Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}.$$
- $x \mathbin{\&^*} y = \overline{\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}} = x \vee y.$

Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

- $x \mathbin{\&^*} y = \overline{\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}} = x \vee y.$
- $x +^* y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \leftrightarrow y.$

Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

- $x \mathbin{\&^*} y = \overline{\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}} = x \vee y.$
- $x +^* y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \leftrightarrow y.$
- $x \mathbin{|^*} y = \overline{\overline{x} \mid \overline{y}} = x \downarrow y.$

Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$
- $x \,\&^*\, y = \overline{\overline{x} \,\&\, \overline{y}} = x \vee y.$
- $x +^* y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \leftrightarrow y.$
- $x \,|^*\, y = \overline{\overline{x} \mid \overline{y}} = x \downarrow y.$
- $0^* = 1.$

Двойственная функция

- Двойственной функцией к функции f называется функция
$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

- $x \mathbin{\&^*} y = \overline{\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y}} = x \vee y$.
- $x +^* y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \leftrightarrow y$.
- $x \mid^* y = \overline{\overline{x} \mid \overline{y}} = x \downarrow y$.
- $0^* = 1$.
- Отметим, что $(f^*)^* = f$.

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$, то
$h^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(g_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m^*(x_1,\ldots,x_n))$.

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

Доказательство.
$f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$, то
$h^*(x_1,\dots,x_n) = f^*(g_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m^*(x_1,\dots,x_n))$.

Доказательство.
$f^*(g_1^*(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m^*(x_1,\dots,x_n)) =$
$= f^*\left(\overline{g_1(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})},\dots,\overline{g_m(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}\right) =$

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n))$.

Доказательство.

$$f^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$= f^* \left(\overline{g_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}, \dots, \overline{g_m(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} \right) =$$

$$\overline{= f \left(\overline{\overline{g_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}}, \dots, \overline{\overline{g_m(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}} \right)} =$$

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

Доказательство.

$$f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= f^*\left(\overline{g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}, \ldots, \overline{g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}\right) =$$
$$= \overline{f\left(\overline{\overline{g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}}, \ldots, \overline{\overline{g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}}\right)} =$$
$$= \overline{f\left(g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})\right)} =$$

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$, то
$h^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(g_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m^*(x_1,\ldots,x_n))$.

Доказательство.

$$f^*(g_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m^*(x_1,\ldots,x_n)) =$$
$$= f^*\left(\overline{g_1(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})},\ldots,\overline{g_m(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}\right) =$$
$$= \overline{f\left(\overline{\overline{g_1(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}},\ldots,\overline{\overline{g_m(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}}\right)} =$$
$$= \overline{f\left(g_1(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}),\ldots,g_m(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})\right)} = \overline{h(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})} =$$

Суперпозиция и двойственность

Теорема. Если
$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

Доказательство.

$$f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$$
$$= f^*\left(\overline{g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}, \ldots, \overline{g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}\right) =$$
$$= \overline{f\left(\overline{\overline{g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}}, \ldots, \overline{\overline{g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}}\right)} =$$
$$= \overline{f\left(g_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, g_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})\right)} = \overline{h(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} =$$
$$= h^*(x_1, \ldots, x_n).$$

Самодвойственные функции

- Функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$.

Самодвойственные функции

- Функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$.
- Функции $f(x) = x$ и $g(x) = \overline{x}$ самодвойственны.

Самодвойственные функции

- Функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$.
- Функции $f(x) = x$ и $g(x) = \overline{x}$ самодвойственны.
- Функция $d(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ самодвойственна.

Суперпозиция самодвойственных функций

Теорема. Если
$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

Суперпозиция самодвойственных функций

Теорема. Если
$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^*(x_1, \ldots, x_n))$.

Следствие. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — самодвойственные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является самодвойственной.

Суперпозиция самодвойственных функций

Теорема. Если
$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$, то
$h^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(g_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_n))$.

Следствие. Если $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ — самодвойственные функции, то функция

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

также является самодвойственной.

Следствие. Класс $\mathcal{S}$ (самодвойственных функций) замкнутый.

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.

0,

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1,

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1 + x$,

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1+x$, $x+y$ — линейные функции.

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1+x$, $x+y$ — линейные функции.
xy,

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1+x$, $x+y$ — линейные функции.
xy, $x+y+xy$,

Линейные функции

Определение. Булева функция называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет степень не более 1, то есть ее многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Примеры.
0, 1, $1+x$, $x+y$ — линейные функции.
xy, $x+y+xy$, $1+x+xy+xyz$ — не линейные функции.

Суперпозиция линейных функций

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — линейные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является линейной.

Суперпозиция линейных функций

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — линейные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является линейной.

Следствие. Класс $\mathcal{L}$ (линейных функций) замкнутый.

Суперпозиция линейных функций

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — линейные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является линейной.

Следствие. Класс $\mathcal{L}$ (линейных функций) замкнутый. При этом $\mathcal{L} = [1, +]$.

Доказательство теоремы

Пусть даны линейные функции.

$$f(y_1, \ldots, y_m) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k y_k,$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i$$

для $1 \le k \le m$.

Доказательство теоремы

Пусть даны линейные функции.

$$f(y_1, \ldots, y_m) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k y_k,$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i$$

для $1 \leq k \leq m$. Тогда

$$h(x_1, \ldots, x_n) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k (a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i) =$$

Доказательство теоремы

Пусть даны линейные функции.

$$f(y_1, \dots, y_m) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k y_k,$$

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^k x_i$$

для $1 \leq k \leq m$. Тогда

$$h(x_1, \dots, x_n) = b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k (a_k^0 + \sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i) =$$

$$= (b^0 + \sum_{k=1}^{m} b^k a_k^0) + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} b^k a_k^i) x_i$$

—снова линейная функция.

Класс $\mathcal{T}_0$

Определение. $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$.

Класс $\mathcal{T}_0$

Определение. $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0,\dots,0) = 0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{T}_0$ функции, то $h \in \mathcal{T}_0$, где

$$h(x_1,\dots,x_n) = f(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)).$$

Класс $\mathcal{T}_0$

Определение. $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{T}_0$ функции, то $h \in \mathcal{T}_0$, где

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Следствие. Класс $\mathcal{T}_0$ замкнут.

Класс $\mathcal{T}_0$

Определение. $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathcal{T}_0$ функции, то $h \in \mathcal{T}_0$, где

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Следствие. Класс $\mathcal{T}_0$ замкнут. При этом $\mathcal{T}_0 = [\&, +]$.

Класс $\mathcal{T}_1$

Определение. $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$.

Класс $\mathcal{T}_1$

Определение. $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$.

Заметим, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0^* = \{f \mid f^* \in \mathcal{T}_0\}$.

Класс $\mathcal{T}_1$

Определение. $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$.

Заметим, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0^* = \{f \mid f^* \in \mathcal{T}_0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in \mathcal{T}_1$ функции, то $h \in \mathcal{T}_1$, где

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Следствие. Класс $\mathcal{T}_1$ замкнут.

Класс $\mathcal{T}_1$

Определение. $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$.

Заметим, что $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0^* = \{f \mid f^* \in \mathcal{T}_0\}$.

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{T}_1$ функции, то $h \in \mathcal{T}_1$, где

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Следствие. Класс $\mathcal{T}_1$ замкнут. При этом
$\mathcal{T}_1 = [\&^*, +^*] = [\vee, \leftrightarrow]$.