ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

x	y	$x \vee y$	$x + y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

- $\overline{x} = 1 + x$.
- Если $xy = 0$, то $x \vee y = x + y$.
- Если $xy = 1$, то $x \vee y = 1$ и $x + y = 0$. Поэтому,

  $$x \vee y = x + y + xy$$

  для всех x и y.
- СДНФ=сокр. ДНФ=тупик. ДНФ=миним. ДНФ

  $$x + y = \overline{x}y \vee x\overline{y}.$$

Общие свойства

$\vee$	$+$
$x \vee 0 = x$	$x + 0 = x$
$x \vee \overline{x} = 1$	$x + \overline{x} = 1$
Коммутативность $x \vee y = y \vee x$	Коммутативность $x + y = y + x$
Ассоциативность $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	Ассоциативность $(x + y) + z = x + (y + z)$
Дистрибутивность $x(y \vee z) = xy \vee xz$	Дистрибутивность $x(y + z) = xy + xz$

Отличия

$\vee$	$+$
$x \vee x = x$	$x + x = 0$
$x \vee 1 = 1$	$x + 1 = \overline{x}$
Дистрибутивность $x \vee yz = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$	$1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 = (1+0) \cdot (1+1)$
Двойственность $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$	

Дизъюнкции элементарных конъюнктов без отрицаний

- Конъюнкция — монотонная функция. Поэтому элементарные конъюнкты без отрицаний — монотонные функции.
- Дизъюнкция — монотонная функция. Поэтому дизъюнкции нескольких элементарных конъюнктов без отрицаний — монотонные функции.

Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. 0, 1, xy, $1 + x$, $x + y$, $x + y + xy$, $1 + x + xy + xyz$, $\ldots$

Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования. Представим f в СДНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Заметим, что при $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) \neq (\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_n')$ имеем

$$(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}) \cdot (x_1^{\sigma_1'} \cdot x_2^{\sigma_2'} \cdots x_n^{\sigma_n'}) = 0.$$

Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Поэтому,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что любой элементарный конъюнкт $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$ представляется в виде многочлена Жегалкина.

Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Без ограничений общности можно считать, что

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_k = 0, \sigma_{k+1} = 1, \sigma_{k+2=1}, \ldots, \sigma_n = 1.$$

Тогда
$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$
$= (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$
$= \sum\limits_K K \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n$, где суммирование проводится по всем конъюнктам K без отрицаний от переменных $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от n аргументов. Пусть G_i — количество различных многочленов Жегалкина функции f_i, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для количества G всех многочленов Жегалкина от n аргументов имеем

$$G = \sum_{i=1}^{N} G_i \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N = 2^{2^n} = G,$$

поскольку всего существует только 2^n конъюнктов без отрицаний, каждый из которых может входить или не входить в многочлен.

Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от n аргументов. Пусть G_i — количество различных многочленов Жегалкина функции f_i, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для количества G всех многочленов Жегалкина от n аргументов имеем

$$G = \sum_{i=1}^{N} G_i \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N = 2^{2^n} = G,$$

поскольку всего существует только 2^n конъюнктов без отрицаний, каждый из которых может входить или не входить в многочлен. Поэтому, $G_i = 1$ для каждого $i = \overline{1, N}$, то есть каждая f_i имеет только один многочлен Жегалкина.

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	1	1	1	1	0

$$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} = (1+x)(1+y)z + (1+x)(1+z)y + (1+x)yz + (1+y)(1+z)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (1+x+y+xy)z + (1+x+z+xz)y + (1+x)yz + (1+y+z+yz)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (z+xz+yz+xyz) + (y+xy+zy+xzy) + (yz+xyz) + (x+yx+zx+yzx) + (xz+yxz) + (xy+zxy) = x+y+z+xy+xz+yz$$

Пример

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	1	1	1	1	0
$\overline{f}$	1	0	0	0	0	0	0	1

$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz) = 1 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz =$
$1 + (1+x)(1+y)(1+z) + xyz =$
$1+(1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz)+xyz = x+y+z+xy+xz+yz$

Формула для многочлена Жегалкина

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(\sigma_1,\dots\sigma_n)} f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) x_1^{\sigma_1}\cdots x_n^{\sigma_n} =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)(x_1+\overline{\sigma_1})\cdots(x_n+\overline{\sigma_n}) =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} \sum_{(\tau_1,\dots\tau_n)\geq(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) x_1\widehat{\ }\tau_1\cdots x_n\widehat{\ }\tau_n =$$

$$= \sum_{(\tau_1,\dots,\tau_n)} \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\leq(\tau_1,\dots,\tau_n)} f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) x_1\widehat{\ }\tau_1\cdots x_n\widehat{\ }\tau_n =$$

$$= \sum_{(\tau_1,\dots,\tau_n)} x_1\widehat{\ }\tau_1\cdots x_n\widehat{\ }\tau_n \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\leq(\tau_1,\dots,\tau_n)} f(\sigma_1,\dots\sigma_n).$$