Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Приложения производной функции

Правило Лопиталя

(Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a и имеет место одна из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство (для неопределенности $\frac{0}{0}$). Поскольку $f(a) = g(a) = 0$, (иначе не будет указанной неопределенности), из теоремы Коши имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь использовалось, что c находится между a и x, следовательно, при $x\to a$ и $c\to a$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x} = \frac{1}{4}$.

Раньше это пример решался с помощью тождественного преобразования

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$ (первый замечательный предел).

Теорема о возрастании (убывании) функции $y=f(x)$ на интервале

Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на этом отрезке. Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

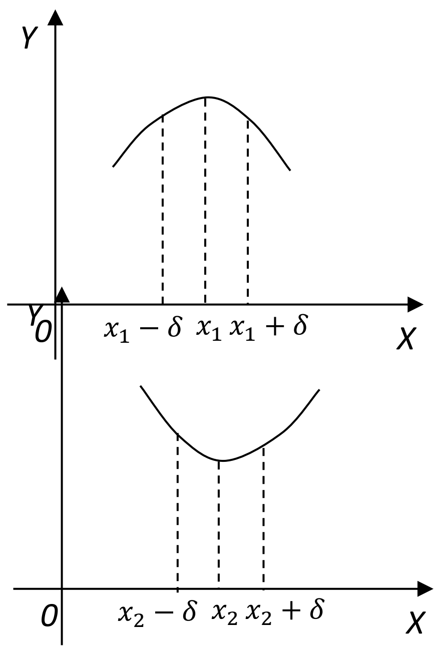
Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для $a<x<b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$ при $x\neq x_1$.

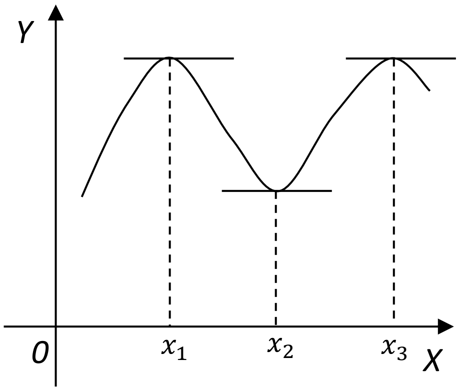
Определение 2. Функция $y=f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x)>f(x_2)$ при $x\neq x_2$.

Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

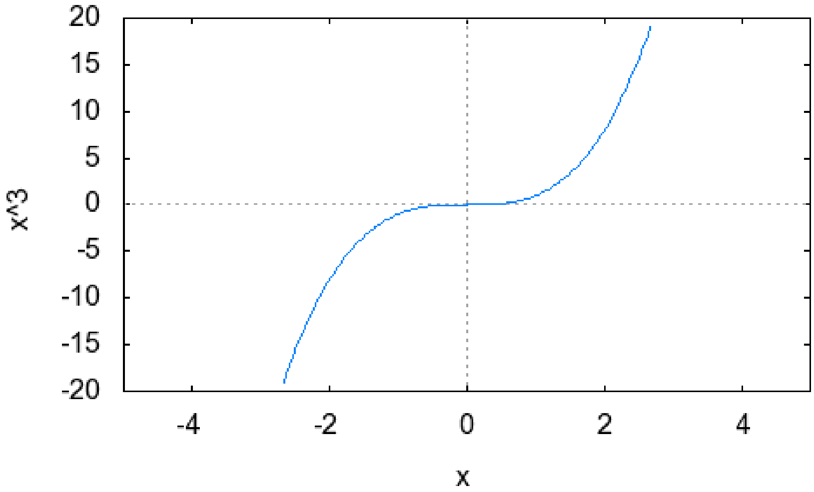


Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть точка c – точка максимума, тогда $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}<0$ при $\Delta x>0$ и $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0$ при $\Delta x<0$. Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то есть $f'(c)=0$.



Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 о достаточном условии существования максимума и минимума функции.
Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.

Теорема 2 о достаточном условии существования максимума и минимума функции. Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.
Доказательство.
Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0)=0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

Пример 1. $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

Пример 2. $y=\cos^2 x$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=-\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\frac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k)=-2\cos \pi k$, поэтому $x_k=\frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример.

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[1;4]$.

Находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0$, получаем две точки, одна из которых $x=0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$.

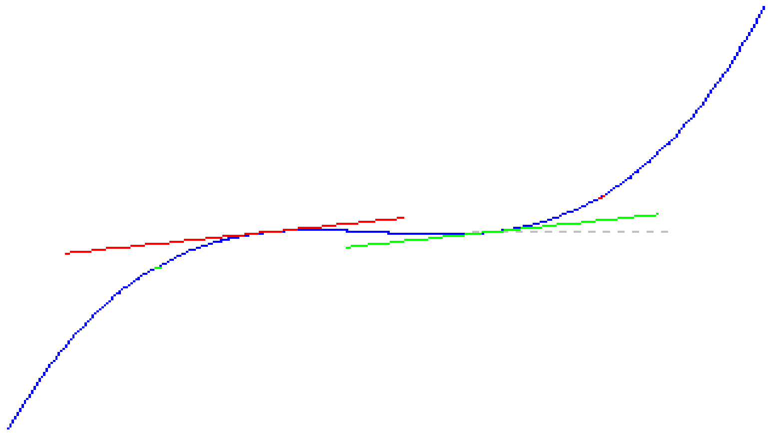
Определяем в этих точках значения функции $y_1=-1$, $y_2=-3$, $y_3=17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x=2$, наибольшее (17) при $x=3$.

Выпуклость и вогнутость кривой

Определение 1. Кривая называется **выпуклой** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится **выше** графика самой функции.

Определение 2. Кривая называется **вогнутой** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится **ниже** графика самой функции.



Возникает вопрос: как найти точки выпуклости и вогнутости кривой?

Теорема об условии выпуклости (вогнутости) кривой в точке.

Если для кривой, задаваемой уравнением $y=f(x)$, справедливо $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), то кривая в точке x_0 выпукла (вогнута).

Доказательство. Уравнение касательной к кривой в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Рассмотрим представление заданной функции в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2).$$

В окрестности точки x_0 (то есть при малых по модулю значениях $(x-x_0)$ знак разности $Y-f(x)$ противоположен знаку $f''(x_0)$. Следовательно, если $f''(x_0)<0$ знак $Y-f(x)$ положителен, и касательная выше кривой, если $f''(x_0)>0$ знак $Y-f(x)$ отрицателен, и касательная ниже кривой.

В случае, если при переходе с одной стороны от точки x_0 на другую сторону знак разности $Y-f(x)$ меняет знак, такая точка называется **точкой перегиба**.

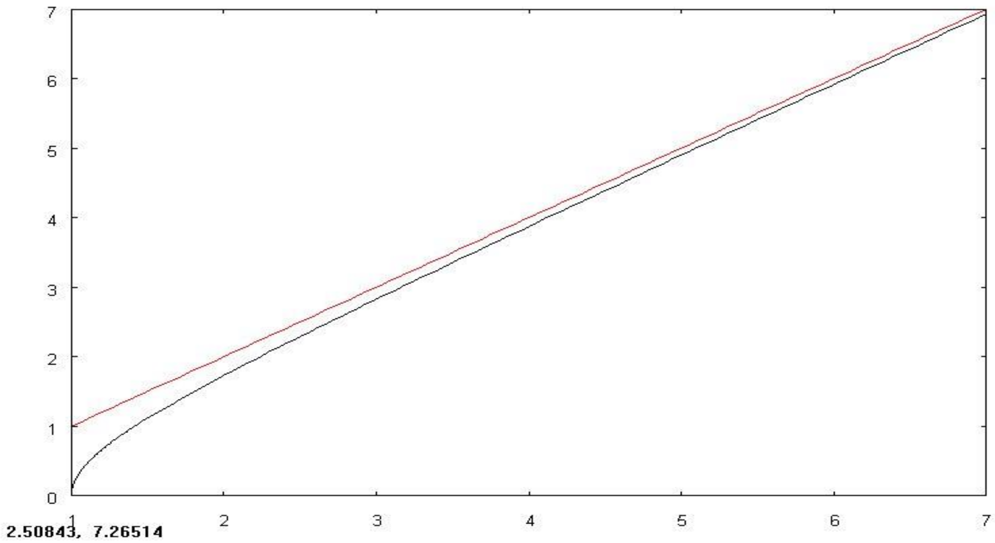
В случае непрерывности второй производной в точке перегиба она обращается в ноль в этой точке.

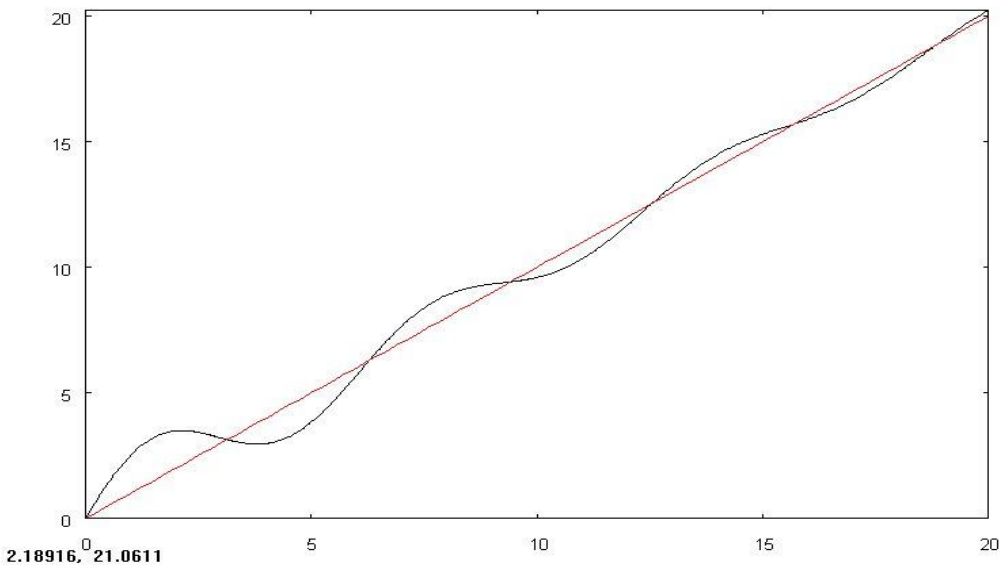
Упражнение. Исследовать направление выпуклости графика функции $y=x^3-x$ в точках $x=-1$, $x=1$. Чем для графика является точка $x=0$?

Асимптоты кривой

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

На двух следующих рисунках асимптоты окрашены в красный цвет





Асимптоты бывают **вертикальными**, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда $y \to \pm\infty$, и **наклонными**, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$.

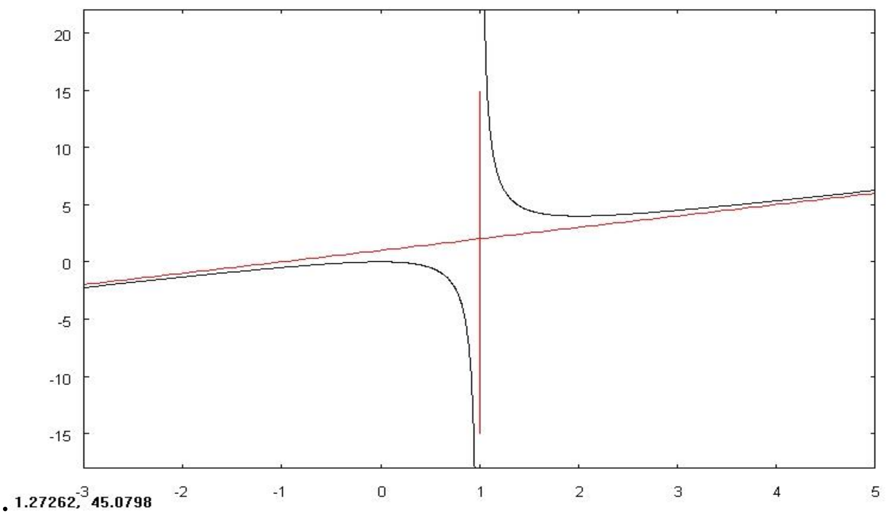
Если x_0 – особая точка, то уравнение вертикальной асимптоты $x = x_0$.

Теорема. Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \infty$, уравнение которой $y = kx + b$, если существуют пределы: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$.

Доказательство. Из определения асимптоты следует $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)-$ бесконечно малая при $x \to \infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[b + \alpha(x) \right] = b$. Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x \to \infty$.

П р и м е р. $y = \frac{x^2}{x-1}$. Очевидно, что $x = 1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Определим $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1$,

$b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{(x-1)} - x \right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1.$ Итак, наклонная асимптота имеет уравнение $y = x + 1$.



Упражнение. Найдите асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.