Формулы над классом функций

Понятие формулы определяется по индукции:

1. Каждая булева переменная есть формула.
2. Если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(A \oplus B)$, $(A \mid B)$, $(A \downarrow B)$ — формулы.
3. Формулами являются только выражения, которые могут быть получен из 1 и 2. Других формул не существует.

Формулы над классом функций

Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех булевых функций $f : B^n \to B$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение. Пусть дан класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Понятие формулы над классом $\mathcal{C}$ определяется по индукции:

- Каждая переменная есть формула над $\mathcal{C}$.
- Если $f \in \mathcal{C}$, $f : B^n \to B$, и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $\mathcal{C}$, то выражение $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ тоже является формулой над $\mathcal{C}$.
- Других формул над $\mathcal{C}$ нет.

Примеры

Пусть $\mathcal{C} = \{\overline{}\} = \{\neg\}$.

1. x — формула.
2. $\overline{x}$ — формула.
3. $\overline{\overline{x}}$ — формула.
4. $\overline{\overline{\overline{x}}}$ — формула.

$\vdots$

Функции, представимые формулами над $\mathcal{C} = \{\overline{}\} = \{\neg\}$, исчерпываются функциями $x, \overline{x}$.

Примеры

Пусть $\mathcal{C} = \{\vee, \&, \overline{}\}$.

1. x, y — формулы.
2. $x \mathbin{\&} y, \overline{x}$ — формулы.
3. $x \mathbin{\&} y \vee \overline{x}$ — формула.

Любая ДНФ является формулой над $\mathcal{C} = \{\vee, \&, \overline{}\}$.

Примеры

Пусть $\mathcal{C} = \{\vee, \&, \overline{}\}$.

1. x, y — формулы.
2. $x \vee y, \overline{x}$ — формулы.
3. $(x \vee y) \,\&\, \overline{x}$ — формула.

Любая КНФ является формулой над $\mathcal{C} = \{\vee, \&, \overline{}\}$.

Формулы над классом функций

Предложение 1. Если $D : B^n \to B$ — формула над $\mathcal{C}$ и $E_1, E_2, \dots, E_n$ — формулы над $\mathcal{C}$, то выражение $D(E_1, E_2, \dots, E_n)$ также является формулой над $\mathcal{C}$.

Доказательство. Индукция по индуктивному определению:

- Если $D(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = x_m, m \leq n,$ — переменная, то $D(E_1, E_2, \dots, E_n) = E_m$ — формула над $\mathcal{C}$.
- Если $D = f(A_1, A_2, \dots, A_k)$, где $f \in \mathcal{C}$ и $A_1, A_2, \dots, A_k$ — формулы над $\mathcal{C}$, то делаем индукционное предположение о том, что $A_1(E_1, \dots, E_n), \dots, A_k(E_1, \dots, E_n)$ — формулы над $\mathcal{C}$.Тогда

$$D(E_1, E_2, \dots, E_n) = f(A_1(E_1, \dots, E_n), \dots, A_k(E_1, \dots, E_n))$$

  снова формула над $\mathcal{C}$.
- Так как других формул D над $\mathcal{C}$ нет, предложение доказано.

Замыкание класса

Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех булевых функций $f : B^n \to B$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение. Пусть дан класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Замыканием класса $\mathcal{C}$ называется класс $[\mathcal{C}]$, состоящий из всех функций, представимых формулами над $\mathcal{C}$.

Примеры:

- $\mathcal{F} = [\{\vee, \&, \overline{}\}] = [\{\vee, \overline{}\}] = [\{\&, \overline{}\}]$.
- $[\{|\}] = [\{\downarrow\}] = \mathcal{F}$.
- $[\{\overline{}\}] = \{\overline{}, id\}$ (id — тождественная функция).

Предложение 2. Для каждого $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ имеет место $\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{C}]$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$. Но $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — формулы над $\mathcal{C}$. Значит $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула над $\mathcal{C}$, то есть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\mathcal{C}]$.

Свойства замыкания

Предложение 3. Если $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, то $[\mathcal{C}] \subseteq [\mathcal{D}]$.

Доказательство. Индукция по индуктивному определению:

- Каждая переменная есть формула над $\mathcal{C}$ и над $\mathcal{D}$.
- Пусть $f \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $\mathcal{C}$. Делаем индукционное предположение о том, что $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $\mathcal{D}$. Так как $f \in \mathcal{D}$, то новая формула $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ над $\mathcal{C}$ будет также формулой и над $\mathcal{D}$.
- Так как других формул над $\mathcal{C}$ нет, каждая формула над $\mathcal{C}$ будет формулой над $\mathcal{D}$, то есть $[\mathcal{C}] \subseteq [\mathcal{D}]$.

Свойства замыкания

Предложение 4. Для каждого $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ имеет место $[\mathcal{C}] = [[\mathcal{C}]]$.

Доказательство. По предложению 2 имеем $[\mathcal{C}] \subseteq [[\mathcal{C}]]$. Для доказательства $[[\mathcal{C}]] \subseteq [\mathcal{C}]$ используем индукцию по индуктивному определению:

- Каждая переменная есть формула над $[\mathcal{C}]$ и над $\mathcal{C}$.
- Пусть $f \in [\mathcal{C}]$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $[\mathcal{C}]$. Делаем индукционное предположение о том, что $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $\mathcal{C}$.Так как f — формула над $\mathcal{C}$, то по Предложению 1 новая формула $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ над $[\mathcal{C}]$ будет также формулой и над $\mathcal{C}$.
- Так как других формул над $[\mathcal{C}]$ нет, каждая формула над $[\mathcal{C}]$ будет формулой над $\mathcal{C}$, то есть $[[\mathcal{C}]] \subseteq [\mathcal{C}]$.

Замкнутые классы

Определение. Класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ называется замкнутым, если $[\mathcal{C}] = \mathcal{C}$,

Замкнутые классы

Определение. Класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ называется замкнутым, если $[\mathcal{C}] = \mathcal{C}$, то есть каждая формула над $\mathcal{C}$ принадлежит $\mathcal{C}$.

Примеры:

- Класс всех функций $\mathcal{F}$ — замкнутый.
- В силу Предложения 4 любое замыкание $[\mathcal{C}]$ является замкнутым классом.

Замкнутые классы

Предложение 5. Для того чтобы класс $\mathcal{C}$ (содержащий не только константы) был замкнутым необходимо и достаточно, чтобы тождественная функция (то есть сама переменная) принадлежала $\mathcal{C}$, и $g = f(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{C}$ для всех $f, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность индукцией по индуктивному определению:

- Каждая переменная есть $I^n_m \in \mathcal{C}$.
- Пусть $f \in \mathcal{C}$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над $\mathcal{C}$. Делаем индукционное предположение о том, что $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$. Так как $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — формула над $\mathcal{C}$, то по нашим условиям новая формула $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ над $\mathcal{C}$ будет принадлежать $\mathcal{C}$.
- Так как других формул над $\mathcal{C}$ нет, каждая формула над $\mathcal{C}$ принадлежит $\mathcal{C}$, то есть $[\mathcal{C}] = \mathcal{C}$.

Полный класс

Определение. Класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ называется полным, если $[\mathcal{C}] = \mathcal{F}$, то есть каждая булева функция может быть записана в виде формулы над $\mathcal{C}$.

Примеры:

- $\{\vee, \&, \overline{}\}, \{\vee, \overline{}\}, \{\&, \overline{}\}$ – полные классы.
- $\{|\}, \{\downarrow\}$ – полные классы.
- $\{\overline{}\}$ – не полный класс.