# Построение ДНФ и КНФ

- Построение эквивалентной формулы, содержащей только операции &, ∨, ¬:
  $x \to y = \neg x \vee y$
  $x \leftrightarrow y = (x \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg y)$
  $x + y = (\neg x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y)$
  $x \mid y = \neg(x \,\&\, y)$
  $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$

# Построение ДНФ и КНФ

- Построение эквивалентной формулы, содержащей только операции &, $\vee$, $\neg$:
  $x \to y = \neg x \vee y$
  $x \leftrightarrow y = (x \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg y)$
  $x + y = (\neg x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y)$
  $x \mid y = \neg(x \,\&\, y)$
  $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$
- Построение эквивалентной формулы, для которой операция отрицание $\neg$ относится только к переменным:
  $\neg(x \,\&\, y) = \neg x \vee \neg y$
  $\neg(x \vee y) = \neg x \,\&\, \neg y$

# Построение ДНФ и КНФ

- Раскрыть скобки по законам дистрибутивности:
  $x \mathbin{\&} (y \vee z) = (x \mathbin{\&} y) \vee (x \mathbin{\&} z)$ (для построения ДНФ)
  $x \vee (y \mathbin{\&} z) = (x \vee y) \mathbin{\&} (x \vee z)$ (для построения КНФ)

# Построение ДНФ и КНФ

- Раскрыть скобки по законам дистрибутивности:
  $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ (для построения ДНФ)
  $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$ (для построения КНФ)
- Для построения совершенных нормальных форм, добавить недостающие переменные в конъюнкты и дизъюнкты:
  $K = K\&1 = K\&(x \vee \neg x) = K\&x \vee K\&\neg x$ (для построения СДНФ)
  $D = D \vee 0 = D \vee (x\&\neg x) = (D \vee x)\&(D \vee \neg x)$ (для построения СКНФ)

# Вес ДНФ

- **Весом** ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.

# Вес ДНФ

- Весом ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.
- Например, вес ДНФ

$$x_1 \mathbin{\&} \overline{x_2} \mathbin{\&} \overline{x_3} \vee x_2 \mathbin{\&} x_3 \vee x_1 \mathbin{\&} x_2$$

равен

# Вес ДНФ

- Весом ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.
- Например, вес ДНФ

$$x_1 \,\&\, \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_3} \vee x_2 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, x_2$$

равен 7.

# Вес ДНФ

- Весом ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.
- Например, вес ДНФ

$$x_1 \mathbin{\&} \overline{x_2} \mathbin{\&} \overline{x_3} \vee x_2 \mathbin{\&} x_3 \vee x_1 \mathbin{\&} x_2$$

  равен 7.
- Задача. По данной булевой функции $f$ найти ДНФ

$$\bigvee_{i=1}^{m} K_i = f$$

  с наименьшим весом.

# Вес ДНФ

- Весом ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.
- Например, вес ДНФ
$$x_1 \mathbin{\&} \overline{x_2} \mathbin{\&} \overline{x_3} \vee x_2 \mathbin{\&} x_3 \vee x_1 \mathbin{\&} x_2$$
равен 7.
- Задача. По данной булевой функции $f$ найти ДНФ
$$\bigvee_{i=1}^{m} K_i = f$$
с наименьшим весом. (Такая ДНФ называется минимальной.)

# Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$

называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.

# Импликанты

- Элементарный конъюнкт
$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$
называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если
$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$
для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.
- Если $K$ присутствует в некоторой ДНФ функции $f$, то $K$ является импликантом $f$.

# Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \mathbin{\&} x_{i_2}^{\sigma_2} \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_{i_k}^{\sigma_k}$$

  называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

  для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.
- Если $K$ присутствует в некоторой ДНФ функции $f$, то $K$ является импликантом $f$.
- Наоборот, если $K$ является импликантом $f$, то $f = f \vee K$, что дает возможность добавить $K$ в ДНФ функции $f$.

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

# Пример

| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x}\ \&\ \overline{y}\ \&\ z$ — импликант,
- $\overline{x}\ \&\ y\ \&\ z$ — импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — импликант,

# Пример

| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x}\ \&\ \overline{y}\ \&\ z$ — импликант,
- $\overline{x}\ \&\ y\ \&\ z$ — импликант,
- $x\ \&\ \overline{y}\ \&\ z$ — импликант,
- $x\ \&\ y\ \&\ \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x}\ \&\ z$ — импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x}\ \&\ \overline{y}\ \&\ z$ — импликант,
- $\overline{x}\ \&\ y\ \&\ z$ — импликант,
- $x\ \&\ \overline{y}\ \&\ z$ — импликант,
- $x\ \&\ y\ \&\ \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x}\ \&\ z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $\overline{y} \,\&\, z$ — импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $\overline{y} \,\&\, z$ — импликант, так как если $y = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — импликант,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x} \,\&\, z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $\overline{y} \,\&\, z$ — импликант, так как если $y = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $K = x \,\&\, \overline{z}$ — не импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \;\&\; \overline{y} \;\&\; z$ — импликант,
- $\overline{x} \;\&\; y \;\&\; z$ — импликант,
- $x \;\&\; \overline{y} \;\&\; z$ — импликант,
- $x \;\&\; y \;\&\; \overline{z}$ — импликант,
- $\overline{x} \;\&\; z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $\overline{y} \;\&\; z$ — импликант, так как если $y = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- $K = x \;\&\; \overline{z}$ — не импликант, так как при $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ имеем $K = 1$, но $f = 0$.

# Простые импликанты

- Импликант функции $f$ называется простым импликантом, если ни одна его собственная часть не является импликантом $f$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \,\&\, z$ и $\overline{y} \,\&\, z$,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \,\&\, z$ и $\overline{y} \,\&\, z$,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{x} \,\&\, z$,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \,\&\, z$ и $\overline{y} \,\&\, z$,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{x} \,\&\, z$,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{y} \,\&\, z$,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \,\&\, z$ и $\overline{y} \,\&\, z$,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{x} \,\&\, z$,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{y} \,\&\, z$,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — простой импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \,\&\, z$ и $\overline{y} \,\&\, z$,
- $\overline{x} \,\&\, y \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{x} \,\&\, z$,
- $x \,\&\, \overline{y} \,\&\, z$ содержит импликант $\overline{y} \,\&\, z$,
- $x \,\&\, y \,\&\, \overline{z}$ — простой импликант,
- $\overline{x} \,\&\, z$ — простой импликант,

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} \mathbin{\&} \overline{y} \mathbin{\&} z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\overline{x} \mathbin{\&} z$ и $\overline{y} \mathbin{\&} z$,
- $\overline{x} \mathbin{\&} y \mathbin{\&} z$ содержит импликант $\overline{x} \mathbin{\&} z$,
- $x \mathbin{\&} \overline{y} \mathbin{\&} z$ содержит импликант $\overline{y} \mathbin{\&} z$,
- $x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \overline{z}$ — простой импликант,
- $\overline{x} \mathbin{\&} z$ — простой импликант,
- $\overline{y} \mathbin{\&} z$ — простой импликант.

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ.

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом.

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$.

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$. Тогда

$$f = K' \vee f$$

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i$$

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i$$

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i = K' \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i,$$

# Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что $K_1$ (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант $K'$, являющийся собственной частью $K_1$. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i = K' \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i,$$

то есть получили ДНФ с меньшим весом, чем минимальная. Противоречие.

# Сокращенная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант булевой функции $f$. Тогда $f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$.

# Сокращенная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант булевой функции $f$. Тогда $f = \bigvee\limits_{K \in \mathcal{P}} K$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ — минимальная ДНФ. Тогда $K_i \in \mathcal{P}$, $i = \overline{1, m}$, и

$$f = f \vee \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K = \bigvee_{i=1}^{m} K_i \vee \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K.$$

# Сокращенная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции $f$ является простым импликантом.

Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант булевой функции $f$. Тогда $f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант функции $f$

$$f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$$

называется сокращенной ДНФ.

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| f | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Сокращенная ДНФ для $f$:

$$f(x,y,z) = x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \overline{z} \vee \overline{x} \mathbin{\&} z \vee \overline{y} \mathbin{\&} z$$

# Метод получения сокращенной ДНФ функции $f$

0 (Выписываем все возможные импликанты длины $0$).

# Метод получения сокращенной ДНФ функции $f$

0 (Выписываем все возможные импликанты длины $0$).

1 Выписываем все возможные импликанты длины $1$, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

# Метод получения сокращенной ДНФ функции $f$

0 (Выписываем все возможные импликанты длины $0$).

1 Выписываем все возможные импликанты длины $1$, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

2 Выписываем все возможные импликанты длины $2$, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

$\vdots$

# Метод получения сокращенной ДНФ функции $f$

0. (Выписываем все возможные импликанты длины $0$).
1. Выписываем все возможные импликанты длины $1$, не содержащие импликанты, выписанные в 0.
2. Выписываем все возможные импликанты длины $2$, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

   ⋮

n. Выписываем все возможные импликанты длины $n$, , не содержащие импликанты, выписанные в 0, 1, . . . , n-1.

# Метод получения сокращенной ДНФ функции $f$

0 (Выписываем все возможные импликанты длины $0$).

1 Выписываем все возможные импликанты длины $1$, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

2 Выписываем все возможные импликанты длины $2$, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

⋮

n Выписываем все возможные импликанты длины $n$, , не содержащие импликанты, выписанные в 0, 1, . . . , n-1.

Дизъюнкция выписанных импликант есть сокращенная ДНФ.

## Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант $K'$, являющийся частью $K$. Выберем самый короткий такой $K'$. Тогда $K'$ — простой.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант $K'$, являющийся частью $K$. Выберем самый короткий такой $K'$. Тогда $K'$ — простой. По уже доказанному $K'$ был выписан на предыдущих шагах. Но тогда по алгоритму $K$ не может быть выписан. Противоречие.

# Обоснование

1. Каждый простой импликант длины $\ell$ обязательно будет выписан на шаге $\ell$, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант $K$ выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант $K'$, являющийся частью $K$. Выберем самый короткий такой $K'$. Тогда $K'$ — простой. По уже доказанному $K'$ был выписан на предыдущих шагах. Но тогда по алгоритму $K$ не может быть выписан. Противоречие.

Таким образом, наш алгоритм выпишет все возможные простые импликанты функции $f$.