Познакомимся с методом доказательства, называемый **методом математической индукции**. Суть этого метода в том, что для того, чтобы доказать, что некоторая формула $K(n)$ верна для всех $n \in \mathbb{N}$

а) сначала проверяют справедливость $K(1)$,

б) затем доказывают, что из справедливости $K(n_0)$ следует справедливость $K(n_0+1)$.

Продемонстрируем применение метода математической индукции к доказательству формулы **бинома Ньютона**:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k \quad , \ \forall n \in \mathrm{N},$$

где $C_n{}^k$ – число сочетаний из n по k, $C_m{}^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$., причем $C_n{}^0 = C_n{}^n = 1$.

Пункт а) – это проверка справедливости формулы при n=1. Левая часть формулы принимает вид $1+x$. Правая часть формулы $\sum_{k=0}^{1} C_1{}^k x^k = 1+x$ совпадает с левой частью.

Пункт б) сложнее. Здесь необходимо в предположении, что при некотором n формула верна, доказать ее справедливость при n+1. То есть, из соотношения $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k$ следует вывести формулу $(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}{}^k x^k$. Левая часть последнего соотношения получается из левой части предыдущего соотношения умножением на сомножитель $(1+x)$. В силу справедливости предыдущего соотношения получим $(1+x)^{n+1} = (1+x)\sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^{k+1}$. В последней сумме индекс $k+1$ обозначим k' и заметим, что раз k меняется от 0 до n, то k' меняется от 1 до $n+1$. Поэтому получим $(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k + \sum_{k'=1}^{n+1} C_n{}^{k'-1} x^{k'} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n{}^k x^k + \sum_{k'=1}^{n} C_n{}^{k'-1} x^{k'} + x^{n+1}$. В последнем выражении слагаемые 1 и x^{n+1}– это, соответственно, первый член из первой суммы и последний член из второй суммы. Две суммы, стоящие в середине последнего выражения, отличаются обозначением индексов, но имеют одинаковые пределы изменения этих индексов и одинаковые степени x. Поскольку индексы, принадлежащие различным суммам, независимы друг от друга, обозначим оба индекса одинаковой буквой, например, j. Тогда мы получим $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} (C_n{}^j + C_n{}^{j-1}) x^j + x^{n+1}$.

Упрощая выражение в скобках, имеем

$$C_n{}^j + C_n{}^{j-1} = \frac{n!}{j!(n-j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} = \frac{n!(n-j+1+j)}{j!(n-j+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = C_{n+1}{}^j.$$

Таким образом, $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} C_{n+1}{}^j x^j + x^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}{}^j x^j$, то есть необходимая формула получена. Поскольку оба пункта доказательства выполнены, формула бинома доказана для всех $n \in \mathrm{N}$.

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$\mathrm{n}! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \mathrm{n}.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей… . На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \mathrm{n} = \mathrm{n}!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times\ldots\times(m-1)\times m=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается $A_m{}^n$. Таким образом,

$$A_m{}^n=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: $A_m{}^n$. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно $A_m{}^n$, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается $C_m{}^n$. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m{}^n=\dfrac{A_m{}^n}{n!}$ или $C_m{}^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

Числовые последовательности.

Числовой последовательностью называют счетный набор пронумерованных чисел $x_n,\ n \in \mathrm{N}$. Последовательность также можно рассматривать как функцию, заданную на множестве N. Число x_n называют членом последовательности, n – номером этого члена последовательности.

Примеры. 1) $\frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}$, 2)$3n,\ n \in \mathrm{N}$, 3)$1+\frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathrm{N}$, 4) $(-1)^n,\ n \in \mathrm{N}$.

Легко заметить, что члены первой и третьей последовательностей с ростом n приближаются к конкретной величине, члены второй последовательности безгранично увеличиваются, а члены четвертой последовательности поочередно принимают два значения.

Введем определение предела последовательности, используя кванторы общности и существования для отображения динамики процесса.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=1$. Здесь $x_n = 1+\frac{(-1)^n}{n^2},\ a=1$. Так как $|x_n - a| = \frac{1}{n^2}$, найдем такое значение $N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ ($\frac{1}{n^2} < \varepsilon$). Так как последнее неравенство эквивалентно неравенству $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, за $N(\varepsilon)$ можно принять наибольшее целое число, меньшее или равное $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Такое число обозначается как $[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}]$.

Элементарные свойства пределов

1. Предел единственен.

<u>Доказательство</u>. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n > N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n > N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ получим $|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \le |b - x_n| + |x_n - a| < \varepsilon$. Из произвольности ε получаем:

расстояние между числами a и b может быть сделано сколь угодно малым. Это означает, что $a = b$.

2. Пусть $x_n \le y_n \le z_n, \forall n \in \mathrm{N}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. (Теорема о двух полицейских).

Доказательство. Для $\forall \varepsilon > 0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $\forall n > N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $\forall n > N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ получим неравенства $a - \varepsilon < x_n,\ z_n < a + \varepsilon$. Следовательно, при $\forall n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ справедливо $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$, что обеспечивает неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$.

3. Пусть $x_n \ge 0$ при $\forall n \in \mathrm{N}$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \ge 0$.

Доказательство от противного. Пусть $a < 0$. В соответствии с определением предела при $\varepsilon = -\dfrac{a}{2}$ найдем $N_0 \in \mathrm{N}$ такое, что $\forall n > N_0$ $\left(|x_n - a| < -\dfrac{a}{2}\right)$. То есть $\dfrac{a}{2} < x_n - a < -\dfrac{a}{2}$ при $\forall n > N_0$. Из правого неравенства следует $x_n < \dfrac{a}{2}$, что противоречит предположению.

4. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Доказательство. Сначала получим вспомогательное неравенство $||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$. Имеем

$$\begin{cases} |a| = |a - x_n + x_n| \le |a - x_n| + |x_n| \\ |x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| - |x_n| \le |a - x_n| \\ |x_n| - |a| \le |x_n - a| \end{cases} \Rightarrow ||x_n| - |a|| \le |x_n - a|.$$

Согласно определению предела для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$. Согласно доказанному неравенству при тех же $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Для рассмотрения следующих свойств пределов последовательностей введем два определения.

Определение 1. Последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, называется ограниченной, если $\exists M > 0$ тчо $|x_n| < M, \forall n \in \mathrm{N}$.

Определение 2. Последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, называется бесконечно малой величиной (б.м.в.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

5. Если последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, сходится, то есть, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, – ограниченная величина.

Доказательство. В соответствии с определением предела при $\varepsilon = 1$ найдем такое $N_1 \in \mathrm{N}$, что $|x_n - a| < 1$ при $\forall n > N_1$. Следовательно, в соответствии с неравенством, полученным выше, $||x_n| - |a|| < 1$ при $\forall n > N_1$. Отсюда $|x_n| < 1 + |a|$ при $\forall n > N_1$. Найдем теперь $M = \max\{|x_1| + 1, |x_2| + 1, \ldots, |x_{N_1(\varepsilon)}| + 1, |a| + 1\}$. Очевидно, что $|x_n| < M$, $\forall n \in \mathrm{N}$.