Булевы функции

- $B = \{0, 1\}$.
- Булева функция — функция $f : B^n \to B$.
- Число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}

Доказательство. Рассмотрим всевозможные булевы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поскольку каждая переменная x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ может принимать одно из двух значений (0 или 1), то число различных наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ равно 2^n. На каждом из 2^n различных наборов функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может принимать одно из двух значений (0 или 1). Следовательно, число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}

- Число функций от 1 переменной равно 4.
- Число функций от 2 переменных равно 16.
- Число функций от 3 переменных равно 256.
- Число функций от 4 переменных равно $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$.
- Число функций от 5 переменных равно $2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296$.

Булевы функции одной переменной

x	0	1
$f(x) = 0$	0	0
$f(x) = x$ тождественная функция	0	1
$f(x) = \neg x = \overline{x}$ отрицание	1	0
$f(x) = 1$	1	1

Заметим, что $\neg\neg x = x$.

Конъюнкция (и)

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$f(x, y) = x \mathbin{\&} y = x \wedge y = x \cdot y$	0	0	0	1

- $x \mathbin{\&} 0 = 0$;
- $x \mathbin{\&} 1 = x$;
- $x \mathbin{\&} \neg x = 0$;
- (Идемпотентность) $x \mathbin{\&} x = x$;
- (Коммутативность) $x \mathbin{\&} y = y \mathbin{\&} x$;
- (Ассоциативность) $x \mathbin{\&} (y \mathbin{\&} z) = (x \mathbin{\&} y) \mathbin{\&} z$.

Дизъюнкция (или)

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$f(x,y) = x \vee y$	0	1	1	1

- $x \vee 0 = x$;
- $x \vee 1 = 1$;
- $x \vee \neg x = 1$;
- (Идемпотентность) $x \vee x = x$;
- (Коммутативность) $x \vee y = y \vee x$;
- (Ассоциативность) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Законы двойственности: $\neg(x \vee y) = \neg x \,\&\, \neg y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \vee y$	0	1	1	1
$\neg(x \vee y)$	1	0	0	0
$\neg x$	1	1	0	0
$\neg y$	1	0	1	0
$\neg x \,\&\, \neg y$	1	0	0	0

Следовательно, $x \vee y = \neg(\neg x \,\&\, \neg y)$.

Законы двойственности: $\neg(x \mathbin{\&} y) = \neg x \vee \neg y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \mathbin{\&} y$	0	0	0	1
$\neg(x \mathbin{\&} y)$	1	1	1	0
$\neg x$	1	1	0	0
$\neg y$	1	0	1	0
$\neg x \vee \neg y$	1	1	1	0

$\neg(x \mathbin{\&} y) = \neg(\neg\neg x \mathbin{\&} \neg\neg y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg x \vee \neg y$.
Следовательно, $x \mathbin{\&} y = \neg(\neg x \vee \neg y)$.

Дистрибутивность: $(x \vee y) \& z = x \& z \vee y \& z$

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \vee y$	0	0	1	1	1	1	1	1
$(x \vee y) \& z$	0	0	0	1	0	1	0	1
$x \& z$	0	0	0	0	0	1	0	1
$y \& z$	0	0	0	1	0	0	0	1
$x \& z \vee y \& z$	0	0	0	1	0	1	0	1

Дистрибутивность: $x \mathbin{\&} y \vee z = (x \vee z) \mathbin{\&} (y \vee z)$

$$x \mathbin{\&} y \vee z = \neg\neg(x \mathbin{\&} y \vee z) = \neg(\neg(x \mathbin{\&} y) \mathbin{\&} \neg z) = \neg((\neg x \vee \neg y) \mathbin{\&} \neg z) = \neg(\neg x \mathbin{\&} \neg z \vee \neg y \mathbin{\&} \neg z) = \neg(\neg x \mathbin{\&} \neg z) \mathbin{\&} \neg(\neg y \mathbin{\&} \neg z) = (\neg\neg x \vee \neg\neg z) \mathbin{\&} (\neg\neg y \vee \neg\neg z) = (x \vee z) \mathbin{\&} (y \vee z)$$

Сумма (исключающее или)

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$f(x,y) = x + y = x \oplus y = x \dot{\vee} y$	0	1	1	0

- $x + 0 = x$;
- $x + 1 = \neg x$;
- $x + x = 0$;
- (Коммутативность) $x + y = y + x$;
- (Ассоциативность) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- Если $x \mathbin{\&} y = 0$, то $x + y = x \vee y$.

$x + y = x \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \mathbin{\&} y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$\neg y$	1	0	1	0
$x \mathbin{\&} \neg y$	0	0	1	0
$\neg x$	1	1	0	0
$\neg x \mathbin{\&} y$	0	1	0	0
$x \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \mathbin{\&} y$	0	1	1	0

Дистрибутивность: $(x + y) \mathbin{\&} z = x \mathbin{\&} z + y \mathbin{\&} z$

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$x + y$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(x + y) \mathbin{\&} z$	0	0	0	1	0	1	0	0
$x \mathbin{\&} z$	0	0	0	0	0	1	0	1
$y \mathbin{\&} z$	0	0	0	1	0	0	0	1
$x \mathbin{\&} y + x \mathbin{\&} z$	0	0	0	1	0	1	0	0

$x \mathbin{\&} y + x \mathbin{\&} z = x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg(x \mathbin{\&} z) \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg(x \mathbin{\&} y) =$
$x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} (\neg x \vee \neg z) \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} (\neg x \vee \neg y) =$
$x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg x \vee x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg x \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg y =$
$0 \vee x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg z \vee 0 \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg y = x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg y =$
$x \mathbin{\&} (y \mathbin{\&} \neg z \vee z \mathbin{\&} \neg y) = x \mathbin{\&} (y + z)$

Импликация: $x \to y = \neg x \vee y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \to y$	1	1	0	1
$\neg x$	1	1	0	0
$\neg x \vee y$	1	1	0	1

Эквивалентность

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$f(x, y) = x \leftrightarrow y$	1	0	0	1

- (Коммутативность) $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$
- (Ассоциативность) $x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$;
- $x \leftrightarrow y = \neg(x + y) = \neg(x \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \mathbin{\&} y) =$
  $\neg(x \mathbin{\&} \neg y) \mathbin{\&} \neg(\neg x \mathbin{\&} y) = (\neg x \vee \neg\neg y) \mathbin{\&} (\neg\neg x \vee \neg y) =$
  $(\neg x \vee y) \mathbin{\&} (x \vee \neg y) =$
  $\neg x \mathbin{\&} x \vee y \mathbin{\&} x \vee \neg x \mathbin{\&} \neg y \vee y \mathbin{\&} \neg y =$
  $0 \vee y \mathbin{\&} x \vee \neg x \mathbin{\&} \neg y \vee 0 = y \mathbin{\&} x \vee \neg x \mathbin{\&} \neg y.$

Эквивалентность: $x \leftrightarrow y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \to y = \neg x \vee y$	1	1	0	1
$y \to x = \neg y \vee x$	1	0	1	1
$x \leftrightarrow y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$	1	0	0	1

Штрих Шеффера $x \mid y = \neg(x \,\&\, y) = \neg x \vee \neg y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \mid y$	1	1	1	0

$\neg x = x \mid x$;
(Коммутативность) $x \mid y = y \mid x$;
$x \,\&\, y = \neg(x \mid y) = (x \mid y) \mid (x \mid y)$;
$x \vee y = \neg(\neg x \,\&\, \neg y) = \neg x \mid \neg y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$.

Стрелка Пирса $x \downarrow y = \neg(x \vee y) = \neg x \,\&\, \neg y$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \downarrow y$	1	0	0	0

$\neg x = x \downarrow x$;
(Коммутативность) $x \downarrow y = y \downarrow x$;
$x \vee y = \neg(x \downarrow y) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$;
$x \,\&\, y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg x \downarrow \neg y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$.

Выразимость через $\neg, \&, \vee$ 16-ти двухместных б.ф.

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$0 = x \mathbin{\&} \neg x$	0	0	0	0
$x \mathbin{\&} y$	0	0	0	1
$\neg(x \to y) = x \mathbin{\&} \neg y$	0	0	1	0
$x = x \mathbin{\&} x$	0	0	1	1
$\neg(y \to x) = \neg x \mathbin{\&} y$	0	1	0	0
$y = y \mathbin{\&} y$	0	1	0	1
$x + y = x \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \mathbin{\&} y$	0	1	1	0
$x \vee y$	0	1	1	1

Выразимость через $\neg, \&, \vee$ 16-ти двухместных б.ф.

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \downarrow y = \neg x \,\&\, \neg y$	1	0	0	0
$x \leftrightarrow y = x \,\&\, y \vee \neg x \,\&\, \neg y$	1	0	0	1
$\neg y$	1	0	1	0
$y \to x = x \vee \neg y$	1	0	1	1
$\neg x$	1	1	0	0
$x \to y = \neg x \vee y$	1	1	0	1
$x \mid y = \neg x \vee \neg y$	1	1	1	0
$1 = x \vee \neg x$	1	1	1	1

Зависимость между булевыми функциями

1. коммутативность:

$x \mathbin{\&} y = y \mathbin{\&} x$

$x \vee y = y \vee x$

$x + y = y + x$

$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$

$x \mid y = y \mid x$

$x \downarrow y = y \downarrow x$

2. ассоциативность:

$x \mathbin{\&} (y \mathbin{\&} z) = (x \mathbin{\&} y) \mathbin{\&} z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$x + (y + z) = (x + y) + z$

$x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$

3. дистрибутивность:

$x \mathbin{\&} (y \vee z) = (x \mathbin{\&} y) \vee (x \mathbin{\&} z)$

$x \vee (y \mathbin{\&} z) = (x \vee y) \mathbin{\&} (x \vee z)$

$x \mathbin{\&} (y + z) = (x \mathbin{\&} y) + (x \mathbin{\&} z)$

Зависимость между булевыми функциями

4. двойственность (законы де Моргана):

$\neg(x \mathbin{\&} y) = \neg x \vee \neg y$

$\neg(x \vee y) = \neg x \mathbin{\&} \neg y$

5. правила поглощения:

$x \mathbin{\&} (x \vee y) = x$

$x \vee (x \mathbin{\&} y) = x$

6.

$x \mathbin{\&} (\neg x \vee y) = x \mathbin{\&} y$

$x \vee (\neg x \mathbin{\&} y) = x \vee y$

7. закон двойного отрицания:

$\neg\neg x = x$

Зависимость между булевыми функциями

$$x \mathbin{\&} \neg x = x \mathbin{\&} 0 = x + x = 0$$
$$x \vee \neg x = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = x \to x = 1$$
$$x \vee x = x \mathbin{\&} x = x \vee 0 = x \mathbin{\&} 1 = x + 0 = x$$
$$x + 1 = x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \mid x = x \downarrow x = \neg x$$

$$x \to y = \neg x \vee y$$
$$x \leftrightarrow y = \neg(x + y) = (x \to y) \mathbin{\&} (y \to x) = (x \mathbin{\&} y) \vee (\neg x \mathbin{\&} \neg y)$$
$$x + y = \neg(x \leftrightarrow y) = (\neg x \mathbin{\&} y) \vee (x \mathbin{\&} \neg y)$$

$$x \mid y = \neg(x \mathbin{\&} y) = \neg x \vee \neg y$$
$$x \downarrow y = \neg(x \vee y) = \neg x \mathbin{\&} \neg y$$