Неопределенный интеграл

Первообразная, множество первообразных

Определение. Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Поскольку $(F(x)+C)'=f(x)$, где $C-$постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Теорема. Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если $F'(x)=f(x)$ и $\Psi'(x)=f(x)$, то $F(x)-\Psi(x)=C=\text{Const}$.

Доказательство: Обозначим $\Phi(x)=F(x)-\Psi(x)$ Согласно предположению $\Phi'(x)\equiv 0$. Следовательно, $\forall\ a,b$ имеем:

$$\Phi(b)-\Phi(a)=(\text{формула Лагранжа})=$$

$$=\Phi'(c)(b-a)=0 \implies \Phi=\Phi(b)=\Phi(a)=\text{Const}.$$

Определение. Множество всех первообразных одной функции называется **неопределенным интегралом этой функции** и обозначается $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx-$ подынтегральным выражением. Очевидно, что если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)\,dx=\int F'(x)\,dx=F(x)+C$, где $C-$произвольная постоянная интегрирования, то есть постоянная может принимать любые значения.

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq -1)$.	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)'=x^n$.
2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$.	$(\ln\lvert x\rvert+C)'=\dfrac{1}{x}$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$.
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$	$(-\cos x + C)' = \sin x.$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.	$(\sin x)' = \cos x.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C.$	$(\arcsin x + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C.$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
10. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C.$	$\left(\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert +$ $+C.$	$\left(\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert + C\right)' =$ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$

Приемы интегрирования

1. Тождественные преобразования подынтегрального выражения и сведение к табличным интегралам

Из свойства производной

$$\left[k\cdot f(x)+l\cdot g(x)\right]'=k\cdot f'(x)+l\cdot g'(x)$$

следует аналогичное свойство для неопределенных интегралов

$$\int\left[k\cdot f(x)+l\cdot g(x)\right]dx=k\cdot\int f(x)\,dx+l\cdot\int g(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int\frac{x-2}{x^3}dx$. Деля почленно числитель на знаменатель, представляя интеграл от разности в виде разности интегралов и вынося постоянный сомножитель за знак интеграла, получим в соответствии с таблицей

$$\int\frac{x-2}{x^3}dx=\int(x^{-2}-2x^{-3})dx=\int x^{-2}dx-2\int x^{-3}dx=\frac{x^{-1}}{-1}-2\frac{x^{-2}}{-2}+C=.$$
$$=x^{-2}-x^{-1}+C.$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$. Воспользуемся тождеством $1=\cos^2 x+\sin^2 x$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$
$$=-\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x+C.$$

2. Замена переменной в интеграле

Докажем, что если $F(x)+C=\int f(x)dx$, то $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$.

Доказательство. Имеем: $(F(x)+C)'=f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t))+C)'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\int f(x)dx=\left\{\begin{array}{c}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{array}\right\}=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

При подходящей замене переменной мы сводим заданный интеграл к табличному.

Пример 1. Найти $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Здесь $t=\sin x, \cos x dx = dt$. Следовательно, в соответствии с тем, что $\int e^t dt = e^t + C$, имеем $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$.

Пример 2. Найти $\int \mathrm{tg}x\,dx$. Сделаем замену $t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx$. Тогда $\int \mathrm{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$.

Пример 3. Найти $\int e^{-x^2}xdx$. Сделаем замену $-x^2=t$. Тогда $-2xdx=dt$ и $\int e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

3. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx + C.$$

(или $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$).

Доказательство. Справедливы соотношения:

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = u(x)\cdot v(x) + C$ и

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$

Сравнивая правые части, получим приведенную выше формулу.

Пример 1. Найти $\int e^x x\,dx$. Обозначим $x=u(x), v'(x)=e^x$. Тогда $v(x)=e^x, u'(x)=1$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим $\int e^x x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1)+C$.

Пример 2. Найти $\int (\ln x)^2 dx$ В этом примере мы применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int (\ln x)^2 dx = \left[\begin{array}{c} u = (\ln x)^2, u' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}, \\ v' = 1, v = x \end{array} \right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x \frac{x}{x} dx = x \cdot (\ln x)^2 -$$

$$-2\int \ln x dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x, u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, v = x \end{array} \right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2(x \ln x - \int \frac{x}{x} dx) =$$

$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$$