Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$

называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.

Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$

  называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

  для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.
- Если K присутствует в некоторой ДНФ функции f, то K является импликантом f.

Импликанты

- Элементарный конъюнкт
$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$
называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если
$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$
для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$.
- Если K присутствует в некоторой ДНФ функции f, то K является импликантом f.
- Наоборот, если K является импликантом f, то $f = f \vee K$.

Импликанты

- Элементарный конъюнкт

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \dots \,\&\, x_{i_k}^{\sigma_k}$$

  называется импликантом булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \implies f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

  для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$.
- Если K присутствует в некоторой ДНФ функции f, то K является импликантом f.
- Наоборот, если K является импликантом f, то $f = f \vee K$.
- Если K_1 и K_2 — конъюнкты и $K = K_1 \,\&\, K_2 \neq 0$, то $K = K_1 \,\&\, K_2$ – импликант для K_1 и для K_2.

Простые импликанты

- Импликант функции f называется простым импликантом, если ни одна его собственная часть не является импликантом f

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ.

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом.

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1.

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1. Тогда

$$f = K' \vee f$$

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i$$

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i$$

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i = K' \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i,$$

Простые импликанты и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$ является минимальной ДНФ. Докажем, что K_1 (например) является простым импликантом. Пусть не так: существует импликант K', являющийся собственной частью K_1. Тогда

$$f = K' \vee f = K' \vee \bigvee_{i=1}^{m} K_i = (K' \vee K_1) \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i = K' \vee \bigvee_{i=2}^{m} K_i,$$

то есть получили ДНФ с меньшим весом, чем минимальная. Противоречие.

Сокращенная ДНФ и минимальная ДНФ

Теорема. Каждый элементарный конъюнкт в минимальной ДНФ для булевой функции f является простым импликантом.

Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант булевой функции f. Тогда $f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант функции f

$$f = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} K$$

называется сокращенной ДНФ.

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).

1 Выписываем все возможные импликанты длины 1, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).

1 Выписываем все возможные импликанты длины 1, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

2 Выписываем все возможные импликанты длины 2, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

$\vdots$

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).

1 Выписываем все возможные импликанты длины 1, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

2 Выписываем все возможные импликанты длины 2, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

⋮

n Выписываем все возможные импликанты длины n, , не содержащие импликанты, выписанные в 0, 1, . . . , n-1.

Метод получения сокращенной ДНФ функции f

0 (Выписываем все возможные импликанты длины 0).

1 Выписываем все возможные импликанты длины 1, не содержащие импликанты, выписанные в 0.

2 Выписываем все возможные импликанты длины 2, не содержащие импликанты, выписанные в 0 и 1.

⋮

n Выписываем все возможные импликанты длины n, , не содержащие импликанты, выписанные в 0, 1, . . . , n-1.

Дизъюнкция выписанных импликант есть сокращенная ДНФ.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант K', являющийся частью K. Выберем самый короткий такой K'. Тогда K' — простой.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант K', являющийся частью K. Выберем самый короткий такой K'. Тогда K' — простой. По уже доказанному K' был выписан на предыдущих шагах. Но тогда по алгоритму K не может быть выписан. Противоречие.

Обоснование

1. Каждый простой импликант длины ℓ обязательно будет выписан на шаге ℓ, так как на шагах $0, 1, \ldots, \ell - 1$ ни одна его часть не может быть выписана.
2. Каждый выписанный импликант — простой, поскольку он не содержит ни одного импликанта меньшей длины. Предположим, что импликант K выписан на некотором шаге. Докажем, что он простой. Пусть он не простой. Тогда существует импликант K', являющийся частью K. Выберем самый короткий такой K'. Тогда K' — простой. По уже доказанному K' был выписан на предыдущих шагах. Но тогда по алгоритму K не может быть выписан. Противоречие.

Таким образом, наш алгоритм выпишет все возможные простые импликанты функции f.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \,\&\, g$.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \,\&\, g$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{p} K_i$ и $g = \bigvee_{j=1}^{q} L_j$ — сокращенные ДНФ для функций f и g соответственно.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \,\&\, g$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{p} K_i$ и $g = \bigvee_{j=1}^{q} L_j$ — сокращенные ДНФ для функций f и g соответственно. Тогда

$$(\bigvee_{i=1}^{p} K_i) \,\&\, (\bigvee_{j=1}^{q} L_j) = \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j$$

является ДНФ для $f \,\&\, g$.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \,\&\, g$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{p} K_i$ и $g = \bigvee_{j=1}^{q} L_j$ — сокращенные ДНФ для функций f и g соответственно. Тогда

$$(\bigvee_{i=1}^{p} K_i) \,\&\, (\bigvee_{j=1}^{q} L_j) = \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j$$

является ДНФ для $f \,\&\, g$.
Пусть M – простой импликант функции $f \,\&\, g$. Тогда он является импликантом как f, так и g.

Сокращенная ДНФ для конъюнкции функций

Теорема. Конъюнкция сокращенных ДНФ для функций f и g является сокращенной ДНФ для конъюнкции $f \,\&\, g$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{p} K_i$ и $g = \bigvee_{j=1}^{q} L_j$ — сокращенные ДНФ для функций f и g соответственно. Тогда

$$(\bigvee_{i=1}^{p} K_i) \,\&\, (\bigvee_{j=1}^{q} L_j) = \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j$$

является ДНФ для $f \,\&\, g$.
Пусть M – простой импликант функции $f \,\&\, g$. Тогда он является импликантом как f, так и g. Следовательно, существуют простые импликанты K_{i_0} функции f и L_{j_0} функции g такие, что M — импликант для K_{i_0} и L_{j_0}.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта $K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$, входящего в ДНФ функции $f \,\&\, g$.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта $K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$, входящего в ДНФ функции $f \,\&\, g$. Поскольку, M — простой импликант функции $f \,\&\, g$, то $M = K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$ и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта $K_{i_0} \& L_{j_0}$, входящего в ДНФ функции $f \& g$. Поскольку, M — простой импликант функции $f \& g$, то $M = K_{i_0} \& L_{j_0}$ и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \& L_j = f \& g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \& L_j = f \& g$.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта K_{i_0} & L_{j_0}, входящего в ДНФ функции f & g. Поскольку, M — простой импликант функции f & g, то $M = K_{i_0}$ & L_{j_0} и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \mathbin{\&} L_j = f \mathbin{\&} g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \mathbin{\&} L_j = f \mathbin{\&} g$. Следовательно, он импликант функции f & g. Допустим, что M — не простой импликант функции,

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта K_{i_0} & L_{j_0}, входящего в ДНФ функции f & g. Поскольку, M — простой импликант функции f & g, то $M = K_{i_0}$ & L_{j_0} и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$. Следовательно, он импликант функции f & g. Допустим, что M — не простой импликант функции, тогда существует простой импликант M' такой, что M — является импликантом для M'.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта K_{i_0} & L_{j_0}, входящего в ДНФ функции f & g. Поскольку, M — простой импликант функции f & g, то $M = K_{i_0}$ & L_{j_0} и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$. Следовательно, он импликант функции f & g. Допустим, что M — не простой импликант функции, тогда существует простой импликант M' такой, что M — является импликантом для M'. По доказанному выше, M' – входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$,

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта $K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$, входящего в ДНФ функции $f \,\&\, g$. Поскольку, M — простой импликант функции $f \,\&\, g$, то $M = K_{i_0} \,\&\, L_{j_0}$ и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$. Следовательно, он импликант функции $f \,\&\, g$. Допустим, что M — не простой импликант функции, тогда существует простой импликант M' такой, что M — является импликантом для M'. По доказанному выше, M' – входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$, следовательно, M поглощается M'.

Продолжение доказательства

Значит, M — импликант для конъюнкта K_{i_0} & L_{j_0}, входящего в ДНФ функции f & g. Поскольку, M — простой импликант функции f & g, то $M = K_{i_0}$ & L_{j_0} и входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$.

Пусть теперь M — некоторый конъюнкт из $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$. Следовательно, он импликант функции f & g. Допустим, что M — не простой импликант функции, тогда существует простой импликант M' такой, что M — является импликантом для M'. По доказанному выше, M' – входит в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$, следовательно, M поглощается M'. Таким образом, в $\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{q} K_i \,\&\, L_j = f \,\&\, g$ после поглощения входят лишь простые импликанты функции f & g.

Метод Нельсона нахождения сокращенной ДНФ

Можно заметить, что ДНФ вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_k^{\sigma_k}$ является сокращенной ДНФ

Метод Нельсона нахождения сокращенной ДНФ

Можно заметить, что ДНФ вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_k^{\sigma_k}$ является сокращенной ДНФ (Почему?).

Метод Нельсона нахождения сокращенной ДНФ

Можно заметить, что ДНФ вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_k^{\sigma_k}$ является сокращенной ДНФ (Почему?).

Метод Нельсона состоит в раскрытии всех скобок в КНФ (последовательно или всех сразу) с удалением получающихся конъюнктов по закону поглощения $K_1 K_2 \vee K_1 = K_1$.

Тупиковая ДНФ

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант f. ДНФ вида $f = \bigvee_{K \in \mathcal{S}} K$, где $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, называется тупиковой ДНФ, если для всех $S' \subsetneq S$ имеем $f \neq \bigvee_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Тупиковая ДНФ

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант f. ДНФ вида $f = \bigvee_{K \in \mathcal{S}} K$, где $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, называется тупиковой ДНФ, если для всех $S' \subsetneq S$ имеем $f \neq \bigvee_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Теорема. Минимальная ДНФ является тупиковой.

Тупиковая ДНФ

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых импликант f. ДНФ вида $f = \bigvee_{K \in \mathcal{S}} K$, где $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, называется тупиковой ДНФ, если для всех $S' \subsetneq S$ имеем $f \neq \bigvee_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Теорема. Минимальная ДНФ является тупиковой.
Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{K \in S} K$ — минимальная ДНФ для f. Ясно, что вес $\bigvee_{K \in \mathcal{S}'} K$ будет еще меньше при $S' \subsetneq S$. Поэтому, $f \neq \bigvee_{K \in \mathcal{S}'} K$.

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

Сокращенная ДНФ для f:

$$f(x, y, x) = x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \overline{z} \vee \overline{x} \mathbin{\&} z \vee \overline{y} \mathbin{\&} z$$

является тупиковой

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	0	1	1	0

Сокращенная ДНФ для f:

$$f(x, y, x) = x \;\&\; y \;\&\; \overline{z} \vee \overline{x} \;\&\; z \vee \overline{y} \;\&\; z$$

является тупиковой и, следовательно, минимальной.

Нахождение минимальной ДНФ

Нахождение минимальной ДНФ

1. Строим сокращенную ДНФ.

Нахождение минимальной ДНФ

1. Строим сокращенную ДНФ.
2. Последовательно удаляем лишние конъюнкты из сокращенной ДНФ, находим все тупиковые ДНФ.

Нахождение минимальной ДНФ

1. Строим сокращенную ДНФ.
2. Последовательно удаляем лишние конъюнкты из сокращенной ДНФ, находим все тупиковые ДНФ.
3. Находим минимальную ДНФ, выбирая тупиковую ДНФ с наименьшим весом.

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	1	1	1	1	0

1. Сокращенная ДНФ = ?
2. Тупиковые ДНФ = ?
3. Минимальная ДНФ = ?

Булевы функции как подмножества $\mathbb{R}^n$

- $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ и $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Булевы функции как подмножества $\mathbb{R}^n$

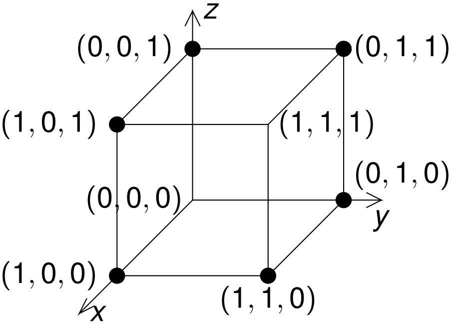
- $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ и $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Отождествим функцию $f : B^n \to B$ с множеством

$$N_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$

Булевы функции как подмножества $\mathbb{R}^n$

- $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ и $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Отождествим функцию $f : B^n \to B$ с множеством

$$N_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n | f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}$$



Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что
$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$
которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

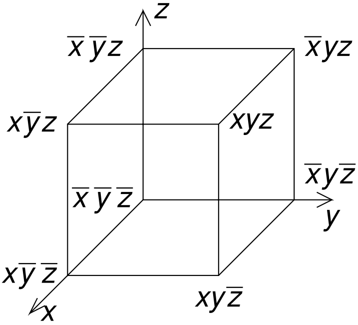
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Полные конъюнкты (0 – мерные грани) — вершины:



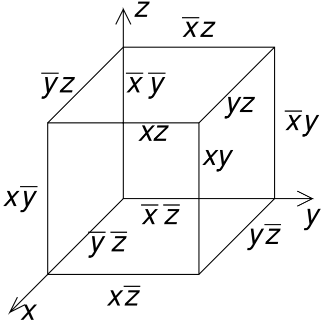
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n-1$ (1 – мерные грани) — ребра:



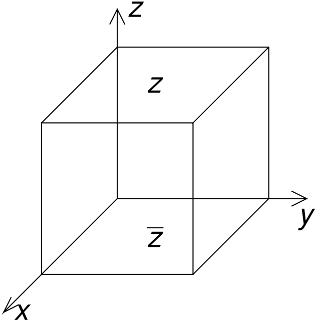
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n-2$ (2 – мерные грани) — грани:



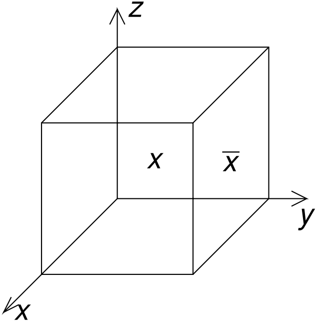
Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ таких, что

$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \ldots, x_{i_k} = \sigma_k,$$

которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

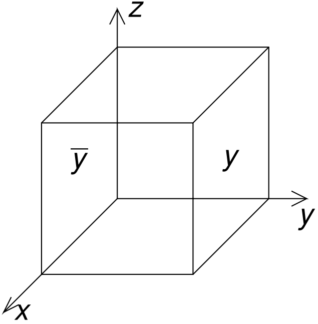
Конъюнкты длины $n-2$ (2 – мерные грани) — грани:



Элементарные конъюнкты

- В частности, $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ отождествляем с множеством $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ таких, что
$$x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2, \dots, x_{i_k} = \sigma_k,$$
которое называется $(n-k)$ – мерной гранью.

Конъюнкты длины $n-2$ (2 – мерные грани) — грани:



Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$

Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$

Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$
- Если $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ для любого i $(1 \leq i \leq m)$ и $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{m} N_{K_i}$

Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$
- Если $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ для любого i $(1 \leq i \leq m)$ и $N_f = \bigcup_{i=1}^{m} N_{K_i}$
- Если K — импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$

Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$
- Если $f = \bigvee_{i=1}^{m} K_i$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ для любого i $(1 \leq i \leq m)$ и $N_f = \bigcup_{i=1}^{m} N_{K_i}$
- Если K — импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$
- Если K — простой импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$ и для любой грани $N_{K'}$: $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f \Rightarrow N_K = N_{K'}$ (такая грань называется максимальной гранью)

Соотношения между f и N_f

- Если $f = g \vee h$, то $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$
- Если $f = g \vee h$, то $N_f = N_g \cup N_h$
- Если $f = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ для любого i $(1 \leq i \leq m)$ и $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{m} N_{K_i}$
- Если K — импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$
- Если K — простой импликант для f, то $N_K \subseteq N_f$ и для любой грани $N_{K'}$: $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f \Rightarrow N_K = N_{K'}$ (такая грань называется максимальной гранью)
- Если N_K — максимальная грань, то K — простой импликант

Метод получения сокращенной ДНФ

1. Выписываем все грани, содержащиеся в f.

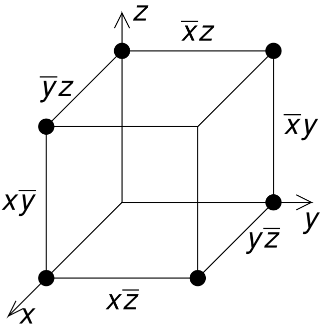
Метод получения сокращенной ДНФ

1. Выписываем все грани, содержащиеся в f.
2. Выписываем все ребра, содержащиеся в f, но не содержащиеся в 1.

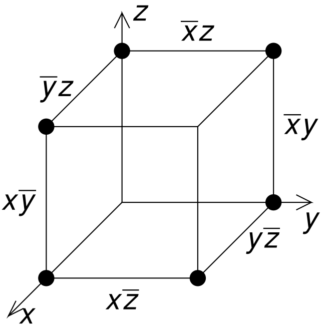
Метод получения сокращенной ДНФ

1. Выписываем все грани, содержащиеся в f.
2. Выписываем все ребра, содержащиеся в f, но не содержащиеся в 1.
3. Выписываем все вершины, содержащиеся в f, но не содержащиеся в 1 и 2.

Пример построения сокращенной ДНФ

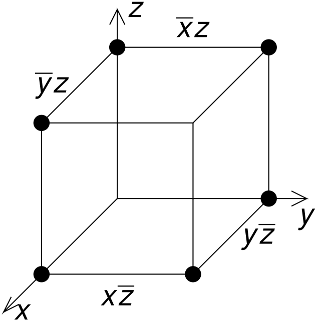


Пример построения сокращенной ДНФ

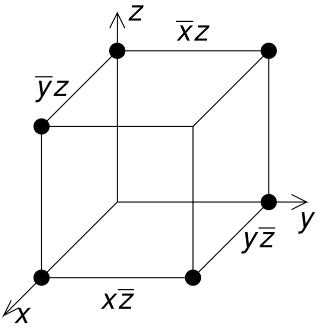


$$x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z$$

Тупиковая ДНФ № 1

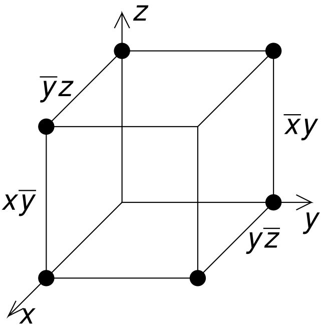


Тупиковая ДНФ № 1

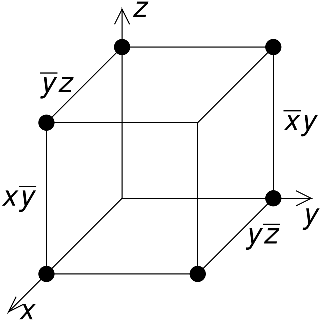


$x\overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z$

Тупиковая ДНФ № 2

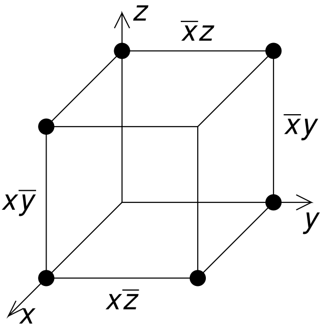


Тупиковая ДНФ № 2

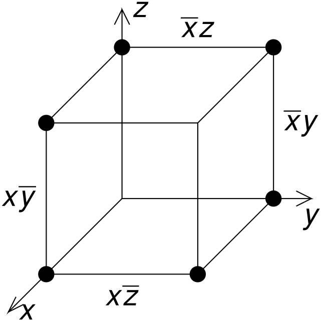


$x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z$

Тупиковая ДНФ № 3

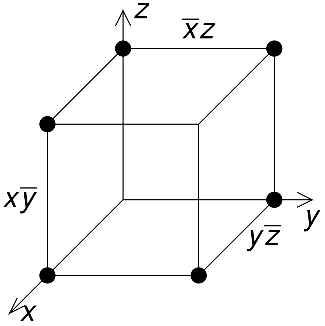


Тупиковая ДНФ № 3

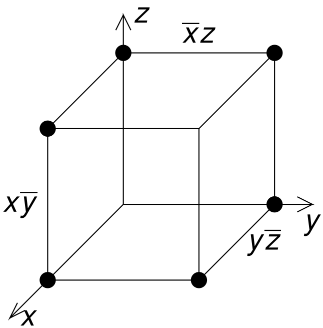


$$x\overline{z} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z$$

Тупиковая ДНФ № 4

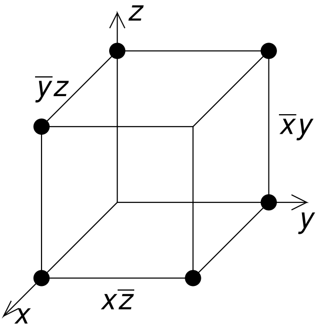


Тупиковая ДНФ № 4

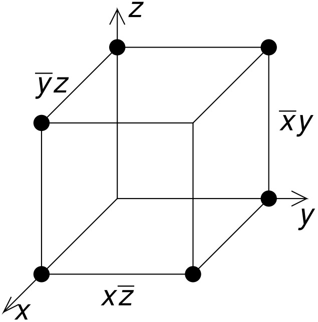


$x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z$

Тупиковая ДНФ № 5



Тупиковая ДНФ № 5



$x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z$