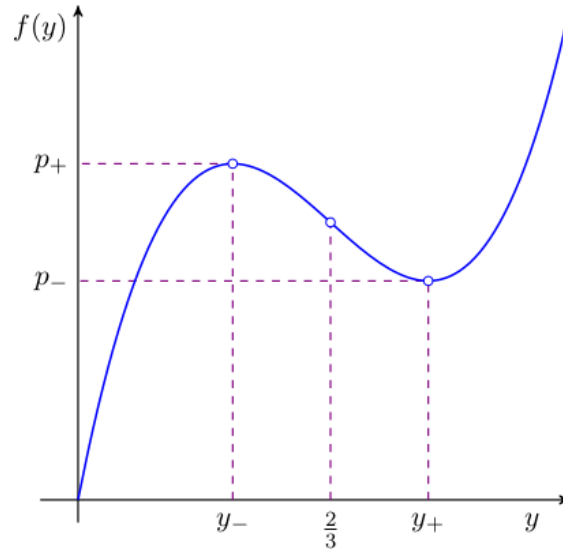


Figure 7 – Graphe  $f(y)$  en fonction de  $y$  extrait de *Image des Mathématiques*

1. Si  $p < p_-$  ou  $p > p_+$ , alors l'équation  $f(y) = p$  admet une unique solution notée  $\mu$ . Donc le système admet un point d'équilibre  $X_{eq} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$
2. Si  $p_- < p < p_+$ , alors l'équation  $f(y) = p$  admet un triplet de solution. Notons ces solutions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Le système admet donc trois points d'équilibres qui sont:  $X_{eq}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ,  $X_{eq}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$  et  $X_{eq}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}$
3. Si  $p = p_-$  ou  $p = p_+$ , alors l'équation  $f(y) = p$  admet deux solutions. Notons les  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Le système admet donc deux points d'équilibres notés :  $X_{eq}^{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$  et  $X_{eq}^{2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

Conclusion:

1. si  $p < p_-$  ou  $p > p_+$  le système admet un point d'équilibre.
2. si  $p_- < p < p_+$  le système admet trois points d'équilibres.
3. si  $p = p_-$  ou  $p = p_+$  le système admet deux points d'équilibres.

On peut obtenir une expression explicite du nombre d'états d'équilibres du système.

Sachant que  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$  déterminer les points d'équilibres revient à résoudre une équation de degré 3 qui donnée sous la forme  $h(y) = 0$ .

Commençons par poser  $x = y - \frac{2}{3}$  et résolvons  $h(x) = 0$ .

On obtient après développement une équation de la forme  $x^3 + px + q = 0$  avec :

$$p = \frac{1-a}{3a} \quad q = \frac{27d}{27a}$$

Nous pouvons maintenant résoudre cette équation en utilisant la méthode de Cardan, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q^2 + \frac{4p^3}{27} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta_1}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta_1}}{2}} \\ \Rightarrow y_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta_1}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta_1}}{2}} + \frac{b^3}{a} \end{aligned}$$

Avec  $y_1$  la première racine donc  $h(y) = (y - y_1)(ay^2 + by + c)$  et  $\Delta_2 = b^2 - 4ac$ .

1.  $\Delta_2 < 0$  l'équation admet une unique solution  $y_1$ .
2.  $\Delta_2 = 0$  l'équation admet deux solutions  $y_1$  et  $y_0$ .
3.  $\Delta_2 > 0$  l'équation admet 3 solutions.

## 5.2 La méthode de Newton

Comme vu dans le paragraphe précédent, on sait que si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est un état d'équilibre du système (4), alors  $y$  est un zéro d'une fonction  $h$  (i.e  $h(y) = 0$ ). Dans cette partie nous allons introduire une méthode de calcul numérique permettant de déterminer le zéro d'une fonction. Cette méthode est appelé la méthode de Newton.

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la théorie liée à cette

méthode numérique.

Considérons une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On construit une méthode itérative en approchant  $f$  par son développement via la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Pour  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixé, on a pour tout  $x$  proche de  $x_0$

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On approche alors l'équation  $f(x) = 0$  par l'équation  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$  qui a pour unique solution :

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

à condition que  $f'(x_0) \neq 0$ . On construit alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  de la façon suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Remarquez bien que l'on doit diviser par  $f'(x_n)$  et qu'il doit donc être non-nul. Ainsi construite, on espère que si  $x_* \in \mathbb{R}$  est un zéro de  $f$  alors  $x_{n+1}$  soit plus proche de  $x_*$  qu'il ne l'était  $x_n$ . Rigoureusement, il s'agit de démontrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et possède une limite en  $+\infty$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_*$ .

Sous certaines hypothèses sur  $f$  et  $x_0$ , il se trouve que cette dernière affirmation est vraie.

Théorème 1 Convergence de la méthode de Newton-Raphson:

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2(I)$ . Soit  $x_\star \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_\star) = 0$  et  $f'(x_\star) \neq 0$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $]x_\star - \delta, x_\star + \delta[ \subset I$  et tel que pour tout  $x_{init} \in ]x_\star - \delta, x_\star + \delta[$  la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$x_0 = x_{init} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est bien définie et converge vers  $x_\star$ .

*Calculer le zéro d'une fonction grâce à la méthode de Newton*

Nous allons proposer une démonstration du théorème de Newton-Raphson. Pour y arriver il est nécessaire d'utiliser le lemme énoncé ci-dessous. Avant de l'appliquer nous le démontrerons.

Démonstration Théorème 1: La démonstration se fait en deux étapes. On commence par démontrer le Lemme 1.

Lemme 1 : Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Soient  $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$  et  $x_\star \in ]a, b[$  tel que  $g(x_\star) = x_\star$  et  $|g'(x_\star)| < 1$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $]x_\star - \delta, x_\star + \delta[ \subset ]a, b[$  et pour tout  $x_{init} \in ]x_\star - \delta, x_\star + \delta[$  la suite récurrente définie par :

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = x_{init}$$

est bien définie et converge vers  $x_\star$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Dans un premier temps, démontrons le Lemme.

Démonstration Lemme 1:

On démontre le Lemme de la façon suivante. Comme  $|g_0(x_\star)| < 1$  il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $x \in [x_\star - \delta_1, x_\star + \delta_1]$  on ait  $|g_0(x)| < 1$ . En appliquant le théorème des accroissements finis on obtient l'existence d'un  $k < 1$  et de  $0 < \delta < \delta_1$  tel que pour tout  $x \in ]x_\star - \delta, x_\star + \delta[$  on vérifie :



$$|g(x) - g(x_*)| < k|x - x_*|.$$

Cela permet de dire que  $g(]x_* - \delta, x_* + \delta[) \subset ]x_*\delta, x_* + \delta[$  et que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. De plus, on remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $|x_{n+1} - x_*| < k^n |x_0 - x_{star}|$ . Ainsi  $x_n$  converge vers  $x_*$ .

A présent grâce au Lemme 1 on se propose de démontrer le Théorème de convergence de la méthode de Newton.

On commence par appliquer le Lemme 1 à la fonction  $N_f$  définie par :

$$N_f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x_{n+1} & \longmapsto x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

La fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  et donc  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ . Par la suite  $N_f$  est de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  car  $N_f(x) = \frac{xf'(x) + f(x)}{f'(x)}$  est la somme d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et de classe  $\mathcal{C}^2$ .

En dérivant on obtient :

$$N'_f(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

Après simplification, on a :

$$N'_f(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

$$\begin{aligned} f(x_*) = 0 &\implies N_f(x_*) = x_* \\ &\implies N'_f(x_*) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|N'_f(x_*)| < 1$$

D'après le Lemme 1 il existe  $\delta > 0$  tel que  $]x_* - \delta, x_* + \delta[ \subset I$  et pour tout suite  $x_{init} \in ]x_* - \delta, x_* + \delta[$  la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $x_0 = x_{init}$ ,  $x_{n+1} = N_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  est bien définie et converge vers  $x_*$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

En théorie la méthode de Newton semble efficace. Cependant, on peut y trouver certains inconvénients. En effet, la valeur de départ doit être suffisamment proche d'une racine. Si ce n'est pas le cas, on ne risque pas de trouver le zéro de notre fonction. De plus, si  $f'(x) = 0$  la méthode ne fonctionnera pas.

### Mise en oeuvre de la méthode de Newton avec Python

On cherche à utiliser la méthode de Newton afin d'approcher numériquement les points d'équilibres du système (4) pour lequel on a choisi  $a = 7.5$ .

### 5.3 Etude numérique des états d'équilibre

Dans cette dernière partie, on se propose d'approcher numériquement les points d'équilibres du système (4). On fixe pour la suite  $a = 7.5$ .

Pour utiliser notre travail précédemment effectué, on se propose de déterminer le nombre d'états d'équilibres du système (4) pour certaines valeurs de  $p$ . Par hypothèse  $a > 3$ , on peut donc appliquer nos résultats obtenus sur la fonction  $f$  définie précédemment.

On détermine dans un premier temps  $y_+$  et  $y_-$  avec  $a = 7.5$

$$\begin{cases} y_+ = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3}{7.5}} = \frac{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}{3} \\ y_- = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3}{7.5}} = \frac{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_- = f(y_-) = a\left(\frac{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right)^3 - 2a\left(\frac{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right)^2 + (a+1)\left(\frac{2-\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right) \\ p_+ = f(y_+) = a\left(\frac{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right)^3 - 2a\left(\frac{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right)^2 + (a+1)\left(\frac{2+\sqrt{\frac{3}{5}}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} p_- = 0.964 \\ p_+ = 1.48 \end{cases}}$$

Nous allons utiliser comme valeur de  $p$  :

$$p_1 = \frac{9}{10}, \quad p_2 = \frac{6}{5}, \quad p_3 = \frac{3}{2}$$

$p_1 \in ]-\infty ; p_-[$ . Le système admet un unique état d'équilibre.

$p_2 \in ]p_- ; p_+[$ . Le système admet trois états d'équilibre.

$p_3 \in ]p_+ ; +\infty[$ . Le système admet un unique état d'équilibre.

À présent, nous allons écrire un script Python appliquant la méthode de Newton à la fonction  $h$  définie précédemment.  $h$  est un polynôme de degré 3 et admet 3 racines réelles distinctes. Une racine évidente de  $h$  est 0. Nous allons déterminer avec la méthode de Newton les deux autres racines. Dans un premier temps nous allons afficher le graphe de  $h$  afin de choisir des valeurs  $x_{init}$  nous permettant de trouver les racines. Le code utilisé est présenté ci-dessous.

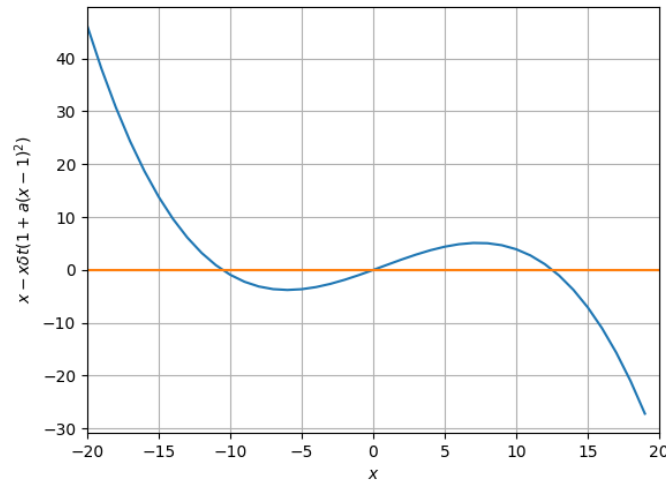


Figure 8 –  $h : X \mapsto X - X\delta t(1 + a(X - 1)^2)$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a=7.5
dt=10**-3

def h(x):
    return x-x*dt*(1+a*(x-1)**2)

x=[i for i in range(-20,20)]
y=[h(k) for k in x]

plt.plot(x,y)
plt.plot([-20,20],[0,0])
plt.grid()
plt.xlim(-20,20)
plt.xlabel(r'$x$')
plt.ylabel(r'$x-x\delta t(1+a(x-1)^2)$')
plt.show()
```

On vérifie bien de  $h$  possède 3 racines. Pour utiliser l'algorithme de Newton, on choisi deux valeurs distinctes de  $x_{init}$  pour trouver les deux autres zéros de  $h$ . On prendra  $x_{init_1} = -12$   $x_{init_2} = 10$ . Finalement on applique la méthode de Newton avec ces deux valeurs initiales. Le code utilisé est présenté ci-dessous.

```

import numpy as np

dt=10**-3
a=7.5
xinit1=-12
xinit2=10

def h(x):
    return x-dt*(1+a*(x-1)**2)*x

def hprime(x):
    return 1-dt-dt*a*(3*(x**2)-4*x+1)

def newton(f, fprime, u0, eps):
    u = u0
    v = u - f(u) / fprime(u)
    while abs(u-v) > eps:
        u = v
        v = u - f(u) / fprime(u)
    return v

print(newton(h,hprime,xinit1,10**-4))  #résultat : -10.541
print(newton(h,hprime,xinit2,10**-4))  #résultat : 12.541

```

Finalement,

Les zéros de la fonction  $h$  sont :  $x_1 = 0$   $x_2 = -10,541$   $x_3 = 12,541$

Pour continuer et terminer notre étude sur les points d'équilibres nous allons tracer le graphique de la fonction  $f$  pour différentes valeurs de  $p$ . Pour ce faire on utilise le script Python ci-dessous.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_p(x):
    return 7.5*(x**3)-15*(x**2)+8.5*x-p

abs=np.linspace(-100,100,num=10000)

p=9/10
ordp1=[f_p(w) for w in abs]

p=6/5
ordp2=[f_p(w) for w in abs]

p=3/2
ordp3=[f_p(w) for w in abs]

plt.plot(abs,ordp1,label=r'$p=9/10$')
plt.plot(abs,ordp2,label=r'$p=6/5$')
plt.plot(abs,ordp3,label=r'$p=3/2$')
plt.legend(loc='lower right')
plt.xlabel(r'$y$')
plt.ylabel(r'$ay^{\{3\}}-2ay^{\{2\}}+(a+1)y-p$')
plt.plot([-50,50],[0,0])
plt.grid()
plt.xlim(-0.5,2)
plt.ylim(-1/10,1/10)
plt.show()
```

On obtient le graphe suivant ci-dessous.

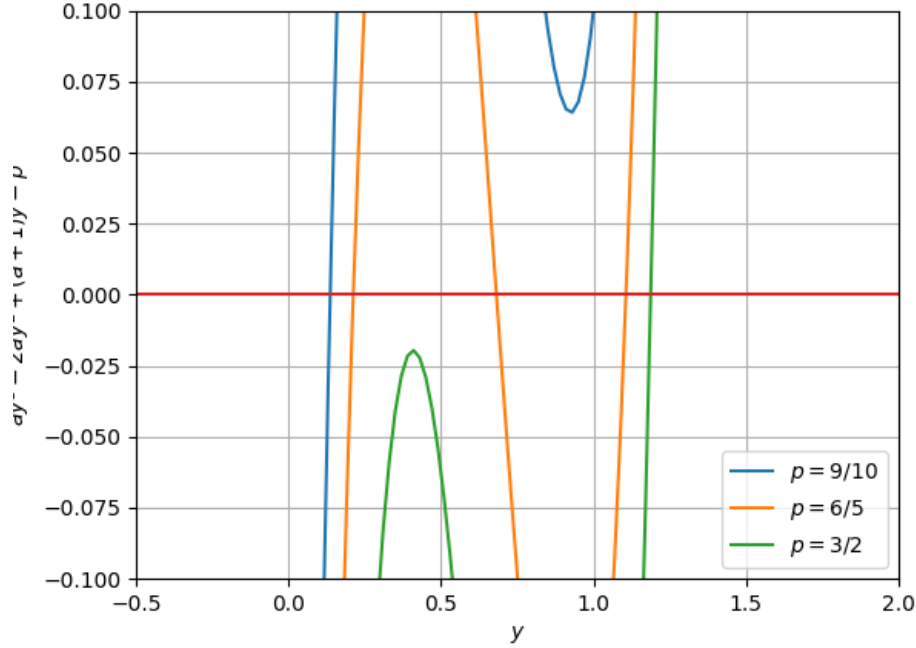


Figure 9 –  $ay^3 - 2ay^2 + (a+1)y - p$  pour  $a = 7.5$  et  $p = \frac{9}{10}$   $p = \frac{6}{5}$   $p = \frac{3}{2}$

On vérifie bien les résultats énoncés précédemment comportant sur le nombre d'états d'équilibres pour chacune des valeurs de  $p$ . A l'aide de cette illustration, on peut choisir au mieux les valeurs de départ pour appliquer Newton. On aura donc accès aux points d'équilibres pour chaque valeur de  $p$ .

Déterminons ces états d'équilibres, pour cela appliquons l'algorithme de Newton. Le code est présent ci-dessous.

1. Pour  $p = \frac{9}{10}$  on sait qu'il existe un unique point d'équilibre. On applique Newton pour la valeur  $x_{init} = 0$  et on obtient que  $y \simeq 0.137$ .
2. Pour  $p = \frac{6}{5}$  il existe trois points d'équilibres. On prend 3 valeurs de  $x_{init}$  différentes, chacune assez proche des différentes solutions selon le graphique. Ainsi, on utilise  $x_{init_1} = 0$   $x_{init_2} = 0.65$   $x_{init_3} = 1$ . On obtient trois racines :  $y_1 \simeq 0.212$   $y_2 \simeq 0.681$   $y_3 \simeq 1.106$ .
3. Enfin, pour  $p = \frac{3}{2}$  on prend  $x_{init} = 1$  et  $y \simeq 1.187$ .

```
import numpy as np

a=7.5

def f1(x):
    return a*x**3 - 2*a*x**2 +(a+1)*x -9/10

def f2(x):
    return a*x**3 - 2*a*x**2 +(a+1)*x -6/5

def f3(x):
    return a*x**3 - 2*a*x**2 +(a+1)*x -3/2

def fprime(x):
    return 3*a*x**2 - 4*a*x +(a+1)

def newton(f, fprime, u0, eps):
    u = u0
    v = u - f(u) / fprime(u)
    while abs(u-v) >= eps:
        u = v
        v = u - f(u) / fprime(u)
    return v

#pour p=9/10 unique état d'équilibre
print(newton(f1,fprime,0,10**-6)) #xinit=0

#pour p=6/5 trois états d'équilibre
print(newton(f2,fprime,0,10**-6)) #xinit=0
print(newton(f2,fprime,0.65,10**-6)) #xinit=0.65
print(newton(f2,fprime,1,10**-6)) #xinit=1

#pour p=3/2 unique état d'équilibre
print(newton(f3,fprime,1,10**-6)) #xinit=1
```



Pour comprendre ce qu'il se passe on suppose que  $T_e^{[1]} - T_e^{[2]} > 0$ . et on utilisera  $p = \frac{6}{5}$ . On s'intéressera au signe de  $\rho$  dans ce cas.  
Par définition de  $\rho$  :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho^{[1]} - \rho^{[2]} \\ &= \alpha_S(S^{[1]} - S^{[2]}) - \alpha_T(T^{[1]} - T^{[2]}) \\ &= \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})(y_e - x_e) \\ &= \alpha_S(S^{[1]} - S^{[2]}) - \alpha_T(T^{[1]} - T^{[2]}) \\ &= \alpha_T(T_e^{[1]} - T_e^{[2]})(y_e - 1)\end{aligned}$$

Donc le signe de  $\rho$  dépend de  $y_e - 1$  avec  $y_e$  est la solution de  $f(y) = p$ . Ainsi déterminer son signe reviendrait à déterminer le signe de la solution de l'équation  $ay^3 - 2ay^2 + (a+1)y = \frac{6}{5}$  avec  $a = 7.5$ .  
Déterminons d'abord la solution de l'équation  $ay^3 - 2ay^2 + (a+1)y = 0$  d'après ce qui précède l'équation admet deux solutions :

$$\begin{aligned}y_- &\approx 0.408 \quad y_+ \approx 0.924 \\ \implies f(y_-) &\approx 0.964 \quad f(y_+) \approx 1\end{aligned}$$

Finalement,

1. On a  $f' < 0$  sur  $]y_-, y_+[$  alors  $f$  est strictement croissante donc bijective sur  $]y_-, y_+[$ . Or  $p_- < p_+ < p$  donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation  $f(y) = p$  n'admet pas de solution sur  $]y_-, y_+[$ .
2. On a  $f' > 0$  sur  $] - \infty, y_-[ \cup ]y_+, +\infty[$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $] - \infty, y_-[ \cup ]y_+, +\infty[$  d'où  $f$  est bijective sur  $] - \infty, y_-[ \cup ]y_+, +\infty[$  :

—  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$  et  $f(y_-) < \frac{6}{5}$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation  $f(y) = p$  n'admet pas de solution sur  $] - \infty, y_-[$ .

—  $p_+ < p$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $f(y) = p$  admet une solution sur  $]y_+, +\infty[$  et  $f(1) = 1 < p$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires la solution appartient à  $]1, +\infty[$  d'où  $y_e > 1$  et par conséquent  $y_e - 1 > 0$ .

En conclusion, nous avons :

$$\boxed{\rho > 0}$$

Physiquement, cela revient à dire que :

L'eau se déplace de la boîte  $B^{[2]}$  vers la boîte  $B^{[1]}$  en surface et se déplace en sens inverse en profondeur.

Pour approfondir et conclure notre étude sur les états d'équilibres considérons que  $p = \frac{6}{5}$ . On sait que pour cette valeur de  $p$  le système admet trois états d'équilibres. On les notera :

$$X_{e,j} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{e,j} \end{pmatrix} \quad y_{e,1} < y_{e,2} < y_{e,3}.$$

Pour rappel, nous avons montré précédemment que :

$$y_{e,1} = 0.212 \quad y_{e,2} = 0.681 \quad y_{e,3} = 1.106$$

On se place dans le cas où  $j \in \{1, 3\}$  et  $t_r = 10^{-2}$ .

Sur un même graphique, on va représenter l'évolution de la suite  $(y_n)$  définie en (4) pour cinq conditions initiales  $x_0, y_0$  choisies aléatoirement de telle sorte que  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,j}|) \leq \frac{1}{2}$ . Le code utilisé est présenté en annexe. On obtient trois figures, une pour chaque valeur de  $y_{e,j}$ . On ne s'intéresse pas au graphe de la suite  $(x_n)$  étant donné que cette suite converge vers 1 dans tout les cas. On tracera de plus les points d'équilibres  $y_{e,j}$   $j \in \{1, 3\}$ .

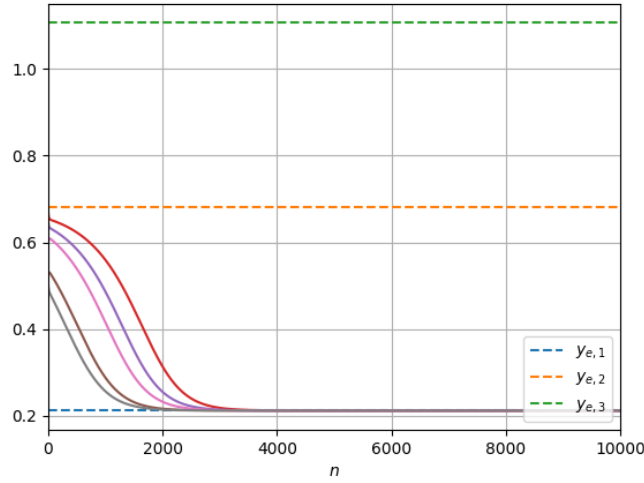


Figure 10 – Évolution de la suite  $(y_n)$  pour  $y_e = 0.212$  avec  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - 0.212|) \leq \frac{1}{2}$   $x_0$  et  $y_0$  pris aléatoirement.

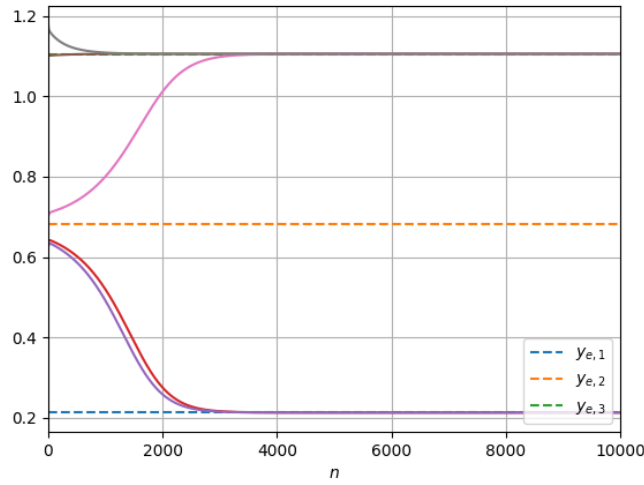


Figure 11 – Évolution de la suite  $(y_n)$  pour  $y_e = 0.681$  avec  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - 0.681|) \leq \frac{1}{2}$   $x_0$  et  $y_0$  pris aléatoirement.

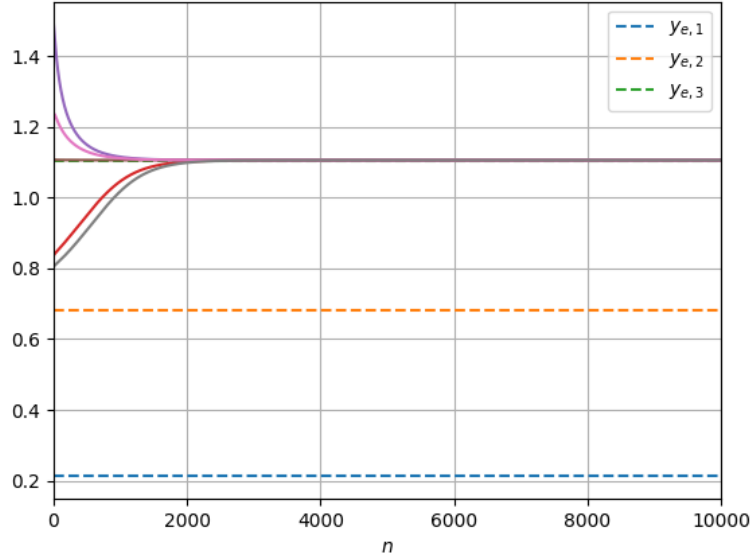


Figure 12 – Évolution de la suite  $(y_n)$  pour  $y_e = 1.106$  avec  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - 1.106|) \leq \frac{1}{2}$   $x_0$  et  $y_0$  pris aléatoirement.

On constate différents cas :

1.  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,1}|) \leq \frac{1}{2}$  alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,1}$$

2.  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,2}|) \leq \frac{1}{2}$  alors, il existe 2 possibilités :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,1} \quad | \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,3}$$

3.  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,3}|) \leq \frac{1}{2}$  alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,3}$$

Ainsi, on dit que :

$$X_{e,j} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{e,j} \end{pmatrix} \quad j \in \{1, 3\}$$

est un point d'équilibre stable.

On se place finalement dans le cas où  $j = 2$  et on fixe  $t_r = 10^{-2}$ . Sur un même graphique, on va représenter l'évolution de la suite  $(y_n)$  définies en (4) pour cinq conditions initiales  $x_0, y_0$  choisies aléatoirement de telle sorte à ce que  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,2}|) \leq \delta$ . Le code utilisé est présenté en annexe. On itère pour  $\delta = 10^{-1}$  et  $\delta = 10^{-2}$ . On obtient les figures suivantes.

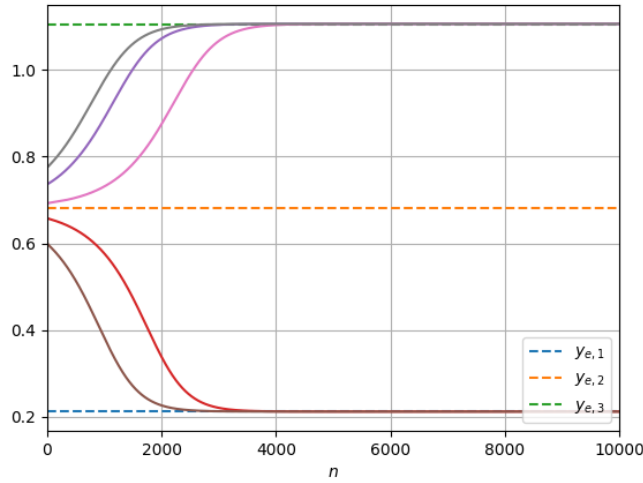


Figure 13 – Évolution de la suite  $(y_n)$  pour  $y_{e,2}$  avec  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,2}|) \leq \delta = 10^{-1}$   $x_0$  et  $y_0$  pris aléatoirement.

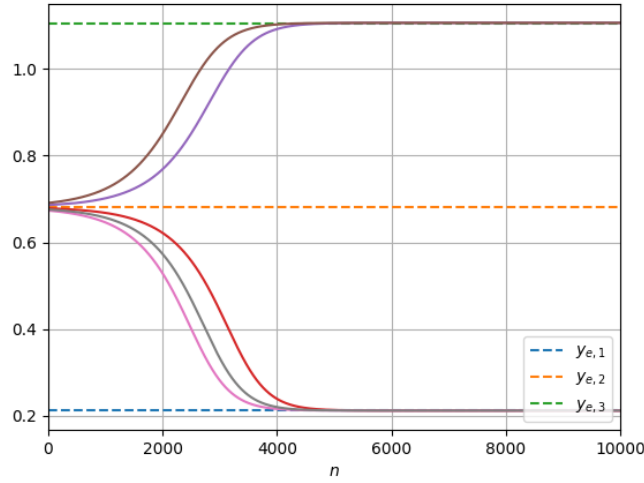


Figure 14 – Évolution de la suite  $(y_n)$  pour  $y_{e,2}$  avec  $\max(|x_0 - 1|, |y_0 - y_{e,2}|) \leq \delta = 10^{-2}$   $x_0$  et  $y_0$  pris aléatoirement.

Dans les deux cas pour les deux valeurs de  $\delta$  on constate deux cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,1} \quad | \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_{e,3}$$

On constate que la suite  $(y_n)$  ne tend jamais vers  $y_{e,2}$ . Cependant, on observe une 'symétrie' par rapport à la droite représentative de  $y_{e,2}$ . La suite a tendance à converger vers un des deux autres points d'équilibres.

Ainsi, on dit que :

$$X_{e,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{e,2} \end{pmatrix} \quad j \in \{1, 3\}$$

est un point d'équilibre instable.

Finalement, cela revient à dire pour notre modèle que lorsque le système est à l'équilibre en  $y_{e,2}$ , cet équilibre sera temporaire. En effet le système aura tendance à changer de point d'équilibre pour atteindre un équilibre stable  $y_{e,1}$  ou  $y_{e,3}$ .

## 6 Conclusion

À travers cette étude nous avons pu modéliser le phénomène de Gulf Stream par le modèle à deux boîtes. Une première approche du modèle a été de considérer les équations de salinité et de température. Par la suite, on a considéré un modèle très réduit en considérant que  $p = 0$ . Cette hypothèse simplificatrice nous donne une idée globale du problème mais n'est pas physiquement représentative du phénomène. Enfin, nous avons étudié les états d'équilibre du système dynamique discret ce qui nous a amené à utiliser une méthode de détermination des zéros d'une fonction : la méthode de Newton. Malgré l'efficacité de cet algorithme il reste certains inconvénients. En effet, il demande le choix d'une valeur initiale qui peut perturber son fonctionnement lorsque cette dernière n'est pas choisie de façon optimale.

## 7 Annexe

Dans cette annexe vous trouverez les différents codes non apparus au fil du rapport. Ils sont mentionnés dans les explications.

Le code ci-dessous concerne l'évolution des suites pour les différentes valeurs de  $x_0$ .

```
dt=10**-3
p=1.5
tr=10**-1
a=1

##X_0=1
Xn1=[1]
Yn1=[-2]
Dn1=[-3]

NO=10000 #on choisit un NO arbitraire
liste=[0]

for i in range(0,NO+1):
    Xn1.append(Xn1[i]-(dt/tr)*(Xn1[i]-1))
    Yn1.append(Yn1[i]+dt*(p-(1+a*(Yn1[i]-Xn1[i])**2)*Yn1[i]))
    liste.append(i)
    Dn1.append(Yn1[i]-Xn1[i])

t_n=[i*dt for i in liste]

##X_0=10
Xn10=[10]
Yn10=[-2]
Dn10=[-12]

for i in range(0,NO+1):
    Xn10.append(Xn10[i]-(dt/tr)*(Xn10[i]-1))
    Yn10.append(Yn10[i]+dt*(p-(1+a*(Yn10[i]-Xn10[i])**2)*Yn10[i]))
    Dn10.append(Yn10[i]-Xn10[i])

t_n=[i*dt for i in liste]
```



```

##X_0=50
Xn50=[50]
Yn50=[-2]
Dn50=[-52]

for i in range(0,N0+1):
    Xn50.append(Xn50[i]-(dt/tr)*(Xn50[i]-1))
    Yn50.append(Yn50[i]+dt*(p-(1+a*(Yn50[i]-Xn50[i])**2)*Yn50[i]))
    Dn50.append(Yn50[i]-Xn50[i])

t_n=[i*dt for i in liste]

plt.plot(t_n,Xn1,label=r"$x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=1\$")
plt.plot(t_n,Yn1,"--",label=r"$y_{n} \ ;|\ ; x_{0}=1\$")
plt.plot(t_n,Dn1,"--",label=r"$y_{n}-x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=1\$")

plt.plot(t_n,Xn10,label=r"$x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=10\$")
plt.plot(t_n,Yn10,"--",label=r"$y_{n} \ ;|\ ; x_{0}=10\$")
plt.plot(t_n,Dn10,"--",label=r"$y_{n}-x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=10\$")

plt.plot(t_n,Xn50,label=r"$x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=50\$")
plt.plot(t_n,Yn50,"--",label=r"$y_{n} \ ;|\ ; x_{0}=50\$")
plt.plot(t_n,Dn50,"--",label=r"$y_{n}-x_{n} \ ;|\ ; x_{0}=50\$")

plt.xlim(-0.2,3)
plt.legend(loc="lower right")
plt.xlabel(r'$t_{n}$')
plt.show()

```

Le code ci-dessous permet d'afficher les graphiques de la suite  $y_n$  en générant aléatoirement les conditions initiales  $x_0$  et  $y_0$ .

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as random

ye1=0.212
ye2=0.681    #points d'équilibres
ye3=1.106

dt=10**-3
tr=10**-2    #constantes
p=6/5
a=7.5

n=[i for i in range(0,10001)]    #liste d'abscisse

def generateurCIX0(): ##générateur de condition initiale x0
    X=[]
    while len(X)!=1 :
        x_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(x_0-1)<=1/2:
            X.append(x_0)
    return X

def generateurCIY0(ye): ##générateur de condition initiale y0
    Y=[]
    while len(Y)!=1 :
        y_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(y_0-ye)<=1/2:
            Y.append(y_0)
    return Y

def generateursuite(ye): ##fonction génératrice de suite
    L=[]
    Xn=generateurCIX0()
    Yn=generateurCIY0(ye)
    for i in range (0,10000):
        Xn.append(Xn[i]-(dt/tr)*(Xn[i]-1))
        Yn.append(Yn[i]+dt*(p-(1+a*(Yn[i]-Xn[i])**2)*Yn[i]))
    L=[Xn,Yn]
    return L

```

```
plt.plot([0,10000],[ye1,ye1], '--', label=r'$y_{e,1}$')
plt.plot([0,10000],[ye2,ye2], '--', label=r'$y_{e,2}$')
plt.plot([0,10000],[ye3,ye3], '--', label=r'$y_{e,3}$')

#pour ye1
plt.plot(n,generateursuite(ye1)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye1)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye1)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye1)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye1)[1])
plt.legend(loc='lower right')
plt.grid()
plt.xlabel(r'$n$')
plt.xlim(0,10000)
plt.show()

#pour ye2
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.legend(loc='lower right')
plt.grid()
plt.xlabel(r'$n$')
plt.xlim(0,10000)
plt.show()

#pour ye3
plt.plot(n,generateursuite(ye3)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye3)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye3)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye3)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye3)[1])
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid()
plt.xlabel(r'$n$')
plt.xlim(0,10000)
plt.show()
```

Le code ci-dessous est le même que précédemment, on change uniquement la majoration du maximum avec  $\delta$ . On ne considère que  $y_{e,2}$ .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as random

ye1=0.212
ye2=0.681    #points d'équilibres
ye3=1.106

dt=10**-3
tr=10**-2
p=6/5
a=7.5

delta=10**-1
delta1=10**-2    #on considère 2 valeurs de delta

n=[i for i in range(0,10001)]    #liste d'abscisse

def generateurCIX0():    ##générateur de x_0 pour delta
    X=[]
    while len(X)!=1 :
        x_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(x_0-1)<=delta:
            X.append(x_0)
    return X

def generateurCIY0(ye):    ##générateur de y_0 pour delta
    Y=[]
    while len(Y)!=1 :
        y_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(y_0-ye)<=delta:
            Y.append(y_0)
    return Y
```

```

def generateursuite(ye): ##générateur de suite
    L=[]
    Xn=generateurCIX0()
    Yn=generateurCIY0(ye)
    for i in range (0,10000):
        Xn.append(Xn[i]-(dt/tr)*(Xn[i]-1))
        Yn.append(Yn[i]+dt*(p-(1+a*(Yn[i]-Xn[i])**2)*Yn[i]))
    L=[Xn,Yn]
    return L

plt.plot([0,10000],[ye1,ye1], '--', label=r'$y_{e,1}$')
plt.plot([0,10000],[ye2,ye2], '--', label=r'$y_{e,2}$')
plt.plot([0,10000],[ye3,ye3], '--', label=r'$y_{e,3}$')

#pour ye2 et delta

plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])

plt.grid()
plt.xlabel(r'$n$')
plt.xlim(0,10000)
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()

def generateurCIX0(): ##générateur pour x_0 et delta1
    X=[]
    while len(X)!=1 :
        x_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(x_0-1)<=delta1:
            X.append(x_0)
    return X

```

```

def generateurCIY0(ye):  ##générateur pour y_0 et delta1
    Y=[]
    while len(Y)!=1 :
        y_0=random.uniform(0.5,1.5)
        if abs(y_0-ye)<=delta1:
            Y.append(y_0)
    return Y

def generateursuite(ye):  #générateur de suite
    L=[]
    Xn=generateurCIX0()
    Yn=generateurCIY0(ye)
    for i in range (0,10000):
        Xn.append(Xn[i]-(dt/tr)*(Xn[i]-1))
        Yn.append(Yn[i]+dt*(p-(1+a*(Yn[i]-Xn[i])**2)*Yn[i]))

    L=[Xn,Yn]
    return L

plt.plot([0,10000],[ye1,ye1], '--', label=r'$y_{e,1}$')
plt.plot([0,10000],[ye2,ye2], '--', label=r'$y_{e,2}$')
plt.plot([0,10000],[ye3,ye3], '--', label=r'$y_{e,3}$')

#pour ye2 et delta1

plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])
plt.plot(n,generateursuite(ye2)[1])

plt.grid()
plt.xlabel(r'$n$')
plt.xlim(0,10000)
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()

```

## 8 Références

1. Nils Berglund : Modèles simples du climat 1, image des mathématiques, mai 2020 : <http://images.math.cnrs.fr/Modeles-simples-du-climat-1.html>
2. Nils Berglund : Modèles simples du climat 2, image des mathématiques, mai 2020 : <http://images.math.cnrs.fr/Modeles-simples-du-climat-2.html>