Основные замкнутые классы

- $\mathcal{L} = [1, +]$ — класс линейных функций.
- $\mathcal{M} = [0, 1, \&, \vee]$ — класс монотонных функций.
- $\mathcal{S} = \{f \mid f^* = f\} \stackrel{?}{=} [\neg, d]$ — класс самодвойственных функций.
- $\mathcal{T}_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\} = [+, \&]$.
- $\mathcal{T}_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\} = [\leftrightarrow, \vee] \stackrel{?}{=} [\to, \&]$.

Полные классы

Определение. Класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ называется полным, если $[\mathcal{C}] = \mathcal{F}$.

Примеры:

- $\{\neg, \vee, \&\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \&\}, \{1, +, \&\}, \{|\}, \{\downarrow\}$ — полные классы.
- $\{0, 1, \vee, \&\}$, $\{0, 1, +\}$ — неполные классы.
- Если $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \neq \mathcal{F}$ — замкнутый, то $\mathcal{C}$ — неполный, поскольку

$$[\mathcal{C}] \subseteq [\mathcal{D}] = \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{F}.$$

Теорема Поста

Теорема. Класс функций $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}$ не содержится в классах $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$.

Примеры:

- $\{\neg, \&\}$ — полный, так как $\neg \notin \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{M}$; $\& \notin \mathcal{L}, \mathcal{S}$.
- $\{\neg, \vee\}$ — полный, так как $\neg \notin \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{M}$; $\vee \notin \mathcal{L}, \mathcal{S}$.
- $\{1, +, \&\}$ — полный, так как $1 \notin \mathcal{T}_0, \mathcal{S}$; $+ \notin \mathcal{T}_1, \mathcal{M}$; $\& \notin \mathcal{L}$.
- $\{|\}$ — полный, так как $| \notin \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{S}$.
- $\{\downarrow\}$ — полный, так как $\downarrow \notin \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{S}$.
- $\{0, 1, xy \vee yz\}$ — неполный, так как $\{0, 1, xy \vee yz\} \subseteq \mathcal{M}$.

Лемма о несамодвойственной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{S}$, то $0, 1 \in [f, \neg]$.

Доказательство. Пусть $f \notin \mathcal{S}$. Тогда существует набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ такой, что

$$\overline{f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n})} = f^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Тогда $f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.
Поэтому для формулы $g(x) = f(x^{\sigma_1}, \ldots, x^{\sigma_n})$ имеем

$$g(0) = f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = g(1).$$

Таким образом, одна из констант $0, 1$ является формулой над $\{f, \neg\}$. Подставляя ее в отрицание, получим другую константу.

Лемма о несамодвойственной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{S}$, то $0, 1 \in [f, \neg]$.

Таким образом, доказали:

Если f — не самодвойственная функция, то из f подстановками переменных или их отрицаний (x или $\neg x$) можно получить одну из констант (0 или 1). Применяя отрицание к полученной константе, получим оставшуюся булеву константу.

Пример

Пример. Пусть $f(x, y, z) = x \vee yz$. Имеем

$$0 = \neg f(1, 0, 0) = f^*(0, 1, 1) \neq f(0, 1, 1) = 1.$$

Рассмотрим формулу $g(x) = f(\neg x, x, x)$.

$$g(0) = f(1, 0, 0) = 1,$$

$$g(1) = f(0, 1, 1) = 1.$$

Таким образом, константа 1 выражается формулой над $\{f, \neg\}$. Константа 0 выражается формулой $\neg g(x) = \neg f(\neg x, x, x)$.

Лемма о немонотонной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{M}$, то $\neg \in [f, 0, 1]$.

Доказательство. Пусть $f \notin \mathcal{M}$.Тогда существует наборы $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leq (\tau_1, \ldots \tau_n)$ такие, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ и $f(\tau_1, \ldots \tau_n) = 0$. Определим формулы

$$g_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i = \tau_i = 0; \\ 1, & \text{если } \sigma_i = \tau_i = 1; \\ x, & \text{если } \sigma_i = 0 \text{ и } \tau_i = 1. \end{cases}$$

Тогда $g_i(0) = \sigma_i$ и $g_i(1) = \tau_i$ для всех $i = \overline{1, n}$. Поэтому для формулы $h(x) = f(g_0(x), \ldots, g_n(x))$ имеем $h(0) = 1$ и $h(1) = 0$, то есть $h(x) = \overline{x}$.

Лемма о немонотонной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{M}$, то $\neg \in [f, 0, 1]$.

Таким образом, доказали:

Если f — не монотонная функция, то из f подстановками 0, 1 и x можно получить $\neg x$.

Пример

Пример. Пусть $f(0,0,1,0) = 1$ и $f(1,0,1,1) = 0$.

Рассмотрим формулу $g(x) = f(x,0,1,x)$.

$$g(0) = f(0,0,1,0) = 1,$$
$$g(1) = f(1,0,1,1) = 0.$$

Таким образом, $\neg x$ выражается формулой над $\{f,0,1\}$.

Лемма для $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$

Лемма. Если $f \notin \mathcal{T}_0$ и $g \notin \mathcal{T}_1$, то либо $\neg \in [f]$, либо $0, 1 \in [f, g]$.

Доказательство. Имеем $f(0, \ldots, 0) = 1$ и $g(1, \ldots, 1) = 0$.
Если $f(1, \ldots, 1) = 0$, то $f(x, \ldots, x) = \neg x$ и лемма доказана.
Пусть теперь $f(1, \ldots, 1) = 1$. Тогда $f(x, \ldots, x) = 1$ и, следовательно, $1 \in [f, g]$.
Остается показать, что $0 \in [f, g]$:

$$g(f(x, \ldots, x), \ldots, f(x, \ldots, x)) = g(1, \ldots, 1) = 0.$$

Следствие. Если $f \notin \mathcal{T}_0$, $g \notin \mathcal{T}_1$, $p \notin \mathcal{S}$ и $q \notin \mathcal{M}$, то либо $\neg, 0, 1 \in [f, p]$, либо $\neg, 0, 1 \in [f, g, q]$.

Лемма о нелинейной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{L}$, то $\& \in [f, 0, 1, \neg]$.

Доказательство. Пусть $f \notin \mathcal{L}$. Тогда многочлен Жегалкина содержит конъюнкцию двух переменных, например x_1 и x_2, откуда имеем $f(x_1, \ldots, x_n) =$

$$x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_n) + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_n) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_n) + f_4(x_3, \ldots, x_n),$$

причем $f_1(\sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$ для некоторого $(\sigma_3, \ldots, \sigma_n)$.
Тогда $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$, и

$g(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + (\alpha\beta + \gamma) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1 \,\&\, x_2$.

Лемма о нелинейной функции

Лемма. Если $f \notin \mathcal{L}$, то $\& \in [f, 0, 1, \neg]$.

Следствие. Если $f \notin \mathcal{T}_0$, $g \notin \mathcal{T}_1$, $p \notin \mathcal{S}$ и $q \notin \mathcal{M}$, $r \notin \mathcal{L}$ то либо $[f, p, r] = \mathcal{F}$, либо $[f, g, q, r] = \mathcal{F}$.