Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$

  называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

  для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.
- Если K присутствует в некоторой ДНФ функции f, то K является импликантом f.
- Наоборот, если K является импликантом f, то $f = f \vee K$.
- Если K_1 и K_2 — конъюнкты и $K = K_1 \,\&\, K_2 \neq 0$, то $K = K_1 \,\&\, K_2$ – импликант для K_1 и для K_2.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \mathbin{\&} g$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{p} K_i$ и $g = \bigvee_{j=1}^{q} L_j$ — сокращенные ДНФ для функций f и g соответственно. Тогда

$$(\bigvee_{i=1}^{p} K_i) \mathbin{\&} (\bigvee_{j=1}^{q} L_j) = \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \mathbin{\&} L_j$$

является ДНФ для $f \mathbin{\&} g$.
Пусть M – простой импликант функции $f \mathbin{\&} g$. Тогда он является импликантом как f, так и g. Следовательно, существуют простые импликанты K_{i_0} функции f и L_{j_0} функции g такие, что M — импликант для K_{i_0} и L_{j_0}.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта $K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$, входящего в ДНФ функции $f \,\&\, g$. Поскольку, M — простой импликант функции $f \,\&\, g$, то $M = K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$ и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$. Следовательно, он импликант функции $f \,\&\, g$. Допустим, что M — не простой импликант функции, тогда существует простой импликант M' такой, что M — является импликантом для M'. По доказанному выше, M' – входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$, следовательно, M поглощается M'. Таким образом, в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$ после поглощения входят лишь простые импликанты функции $f \,\&\, g$.

Метод Нельсона нахождения сокращенной ДНФ

Можно заметить, что ДНФ вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_k^{\sigma_k}$ является сокращенной ДНФ (Почему?).

Метод Нельсона нахождения сокращенной ДНФ

Можно заметить, что ДНФ вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_k^{\sigma_k}$ является сокращенной ДНФ (Почему?).

Метод Нельсона состоит в раскрытии всех скобок в КНФ (последовательно или всех сразу) с удалением получающихся конъюнктов по закону поглощения $K_1K_2 \vee K_1 = K_1$.

Тупиковая ДНФ

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант f. ДНФ вида $f = \bigvee\limits_{K \in \mathcal{S}} K$, где $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, называется тупиковой ДНФ, если для всех $S' \subsetneq S$ имеем $f \neq \bigvee\limits_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Теорема. Минимальная ДНФ является тупиковой.
Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{K \in S} K$ — минимальная ДНФ для f. Ясно, что вес $\bigvee\limits_{K \in \mathcal{S}'} K$ будет еще меньше при $S' \subsetneq S$. Поэтому, $f \neq \bigvee\limits_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

Сокращенная ДНФ для f:

$$f(x, y, x) = x \;\&\; y \;\&\; \overline{z} \vee \overline{x} \;\&\; z \vee \overline{y} \;\&\; z$$

является тупиковой и, следовательно, минимальной.

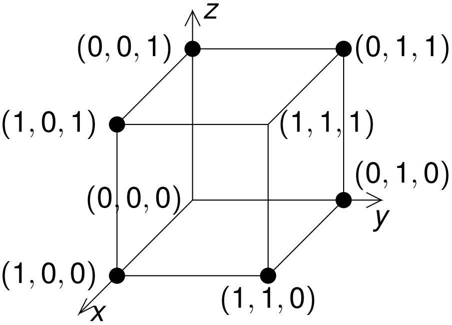
Нахождение минимальной ДНФ

1. Строим сокращенную ДНФ.
2. Последовательно удаляем лишние конъюнкты из сокращенной ДНФ, находим все тупиковые ДНФ.
3. Находим минимальную ДНФ, выбирая тупиковую ДНФ с наименьшим весом.

Булевы функции как подмножества $\mathbb{R}^n$

- $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ и $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Отождествим функцию $f : B^n \to B$ с множеством

$$N_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$



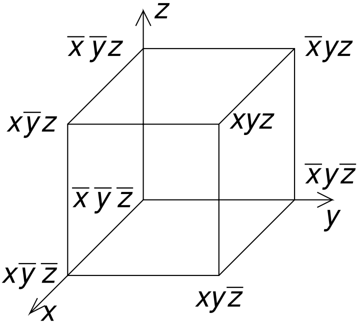
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \ldots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Полные конъюнкты (0 – мерные грани) — вершины:



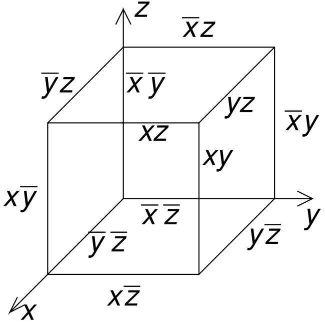
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n - k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n - 1$ (1 – мерные грани) — ребра:



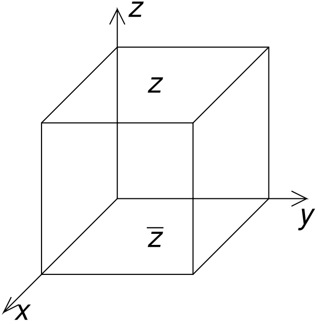
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \ldots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n - k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n - 2$ (2 – мерные грани) — грани:



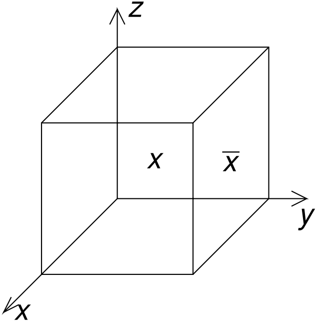
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n-2$ (2 – мерные грани) — грани:



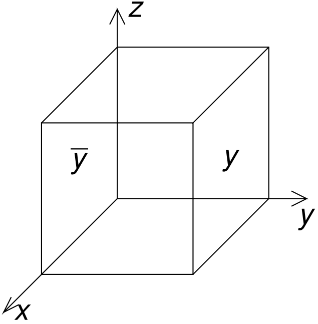
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

  которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n-2$ (2 – мерные грани) — грани:



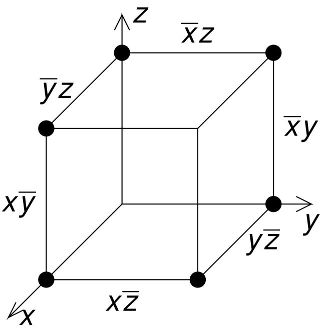
Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$
- Если $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ для любого i $(1 \le i \le m)$ и $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{m} N_{K_i}$
- Если K — импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$
- Если K — простой импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$ и для любой грани $N_{K'}$: $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f \Rightarrow N_K = N_{K'}$ (такая грань называется максимальной гранью)
- Если N_K — максимальная грань, то K — простой импликант

Метод получения сокращенной ДНФ

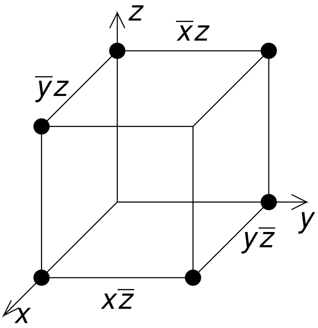
1. Выписываем все грани, содержащиеся в f.
2. Выписываем все ребра, содержащиеся в f, но не содержащиеся в 1.
3. Выписываем все вершины, содержащиеся в f, но не содержащиеся в 1 и 2.

Пример построения сокращенной ДНФ



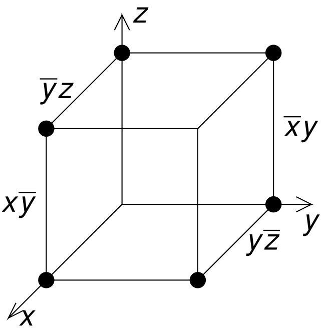
$$x\overline{z} \vee x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z$$

Тупиковая ДНФ № 1



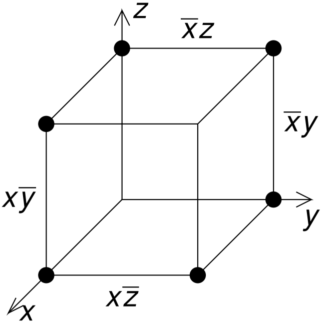
$x\overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z$

Тупиковая ДНФ № 2



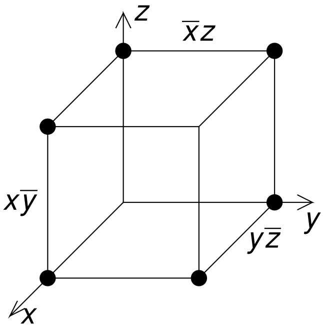
$x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{y}z$

Тупиковая ДНФ № 3



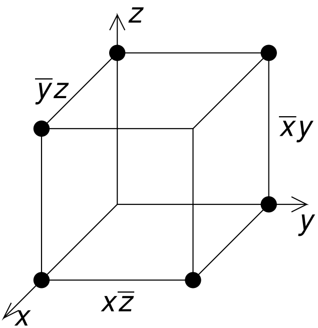
$x\overline{z} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z$

Тупиковая ДНФ № 4



$x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z$

Тупиковая ДНФ № 5



$x\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{y}z$