Условие дифференцируемости функции в точке

Условию непрерывности функции $f(x)$в точке a можно дать следующее определение: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(a+\Delta x)-f(a))=0$, где $\Delta x=x-a$ называется приращением аргумента, а $\Delta f=f(x)-f(a)$ называется соответствующим приращением функции. В связи с этим возникает вопрос о сравнении малых величин Δx и Δf при стремлении Δx к нулю.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке a, если существует такая константа A, что $\Delta f=A\Delta x+\alpha$ при достаточно малых значениях Δx, где $\alpha=o(\Delta x)$ – величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Из определения следует, что функция, дифференцируемая в точке, является непрерывной в этой точке. Более того, следует, что величина Δx не может быть величиной большего порядка малости, чем Δf, в противном случае величина A была бы не константой, а бесконечной величиной.

В случае дифференцируемости функции в точке соответствующая константа A имеет свое название: она называется **производной** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $f'(a)$. Из определения также очевидно, что производная определяется с помощью предельного перехода следующим образом:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

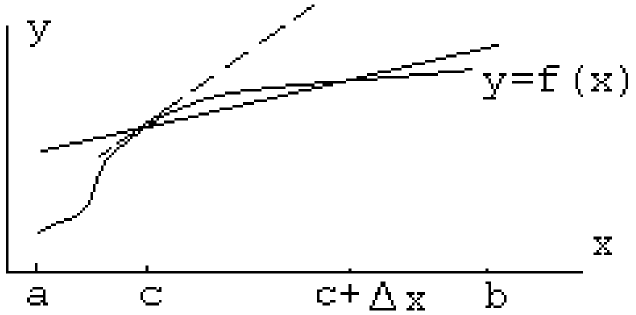
Условие дифференцируемости имеет важные геометрический и физический смыслы.

Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y=f(x),\ x\in[a,b]$. Требуется провести касательную к этой кривой в точке $c\in(a,b)$.

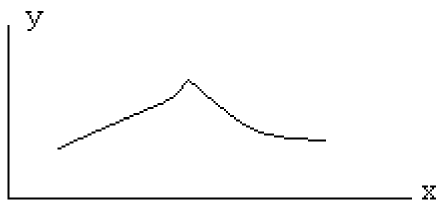
Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c,f(c))$ и $(c+\Delta x,f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x\to 0$.

Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид: $\frac{x-c}{(c+\Delta x)-c}=\frac{y-f(c)}{f(c+\Delta x)-f(c)}$ или $y=f(c)+\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}(x-c)$. Делая предельный переход при $\Delta x\to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k=tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX .



Таким образом, уравнение касательной в точке $(c,f(c))$ имеет вид $y=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)$.

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции. Существование касательной означает, что равны пределы отношения $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0\pm 0$, то есть, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)$. Это значит, что $f(c+\Delta x)-f(c)=f'(c)\Delta x+\Delta x\cdot a$, где $a\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $\Delta x\cdot a=\alpha$ – величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx. Таким образом, для того, чтобы можно было провести касательную к кривой $y=f(x),\ x\in[a,b]$ в точке $(c,\ f(c))$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке c.

Задача о вычислении мгновенной скорости

Предположим, что мы следим за прямолинейным движением точки, пройденный путь которой в зависимости от времени выражается формулой $S(t)$. Чтобы вычислить среднюю скорость движения точки на участке $[t_0, t_0+\Delta t]$, достаточно получить значение $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$. Если теперь устремить Δt к нулю, мы получим, что отрезок выродится в точку, а средняя скорость по отрезку при существовании предела $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ превратится в мгновенную скорость в точке t_0. Таким образом, производная функции $S(t)$, представляющей зависимость пути от времени, представляет мгновенную скорость в соответствующей точке.

Итак**, геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$,
физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Дифференциал

Как было сказано выше, в случае дифференцируемости функции в точке второе слагаемое α в выражении приращения функции $\Delta f = f'(x_0)\Delta x+\alpha$ – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно – в случае, когда $f'(x_0)\neq 0$, – и чем величина $f'\left(x_0\right)\Delta x$. Другими словами, **первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции**. Называют его **дифференциалом функции** $y = f\left(x\right)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0) = f'\left(x_0\right)\Delta x.$ В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df = f'\left(x\right)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'\left(x\right) = \dfrac{df}{dx}$.
Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 1.

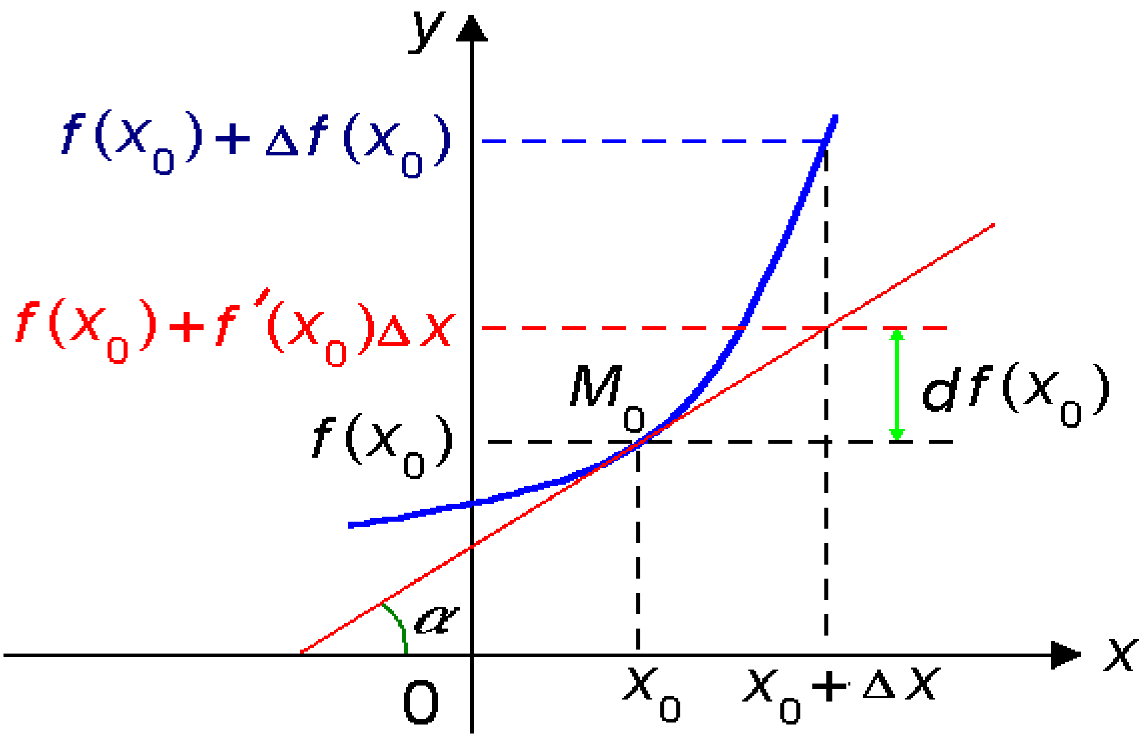


Рис. 1

Примеры получения производных

Применяя замечательные пределы и их следствия, получим

1. $$\sin' a = \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a;$$

2. $$\cos' a = \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$
$$=-\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}=-\sin a;$$

3. $$(e^x)'_{|a}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a\lim_{x-a\to 0}\frac{(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a;$$

4. $\ln' a = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\frac{x}{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a} =$

$= \dfrac{1}{a}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{\frac{x-a}{a}} = \dfrac{1}{a};$

5. $(x^\alpha)'_{|a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a} = a^\alpha\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\frac{x}{a})^\alpha - 1}{x-a} = a^\alpha\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\frac{x-a}{a}+1)^\alpha - 1}{x-a} =$

$= a^{\alpha-1}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{(\frac{x-a}{a}+1)^\alpha - 1}{\frac{x-a}{a}} = \alpha a^{\alpha-1}.$

Производные и арифметические операции над функциями

Из условия дифференцируемости и из свойств пределов функций следуют свойства производных.

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)+g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, $k\in \mathrm{R}$. Тогда функция $k\cdot f(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $g(a)\neq 0$. Тогда функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке a, причем $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Покажем, как доказывается свойство 3. Обозначим $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta h &= f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a) = (f(x)-f(a))\cdot g(x) + f(a)\cdot(g(x)-g(a)) =\\ &= \Delta f\cdot g(x) + \Delta g\cdot f(a) = (f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot g(x) + (g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a) =\\ &= (f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot(g(a)+\Delta g) + (g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a),\end{aligned}$$

где α и β – величины более высокого порядка малости, чем Δx. Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при Δx, получим следующее представление:

$$\Delta h = (f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)) \cdot \Delta x + f'(a) \cdot \Delta x \cdot \Delta g + \alpha \cdot g(a) + \alpha \cdot \Delta g + \beta \cdot f(a) =$$
$$= (f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)) \cdot \Delta x + \gamma,$$

где γ – величина более высокого порядка малости, чем Δx. В соответствии с условием дифференцируемости и выражением производной свойство 3 доказано.

Упражнение. В качестве приложения свойства 4 докажите равенства:
$\mathrm{tg}' a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$, $\mathrm{ctg}' a = -\dfrac{1}{\sin^2 a}$.