Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение предела последовательности предполагает известным предел последовательности (a), с которым сравнивается общий член последовательности (x_n). Возникает вопрос: как узнать, имеет ли последовательность какой-либо предел, не имея представления о значении этого предела. Ответ на этот вопрос дает

Критерий Коши. Последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N},$ сходится тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N},$ такое что для $\forall m, n > N(\varepsilon)\ (|x_n - x_m| < \varepsilon)$. (Мы видим, что сравниваются не общий член последовательности и предел, а два члена последовательности с достаточно большими номерами. Условие, приведенное в формулировке критерия Коши называется условием **фундаментальности** последовательности).

<u>Доказательство</u>.

1. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то есть, последовательность сходится. Докажем ее фундаментальность. В соответствии с определением предела для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ тчо для $\forall n > N(\varepsilon) (|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Возьмем любые $m, n > N(\varepsilon)$. Тогда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. То есть из сходимости следует фундаментальность.

2. Достаточность. Пусть последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N},$ фундаментальна. Покажем сначала, что из фундаментальности следует ограниченность. В условии фундаментальности примем $\varepsilon = 1$ и найдем $N \in \mathrm{N}$ такое, что $\forall m, n > N\ (|x_n - x_m| < 1)$. Следовательно, при $m = N + 1$ имеем: $(|x_{N+1} - x_n| < \varepsilon)$ при $\forall n > N$. Из неравенства $||x_n| - |x_{N+1}|| \le |x_{N+1} - x_n| < 1$ при $\forall n > N$ получим неравенство: $|x_n| < 1 + |x_{N+1}|$ при $\forall n > N$. Следовательно, для всех членов последовательности справедлива оценка $|x_n| < \max\{|x_1| + 1, |x_2| + 1, ..., |x_N| + 1, 1 + |x_{N+1}|\}$ для $\forall n \in \mathrm{N}$. Итак, ограниченность доказана. Воспользуемся теперь первым основным свойством пределов последовательности и выберем из ограниченной последовательности $x_n,\ n \in \mathrm{N},$ сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k},\ k \in \mathrm{N},$ где $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Взяв теперь в условии фундаментальности $m = n_k$ при достаточно больших значениях $k > K(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, получим $\forall k > K(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon)\ (|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получим $\forall n > N(\varepsilon)\ (|x_n - a| \le \varepsilon)$. В силу произвольности ε выполнение последнего неравенства обеспечивает то, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Предел функции в точке

Пусть a – предельная точка множества определения функции $f(x)$. Существуют два определения предела функции в точке: $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

1. **Определение Гейне**: для любой последовательности $x_n,\ n\in \mathrm{N}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ справедливо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.
2. **Определение Коши**: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x,\ |x-a|<\delta$, справедливо $(|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Для чего нужны два определения? Первое определение не является конструктивным, так как мы не сможем проверить всевозможные числовые последовательности, сходящиеся к точке a. Однако, это определение очень удобно для построения контрпримеров. Доказывать же существование предела в точке удобно с помощью второго определения.

Для того, чтобы пользоваться двумя определениями, докажем их эквивалентность, то есть покажем, что из условий первого определения следует выполнение условий второго определения и наоборот.

$2\Rightarrow1$. Пусть справедливы условия второго определения и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Из определения предела числовой последовательности для любого $\varepsilon>0$ и определенного в соответствии с условием второго предела значения $\delta(\varepsilon)>0$ найдем такое значение $N=N(\delta(\varepsilon))=N(\varepsilon)\in\mathrm{N}$, что $|x_n-a|<\delta(\varepsilon)$ для любого $n>N(\varepsilon)$. Следовательно, в соответствии с условием определения 2 $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ при $\forall n>N(\varepsilon)$. Последнее является установлением того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$. То есть выполнение условий второго определения обеспечивает выполнение условий первого определения.

$1\Rightarrow2$ доказывается от противного. Пусть выполняются условия первого определения, но условия второго определения нарушаются, то есть, $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что для $\forall\delta>0\ \exists x_0$ такое, что $|x_0-a|<\delta$ и $(|f(x_0)-b|\geq\varepsilon_0)$. В силу произвольности $\delta>0$ возьмем $\delta=\dfrac{1}{n}$ и найдем при каждом значении $n\in\mathrm{N}$ такое значение x_n, что $|x_n-a|<\dfrac{1}{n}$ и $(|f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0)$. Мы видим, что нашли последовательность $x_n,\ n\in\mathrm{N}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq b$. Последнее показывает невыполнимость условий первого определения. Мы пришли к противоречию.

Из определения Гейне и свойств пределов последовательностей следует справедливость свойств пределов функций, аналогичных свойствам пределов последовательностей. Приведем некоторые из них.

Свойства пределов функций

1) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $b+c=\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$;

2) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $k\in \mathrm{R}$, то $kb=\lim\limits_{x\to a}(kf(x))$;

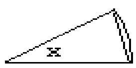
3) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то $b\cdot c=\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$;

4) если $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причем $c\neq 0$, то $\frac{b}{c}=\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})$;

5) если $f(x)\geq 0$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\geq 0$;

6) если $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ (теорема о двух полицейских).

П р и м е р 1. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Пусть $x>0$. Сравним площади сектора радиуса 1 раствора x и вписанного в него равнобедренного треугольника с той же вершиной, представленных на рисунке.



Площадь треугольника равна $\frac{\sin x}{2}$, площадь сектора равна $\frac{x}{2}$. Треугольник вписан в сектор, значит площадь треугольника меньше площади сектора. Следовательно, $\sin x<x$ для любого $x>0$. Пользуясь нечетностью функции $\sin x$, получим $\sin x>x$ для любого $x<0$. Таким образом, $|\sin x|<|x|$ для $x\neq 0$. Для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ такое что $|\sin x|<\varepsilon$ при $|x|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ в соответствии с определением Коши.

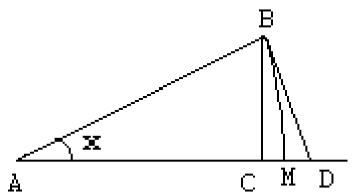
П р и м е р 2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Воспользуемся оценкой в неравенстве $0 \le |\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2}$. Теперь из теоремы о двух полицейских следует $|\cos x - 1| \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, $\cos x \to 1$ при $x \to 0$.

Первый замечательный предел

Докажем, что справедлива формула: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Прежде всего, заметим, что вследствие нечетности функции $\sin x$ отношение $\frac{\sin x}{x}$ при x, близком к 0, положительно при любом знаке x. Достаточно предположить, что x приближается к 0, оставаясь положительным. В противном случае мы сменим знак x, что не повлияет на результат.

Используем геометрическое доказательство. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



В силу последовательной вложимости друг в друга треугольника ABM, сектора ABM и треугольника ABD соответствующие соотношения имеют место между площадями этих фигур: $S_{\Delta ABM} < S_{сектABM} < S_{\Delta ABD}$. Имеем $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\sin x,\ S_{сектABM} = \frac{1}{2}x,\ S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому получаем неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то в силу предположения о знаке x знаки неравенства не изменятся. Поэтому мы имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских. Мы получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

.Осталось применить свойство 4) для получения предела обратной величины: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.