Второй замечательный предел и его следствия

Докажем, что справедлива формула $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Но прежде изменим определение Коши с учетом того, что переменная x стремится не к конечному значению a, когда для попадания x в окрестность a следует выполнить неравенство $|x-a|<\delta$ при достаточно малом $\delta>0$, а к бесконечности. Переменная x окажется в окрестности бесконечности, если окажется по модулю больше достаточно большой величины. Таким образом, **определение Коши** в случае $x\to\infty$ будет выглядеть так: $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M=M(\varepsilon)>0$ такое, что для любого числа $x\in X$, удовлетворяющего условию $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пусть $x>0$, то есть $x\to+\infty$. Рассмотрим неравенство

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}= =(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]}) . \qquad (*)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}=e$, так как при $x\geq 1$ величина $[x]$ – натуральное число – и мы имеем последовательность, участвующую в определении числа e. Аналогично, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}=e$. Теперь остается применить неравенство (*) и теорему о двух милиционерах.

Для случая $x<0$ сделаем замену $x=-y$. Тогда

$$(1+\frac{1}{x})^x=(1-\frac{1}{y})^{-y}=(\frac{y-1}{y})^{-y}=(\frac{y}{y-1})^y=(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1}).$$

При $x\to-\infty$ имеем: $y\to+\infty$. Поэтому можно применить уже доказанную формулу для положительной переменной $y-1$. Доказательство завершено.

Прологарифмируем обе части второго замечательного предела – получим $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{1}{x}))=1$. Если теперь заменить $\frac{1}{x}$ переменной t, которая стремится к нулю при стремлении x к бесконечности, получим следствие из второго замечательного предела

1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

Другим следствие второго замечательного предела является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

Рассмотрим теперь предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$. Сделаем замену $(1+x)^{\alpha}=e^{z}$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha$. (Во втором выражении равенства числитель и знаменатель умножены на z и сделан переход к пределу в соответствии со вторым следствием.)

Таким образом, третьим следствием второго замечательного предела является

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией («бесконечно малой величиной» или просто «бесконечно малой») при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то есть если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ тчо $\forall x, |x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ (| $\alpha(x)$ |< ε).

Определение 2. Функция $A(x)$ называется бесконечно большой функцией («бесконечно большой величиной» или просто «бесконечно большой») при $x\to x_0$, если для $\forall M>0$ $\exists\delta=\delta(M)>0$ тчо $\forall x, |x-x_0|<\delta(M)$ (| $\alpha(x)$ |> M).

Замечание 1. При предыдущих обозначениях функция $\frac{1}{A(x)}$ при $x\to x_0$ бесконечно малая, а $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой и ограниченной величины – величина бесконечно малая.
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ тогда и только тогда, когда $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной при $x\to a$.

Сравнение бесконечно малых величин

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K$, причем $0 < |K| < \infty$, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to x_0$.

П р и м е р. Функции $(1+x)^3 - 1$ и x – бесконечно малые величины одного порядка малости при $x \to 0$.

Определение 4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

П р и м е р. Функции x и $\sin x$ – эквивалентные бесконечно малые величины при $x \to 0$.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

П р и м е р. Функция x^2 – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $\sin x$ при $x \to 0$.

Односторонние пределы

Число b называется **левым пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$ (пределом слева), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a слева $(x_n < a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x,\ 0 < a - x < \delta$, справедливо $(| f(x) - b | < \varepsilon)$.

Определение 4. Число b называется **правым пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$ (пределом справа), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a справа$(x_n > a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x,\ 0 < x - a < \delta$, справедливо $(|f(x) - b| < \varepsilon)$.

Существование предела в точке означает, что пределы слева и справа существуют и равны.

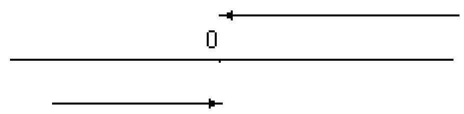
Функция, непрерывная в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathrm{R}$ и $a \in X$, то есть функция определена в точке $x=a$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то говорят, что эта функция непрерывна в точке a. По-другому можно записать свойство непрерывности так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$. Свойство непрерывности функций передается суперпозиции этих функций: если $y = f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Функция, непрерывная в каждой точке множества X, называется непрерывной на множестве X. График непрерывной функции представляет собой непрерывную кривую. Все известные из школьного математического курса функции непрерывны в областях, где они заданы: многочлены, e^x, $\ln x$ при $x > 0$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

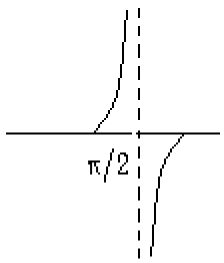
Пример разрывной функции – функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Доказать, что она имеет разрыв в точке $x = 0$ можно с применением определения Гейне. Зададим последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, что общий член последовательности стремится к нулю с ростом номера, причем четные члены последовательности – положительные числа, нечетные – отрицательные. Нетрудно заметить, что $f(x_n) = (-1)^n$. Поскольку последовательность $(-1)^n$ не имеет предела, то в соответствии с определением Гейне функция $y = \operatorname{sgn} x$ не имеет предела в точке $x = 0$, и поэтому не может быть непрерывной в этой точке, как бы мы ее в этой точке ни определяли.



Приведенный пример точки разрыва – **точка разрыва первого рода**. В соответствии с определением точки разрыва первого рода функция должна иметь пределы при x, стремящимся к точке разрыва слева и при x, стремящимся к точке разрыва справа, только эти пределы не совпадают. В случае функции $y = \operatorname{sgn} x$ предел слева в точке разрыва $x = 0$ равен -1, предел справа равен 1.

Точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ называется такая предельная точка множества X, на котором задана функция, что хотя бы один из пределов (слева или справа) функции в этой точке не существует или бесконечен. В качестве примера 1 можно привести функцию $y = \operatorname{tg} x$. В точке $x = \pi/2$ функция не определена, но эта точка является предельной для множества определения функции. При стремлении x к $\pi/2$ слева значения функции, постоянно увеличиваясь, стремятся к $+\infty$. При стремлении x к $\pi/2$ справа, значения функции, уменьшаясь, стремятся к $-\infty$.



Пример 2 – функция $f(x)=e^{1/x}$. При стремлении x к 0 слева предел равен 0, при стремлении x к 0 справа функция становится бесконечно большой.
Пример 3 – функция $f(x)=\sin 1/x$. При стремлении x к 0 слева и справа предел не существует, хотя функция ограничена по величине.

Функция, непрерывная в каждой точки множества X, называется непрерывной на множестве X.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

2. Если $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\mathrm{m}=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то $\exists x_M, x_m \in [a,b]$ такие, что $f(x_M)=M, f(x_m)=m$.

3. Если $f(a)\cdot f(b)<0$ (значения на концах отрезка имеют разные знаки), то $\exists x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0)=0$.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся леммой о вложенных отрезках. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам и проверим значение $f(\frac{a+b}{2})$. Если $f(\frac{a+b}{2})=0$, то $x_0=\frac{a+b}{2}$ и теорема доказана. В противном случае выберем ту половину отрезка, на границах которой функция имеет разные знаки. Разделим этот новый отрезок пополам и проверим значение функции в этой середине…. Продолжая указанный процесс, мы либо получим значение 0 у функции в одной из середин получаемых отрезков, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, $n\in\mathrm{N}$, обладающих свойствами: $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$, $b_n-a_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$. В соответствии с леммой о вложенных отрезках $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c\in[a,b]$. В силу непрерывности функции на отрезке $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)$. В силу того, что знаки $f(a_n)$ и $f(b_n)$ разные, $f(c)=0$. Следовательно, $x_0=c$.

Следствиями 3-го свойства являются следующие свойства:
3-а. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. (Для доказательства следует применить свойство 3 к функции $f_1(x)=f(x)-k$ для любого значения k между $f(a)$ и $f(b)$).

3-б. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между M и m, где M и m из свойства 2. (Для доказательства следует применить свойство 3-а для функции $f(x)$ на отрезке $[x_m,x_M]$).