Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

- $x \mathbin{\&^*} y = \overline{\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}} = x \vee y$.
- $x +^* y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \leftrightarrow y$.
- $x \mid^* y = \overline{\overline{x} \mid \overline{y}} = x \downarrow y$.
- $0^* = 1$.
- Отметим, что $(f^*)^* = f$.

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$, то
$h^*(x_1,\dots,x_n) = f^*(g_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m^*(x_1,\dots,x_n))$.

Доказательство.

$$f^*(g_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m^*(x_1,\dots,x_n)) =$$
$$= f^*\left(\overline{g_1(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})},\dots,\overline{g_m(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}\right) =$$
$$= \overline{f\left(\overline{\overline{g_1(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}},\dots,\overline{\overline{g_m(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}}\right)} =$$
$$= \overline{f\left(g_1(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}),\dots,g_m(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})\right)} = \overline{h(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})} =$$
$$= h^*(x_1,\dots,x_n).$$

Самодвойственные функции

- Функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$.
- Функции $f(x) = x$ и $g(x) = \overline{x}$ самодвойственны.
- Функция $d(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ самодвойственна.

Суперпозиция самодвойственных функций

Теорема. Если
$h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$, то
$h^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(g_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m^*(x_1,\ldots,x_n))$.

Следствие. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — самодвойственные функции, то функция

$$h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$$

также является самодвойственной.

Следствие. Класс $\mathcal{S}$ (самодвойственных функций) замкнутый.

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1+x$, $x+y$ — линейные функции.
xy, $x+y+xy$, $1+x+xy+xyz$ — не линейные функции.

Суперпозиция линейных функций

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — линейные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является линейной.

Следствие. Класс $\mathcal{L}$ (линейных функций) замкнутый. При этом $\mathcal{L} = [1, +]$.

Доказательство теоремы

Пусть даны линейные функции.

$$f(y_1, \dots, y_m) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k y_k,$$

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i$$

для $1 \leq k \leq m$. Тогда

$$h(x_1, \dots, x_n) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k (a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i) =$$

$$= (b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k a_k^0) + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} b^k a_k^i) x_i$$

—снова линейная функция.

Класс $\mathcal{T}_0$

Определение. $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{T}_0$ функции, то $h \in \mathcal{T}_0$, где

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Следствие. Класс $\mathcal{T}_0$ замкнут. При этом $\mathcal{T}_0 = [\&, +]$.

Класс $\mathcal{T}_1$

Определение. $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$.