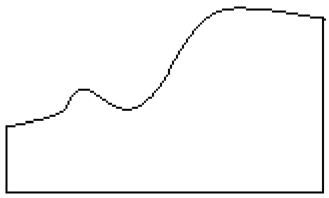
Интеграл Римана

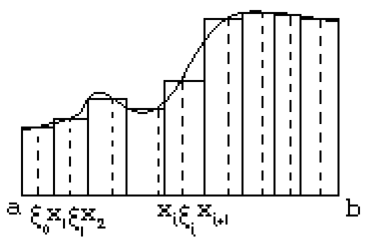
Площадь криволинейной трапеции

Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Для того, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.



Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,n$, где $x_0 = a,\ x_n = b$. На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами $(\xi_i, f(\xi_i))$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Δ называется **диаметром разбиения**. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем $\sigma(f,R,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$. Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел $\lim_{\Delta\to 0}\sigma(f,R,\xi)=I$, причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$. Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y=f(x)$.

Любая **непрерывная** на отрезке функция является **интегрируемой** на этом отрезке. Хотя класс интегрируемых по Риману функций значительно шире, чем класс непрерывных функций, мы будем рассматривать только интегралы от непрерывных функций.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали **интегралом** – так же, как множество первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Отметим пока очевидные свойства интеграла Римана, следующие из свойств сумм и пределов.

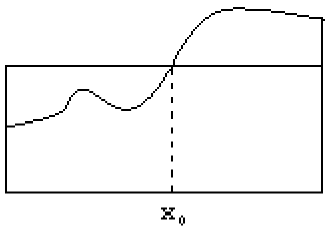
1. **Линейность**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β– произвольные постоянные, то функция $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем $\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$.
2. **Аддитивность**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c\in[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$. Следствием этой формулы можно считать соотношение $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$. То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.

3. **Интегральное неравенство**. Если $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

3-а. Если $f(x) \geq g(x),\ x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

3-б. $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a,b]$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$

4. **Теорема о среднем**. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a)$. То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



Доказательство. В соответствии со свойством 3-б $m \leq \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M.$

В силу свойства непрерывной функции существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}.$

Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Будем рассматривать интегралы от этой функции на отрезках $[a,t]$ при всевозможных $t \in [a,b]$. Очевидно, что результат интегрирования зависит от значения верхнего предела интегрирования. Поэтому обозначим $I(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$. Имеем $I(a) = 0,\ I(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Рассмотрим $I(t+\Delta t) - I(t) = \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)dx$. В соответствии с теоремой о среднем существует такое значение $\theta \in (0,1)$, что

$\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t+\theta\cdot\Delta t)\cdot\Delta t$. Следовательно, $\dfrac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t} = f(t+\theta\cdot\Delta t)$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t\to 0$ и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке $t\in[a,b]$, получим
$I'(t)=f(t)$.

Последнее означает, что функция $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Следовательно, если $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)=I(x)+C$ по свойству двух первообразных одной и той же функции. Следовательно, $\Phi(a)=C$, так как $I(a)=0$, и $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx+C$. Значит,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b)-\Phi(a).$$

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют **определенным интегралом**) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Методы вычисления интеграла Римана

Благодаря формуле Ньютона-Лейбница вычисление интеграла сводится к отысканию первообразной и вычислению значений этой первообразной в концах отрезка интегрирования. Поэтому основные приемы вычисления интеграла Римана так же, как в случае неопределенного интеграла, – замена переменной и интегрирование по частям.

1. Замена переменной. Пусть $x=\varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, где $\varphi(t)$ – монотонная непрерывная функция, имеющая непрерывную производную на интервале $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Согласно условию $\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$.

П р и м е р. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot \cos t dt$. Сделаем замену $\sin t = z$. Монотонная на отрезке $[0, \pi/2]$ функция $\sin t$ отображает этот отрезок в отрезок $[0,1]$. Поэтому $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot \cos t dt = \int_0^1 z^3 dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

2. **Интегрирование по частям**. Справедлива следующая формула: $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$.

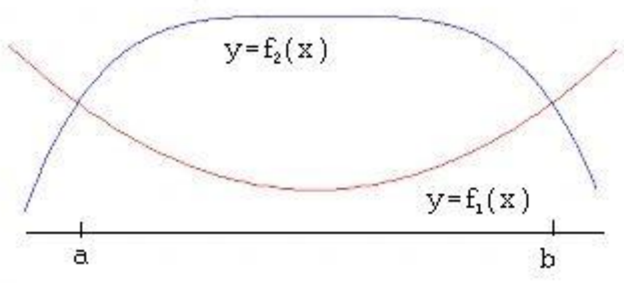
Доказательство. Так как согласно формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b$ и согласно свойству определенного интеграла $\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = \int_a^b u(x) \cdot (v(x))' dx + \int_a^b (u(x))' \cdot v(x) dx$, сравнивая правые части последних двух равенств, получим требуемую формулу.

П р и м е р. $\int_1^e \ln x dx = x \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx = e - (e-1) = 1$.

Приложения интеграла Римана

Интеграл Римана по отрезку был нами введен как площадь криволинейной трапеции. Понятие площади неотделимо от понятия интеграла. С его помощью можно вычислять площади любых плоских областей, а также длины дуг, площади поверхностей и объемы тел.

1.Вычислить **площадь области, расположенной между двумя кривыми** $y = f_1(x)$ **и** $y = f_2(x)$ **и над отрезком** $[a,b]$, причем $f_1(a) = f_2(a), \quad f_1(b) = f_2(b)$.

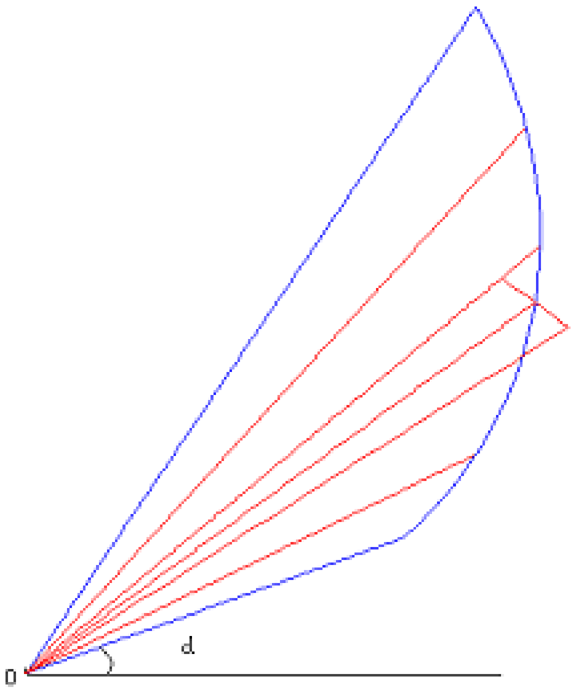


Очевидно, что площадь области между кривыми равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций, поэтому

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx .$$

2. Вычислить **площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами (в полярных координатах)** $\varphi=\alpha$ **и** $\varphi=\beta$ **, а также заданной в полярных координатах кривой** $r=f(\varphi),\ \ \alpha<\varphi<\beta$ **.**

Проведем внутри криволинейного сектора лучи $\varphi=\varphi_k,\ k=1,\ldots,n-1$, разбивающие исходный сектор на мелкие криволинейные секторы $\varphi_k<\varphi<\varphi_{k+1}$, причем $\varphi_0=\alpha,\ \ \varphi_n=\beta$.



Заменим каждый мелкий криволинейный сектор круговым сектором с тем же углом при вершине и радиусом, равным значению $r(\tilde{\varphi}_k)$, где $\tilde{\varphi}_k\in[\varphi_k,\varphi_{k+1}]$. Тогда площадь кругового мелкого сектора равна $r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1}-\varphi_k)/2$. При этом чем меньше разность $\varphi_{k+1}-\varphi_k$, тем меньше площадь кругового мелкого сектора отличается от площади соответствующего криволинейного мелкого сектора.

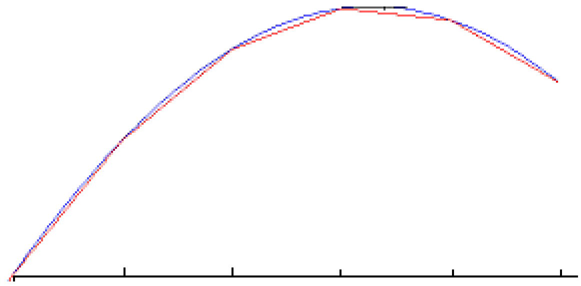
При достаточно частом разбиении исходного криволинейного сектора площадь его достаточно близка к величине

$$\sum_{k=0}^{n} r^2(\tilde{\varphi}_k)(\varphi_{k+1}-\varphi_k)/2=\sum_{k=1}^{n+1} r^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k/2 .$$

Если теперь устремить к нулю наименьший из растворов малых криволинейных секторов, мы получим предел интегральных сумм –

интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$, который совпадает с площадью исходного криволинейного сектора.

3.Вычислить **длину дуги кривой** $y = f(x),\ x \in [a,b]$**.** Длиной дуги кривой мы будем называть предельную сумму длин вписанных в дугу хорд при стремлении этих хорд к точкам.



Разобъем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,n$, где $x_0 = a,\ x_n = b$. Длина хорды, расположенной над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, равна $\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. Воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа и получим длину этой же хорды в виде

$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + [f'(\xi_{i+1})(x_{i+1}-x_i)]^2} = \sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$,

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Таким образом, длина дуги всей кривой может быть приближена суммой $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_{i+1})^2}\Delta x_i$, причем чем мельче разбиение отрезка $[a,b]$, тем точнее результат. При стремлении длины наименьшего из отрезков разбиения к нулю мы получим из суммы интеграл: $\int\limits_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$, который и дает выражение длины дуги данной кривой.

4. Вычислить **длину дуги пространственной кривой**, заданной параметрически в виде

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_0, T].$$

Для вычисления ее длины применяют формулу

$$S = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$