Монотонные функции

- Набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$ меньше или равен набору $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если

$$x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, \ldots, x_n \le y_n.$$

- Функция $f : B^n \to B$ называется монотонной, если

$$(x_1, \ldots, x_n) \le (y_1, \ldots, y_n) \implies f(x_1, \ldots, x_n) \le f(y_1, \ldots, y_n)$$

для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B^n$.

Примеры

- Функции 0, 1, $x \mathbin{\&} y$ и $x \vee y$ монотонны.
- Функция $f(x, y, z) = x + y + z$ не монотонна, так как

$$(0, 1, 0) \leq (1, 1, 0),$$

но $1 = f(0, 1, 0) > f(1, 1, 0) = 0$.

Суперпозиция монотонных функций

Теорема. Если $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — монотонные функции, то функция

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

также является монотонной.

Доказательство. Пусть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \leq \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Так как функции $g_1, \ldots, g_m$ монотонны

$$(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})) \leq (g_1(\vec{y}), \ldots, g_m(\vec{y})).$$

Так как функция f монотонна,
$h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})) \leq f(g_1(\vec{y}), \ldots, g_m(\vec{y})) = h(\vec{y})$.

Простые импликанты монотонных функций

Теорема. Простые импликанты монотонных функций не содержат отрицаний.

Доказательство. Пусть $\overline{x_1} \mathbin{\&} x_2^{\sigma_2} \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_k^{\sigma_k}$ — простой импликант монотонной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $k \leq n$. Тогда

$$x_1 = 0 \mathbin{\&} x_2 = \sigma_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_k = \sigma_k \implies f(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Но $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \leq (1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Значит

$$x_1 = 1 \mathbin{\&} x_2 = \sigma_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_k = \sigma_k \implies f(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Простые импликанты монотонных функций

Теорема. Простые импликанты монотонных функций не содержат отрицаний.

Доказательство (Продолжение). Таким образом,

$$x_2 = \sigma_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_k = \sigma_k \implies f(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Значит, $x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_k^{\sigma_k}$ — импликант f, а это противоречит тому, что $\overline{x_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_k^{\sigma_k}$ — простой импликант.

Простые импликанты монотонных функций

Теорема. Простые импликанты монотонных функций не содержат отрицаний.

Следствие. Сокращенная ДНФ монотонной функции не содержит отрицаний.

Следствие. Функция является монотонной тогда и только тогда, когда она может быть выражена через суперпозицию функций 0, 1, $x \mathbin{\&} y$ и $x \vee y$.

Сокращенная ДНФ монотонных функций

Теорема. Сокращенная ДНФ монотонной функции является тупиковой (и, следовательно, минимальной).

Доказательство. Пусть $K = x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_k$ — простой импликант $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k \leq n$, $f = K \vee f'$, где f' — дизъюнкция всех простых импликант f, кроме K. Докажем, что $f \neq f'$. Заметим, что каждый импликант $K' \neq K$ должен содержать литерал x_i, $i > k$, так как K — простой. Поэтому, при

$$x_1 = 1, \ldots, x_k = 1, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \neq 0 = f'(x_1, \ldots, x_n).$$

Значит, $f \neq f'$.