Помимо несобственных интегралов 1-го рода существуют **несобственные интегралы 2-го рода** – интегралы от неограниченных функций. Очевидно, что такие интегралы не могут быть вычислены как пределы интегральных сумм с произвольно выбранными отмеченными точками. Ведь если выбор отмеченных точек произволен, мы можем получить неограниченные интегральные суммы, и тогда предел интегральных сумм не будет конечным. Для того, чтобы вычислить несобственный интеграл 2-го рода от функции, обращающейся в бесконечность в точке a, например, $\int_a^b f(x)dx$, при условии, что на любом отрезке $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, функция $f(x)$ непрерывна, вычисляют предел: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)dx$. Если такой предел существует, то говорят, что несобственный интеграл 2-го рода сходится.

П р и м е р. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Очевидно, что подынтегральная функция обращается в бесконечность в особой точке $x = 0$ и непрерывна на любом отрезке $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\varepsilon^1, \alpha \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_\varepsilon^1, \alpha = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что конечный предел существует при $\alpha < 1$, то есть интеграл при таком значении параметра сходится, а при $\alpha \geq 1$ исследуемый интеграл расходится.

Для несобственных интегралов 2-го рода от положительных функций также справедливы теоремы сравнения.

П р и м е р. Доказать сходимость несобственного интеграла $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$.

Отрицательная на интервале $(0, \pi/2)$ подынтегральная функция стремится к $-\infty$ в окрестности нуля. Значит, функция $-\ln(\sin x)$ положительная, и к ней можно применить теорему сравнения, сравнивая ее с функцией $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Согласно правилу Лопиталя

$\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(\sin x)}{x^{-1/2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x \cdot x^{-3/2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}\cos x}{\sin x} = 0$, следовательно, интеграл $-\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$ так же, как и интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$, сходится.

Связь между несобственными интегралами 1-го и 2-го рода

Исследование сходимости несобственного интеграла 2-го рода можно свести к исследованию сходимости интеграла первого рода с помощью замены переменной. Рассмотрим, например, несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-a)^\alpha}$, где $f(x)$ – непрерывная, а значит, ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция. Проведем замену $y = \frac{1}{x-a}$. Тогда $\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-a)^\alpha} = \int_{1/(b-a)}^{\infty} \frac{f(a+1/y)dy}{y^{2-\alpha}}$, где второй интеграл – несобственный интеграл 1-го рода.