Интегрирование тригонометрических функций.

1. Интегралы $\int R(\sin x)\cdot\cos^{2k+1}xdx$ (или $\int R(\cos x)\cdot\sin^{2k+1}xdx$), где R – рациональная дробь своего аргумента, а k – целое число, легко берутся с помощью замены $\sin x = t$ (или $\cos x = t$).
2. Интегралы вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, где R – рациональная дробь по каждому из аргументов, берутся заменой $\mathrm{tg}x = t$. Действительно, при этой замене $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, и мы придем к интегралу от рациональной дроби.
3. Интегралы вида $\int R(\mathrm{tg}x)dx$ берутся заменой $\mathrm{tg}x = t$.
4. Интегралы самого общего вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ берутся с помощью **универсальной тригонометрической подстановки** $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Действительно, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, то есть интеграл приводится к интегралу от рациональной дроби.

Интегрирование степеней синусов и косинусов.

1.Выражения вида $\int \dfrac{dx}{\cos^n x}$, $\int \dfrac{dx}{\sin^n x}$ в случае, когда n четное, интегрируются заменой $\mathrm{tg}x = t$ (или $\mathrm{ctg}x = t$), с использованием того, что

$$d(\mathrm{tg}x) = \frac{dx}{\cos^2 x},\quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2 x \text{ (или } d(\mathrm{ctg}x) = -\frac{dx}{\sin^2 x},\quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1+\mathrm{ctg}^2 x\text{)}.$$

Если n нечетное, домножаем числитель на одну степень и делаем замену:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2k+1}x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^{2k+2}x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1\text{-}\sin^2 x)^{k+1}} = \int \frac{dt}{(1\text{-}t^2)^{k+1}}.$$

2.Выражения вида $\int \cos^n xdx, \int \sin^n xdx$ в случае, когда n четное, интегрируются с помощью понижения степени по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Если n нечетное, одна степень берется в дифференциал и делается соответствующая замена:

$$\int \cos^{2k+1}xdx = \int \cos^{2k}xd(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)^k d(\sin x) = \int (1-t^2)^k dt\quad .$$

Тригонометрические подстановки в иррациональностях. Часто от корней под интегралами можно избавляться с помощью тригонометрических подстановок.

1. $\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[x=\sin t\right]=\int\cos^2 t dt=...$

2. $\int\sqrt{x^2-1}dx=\left[x=\dfrac{1}{\sin t}\right]=\int\dfrac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt=...$

3. $\int\sqrt{1+x^2}dx=\left[x=\mathrm{tg}t\right]=\int\dfrac{1}{\cos^3 t}dt=...$

Такие подстановки можно применять к интегралам вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении: $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$ $=\int R(x,\sqrt{a(x^2+2\frac{1}{2a}bx+\frac{1}{4a^2}b^2)+(c-\frac{1}{4a^2}b^2)})dx$ и сделаем замену $x+\dfrac{b}{2a}=z$.

Тогда $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R_1(z,\sqrt{az^2+l})dz$, где $l=(c-\frac{1}{4a^2}b^2)$.

1. $a=-\alpha^2<0$, $l=\beta^2>0$. Тогда $\int R_1(z,\sqrt{az^2+l})dz=\int R_1(z,\beta\sqrt{1-(\frac{\alpha}{\beta})^2z^2})dz$, и заменой $z=\dfrac{\beta}{\alpha}\sin t$ мы приводим исходный интеграл к виду $\int R_2(\sin t,\cos t)dt$.

2. $a=\alpha^2>0$, $l=-\beta^2<0$. Тогда $\int R_1(z,\sqrt{az^2+l})dz=\int R_1(z,\beta\sqrt{(\frac{\alpha}{\beta})^2z^2-1})dz$, и заменой $z=\dfrac{\beta}{\alpha\sin t}$ мы приводим исходный интеграл к виду $\int R_2(\sin t,\cos t)dt$.

3. $a=\alpha^2>0$, $l=\beta^2>0$. Тогда $\int R_1(z,\sqrt{az^2+l})dz=\int R_1(z,\beta\sqrt{(\frac{\alpha}{\beta})^2z^2+1})dz$, и заменой $z=\dfrac{\beta}{\alpha}\mathrm{tg}t$ мы приводим исходный интеграл к виду $\int R_2(\sin t,\cos t)dt$.