ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Математическим анализом называют раздел математики, в котором функции изучаются методом пределов.

Для описания математических свойств используют два символа, позволяющих сокращать запись: ∀ (любой, произвольный, все) и ∃ (существует, найдется). Они называются кванторами общности и существования. При построении противоположного высказывания квантор общности ∀ заменяют на квантор существования ∃ и, наоборот, квантор существования — на квантор общности, а последнюю (основную) фразу заменяют на противоположную.

Роль открытия неевклидовой геометрии в создании аксиоматического метода

Сначала небольшой экскурс в историю математики.

До 19 века математика считалась незыблемой. Она развивалась, появлялись новые разделы, понятия и теории, но основа была постоянной. Этой основой являлось гениальное творение Евклида «Начала» (Александрия, 3 в. до н. э.), в котором были собраны все математические знания греков и их предшественников. По «Началам» Евклида обучались многие поколения математиков: Коперник, Галилей, Паскаль, Ньютон, Ломоносов, Лейбниц,.... Да и современные школьные учебники по алгебре и геометрии — это, в значительной мере, адаптированные для современного читателя и известные древним грекам утверждения и доказательства, являющиеся эталоном простоты и логичности. Кроме того, в «Началах» были заложены те идеи, которые были «переоткрыты» и развиты много веков спустя (например, теория иррациональных чисел).

«Начала» состоят из 13 книг, содержание которых можно охарактеризовать следующим образом: 1 условия равенства треугольников, соотношения между углами и сторонами, свойство параллельности прямых и его следствия; 2 – построение квадрата, равновеликого любому многоугольнику; 3 – окружности, их взаимное расположение, углы, вписанные в окружности; 4 – многоугольники, вписанные в окружности и описанные вокруг них; 5 – теория пропорций; 6 - подобные многоугольники; 7, 8, 9 - арифметика в геометрической интерпретации; 10 – основы теории иррациональных величин; 11, 12 – начала стереометрии; 13 – правильные многогранники.

Изложение в «Началах» является дедуктивным, основанным на При изучении каких-либо объектов сначала дается силлогизмах. определение (например, «точка на плоскости – это то, что не имеет длины и ширины»). Определив объект, Евклид излагает постулаты – утверждения, связанные с определенным объектом, не доказуемые в рамках данной теории и принимаемые за истинные. Примером постулата может служить знаменитый «Пятый постулат», связанный со свойством параллельности: «всякий раз, как прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше 180°, эти прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше 180°». Вводятся аксиомы, регламентирующие операции с объектами. Примером аксиомы может быть следующая: «если A = B и B = C, то A = C». Аксиомы имеют более общий характер, чем постулаты, и могут иметь более широкое применение, чем применение для работы с определенным объектом. После того, как введены определения, постулаты и аксиомы, на их основе формулируется и доказывается предложение. Предложение «Началах» В канонический вид, знакомый нам со школы: «дано...., требуется доказать...». Доказательство проводится строго в рамках предложенных постулатов и аксиом.

Схема построения «Начал», считавшаяся идеальной, содержала, тем не менее, недостатки, признававшиеся математиками и философами. В самой основе этой схемы лежат определения, данные с помощью некоторых понятий (например, в определении точки на плоскости, приведенном выше, есть понятия «длина» и «ширина»). Но кто определит сами эти понятия, участвующие в определении? И где граница определений? Сами греческие математики, видимо, считали первоначальные понятия интуитивно очевидными. Кроме того, вставал вопрос о «существовании». Так, еще Аристотель отмечал, что определение еще не влечет существования определяемого объекта.

К началу 19 века накопились вопросы к классической математике. Она уже не казалась бесспорной. Многим казалось, например, что пятый постулат – это не постулат, а утверждение, которое может быть доказано на основе остальных постулатов, аксиом и предложений. Были попытки таких доказательств, но они не были успешными. И появились те, кто смог понять роль этого постулата. Это были Карл Фридрих Гаусс (Германия), Николай Иванович Лобачевский (Казань, Россия) и Янош Бойаи (Венгрия). Именно эти математики считаются авторами неевклидовой геометрии. Каждый из них шел своим путем.

Наш гениальный соотечественник Н.И.Лобачевский (1792-1856) окончил Казанский университет магистром и был оставлен в университете для преподавания. С 1813 г. он работал в университете в

должности адъюнкт-профессора – преподавал и занимался научными исследованиями. Стремясь к строгому построению начал геометрии, Н.И.Лобачевский так же, как и многие его предшественники, усомнился в том, что пятый постулат в «Началах» действительно является постулатом. Отказавшись OT ОПОТЯП постулата, предположения о том, что через точку вне данной прямой проходит только одна прямая, не пересекающаяся с данной, Н.И.Лобачевский попытался доказать это свойство методом «от противного». То есть, предполагая, что через точку вне данной прямой проходит более одной прямой, не пересекающейся с данной, попытался прийти к противоречию постулатами, аксиомами И уже предложениями. Ему не удалось найти этого противоречия. Напротив, он создал стройную теорию, заменяющую классическую геометрию. В этой новой геометрии через точку вне данной прямой проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающихся с данной прямой, а сумма углов треугольника меньше 180° .

чтобы Нужно иметь научную смелость, предложить полностью противоречащую каноническим представлениям. Н.И.Лобачевский не был понят при жизни. В 1826 году он делает в университете доклад о своих результатах, но не находит понимания. Он опубликовал работу с описанием новой геометрии в «Казанском вестнике» в 1829-1830 годах. Предложенная российской Академии наук, его работа получила отрицательный отзыв профессора Остроградского, более того, в одном из санкт-петербургских журналов она была высмеяна анонимным автором. Есть сведения о том, что работа Н.И.Лобачевского оказалась известной Гауссу, который пришел к выводам, подобным выводам Н.И.Лобачевского, и дал высокую оценку его результатам. К сожалению, Гаусс нигде не опубликовал своего мнения об исследованиях российского математика.

Открытие неевклидовой геометрии, тем не менее, постепенно математиков и было оценено по достоинству. Это овладело умами открытие привело, в частности, к выводу, что постулаты Евклида являются на самом деле гипотезами, отказ от которых приводит к новым непротиворечивым теориям. Уже через несколько лет после смерти Н.И.Лобачевского знаменитый немецкий математик Б.Риман, развивший Н.И.Лобачевского идеи И создавший «эллиптическую многие (B отличие от геометрии Лобачевского, выступил с лекцией «О гипотезах, лежащих в «гиперболической»), признавалась геометрии», где правомерность геометрий и говорилось: «Остается решить вопрос, в какой мере и до какой степени эти гипотезы подтверждаются опытом».

Забегая вперед, следует отметить, что геометрия Лобачевского, действительно, подтвердилась опытом. Она применяется в космических расчетах, так как именно гиперболическая геометрия согласуется со специальной теорией относительности Эйнштейна. Кроме этого, гиперболическая геометрия применяется при анализе движения элементарных частиц в «пузырьковых камерах» в ускорителях. Таким образом, если геометрия обычного мира — евклидова геометрия, то в микро- и макромире справедлива геометрия Лобачевского.

Новые идеи, опровергающие интуитивные представления, постепенно увлекли математиков конца 19 в. Стало ясно, что практически вся классическая математика построена на интуитивных понятиях. Даже действительное число, на применении которого построена вся цивилизация (не говоря уже о математике), также интуитивное понятие. Математики увлеклись построением контрпримеров, опровергавших то, что казалось ранее интуитивно очевидным. Были построены, например, кривые, не имеющие касательной ни в одной точке, или проходящие через любую точку квадрата. Геометрическая интуиция была полностью дискредитирована.

Необходимо было привести все в строгий порядок и понять, что есть математическая истина и что есть математическое доказательство. Многие математики работали над новым построением евклидовой геометрии. Большой вклад в эти исследования внес Гильберт, опубликовавший в 1899 году свои «Основания геометрии». В этой работе Гильберт не только систематизировал аксиомы, лежащие в основе евклидовой геометрии, но и исследовал возможности отказа от различных аксиом, обсуждая, к каким новым геометриям приведет такой отказ.

Математики пришли к тому, что геометрические аксиомы являются соглашениями и понятие истины в их отношении не имеет смысла. Да, возможности практического использования утверждений, доказанных на основе применения введенных аксиом, и экспериментальное их подтверждение очень ценны, но их отсутствие не математической истинности доказанных положений. Классические объекты уже не являются единственными объектами математических исследований. Применение моделей и интерпретаций связывает различные разделы математики и делает сам объект не существенным. Считается, будто сам Гильберт говорил, заменить слова «точка», «прямая» и «плоскость» словами «стол», «стул» и «пивная кружка», в геометрии ничего не изменится. Конечно, это остроумный анекдот, но он ярко демонстрирует формализацию математических теорий. Таким образом, математику можно считать

учением об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, изложенных в аксиомах.

Метод интерпретаций позволил свести вопросы о непротиворечивости одних теорий к непротиворечивости других теорий. Так, например, проблема непротиворечивости геометрии сводилась к проблеме непротиворечивости арифметики.

При таком восприятии математической теории соблазнительной представлялась перспектива решить на пути создания единой теории – метаматематики – все вопросы обоснования математики. Однако этим планам не суждено было сбыться: в 30-х годах 20-го века результаты Геделя продемонстрировали, что доказательство непротиворечивости теории средствами, формализуемыми в ней самой, невозможно.

Создать метаматематику не удалось, но аксиоматический метод занял центральное место в современной математике. Он позволил получить фундаментальные результаты в ряде математических наук.

Таким образом, аксиоматический метод, истоки которого находятся в работах древних греков, окончательно сформировался в конце 19 — начале 20 в. и является фундаментом для построения современных математических теорий. Развитие компьютерных наук было бы немыслимым без этого метода.

Основой аксиоматического метода является математическая структура, которая задается на множестве элементов, природа которых не определена. Структура задается в виде некоторых отношений, в которых находятся элементы рассматриваемого множества. Для этих отношений определяются условия, которым отношения удовлетворяют. Эти условия и являются аксиомами вводимой структуры. Построить аксиоматическую теорию - значит, вывести логические следствия непосредственно ИЗ аксиом структуры, отказавшись любых предположений о природе элементов.

Существуют 3 основных типа простых математических структур:

- 1) алгебраические структуры, когда задаются отношения между элементами, определяющие однозначно третий элемент как функцию двух элементов (например, аксиомы сложения двух чисел),
- 2) структуры, определенные отношением порядка (например, отношение «х меньше или равно у»),
- 3) топологические структуры, определяемые понятиями окрестности, предела, непрерывности.

Простые структуры являются фундаментом для создания сложных структур, являющихся комбинациями простых структур.

Мы будем работать с функциями, заданными на подмножествах множества действительных чисел, поэтому необходимо познакомиться с аксиомами действительных чисел.

Аксиоматика действительных чисел

Множеством действительных чисел (R) мы назовем множество, для элементов которого (x, y, z,...) определены две бинарные операции: сложение (+) и умножение (·), а также отношение порядка (\leq), удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. Аксиомы сложения.

- 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ справедливо x + y = y + x.
- 2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ справедливо (x + y) + z = x + (y + z).
- 3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ (нейтральный элемент сложения) такой, что $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо x+0=x.
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R}$ такой, что x + (-x) = 0.

2. Аксиомы умножения.

- 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ справедливо $x \cdot y = y \cdot x$.
- 2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ справедливо $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- 3) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ (нейтральный элемент умножения) такой, что $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо $x \cdot 1 = x$.
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ такой, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

3. Аксиома сложения и умножения.

1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ справедливо $(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

4. Аксиомы порядка.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо $x \le x$.
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $x \neq y$, справедливо одно из двух соотношений: $x \leq y$ или $y \leq x$.
- 3) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le z$, то справедливо соотношение $x \le z$.
- 4) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le x$, то x = y

.

5. Аксиомы порядка, связанные с операциями.

- 1) Если $x \le y$, то для $\forall z \in \mathbb{R}$ справедливо $x + z \le y + z$.
- 2) Если выполняются одновременно соотношения $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

6. Аксиома непрерывности.

Пусть X и Y — подмножества множества R, причем для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$ справедливо $x \le y$. Тогда $\exists z \in R$ такое, что $x \le z$ и $z \le y$ для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$.

Очевидно, что аксиомы сложения и умножения задают алгебраическую структуру, аксиомы порядка задают структуру отношения порядка.

Последняя аксиома кажется лишней в перечне аксиом. Однако именно эта последняя аксиома позволяет ввести иррациональные числа в множество действительных чисел.

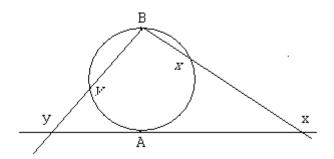
Множество R и его подмножества

Известной еще древним грекам является **интерпретация** множества R в виде бесконечной прямой, на которую нанесена точка, являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа — это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными абсолютным величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы.

Другой моделью множества R является окружность. Характерной особенностью такой интерпретации является то, что аналогом бесконечности является одна из точек окружности. Покажем, что между точками бесконечной прямой и конечной окружности существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее заменять одну модель на другую.

Представим окружность, касающуюся прямой в точку A, которую мы назовем полюсом. Другим полюсом (B) назовем точку, диаметрально противоположную A. Проводя из B лучи, пересекающие окружность и данную прямую, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окружности и прямой. Полюс A будут соответствовать самому себе. Полюс B будет соответствовать бесконечности. При этом понятия + ми

 $-\infty$ будут означать только направление движения к одной и той же точке B, соответствующей бесконечно удаленной точке.

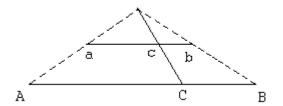


Самым первым подмножеством множества R, освоенным человечеством для счета, является множество натуральных чисел (N). Другим подмножеством R, включающим в себя N, является множество всех целых чисел (Z). Третьим подмножеством, включающим в себя Z, является множество всех рациональных чисел Q, а с множеством иррациональных чисел, дополняющим множество Q до множества R, мы познакомились в этом параграфе.

Мощность множества

Когда речь идет о конечном множестве, одной из его характеристик является число элементов этого множества. Как же с подобной точки зрения характеризовать множества, содержащие бесконечные наборы элементов? Естественным для такой характеристики является сравнение бесконечных множеств между собой или с каким-то бесконечным «эталонным» множеством. Множества считаются равномощными, если существует взаимно однозначное соответствие между всеми элементами одного и другого множеств. Это означает, что существует закон, в соответствии элементу c которым каждому одного соответствует единственный элемент второго множества, разным элементам первого множества соответствуют разные элементы второго множества и все элементы второго множества имеют прообразы в первом множестве.

Примером задания взаимно однозначного соответствия между множествами точек двух отрезков является гомотетия:



Таким образом, «количество» точек верхнего и нижнего отрезков вследствие взаимно однозначного соответствия между точками одинаково, хотя один отрезок длиннее другого. Все дело в том, что точки, как известно, не имеют длины, и присутствие или отсутствие на отрезке отдельных точек не связано с изменением этой меры отрезка.

Взаимно однозначное соответствие между множествами на вещественной оси можно задавать с помощью функций. Так, функция $y = \operatorname{tg} x$ (что в данном случае равносильно $x = \operatorname{arctg} y$) задает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и точками всей вещественной оси. Таким образом, множество точек любого интервала равно множеству точек всей вещественной прямой.

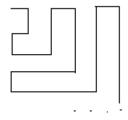
В математике очень важным является понятие **счетного множества**. Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел N. Примером счетного множества является множество Z целых чисел. Действительно, хотя N является подмножеством Z, между точками этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие с помощью следующего правила. Присвоим числу 0 номер 1, числу 1 — номер 2, числу -1 — номер 3, числу 2 — номер 4, числу -2 — номер 5.... Таким образом, целому положительному числу **n** поставим в соответствие натуральное число **2n**; отрицательному целому числу **n** поставим в соответствие натуральное число **2n**+1. Взаимно однозначное отображение установлено, следовательно, Z счетно.

Множество рациональных чисел Q также является счетным. «Сосчитать» его, то есть, установить взаимно однозначное соответствие с множеством N можно при помощи следующей бесконечной таблицы.

В верхней строке таблицы стоят целые числа (р), начиная с 0. В левом крайнем столбце — натуральные числа (q). На пересечении строки и столбца стоит рациональное число р/q.

	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	
q p									
1	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	
2	0	1/2	-1/2	1	-1	3/2	-3/2	2	
3	0	1/3	-1/3	2/3	-2/3	1	-1	4/3	
4	0	1/4	-1/4	1/2	-1/2	3/4	-3/4	1	
5	0	1/5	-1/5	2/5	-2/5	3/5	-3/5	4/5	
				• • •		• • •	••••		

Очевидно, что некоторые числа в таблице повторяются. Но для любого рационального числа найдется место в таблице на пересечении столбца, соответствующего числителю, и строки, соответствующей знаменателю. Начнем двигаться по таблице с левой верхней позиции по такому пути, чтобы пройти все элементы таблицы. Можно, например, двигаться по следующему маршруту.



При этом попадающиеся по пути рациональные числа последовательно нумеруются и запоминаются, так как номера присваиваются только еще не пронумерованным числам. При указанном способе движения числу 0 присваивается номер 1, числу 1 — номер 2, числу 1/2 — номер 3, числу 1/3 — номер 4, числу -1/3 — номер 5,Указанная процедура (бесконечная) обеспечит нумерацию всех рациональных чисел, причем ни одно не будет пронумеровано дважды. Взаимно однозначное соответствие установлено.

Возникает вопрос: можно ли пронумеровать все вещественные числа? Ответ на этот вопрос отрицательный. Покажем, что множество точек любого интервала, лежащего на вещественной оси, несчетно. Поскольку между точками двух интервалов можно установить взаимно однозначное

соответствие, докажем **несчетность множества точек интервала (0,1).** Доказательство проведем методом «от противного».

вида 0,....., где после нуля и запятой стоит бесконечное множество цифр, принимающих значения от 0 до 9. В случае, когда десятичная дробь конечная, все цифры, начиная с некоторой, будут нулями. Предположим, что мы смогли присвоить номера всем точкам интервала или, что то же самое, всем десятичным дробям указанного вида. Следовательно, мы можем расположить все такие числа последовательно, в соответствии с нумерацией:

- 1) $0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}....$
- 2) $0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}....$
- 3) $0, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}...$

......

n) $0, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}....$

......

Здесь все $a_{n,k}$, $n,k \in \mathbb{N}$ — цифры, принимающие значения 0,1,2,3,4,5,6,7,8 и 9.

А теперь построим новую десятичную дробь с нулем в целой части: $0,b_1b_2b_3......$, где b_j – также цифры из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. При построении выберем цифру b_1 так, чтобы $b_1 \neq a_{1,1}$, цифру b_2 так, чтобы $b_2 \neq a_{2,2}$,....., $b_n \neq a_{n,n}$,......... У нас получится новая точка из интервала (0,1), не совпадающая ни с одной точкой из пересчитанных, так как соответствующая новой точке десятичная дробь отличается от каждой из пересчитанных десятичных дробей хотя бы одной цифрой после запятой. Таким образом, мы пришли к противоречию, предполагая, что можем пересчитать **все** точки: мы нашли точку из интервала (0,1), не совпадающую с пересчитанными точками.

Мощность множества точек интервала (0,1), а значит, в силу равномощности, и мощность множества всех вещественных чисел называется континуум.

Функции одной переменной

Способы задания функций

Определение 1. Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathbb{R}$, говорят, что на множестве X задана функция y = f(x), здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Определение 2. Множество X называется <u>областью существования</u> функции, или областью ее определения.

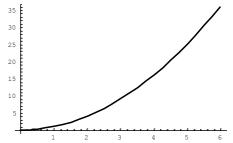
Определение 3. Множество *Y* называется <u>областью значений</u> функции.

Примеры. 1. Показательная функция $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- 2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x, x > 0$.
- 3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathbb{R}$.

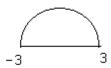
Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание). В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

	X	1	1.5	2	2.5	3	4	6
Ī	y	1	2.25	4	6.25	9	16	36

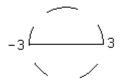


Аналитически функцию можно задать в явном виде y = f(x) (*явное* задание функции), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее <u>неявно</u> F(x,y)=0, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2+y^2=9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$,



и $y = -\sqrt{9-x^2}$, $x \in [-3,3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй — нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2 + y^2 = 9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Кроме того, возможно <u>параметрическое задание функции</u> $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$

когда вводится дополнительный параметр $t\in[t_0,T]$. Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x\!=\!3\!\cos t\\ y\!=\!3\!\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi) \text{ , в неявном виде записанное как } x^2+y^2=9 \text{ .}$