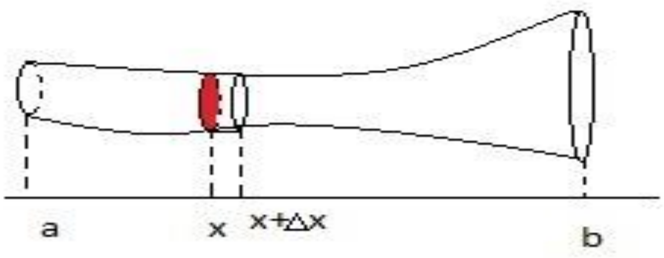
5. Вычислить **объем тела** по площадям поперечных сечений.
Предположим, что мы имеем тело, проецирующееся на отрезок $[a,b]$ на оси OX, причем в каждую точку x этого отрезка проецируется сечение тела, площадь которого $S(x)$ нам известна.
Для вычисления объема разбиваем отрезок $[a,b]$ на фрагменты $[x_i, x_{i+1}]$ и заменяем над каждым фрагментом часть тела на часть цилиндра с основанием, совпадающим с сечением данного тела при $x = \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,\dots,n$.

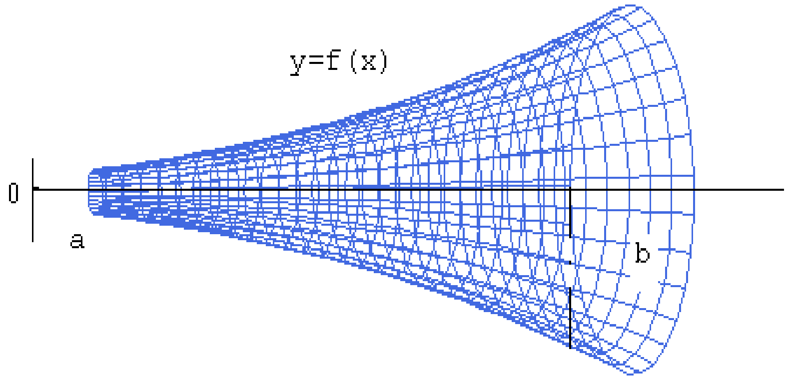


Приближенное значение объема заданного тела равно $\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

Точное значение объема мы получим, устремляя к нулю диаметр разбиения и неограниченно увеличивая число точек разбиения.

Переходя к пределу, получим $V = \int_a^b S(x)dx$.

Частным случаем полученной формулы является формула для вычисления **объема тела вращения**, ограниченного поверхностью вращения кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, вокруг оси OX и плоскостями $x = a$ и $x = b$.



Поскольку площадь сечения этого тела $S(x)$ равна $\pi(f(x))^2$, мы получим $V = \pi\int\limits_a^b f(x)^2 dx$.

Приближенное вычисление интеграла Римана

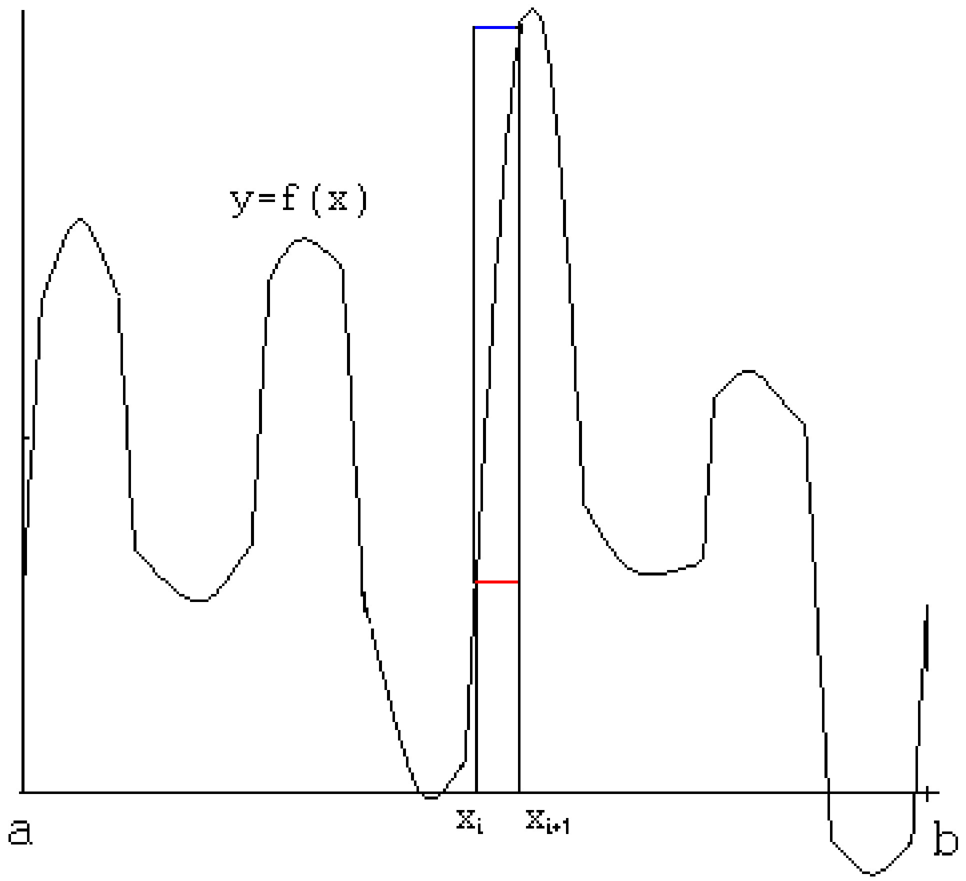
К сожалению, не для любой непрерывной функции можно найти первообразную в виде суперпозиции элементарных функций. Поэтому можно столкнуться с определенным интегралом, для которого применение формулы Ньютона-Лейбница невозможно. Например, $\int\limits_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$.

Для таких интегралов приходится применять приближенное интегрирование. Формул приближенного интегрирования довольно много, но все они основаны на ассоциации интеграла с площадью криволинейной трапеции, построенной на основании, совпадающем с отрезком интегрирования. Этот отрезок разбивается на n равных частей (для удобства машинного счета) и соответствующие узкие криволинейные трапеции заменяются близкими фигурами, площадь которых легко вычисляется. С ростом n площади узких криволинейных трапеций и простейших фигур практически не отличаются друг от друга, поэтому погрешность вычислений можно сделать сколь угодной малой. Мы рассмотрим две простейшие формулы – случаи, когда криволинейные трапеции заменяются прямоугольниками и трапециями.

1. **Формула прямоугольников**. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется прямоугольником с высотой – либо $f(x_i)$, либо $f(x_{i+1})$. Суммируя площади этих прямоугольников с одинаковыми основаниями длины $\frac{b-a}{n}$, получим либо $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, либо $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

2. **Формула трапеций**. Отрезок $[a,b]$ снова разбивается на n равных частей узлами $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Криволинейная трапеция с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется обычной трапецией, причем участок кривой $y = f(x)$ над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется хордой, соединяющей соответствующие точки. Высота такой трапеции равна $\frac{b-a}{n}$, средняя линия равна $\frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$. Поэтому, суммируя площади соответствующих трапеций, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$



Сосчитаем приведенный выше интеграл $\int_1^4 \frac{\sin x}{x} dx$ двумя способами по формулам прямоугольников с помощью пакета программ MAXIMA. Выберем шаг, равный 3/200.

Формула прямоугольников с высотами, равными значениям функции в правых концах отрезков разбиения считается в MAXIMе по формуле **3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,1,200),numer**; с высотами, равными значениям функции в левых концах отрезков разбиения считается в MAXIMе по формуле

3/200*sum(sin(1+i*3/200)/(1+i*3/200),i,0,199),numer.

Если использовать готовые формулы приближенного вычисления интегралов в MAXIMе, можно использовать команду **quad_qag** : **first(quad_qag(sin(x)/x,x,1,4,2)**).

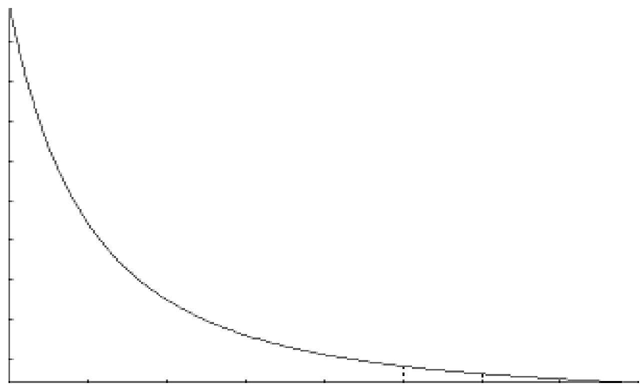
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Просматривая математические тексты, нетрудно наткнуться на выражения вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$ или $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$. С точки зрения введенного нами понятия интеграла Римана по отрезку приведенные интегральные выражения представляются бессмыслицей. Действительно, мы не сможем составить ни одной интегральной суммы, так как никогда не кончим разбивать бесконечный промежуток на конечные отрезки и выбирать на них отмеченные точки. И тем более, мы не сможем рассматривать последовательности интегральных сумм, соответствующих последовательностям таких разбиений с диаметрами разбиений, стремящимся к нулю. Что же понимают под такими интегралами?

Приведенные интегралы называются **несобственными** интегралами по бесконечному промежутку или **несобственными интегралами 1-го рода** и определяются они при помощи интегралов Римана по конечным отрезкам следующим образом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[\beta, b]$, $b > \beta$. То есть для любого $b > \beta$ существует $I(b) = \int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} I(b)$, то такой предел обозначают $\int\limits_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$ и говорят, что этот несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится.



Пример. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}}\,dx$. Очевидно, что $I(b) = \frac{b^{1-\nu} - 1}{1-\nu}$ при $\nu \neq 1$ и $I(b) = \ln b$ при $\nu = 1$. Устремим теперь b к $+\infty$.

Очевидно, что конечный предел функции $I(b)$ существует только при $\nu > 1$. Он равен $\frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ предел $I(b)$ бесконечен. Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx$ сходится только при $\nu > 1$, причем $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx = \frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\nu} dx$ расходится.

Для несобственных интегралов 1-го рода от **положительных** функций , как и для числовых рядов с положительными членами, справедливы **теоремы сравнения**: а) если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл от меньшей функции, б) если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$, то из сходимости $\int\limits_\beta^\infty f(x) dx$ следует сходимость $\int\limits_\beta^\infty g(x) dx$.

П р и м е р. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx$ сходится.

Достаточно показать, что сходится $\int\limits_1^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx$, так как $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \int\limits_0^1 e^{-\alpha^2 x^2} dx + \int\limits_1^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx$. Сравним положительные функции $e^{-\alpha^2 x^2}$ и $\frac{1}{x^2}$ при x>1 или при достаточно больших x. Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{x^{-2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{\alpha^2 x^2}} = 0$, а так как несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно теореме сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx$.