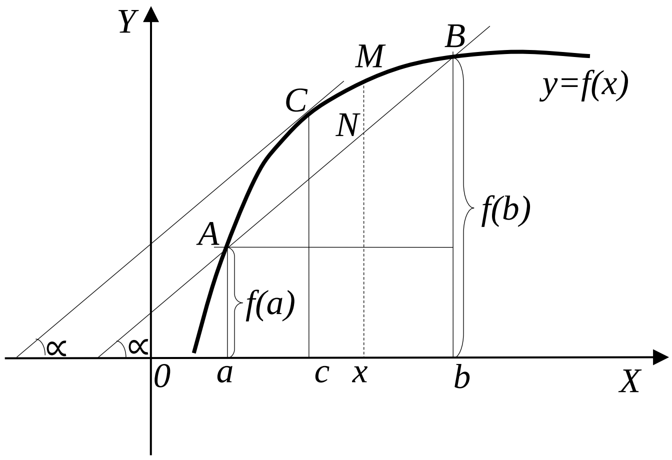
Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и $g(b) \neq g(a)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию
$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]}[g(x) - g(a)].$$
Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, то есть введенная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]} g'(c) = 0$, теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$ является

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то существует такая точка $c \in (a, b)$, для которой справедливо:
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение. Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y'' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение.

$$y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Примеры.

1) Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$ и так далее.

2) Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n).$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков. Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x) = f(x)' dx$, тогда

$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))' dx = (f'(x)dx)' dx$,

dx - бесконечно малое приращение, не зависящее от *x*, поэтому производная от него считается как от постоянной. Т.е.

$d^2 f(x) = (f'(x))' dx^2 = f''(x)\, dx^2$.

Подобным образом получим $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n$.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta$, где β – бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Поэтому для точек x , близких к точке a справедлива формула

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a , где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a .

Пример. $\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{16}} \approx 2 \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} \cdot (-\frac{1}{16})\right] = \frac{63}{32}$. Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $a = 0$, $x = -\frac{1}{16}$. Поэтому $f(a) = 1$, $f'(a) = \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a) = -\frac{1}{16}$.

Возникают вопросы: 1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции? 2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

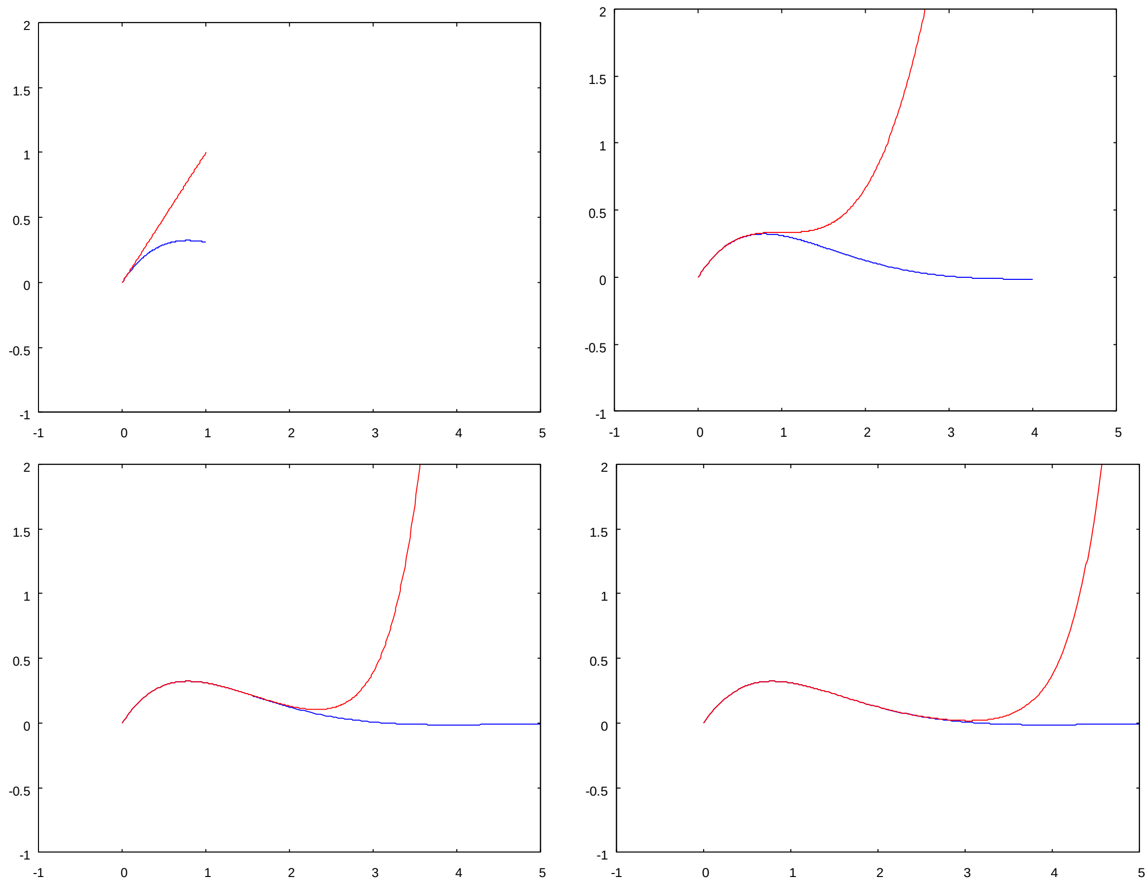
Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет все производные до $n+1$ порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x),$$

где остаточный член $r(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta\in(0,1)$.

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta\in(0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки. Последняя формула является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в окрестности точки $a=0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+$$

$$+\frac{d^4f(a)}{4!}+\dots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x).$$

Для приложений к вычислению пределов используют **локальную** формулу Тейлора, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$

$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена.

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. В свою очередь для оценки величины $e^{\max\{x,0\}}$ можно брать 1 при $x<0$ и 3^x при $x>0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. Так как $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$ и т.д., получим $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$ ….

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, так как $|\sin(x+(2n+1)\frac{\pi}{2})| \le 1$.

Пример 3. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$.

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{IV}(x) = \cos x$,

$f^{V}(x) = -\sin x$, $f^{VI}(x) = -\cos x$.

Очевидно, что

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$,

$f^{IV}(0) = 1$, $f^{V}(0) = 0$, $f^{VI}(0) = -1$.

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$, так как $|\cos(x+(2n+2)\frac{\pi}{2})| \le 1$.

Пример 4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0! = 1)$, имеем $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$. Согласно приведенной формуле остаточного члена имеем $|r_n(x)| = \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$. Поэтому для $x > 0$ получим оценку

$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, но для $x < 0$ использование приведенной формулы остаточного члена не годится. Для таких значений x используют другие формы остаточного члена.

Остаточный член стремится к 0 при $n \to \infty$ только при $|x|<1$.

Пример 5. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=(1+x)^{\alpha},\ \alpha\notin \mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1),$ и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+r_{n}(x).$$

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, приведенная форма остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае оценка следующая: $|r_n(x)|\leq\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$.

Здесь также остаточный член стремится к 0 при $n\to\infty$ только при $|x|<1$.