П р и м е р. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$ сходится.

Достаточно показать, что сходится $\int\limits_1^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$, так как

$\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \int\limits_0^{1} e^{-\alpha^2 x^2} dx + \int\limits_1^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$. Сравним положительные функции $e^{-\alpha^2 x^2}$ и $\frac{1}{x^2}$ при достаточно больших значениях x. Согласно правилу Лопиталя

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\alpha^2 x^2}} = 0$, то есть, $e^{-\alpha^2 x^2} < \frac{1}{x^2}$ при больших x. А так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно теореме сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$.

Для неотрицательных на луче $(0,\infty)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ легко показать, что если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = K(\neq 0)$, то несобственные интегралы $\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{\beta}^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, взяв в определении предела $\varepsilon = \frac{K}{2}$, получим, что существует $M>0$ такое, что $f(x)K/2<g(x)< 3f(x)K/2$ при $x>M$. Из первой теоремы сравнения следует теперь, что если $\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ сходится, а значит, сходится и $\frac{3K}{2}\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$, то сходится и $\int\limits_{\beta}^{\infty} g(x)dx$, а если интеграл $\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ расходится, а значит, и расходится и $\frac{K}{2}\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_{\beta}^{\infty} g(x)dx$.

Заменяя в рассуждениях K на $1/K$, а $g(x)$ на $f(x)$, получим выводы относительно сходимости $\int\limits_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ при сходимости или расходимости $\int\limits_{\beta}^{\infty} g(x)dx$.

Для несобственных интегралов 1-го рода от знакопеременных функций имеет смысл понятие **абсолютной сходимости**: если $\int\limits_{\beta}^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$. В этом легко убедиться, рассматривая площади соответствующих криволинейных трапеций.

Возможна и **условная сходимость**: интеграл $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, в то время как интеграл $\int\limits_{\beta}^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится. Для демонстрации примера нам понадобится **специальный признак сходимости несобственного интеграла 1го рода**, который приводится без доказательства: если функция $f(x)$ монотонно убывает к 0 при стремлении x к бесконечности, то интегралы

$$\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\sin mxdx, \int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\cos mxdx$$

сходятся.

П р и м е р. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$. При $\alpha > 1$ данный интеграл сходится абсолютно, так как $|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}| \le \frac{1}{x^{\alpha}}$ и интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится.

Пусть теперь $0 < \alpha \le 1$. Покажем, что $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится. Действительно, $|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}| \ge \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} = \frac{1-\cos 2x}{2x^{\alpha}}$. Интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2x^{\alpha}}dx$ при данных α расходится, а $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}dx$ сходится по специальному признаку. Следовательно, $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится, так как является пределом разности двух функций, у одной из которых предел бесконечен, а у другой конечен.

Очевидно, что интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ сходится по специальному признаку. А значит, сходится условно.