Интегрирование рациональных дробей.

Основным классом интегрируемых функций, из которого производятся некоторые другие классы интегрируемых функций, является класс **рациональных дробей**, то есть, функций вида $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где в числителе и знаменателе располагаются многочлены степеней n и m, соответственно. Будем называть такую рациональную дробь **правильной**, если $n<m$, и **неправильной**, если $n\ge m$.

Если дробь неправильная, следует выделить целую часть, то есть, представить заданную функцию в виде $f(x)=R_{n-m}(x)+\frac{\tilde{P}_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$. Целая часть представляет собой многочлен, интегрирование которого сводится к интегрированию степеней переменной x.

Пусть $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь, то есть, степень числителя строго меньше степени знаменателя. В соответствии с основной теоремой алгебры можно, найдя все корни знаменателя, разложить его на сомножители: $Q_m(x)=c(x-a_1)^{\lambda_1}\cdot\ldots((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{\mu_1}\cdot\ldots$. Здесь a_1– вещественный корень кратности λ_1. Квадратный трехчлен $((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)$ в разложении соответствует паре комплексно сопряженных корней $\alpha\pm i\beta$. В соответствии с разложением знаменателя правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:
$$f(x)=\frac{b_1^1}{(x-a_1)^{\lambda_1}}+\frac{b_2^1}{(x-a_1)^{\lambda_1-1}}+\ldots+\frac{m_1^1x+l_1^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\frac{m_2^1x+l_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1-1}}+\ldots.$$
Заметим, что такое разложение при наличии пакета MAXIMA можно сделать по команде **partfrac(f(x),x).**

Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей указанного вида. Научимся их интегрировать.

1) $$\int\frac{b}{(x-a)^{\lambda}}dx=b\int(x-a)^{-\lambda}dx=\left[x-a=z,dz=dx\right]=b\int z^{-\lambda}dz=b\frac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda}+C=$$
$$=b\frac{(x-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}+C.$$

2) $$\int\frac{b}{(x-a)}dx=\left[x-a=z,dz=dx\right]=b\int\frac{dz}{z}=b\ln|z|+C=b\ln|x-a|+C.$$

3) Для интегрирования дроби, содержащей в знаменателе квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, сделаем замену $x-\alpha=z$. Тогда

$$\int\frac{mx+l}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx=\int\frac{mz+(l+\alpha m)}{z^2+\beta^2}dz=m\int\frac{z}{z^2+\beta^2}dz+$$

$$+(l+\alpha m)\int\frac{1}{z^2+\beta^2}dz=\frac{m}{2}\int\frac{(z^2+\beta^2)'}{z^2+\beta^2}dz+(l+\alpha m)\int\frac{1}{\beta^2\left(\frac{z^2}{\beta^2}+1\right)}dz=$$

$$=\frac{m}{2}\ln(z^2+\beta^2)+\frac{l+m\alpha}{\beta}\int\frac{(\frac{z}{\beta})'}{\left(\frac{z^2}{\beta^2}+1\right)}dz=\frac{m}{2}\ln(z^2+\beta^2)+\frac{l+\alpha m}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\beta}\right)+C.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим

$$\int\frac{mx+l}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{m}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2)+\frac{l+\alpha m}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+C.$$

4) Для интегрирования дроби

$$\int\frac{mx+l}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^\mu}\,dx=m\int\frac{z}{(z^2+\beta^2)^\mu}dz+(l+\alpha m)\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^\mu}$$

научимся брать каждый из интегралов в правой части последнего соотношения.

Имеем $\int\frac{z}{(z^2+\beta^2)^\mu}dz=\frac{1}{2}\int\frac{(z^2+\beta^2)'}{(z^2+\beta^2)^\mu}dz=\frac{(z^2+\beta^2)^{1-\mu}}{2(1-\mu)}+C$.

Интеграл $I_\mu=\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^\mu}$ при $\mu\neq1$ мы не сможем взять непосредственно.

Мы получим так называемую **рекуррентную формулу**, позволяющую перейти от I_μ к $I_{\mu-1}$ для того, чтобы за конечное число шагов свести вычисление I_μ к вычислению интеграла I_1, найденному выше.

Итак, $I_\mu=\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{((z^2+\beta^2)-z^2)dz}{(z^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{\beta^2}I_{\mu-1}-\frac{1}{\beta^2}\int\frac{z\cdot zdz}{(z^2+\beta^2)^\mu}$. К последнему из интегралов применим формулу интегрирования по частям, взяв $u=z$, $v'=\frac{z}{(z^2+\beta^2)^\mu}$. Тогда

$$\int\frac{z\cdot zdz}{(z^2+\beta^2)^\mu}=\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{\mu-1}2(1-\mu)}-\frac{1}{2(1-\mu)}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{\mu-1}}.$$ Следовательно,

$$I_\mu=\frac{1}{\beta^2}(1+\frac{1}{2(1-\mu)})I_{\mu-1}-\frac{z}{2\beta^2(1-\mu)(z^2+\beta^2)^{\mu-1}}.$$

Итак, можно считать, что рациональную дробь можно проинтегрировать.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется соотношение вида $F(x, y(x), y', y'',..., y^{(n)}) = 0$. Решить дифференциальное уравнение – это значит, определить функцию $y(x)$, удовлетворяющее этому соотношению, возможно, в неявном или параметрическом виде.

Простейшее дифференциальное уравнение вида $y'(x) = f(x)$ мы уже решали, так как находили $y(x) = \int f(x)dx$. Мы знаем, что интеграл определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. То есть решение простейшего дифференциального уравнения содержит произвольную постоянную. Решения более сложных дифференциальных уравнений также находятся с точностью до произвольных постоянных (возможно, нескольких).

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком входящих в него производных. Поэтому дифференциальное уравнение вида $F(x, y(x), y', y'',..., y^{(n)}) = 0$ считается дифференциальным уравнением n-го порядка.

Так же, как не любая функция может быть проинтегрирована, и представлена в виде элементарных функций, так и не любое дифференциальное уравнение имеет решение, выражающееся через элементарные функции. Класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, узок. Мы изучим несколько классов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, а также рассмотрим некоторые приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Кроме того, мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с применением дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

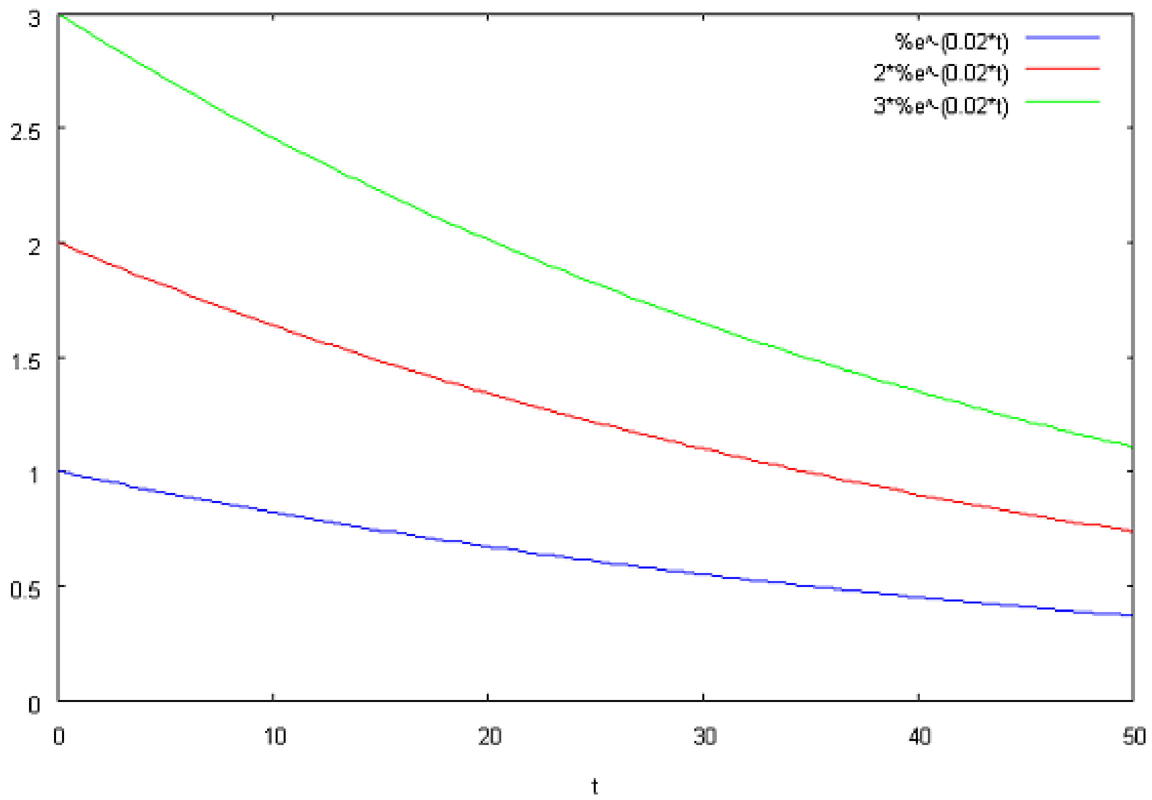
Так называются уравнения вида $y' = f(x) \cdot g(y)$. Запишем производную в виде отношения дифференциалов: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ и разнесем в разные части выражения, содержащие x и y. Мы получим равенство двух дифференциалов: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$. После интегрирования правой части по x, а левой – по y мы получим слева функцию, зависящую от y, а справа – функцию, зависящую от x, отличающихся на константу:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C.$$

П р и м е р. В соответствии с законом радиоактивного распада вещества скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества. Если обозначить $m(t)$ массу нераспавшегося вещества в момент t, то этот закон можно записать в виде соотношения: $m'(t) = -\alpha \cdot m$. Знак минус указывает на то, что масса вещества убывает с ростом t.

Решение. Разделим переменные: $\dfrac{dm}{m} = -\alpha \cdot dt$. После интегрирования получим $\ln m = -\alpha \cdot t + \ln C$. Здесь произвольное постоянное слагаемое мы представили в виде логарифма положительной постоянной величины для удобства последующего потенцирования: $m(t) = Ce^{-\alpha \cdot t}$.

Проанализируем полученное решение. Оно содержит постоянные α (эта постоянная зависит от вида радиоактивного вещества – стронций, радий, уран….) и C – постоянную интегрирования. Предположим, что мы исследуем радиоактивный распад радия, для которого $\alpha = 0,02$, если измерять время в годах. Решение уравнения распада имеет вид $m(t) = Ce^{-0,02 \cdot t}$, и мы получаем множество решений вследствие присутствия произвольной положительной константы C.



Как выбрать единственное? В данном случае, чтобы узнать, какое количество радиоактивного вещества останется по прошествии определенного времени, необходимо знать, сколько его было в начальный момент. Задавая $m(0)$, мы задаем значение C. Таким образом, чтобы решать конкретные задачи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями, необходимо не только само уравнение, но и дополнительные данные, количество которых определяется порядком дифференциального уравнения. Для решения задачи, поставленной для дифференциального уравнения первого порядка, необходимо задать **начальное условие** $y(t_0)=y_0$. Уравнение вкупе с начальным условием называется **задачей Коши**.

Понижение порядка дифференциального уравнения

До сих пор мы решали только дифференциальные уравнения первого порядка. Существуют дифференциальные уравнения высших порядков, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений первого порядка. Простейший пример: $y''=e^{2x}$. Очевидно, что для получения решения $y(x)$ достаточно дважды проинтегрировать правую часть. Заметим, что при первом интегрировании мы получаем постоянную интегрирования $y'=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$. При втором интегрирование мы снова получаем постоянную интегрирования – уже другую: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$. Таким образом, решение дифференциального второго порядка содержит уже две произвольные постоянные. Очевидно, что решая подобное простейшее уравнение n-го порядка, мы получим n произвольных постоянных. Следовательно, что для получения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задавать n дополнительных условий.

Уравнение вида $F(x,y',y'')=0$. В этом случае следует взять за неизвестную функцию $z(x)=y'$. Найдя z, мы определим y интегрированием.

П р и м е р. Решить уравнение $x^2y''=y'^2$. Введем функцию $z=y'$ и решим уравнение с разделяющимися переменными $x^2z'=z^2$. Получив его решение $z=\frac{x}{1-C_1x}$, найдем исходную функцию y: $y(x)=-\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln|1-C_1x|+C_2$.

Для выделения из множества решений единственного решения можно задать условия: $y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_1$. Например, $y(1)=0,\ \ y'(1)=2$.

Из последнего условия мы получим $C_1=\frac{1}{2}$, то есть

$y(x)=-2x-4\ln|1-x/2|+C_2$.

Из первого условия получим $C_2=2-4\ln 2$. Теперь частное решение, удовлетворяющее двум дополнительным условиям, имеет вид

$y(x)=2(1-x)-4\ln|2-x|$.

Применение пакета программ MAXIMA для решения дифференциального уравнения первого порядка и задачи Коши

Для решения дифференциальных уравнений и задач Коши удобно применять пакет математических программ MAXIMA.
Рассмотрим следующую задачу Коши. Найти решение дифференциального уравнения $(1+e^x)y' = ye^x$, удовлетворяющее условию $y(0)=2$.

Аналитическое решение. Представим производную в уравнении в виде отношения дифференциалов и разделим переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{e^x dx}{1+e^x}$. Интегрируя обе части, получим $\ln y = \ln(1+e^x) + \ln C$ или $y = C(e^x+1)$. Подставляя в полученное решение уравнения значения $x=0$ и $y=2$, получим $C=1$. Поэтому решением поставленной задачи Коши является $y=(e^x+1)$.

Решим задачу Коши, рассмотренную в предыдущем примере, с помощью компьютера. Для этого введем в память компьютера дифференциальное уравнение: **(1+%e^x)*‘diff(y,x)=y*%e^x** и нажмем Shift+Enter. На следующей строчке появится введенное уравнение. Заметим, что перед командой **diff(y,x)** обязательно должен стоять апостроф **‘,** иначе компьютер продифференцирует y по x и выдаст 0.
Теперь для того, чтобы решить введенное дифференциальное уравнение (не выше второго порядка), посмотрим, под каким номером (например, (%o1)) запомнил компьютер введенное уравнение, этот номер стоит перед дифференциальным уравнением, выведенным компьютером на экран. Компьютер решит дифференциальное уравнение по команде **ode2(%o1,y,x)** и Shift+Enter и выведет на экран y**=%c*(%e^x+1)**. Решение уравнения получено. Роль *C* в компьютерной записи выполняет %c. Теперь используем начальное условие. Для этого посмотрим номер, под которым компьютер вывел на экран решение уравнения (например, %o2). Введем команду **ic1(%o2,x=0,y=2)** и нажмем Shift+Enter. Мы получим решение задачи Коши **y=%e^x+1.**