Производная сложной функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0)=y_0$. Пусть функция $g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда функция $h(x)=g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Имеем

$$h(x)-h(x_0)=g(f(x))-g(f(x_0))=g'(f(x_0))\cdot(f(x)-f(x_0))+\beta=$$
$$=g'(f(x_0))\cdot(f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\alpha)+\beta=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0)+g'(f(x_0))\cdot\alpha+$$
$$+\beta=g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\gamma,$$

где $\gamma=g'(f(x_0))\cdot\alpha+\beta$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x-x_0)$. Действительно, слагаемое $g'(f(x_0))\cdot\alpha$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x-x_0)$, так как сомножитель α обладает этим свойством. Слагаемое β – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(f(x)-f(x_0))$. Поэтому

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{\beta}{(x-x_0)}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{\beta}{(f(x)-f(x_0))}\cdot\frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)}=0.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Пример. Найдем производную $\ln|x|=\frac{1}{2}\ln x^2$. Пользуясь доказанным свойством, получим $(\ln|x|)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{1}{x}$.

Производная обратной функции

Даны функция $y=f(x)$ и обратная ей функция $x=g(y)$, т.е. $x=g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$,тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$, при этом $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(y_0))}$.

Действительно, если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$. Теперь

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{g'(y_0)}=\frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно,

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Пример. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Упражнение. В качестве приложения правила дифференцирования обратной функции докажите равенства

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\mathrm{arc\,tg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$;
$(\mathrm{arc\,ctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Производная параметрически заданной функции

Пусть $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[t_1,t_2]$, причем функции обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0\in(t_1,t_2),\ \varphi'(t_0)\neq 0,\ \varphi(t_0)=x_0, \psi(t_0)=y_0$. Считая, что $y=y(x)$, вычислим $\frac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом, а затем продифференцировать обе части заданного соотношения, применяя правило дифференцирования сложной функции.

Пример. Пусть в соотношении $x \cdot \cos y + \ln(x+y) = 5$ аргументом является x, функцией y. Продифференцируем по x заданное соотношение: $\cos y - x \cdot \sin y \cdot y'(x) + \dfrac{1 + y'(x)}{x+y} = 0$. Отсюда выражаем искомую производную: $y'(x)(\dfrac{1}{x+y} - x \cdot \sin y) = -\dfrac{1}{x+y} - \cos y$ или

$y'(x) = \dfrac{(x+y) \cdot \cos y + 1}{(x+y) \cdot x \cdot \sin y - 1}$.

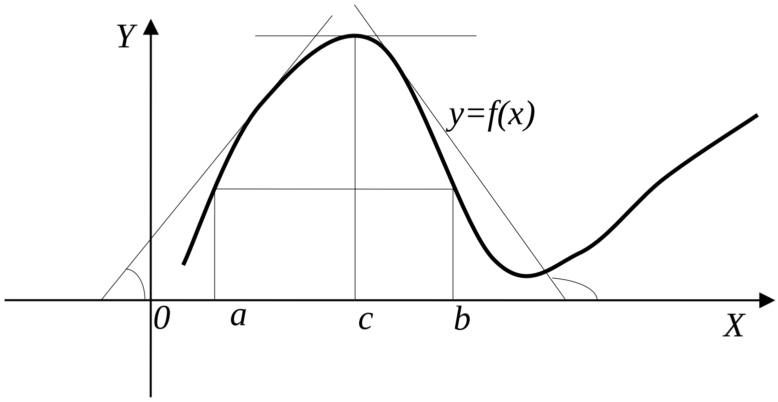
Метод логарифмического дифференцирования

Представим, что нам необходимо взять производную функции $y(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$. Для этого сначала прологарифмируем обе части соотношения: $\ln y(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$. А теперь продифференцируем обе части полученного соотношения по x: $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = \psi'(x) \cdot \ln \varphi(x) + \dfrac{\psi(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)}$ или $y'(x) = y(x) \cdot (\psi'(x) \cdot \ln \varphi(x) + \dfrac{\psi(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)})$. Логарифмическое дифференцирование имеет смысл применять также в случаях, когда необходимо взять производную произведения нескольких функций или производную частного от деления двух произведений.

Теоремы о дифференцируемых на интервале функциях

Терема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a\,,b)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала $(a\,,b)$, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c)=0$, $c\in(a\,,b)$.

На рисунке приведена геометрическая иллюстрация теоремы.



Доказательство. 1. В случае, когда $f(x)\equiv f(a)=f(b)$ вывод теоремы очевиден, и в качестве точки c можно взять любую внутреннюю точку интервала $(a\,,b)$.

2. Пусть функция $f(x)$ не является постоянной на отрезке $[a,b]$. По свойству непрерывных на отрезке функций существует внутренняя точка $c\in(a,b)$, в которой функция принимает либо минимальное, либо максимальное на отрезке значение. Пусть для определенности это будет максимальное значение: $f(x)-f(c)<0,\ \forall x\in[a,b]$. Значит, $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}<0$ при $\Delta x>0$, $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0$ при $\Delta x<0$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)$. Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0$. Поэтому единственная возможность дифференцируемости функции в точке c: $f'(c)=0$.