

Построение ДНФ и КНФ

- ▶ Построение эквивалентной формулы, содержащей только операции $\&$, \vee , \neg :

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y$$

$$x \leftrightarrow y = (x \& y) \vee (\neg x \& \neg y)$$

$$x + y = (\neg x \& y) \vee (x \& \neg y)$$

$$x \mid y = \neg(x \& y)$$

$$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$$

- ▶ Построение эквивалентной формулы, для которой операция отрицание \neg относится только к переменным:

$$\neg(x \& y) = \neg x \vee \neg y$$

$$\neg(x \vee y) = \neg x \& \neg y$$

Построение ДНФ и КНФ

- ▶ Раскрыть скобки по законам дистрибутивности:
 $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$ (для построения ДНФ)
 $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ (для построения КНФ)
- ▶ Для построения совершенных нормальных форм,
 добавить недостающие переменные в конъюнкты и
 дизъюнкты:
 $K = K \& 1 = K \& (x \vee \neg x) = K \& x \vee K \& \neg x$ (для построения
 СДНФ)
 $D = D \vee 0 = D \vee (x \& \neg x) = (D \vee x) \& (D \vee \neg x)$ (для
 построения СКНФ)

Вес ДНФ

- ▶ **Весом** ДНФ называется количество литералов, входящих в ДНФ.
- ▶ Например, вес ДНФ

$$x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_2$$

равен 7.

- ▶ **Задача.** По данной булевой функции f найти ДНФ

$$\bigvee_{i=1}^m K_i = f$$

с наименьшим весом. (Такая ДНФ называется **минимальной**.)

Импликаны

- ▶ Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \dots \& x_{i_k}^{\sigma_k}$$

называется **импликантом** булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$.

- ▶ Если K присутствует в некоторой ДНФ функции f , то K является импликантом f .
- ▶ Наоборот, если K является импликантом f , то $f = f \vee K$, что дает возможность добавить K в ДНФ функции f .

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

- ▶ $\bar{x} \& \bar{y} \& z$ — импликант,
- ▶ $\bar{x} \& y \& z$ — импликант,
- ▶ $x \& \bar{y} \& z$ — импликант,
- ▶ $x \& y \& \bar{z}$ — импликант,
- ▶ $\bar{x} \& z$ — импликант, так как если $x = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- ▶ $\bar{y} \& z$ — импликант, так как если $y = 0$ и $z = 1$, то $f = 1$,
- ▶ $K = x \& \bar{z}$ — не импликант, так как при $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ имеем $K = 1$, но $f = 0$.

Простые импликанты

- ▶ Импликант функции f называется **простым импликантом**, если ни одна его собственная часть не является импликантом f

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

- ▶ $\bar{x} \& \bar{y} \& z$ — не простой импликант, так как содержит импликанты $\bar{x} \& z$ и $\bar{y} \& z$,
- ▶ $\bar{x} \& y \& z$ содержит импликант $\bar{x} \& z$,
- ▶ $x \& \bar{y} \& z$ содержит импликант $\bar{y} \& z$,
- ▶ $x \& y \& \bar{z}$ — простой импликант,
- ▶ $\bar{x} \& z$ — простой импликант,
- ▶ $\bar{y} \& z$ — простой импликант.

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^m K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K' , являющийся собственной частью K_1 . Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^m K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^m K_i = K' \vee \bigvee_{i=2}^m K_i,$$

то есть получили ДНФ с меньшим весом, чем минимальная. Противоречие.

Сокращенная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Следствие. Пусть \mathcal{P} — множество всех простых импликант булевой функции f . Тогда $f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^m K_i$ — минимальная ДНФ.

Тогда $K_i \in \mathcal{P}$, $i = \overline{1, m}$, и

$$f = f \vee \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K = \bigvee_{i=1}^m K_i \vee \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K.$$

Сокращенная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Следствие. Пусть \mathcal{P} — множество всех простых импликант булевой функции f . Тогда $f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант функции f

$$f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$$

называется **сокращенной** ДНФ.

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

Сокращенная ДНФ для f :

$$f(x, y, z) = x \& y \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \vee \bar{y} \& z$$

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

- 0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).
- 1 Выписываем все возможные импликанты длины 1, не содержащие импликанты, выписанные в 0.
- 2 Выписываем все возможные импликанты длины 2, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.
- \vdots
- n Выписываем все возможные импликанты длины n , не содержащие импликанты, выписанные в 0, 1, ..., $n-1$.

Дизъюнкция выписанных импликант есть сокращенная ДНФ.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ , так как на шагах $0, 1, \dots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант K' , являющийся частью K . Выберем самый короткий такой K' . Тогда K' — простой. По уже доказанному K' был выписан на предыдущих шагах. Но тогда по алгоритму K не может быть выписан. Противоречие.

Таким образом, наш алгоритм выпишет все возможные простые импликанты функции f .