# ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} = 1 + x$.

# ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} = 1 + x$.
- Если $xy = 0$, то $x \vee y = x + y$.

# ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} = 1 + x$.
- Если $xy = 0$, то $x \vee y = x + y$.
- Если $xy = 1$, то $x \vee y = 1$ и $x + y = 0$.

## ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} = 1 + x$.
- Если $xy = 0$, то $x \vee y = x + y$.
- Если $xy = 1$, то $x \vee y = 1$ и $x + y = 0$. Поэтому,

$$x \vee y = x + y + xy$$

для всех $x$ и $y$.

# ИЛИ vs Исключающее ИЛИ

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $x + y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

- $\overline{x} = 1 + x$.
- Если $xy = 0$, то $x \vee y = x + y$.
- Если $xy = 1$, то $x \vee y = 1$ и $x + y = 0$. Поэтому,

$$x \vee y = x + y + xy$$

  для всех $x$ и $y$.
- СДНФ=сокр. ДНФ=тупик. ДНФ=миним. ДНФ

$$x + y = \overline{x}y \vee x\overline{y}.$$

# Общие свойства

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee 0 = x$ | $x + 0 = x$ |
| | |

# Общие свойства

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee 0 = x$ | $x + 0 = x$ |
| $x \vee \overline{x} = 1$ | $x + \overline{x} = 1$ |

# Общие свойства

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee 0 = x$ | $x + 0 = x$ |
| $x \vee \overline{x} = 1$ | $x + \overline{x} = 1$ |
| Коммутативность<br>$x \vee y = y \vee x$ | Коммутативность<br>$x + y = y + x$ |
| | |

# Общие свойства

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee 0 = x$ | $x + 0 = x$ |
| $x \vee \overline{x} = 1$ | $x + \overline{x} = 1$ |
| Коммутативность<br>$x \vee y = y \vee x$ | Коммутативность<br>$x + y = y + x$ |
| Ассоциативность<br>$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ | Ассоциативность<br>$(x + y) + z = x + (y + z)$ |

# Общие свойства

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee 0 = x$ | $x + 0 = x$ |
| $x \vee \overline{x} = 1$ | $x + \overline{x} = 1$ |
| Коммутативность<br>$x \vee y = y \vee x$ | Коммутативность<br>$x + y = y + x$ |
| Ассоциативность<br>$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ | Ассоциативность<br>$(x + y) + z = x + (y + z)$ |
| Дистрибутивность<br>$x(y \vee z) = xy \vee xz$ | Дистрибутивность<br>$x(y + z) = xy + xz$ |

# Отличия

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee x = x$ | $x + x = 0$ |
| | |

# Отличия

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee x = x$ | $x + x = 0$ |
| $x \vee 1 = 1$ | $x + 1 = \overline{x}$ |

# Отличия

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee x = x$ | $x + x = 0$ |
| $x \vee 1 = 1$ | $x + 1 = \overline{x}$ |
| Дистрибутивность<br>$x \vee yz = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ | $1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 = (1 + 0) \cdot (1 + 1)$ |

# Отличия

| $\vee$ | $+$ |
|---|---|
| $x \vee x = x$ | $x + x = 0$ |
| $x \vee 1 = 1$ | $x + 1 = \overline{x}$ |
| Дистрибутивность<br>$x \vee yz = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ | $1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 = (1 + 0) \cdot (1 + 1)$ |
| Двойственность<br>$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$<br>$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ | |

# Дизъюнкции элементарных конъюнктов без отрицаний

- Конъюнкция — монотонная функция.

# Дизъюнкции элементарных конъюнктов без отрицаний

- Конъюнкция — монотонная функция. Поэтому элементарные конъюнкты без отрицаний — монотонные функции.
- Дизъюнкция — монотонная функция.

# Дизъюнкции элементарных конъюнктов без отрицаний

- Конъюнкция — монотонная функция. Поэтому элементарные конъюнкты без отрицаний — монотонные функции.
- Дизъюнкция — монотонная функция. Поэтому дизъюнкции нескольких элементарных конъюнктов без отрицаний — монотонные функции.

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$,

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. 0, 1,

## Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$, $1$, $xy$,

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$, $1$, $xy$, $1 + x$,

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$, $1$, $xy$, $1 + x$, $x + y$,

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$, $1$, $xy$, $1+x$, $x+y$, $x+y+xy$,

# Суммы элементарных конъюнктов без отрицаний

Определение. Многочленом Жегалкина называется сумма нескольких элементарных конъюнктов без от отрицаний.

Примеры. $0$, $1$, $xy$, $1 + x$, $x + y$, $x + y + xy$, $1 + x + xy + xyz$, $\ldots$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования. Представим $f$ в СДНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования. Представим $f$ в СДНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Заметим, что при $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) \neq (\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_n)$ имеем

$$(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}) \cdot (x_1^{\sigma'_1} \cdot x_2^{\sigma'_2} \cdots x_n^{\sigma'_n}) = 0.$$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Поэтому,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Поэтому,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)\in B^n : f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что любой элементарный конъюнкт $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$ представляется в виде многочлена Жегалкина.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Без ограничений общности можно считать, что

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_k = 0, \sigma_{k+1} = 1, \sigma_{k+2=1}, \ldots, \sigma_n = 1.$$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Без ограничений общности можно считать, что

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_k = 0, \sigma_{k+1} = 1, \sigma_{k+2=1}, \ldots, \sigma_n = 1.$$

Тогда

$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Без ограничений общности можно считать, что

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_k = 0, \sigma_{k+1} = 1, \sigma_{k+2=1}, \ldots, \sigma_n = 1.$$

Тогда
$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$
$= (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Теорема. Любая булева функция $f : B^n \to B$ представляется в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом

Доказательство существования (продолжение). Без ограничений общности можно считать, что

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_k = 0, \sigma_{k+1} = 1, \sigma_{k+2=1}, \ldots, \sigma_n = 1.$$

Тогда
$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$
$= (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n =$
$= \sum\limits_{K} K \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n$, где суммирование проводится по всем конъюнктам $K$ без отрицаний от переменных $x_1, x_2, \ldots x_k$.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов. Пусть $G_i$ — количество различных многочленов Жегалкина функции $f_i$, $i = \overline{1, N}$.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов. Пусть $G_i$ — количество различных многочленов Жегалкина функции $f_i$, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов. Пусть $G_i$ — количество различных многочленов Жегалкина функции $f_i$, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для количества $G$ всех многочленов Жегалкина от $n$ аргументов имеем

$$G = \sum_{i=1}^{N} G_i \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N = 2^{2^n}$$

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов. Пусть $G_i$ — количество различных многочленов Жегалкина функции $f_i$, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для количества $G$ всех многочленов Жегалкина от $n$ аргументов имеем

$$G = \sum_{i=1}^{N} G_i \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N = 2^{2^n} = G,$$

поскольку всего существует только $2^n$ конъюнктов без отрицаний, каждый из которых может входить или не входить в многочлен.

# Существование и единственность многочлена Жегалкина

Доказательство единственности. Пусть $N = 2^{2^n}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — все булевы функции от $n$ аргументов. Пусть $G_i$ — количество различных многочленов Жегалкина функции $f_i$, $i = \overline{1, N}$. В силе доказанного $G_i \geq 1$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для количества $G$ всех многочленов Жегалкина от $n$ аргументов имеем

$$G = \sum_{i=1}^{N} G_i \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N = 2^{2^n} = G,$$

поскольку всего существует только $2^n$ конъюнктов без отрицаний, каждый из которых может входить или не входить в многочлен. Поэтому, $G_i = 1$ для каждого $i = \overline{1, N}$, то есть каждая $f_i$ имеет только один многочлен Жегалкина.

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}$$

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z}$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} = (1+x)(1+y)z + (1+x)(1+z)y + (1+x)yz + (1+y)(1+z)x + (1+y)xz + (1+z)xy$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} = (1+x)(1+y)z + (1+x)(1+z)y + (1+x)yz + (1+y)(1+z)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (1+x+y+xy)z + (1+x+z+xz)y + (1+x)yz + (1+y+z+yz)x + (1+y)xz + (1+z)xy$$

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} = (1+x)(1+y)z + (1+x)(1+z)y + (1+x)yz + (1+y)(1+z)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (1+x+y+xy)z + (1+x+z+xz)y + (1+x)yz + (1+y+z+yz)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (z+xz+yz+xyz) + (y+xy+zy+xzy) + (yz+xyz) + (x+yx+zx+yzx) + (xz+yxz) + (xy+zxy)$$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} = (1+x)(1+y)z + (1+x)(1+z)y + (1+x)yz + (1+y)(1+z)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (1+x+y+xy)z + (1+x+z+xz)y + (1+x)yz + (1+y+z+yz)x + (1+y)xz + (1+z)xy = (z+xz+yz+xyz) + (y+xy+zy+xzy) + (yz+xyz) + (x+yx+zx+yzx) + (xz+yxz) + (xy+zxy) = x+y+z+xy+xz+yz$$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz)$$

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz) = 1 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz$$

# Пример

| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz) = 1 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz =$$
$$1 + (1 + x)(1 + y)(1 + z) + xyz$$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz) = 1 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz =$
$1 + (1 + x)(1 + y)(1 + z) + xyz =$
$1+(1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz)+xyz$

# Пример

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $f$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\overline{f}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$f = 1 + \overline{f} = 1 + (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz) = 1 + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz =$$
$$1 + (1 + x)(1 + y)(1 + z) + xyz =$$
$$1+(1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz)+xyz = x+y+z+xy+xz+yz$$

# Формула для многочлена Жегалкина

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} =$$

$$= \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(x_1 + \overline{\sigma_1}) \cdots (x_n + \overline{\sigma_n}) =$$

# Формула для многочлена Жегалкина

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) x_1^{\sigma_1}\cdots x_n^{\sigma_n} =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)(x_1+\overline{\sigma_1})\cdots(x_n+\overline{\sigma_n}) =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} \sum_{(\tau_1,\ldots\tau_n)\geq(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) x_1\widehat{\ }\tau_1 \cdots x_n\widehat{\ }\tau_n =$$

# Формула для многочлена Жегалкина

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)x_1^{\sigma_1}\cdots x_n^{\sigma_n}=$$
$$=\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)(x_1+\overline{\sigma_1})\cdots(x_n+\overline{\sigma_n})=$$
$$=\sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}\ \sum_{(\tau_1,\ldots\tau_n)\geq(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)x_1\hat{}\,\tau_1\cdots x_n\hat{}\,\tau_n=$$
$$=\sum_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}\ \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\leq(\tau_1,\ldots,\tau_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)x_1\hat{}\,\tau_1\cdots x_n\hat{}\,\tau_n=$$

# Формула для многочлена Жегалкина

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(x_1 + \overline{\sigma_1}) \cdots (x_n + \overline{\sigma_n}) =$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} \sum_{(\tau_1,\ldots\tau_n)\geq(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) x_1 \widehat{\ } \tau_1 \cdots x_n \widehat{\ } \tau_n =$$

$$= \sum_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)} \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\leq(\tau_1,\ldots,\tau_n)} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) x_1 \widehat{\ } \tau_1 \cdots x_n \widehat{\ } \tau_n =$$

$$= \sum_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)} x_1 \widehat{\ } \tau_1 \cdots x_n \widehat{\ } \tau_n \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\leq(\tau_1,\ldots,\tau_n)} f(\sigma_1, \ldots \sigma_n).$$