Литералы

- Литерал — любая переменная x или ее отрицание $\overline{x}$.
- $x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$
- $\sigma^\sigma = 1$ и $\sigma^{\overline{\sigma}} = 0$ для всех $\sigma \in B$.
- Таким образом, $x^\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.
- А также, $x^\sigma = 0$ тогда и только тогда, когда $x \neq \sigma$, то есть $x = \overline{\sigma}$.

Элементарные конъюнкты

- Элементарным конъюнктом называется конъюнкция литералов
$$x_{i_1}^{\sigma_1} \mathbin{\&} x_{i_2}^{\sigma_2} \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_{i_k}^{\sigma_k},$$
в который каждая переменная входит не более одного раза.
- Примеры — $x_2 \mathbin{\&} \overline{x_4}$, $\overline{x_1} \mathbin{\&} x_2 \mathbin{\&} x_3$.
- Элементарный конъюнкт называется полным, если он содержит все рассматриваемые переменные.

Элементарные дизъюнкты

- Элементарным дизъюнктом называется дизъюнкция литералов
$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_k}^{\sigma_k},$$
в который каждая переменная входит не более одного раза.
- Примеры — $x_2 \vee \overline{x_4}$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$.
- Элементарный дизъюнкт называется полным, если он содержит все рассматриваемые переменные.

Дизъюнктивные нормальные формы

- Дизъюнкция элементарных конъюнктов называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).
- Пример — $x_2 \,\&\, \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \,\&\, x_2 \,\&\, x_3$.
- Дизъюнкция полных элементарных конъюнктов называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).

Конъюнктивные нормальные формы

- Конъюнкция нескольких элементарных дизъюнктов называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).
- Пример — $(x_2 \vee \overline{x_4})\,\&\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$.
- Конъюнкция нескольких полных элементарных дизъюнктов называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ).

Существование СДНФ

Теорема. Для любой булевой функции $f : B^n \to B$ имеет место

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in I} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \dots \,\&\, x_n^{\sigma_n},$$

где $I = \{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n \mid f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1\}$.
Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Тогда при $\sigma_1 = x_1, \sigma_2 = x_2, \dots, \sigma_n = x_n$ имеем

$$x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \dots \,\&\, x_n^{\sigma_n} = 1 \,\&\, 1 \,\&\, \dots \,\&\, 1 = 1.$$

Поэтому правая часть (п.ч.) равна 1.

Существование СДНФ

Теорема. Для любой булевой функции $f : B^n \to B$ имеет место

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in I} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n^{\sigma_n},$$

где $I = \{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n \mid f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1\}$.

Доказательство (продолжение). Пусть п.ч. равна 1. Тогда для некоторого $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n$, такого, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, имеем

$$x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n^{\sigma_n} = 1.$$

Значит для каждого $i = \overline{1, n}$ значение $x_i^{\sigma_i} = 1$, а это возможно только при $\sigma_i = x_i$. Таким образом, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Существование СКНФ

Теорема. Для любой булевой функции $f : B^n \to B$ имеет место

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in J} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

где $J = \{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n \mid f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0\}$.
Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Тогда при $\sigma_1 = x_1, \sigma_2 = x_2, \ldots, \sigma_n = x_n$ имеем

$$x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0.$$

Поэтому правая часть (п.ч.) равна 0.

Существование СКНФ

Теорема. Для любой булевой функции $f : B^n \to B$ имеет место

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in J} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

где $J = \{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n \mid f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0\}$.
Доказательство (продолжение). Пусть п.ч. равна 0. Тогда для некоторого $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n$, такого, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, имеем

$$x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} = 0.$$

Значит для каждого $i = \overline{1, n}$ значение $x_i^{\overline{\sigma_i}} = 0$, а это возможно только при $\sigma_i = x_i$. Таким образом, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Единственность СДНФ и СКНФ

Теорема. Для любой булевой функции $f : B^n \to B$ существует одна СДНФ и одна СКНФ с точностью до перестановок в конъюнкциях и дизъюнкциях.

Доказательство. С точностью до перестановок существует ровно 2^n полных элементарных конъюнктов (диъюнктов). Поэтому с точностью до перестановок существует ровно 2^{2^n} различных СДНФ (СКНФ). Но всего имеется ровно столько же 2^{2^n} булевых функций $f : B^n \to B$, причем у каждой существует по крайней мере одна СДНФ (СКНФ). Значит у каждой функции имеется ровно одна СДНФ (СКНФ).