Összefonódottság detektálása tanúoperátorokkal

Tóth Géza

Max-Plank-Intitute für Quantenoptik, Garching, Németország

Budapest, 2005. október 4.

Motiváció

- Miért érdekes a kvantum-informatika?
  - Alapvető problémák még mindig megoldatlanok kvantummechanikában
  - A kvantumkontrol fejlődésével szükség van arra, hogy a többrészecskés kvatumállapotokról valamit mondjunk
  - Kvantumkommunikáció, kvantum-szimuláció, kvantum-számítógép (keresés, prím faktorizáció)

Vázlat

- Bell egyenlőtlenségek, nonlokalitás
- Összefonódottság és detekciója
- Összefonódottság tanúoperátorok (entanglement witness)
- Többrészecskés összefonódottság

- Bell egyenlőtlenségek, nonlokalitás
- Összefonódottság és detekciója
- Összefonódottság tanúoperátorok (entanglement witness)
- Többrészecskés összefonódottság

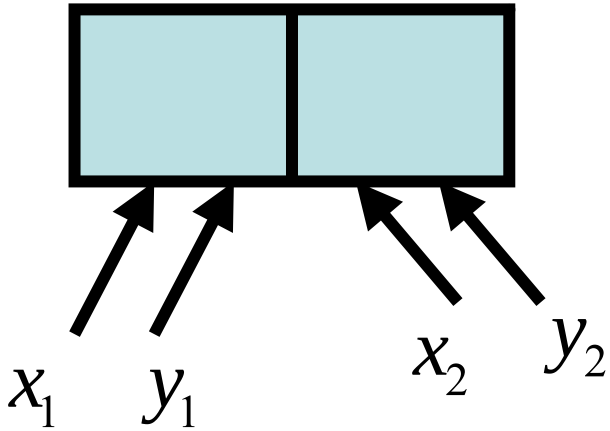
Bell egyenlőtlenségek

- Miben más a kvantum mechanika, mint a klasszikus fizika? Mely kvantumállapotok esetén mutatkoznak meg legikább a kvantummechanikai effektusok ?

- Válasz (Bell, 60-as évek): Ha feltételezzük, hogy minden mérési eredmény már létezett a mérés előtt, akkor a korrelációk lehetséges értékeire egy korlátot kapunk. Vannak olyan kvantummechanikai állapotok, amelyeken végzett mérés ezt a korlátot sérti. Ezeket hívjuk nemlokális állapotoknak.

A CHSH Bell egyenlőtlenség

- Mérjünk egy kétrészű rendszereben 2-2 változót +1/-1 értékkel



- A CHSH egyenlőtlenség

$$x_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2 - y_1x_2 \leq 2$$

- A kvantum maximum a bal oldalra $2\sqrt{2}$.

- Bell egyenlőtlenségek, nonlokalitás
- Összefonódottság és detekciója
- Összefonódottság tanúoperátorok (entanglement witness)
- Többrészecskés összefonódottság

Összefonódottság

Definíció:

Egy kétrészű kvantumrendszer szeparálható (nem összefonódott) állapotban van, ha a sűrűségmátrixa felírható

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}$$

Werner, PRA 1989.

alakban.

Értelmezés:

* szorzat állapotból nem lehet korrelált állapotot létrehozni lokális, csak ez egyik vagy csak a másik részecskén végzett műveletekkel, illetve ezek kombinácójával.

* szorzat állapotból nem lehet összefonódott állapotot létrehozni lokális, csak ez egyik vagy csak a másik részecskén végzett műveletekkel, illetve ezek kombinácójával *akkor sem* ha kommunikáció a két részrendszer között megengedett.

Összefonódottság detekciója

A sűrűségmátrixszal *szükséges és elégséges* feltételek ismertek összefonódottságra a következő esetekben:

-2x2, 2x3 rendszerek

-Többmódusú rendszerek Gauss-i állpotokban

Igen sok esetben csupán *elégséges* feltétel ismert.
(pl. NxM-es rendszerek)

Pozitív definit parciális transzponált

- **Definíció:** Parciális transzponálás: transzponálás az egyik részrendszer szerint.
- Ha a rendszer szeparálható, akkor a sűrűségmátrix parciális transzonáltja pozitívdefinit (ilyenkor parciális transzponált is lehetne egy fizikai sűrűségmátrix)

$$\rho^{T1} = \sum_k p_k \left(\rho_k^{(1)}\right)^T \otimes \rho_k^{(2)}$$

- Ez szükséges és elégséges feltétel szeparálhatóságra 2x2-es és 2x3-as esetekben rendszerekre, míg nagyobb rendszereknél csupán szükséges feltétel.

A. Peres, PRL **77**, 1413 (1996).

Kétmódusú Gauss-i állapotok

- A korrelációs mátrix teljesen jellemez egy kétmódusú Gauss-i állapotot

$$\gamma = \begin{pmatrix} \langle x_1 x_1 \rangle & \langle x_1 p_1 \rangle & \langle x_2 p_1 \rangle & \langle x_2 p_2 \rangle \\ \langle p_1 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_2 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle p_2 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \gamma_{corr} = \gamma + \gamma^T$$

- A rendszer összefonódott, ha $\tilde{\gamma}_{corr} - iJ$ nem pozítív-szemidefinit. Itt $\tilde{\gamma}_{corr}$ a parciális transzponálthoz tartozó korrelációs mátrix, *J* az operátorok kommutátorait tartalmazza.

L.-M. Duan *et. al*., PRL **84**, 2722 (2000). R. Simon, PRL **84**, 2726 (2000).

- Bell egyenlőtlenségek, nonlokalitás
- Összefonódottság és detekciója
- Összefonódottság tanúoperátorok (entanglement witness)
- Többrészecskés összefonódottság

Összefonódottság kísérleti detektálása

- Egy tényleges kísérletben nem lehet az egész sűrűség-mátrixot meghatározni. Csupán néhány mennyiséget lehet mérni. Ezekkel a mérési eredményekkel kell összefonódottságot detektaló *elégséges* feltételeket konstruálni.

- Egy lehetséges eljárás: Összefonódottság tanúoperátor
(Entanglement witness)

Összefonódottság detektálása tanúoperátorral

- **Definíció**: egy kétrészű rendszerben egy W hermitikus mátrix tanúoperátor, ha

(i) Minden ρ szeparálható állapotra

$$Tr(\rho W) \geq 0.$$

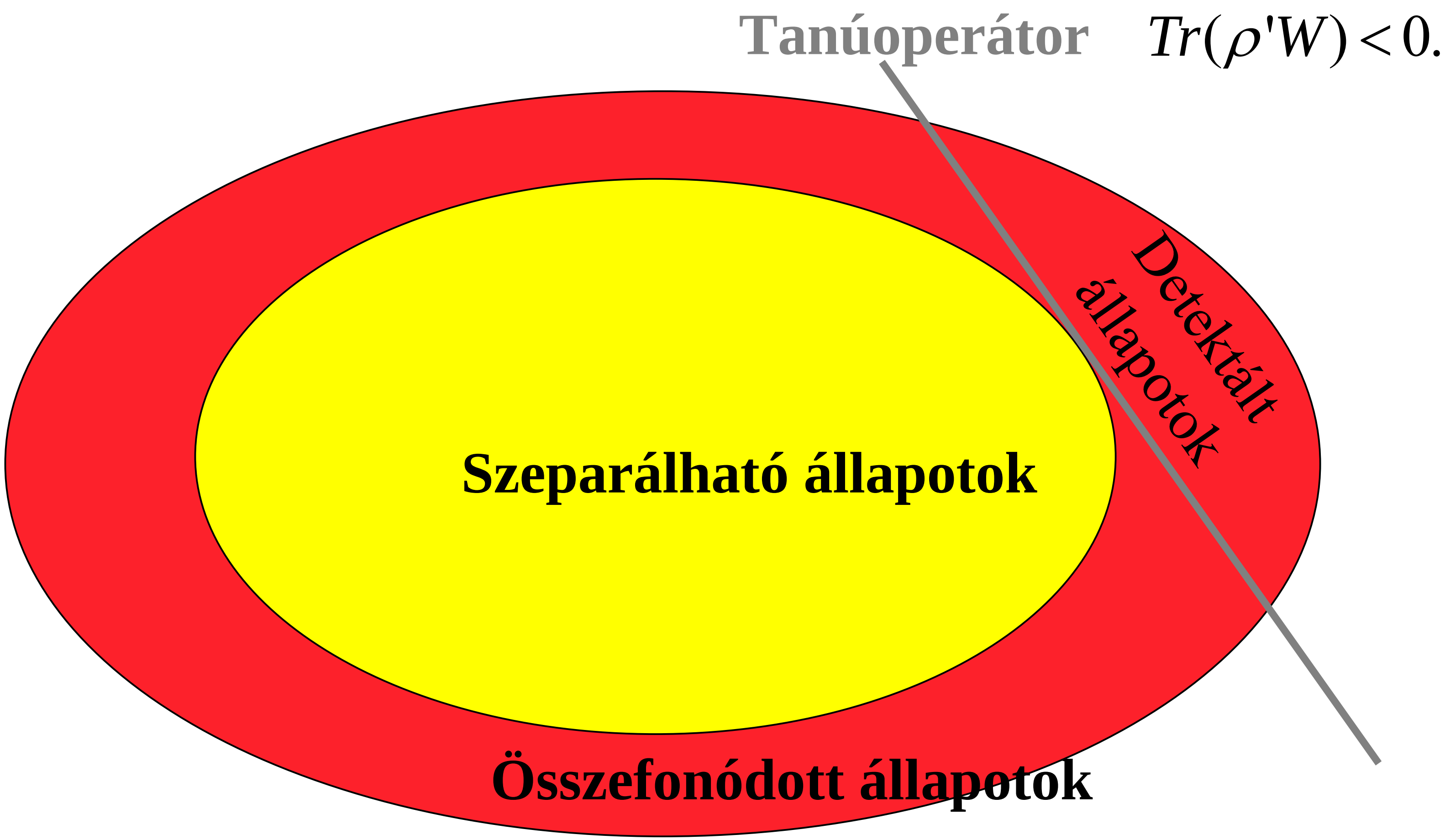
(ii) Van olyan ρ´ összefonódott állapot, amelyre

$$Tr(\rho' W) < 0.$$

M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A 223, 1 (1996);

B.M. Terhal, Phys. Lett. A 271, 319 (2000); M. Lewenstein, B. Kraus, J.I. Cirac, and P. Horodecki, Phys. Rev. A 62, 052310 (2000).

Konvex halmazok



Tanúoperátor optimalizálása

- Ha van két tanúoperátor, amelyekre

$$W_1 - W_2 \geq 0$$

akkor W_2 minden állapotot detektál amit W_1.
Ezen felül detektál olyan állapotokat is,
amelyeket W_1 nem detektál, mivel minden ρ-ra

$$Tr(\rho W_1) \geq Tr(\rho W_2)$$

M. Lewenstein, B. Kraus, J.I. Cirac, and P.Horodecki, Phys. Rev. A 62, 052310 (2000).

Tanúoperátor előállítása

- Ha van egy állapot ρ_e és ekörül szeretnénk összefonódottságot detektálni, akkor ezt a következő tanúoperátorral tehetjük meg

ahol
$$W = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^{T1}$$

és
$$\rho_e^{T1}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle$$

$$\lambda < 0.$$

Tanúoperátor előállítása II.

- Bizonyítás: (i) szorzat állapotra nem-negatív

$$\langle W \rangle = Tr\left[\left(|\Psi\rangle\langle\Psi| \right)^{T1} \rho_1 \otimes \rho_2 \right]$$

$$= Tr\left[\left(|\Psi\rangle\langle\Psi| \right) \rho_1^{*} \otimes \rho_2 \right] \geq 0$$

- (ii) a ρ_e összefonódott állapotra negatív

$$\langle W \rangle = Tr\left[\left(|\Psi\rangle\langle\Psi| \right)^{T1} \rho_e \right]$$

$$= Tr\left[\left(|\Psi\rangle\langle\Psi| \right) \rho_e^{T1} \right] = \lambda < 0.$$

- Bell egyenlőtlenségek, nonlokalitás
- Összefonódottság és detekciója
- Összefonódottság tanúoperátorok (entanglement witness)
- Többrészecskés összefonódottság

Háromtest összefonódotság

- Teljesen szeparálható három-részecske állapot

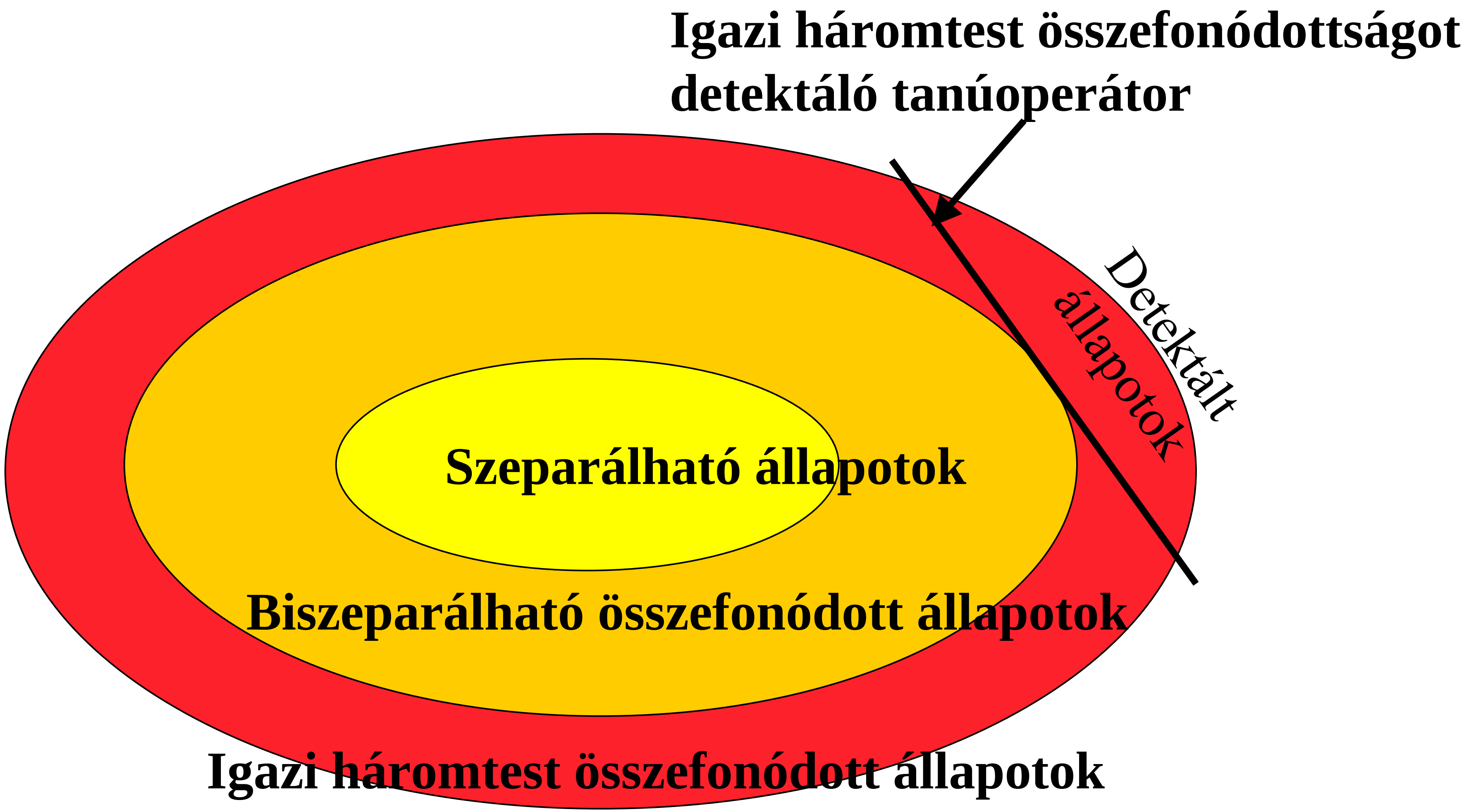
$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)} \otimes \rho_k^{(3)}$$

- Tiszta biszeparálható állapot: szeparálható valamilyen partícióra; lehet összefonódott.

$$\left|\Psi_{(12)(3)}\right\rangle = \left|\Psi_{12}\right\rangle\left|\Psi_{3}\right\rangle \qquad \left|\Psi_{(1)(23)}\right\rangle = \left|\Psi_{1}\right\rangle\left|\Psi_{23}\right\rangle$$

- Kevert biszeparálható állapot: tiszta biszeparálható állapotok keveréke. Akár olyanoké is, amelyek különböző partíciók szerint biszeparálhatóak.
- Igazi három-részecske összefonódott állapot: nem biszeparalható.

Háromtest összefonódotság



Tanúoperátorok igazi háromtest összefonódottságra

- Tanúoperátor $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right)$ állapotra:

$$W = \frac{1}{2}1 - |GHZ\rangle\langle GHZ|$$

- Tanúoperátor a $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\right)$ állapotra:

$$W = \frac{2}{3}1 - |W\rangle\langle W|$$

A. Acin, D. Bruß, M. Lewenstein, and A. Sanpera, Phys. Rev. Lett. 87, 040401 (2001).

M. Bourennane *et al.* PRL 92, 087902 (2004).

Tanúoperátor igazi többrészecskés összefonódottságra

- Tanúoperátor N-qbites GHZ állapotra:

$$\left|GHZ_N\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|000...000\right\rangle + \left|111...111\right\rangle\right)$$

$$W = \frac{1}{2}1 - \left|GHZ_N\right\rangle\left\langle GHZ_N\right|$$

Tanúoperátorok mérése

- Az tanúoperátort lokálisan mérhető operátrokra kell dekomponálni. Példa három qbitre:

$$\left|GHZ_3\right\rangle\left\langle GHZ_3\right| = \frac{1}{8}(1 + Z^{(1)}Z^{(2)} + Z^{(2)}Z^{(3)} + Z^{(1)}Z^{(3)} - 2X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)})$$

$$+\frac{1}{16}\left(X^{(1)}+Y^{(1)}\right)\left(X^{(2)}+Y^{(2)}\right)\left(X^{(3)}+Y^{(3)}\right)+\frac{1}{16}\left(X^{(1)}-Y^{(1)}\right)\left(X^{(2)}-Y^{(2)}\right)\left(X^{(3)}-Y^{(3)}\right)$$

- Probléma: a tagok száma gyorsan nő a qubit számmal.
- Ez nem csupán gyakorlati, a méréssel kapcsolatos probléma, hanem „elméleti” is. Kérdés: mit tudhatunk meg az előállított kvantumállapotról?

Gühne, Hyllus *et. al*. quant-ph/0301162.

Tanúoperátor kéttest korrelációkból

- Példa két qubitre. Szeparálható állpotokra

$$\left\langle \sigma_x^1 \sigma_x^2 \right\rangle + \left\langle \sigma_z^1 \sigma_z^2 \right\rangle \leq 1$$

- Összefonódott állapotkra a bal oldal maximuma 2. Ezt a |00> + |11> állapotra veszi fel (=EPR pár).
- Ebből a következö tanúoperátor szerkeszthető

$$W = 1 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_z^1 \sigma_z^2$$

- A W-ben szereplő korrelációs operátorok az |00> + |11> állapot *stabilizáló operátorai*.

Tanúoperátor kéttest korrelációkból II.

- **Bizonyítás.** Szorzat állapotra

$$\left\langle \sigma_x^1 \sigma_x^2 \right\rangle + \left\langle \sigma_z^1 \sigma_z^2 \right\rangle =$$

$$\left\langle \sigma_x^1 \right\rangle \left\langle \sigma_x^2 \right\rangle + \left\langle \sigma_z^1 \right\rangle \left\langle \sigma_z^2 \right\rangle = \vec{n}_1 \vec{n}_2 \leq 1$$

Itt n_1 és n_2 *1*-nél nem hosszabb vektorok.

$$\left\langle \sigma_x^k \right\rangle^2 + \left\langle \sigma_y^k \right\rangle^2 + \left\langle \sigma_z^k \right\rangle^2 \leq 1$$

- Szeparálható állapotra is igaz, mivel a kifejezés lineáris operátor várható értékekben. Q.E.D.

1. Példa: Spinláncok

- Hamilton operátor Pauli mátrixokkal

$$H = J\sum_{k=1}^{N} \sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)} + B\sum_k \sigma_z^{(k)}$$

- Klasszkus spin lánc valós változókkal

$$\widetilde{H} = J\sum_{k=1}^{N} s_x^{(k)}s_x^{(k+1)} + s_y^{(k)}s_y^{(k+1)} + s_z^{(k)}s_z^{(k+1)} + B\sum_k s_z^{(k)}$$

- Egyszerű ötlet: szeparálható állapotkra az energiaminimum egyenlő a klasszikus spin lánc energiaminimuvával.

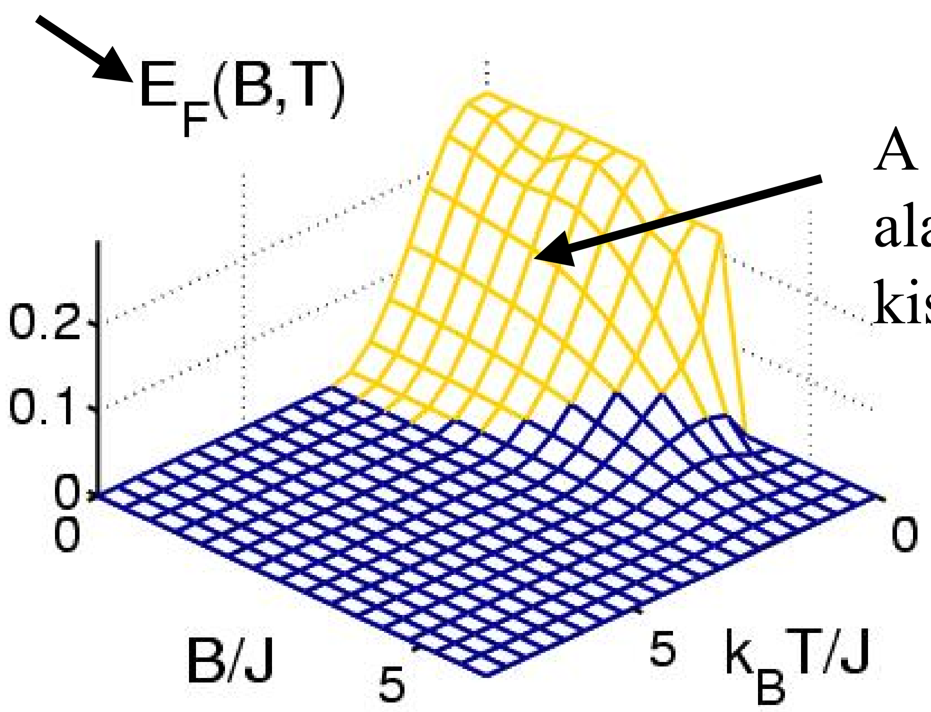
$$Tr(\rho_{sep}H) \geq \min_{\vec{s}^{(k)}, |\vec{s}|=1} \widetilde{H}$$

G. Tóth, "Entanglement Witnesses in Spin Models", PRA 71, 010301(R) (2005).

1. Példa: Összefonódottság és energia

Heisenberg lánc B külső térben és T hőmérsékleten

Két qbites keltési összefonódottság



A klasszikus lánc alapállapotbeli energiajánál kisebb energiajú állapot

G. Tóth, "Entanglement Witnesses in Spin Models", PRA 71, 010301(R) (2005).

2. Példa: Tanú stabilizáló operátorokkal

- GHZ állapot

$$|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000...00\rangle + |111...11\rangle\right)$$

- Stabilizáló operátorok

$$S_1^{(GHZ_N)} = X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(N)},$$

$$S_2^{(GHZ_N)} = Z^{(1)}Z^{(2)},$$

$$S_3^{(GHZ_N)} = Z^{(2)}Z^{(3)},$$

$$\ldots$$

$$S_N^{(GHZ_N)} = Z^{(N-1)}Z^{(N)}.$$

$$S_k^{(GHZ_N)}|GHZ_N\rangle = |GHZ_N\rangle$$

- Ezek a generátorai a „stabilizáló” (stabilizer) nevű csoportnak.

2. Példa: 3 qubites példa

- Három qbites példa

Generátorok:

$$X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}$$

$$Z^{(1)}Z^{(2)}$$

$$Z^{(2)}Z^{(3)}$$

Operátorok a generátorok egymással való szorzásából

$$-Y^{(1)}X^{(2)}Y^{(3)}$$

$$-Y^{(1)}Y^{(2)}X^{(3)}$$

$$-X^{(1)}Y^{(2)}Y^{(3)}$$

$$Z^{(1)}Z^{(3)}$$

$$1$$

- Általában:

$$\left|GHZ\right\rangle\left\langle GHZ\right| = \frac{1}{2^N}\sum_{k=1}^{2^N}\tilde{S}_k^{(GHZ)}$$

2. Példa: Tanúoperátor GHZ állapotra

- Egyszerű tanú GHZ állapot-ra, többtest összefonódottság detektására

$$W = 1 - Z^{(1)}Z^{(2)} - X^{(1)}X^{(2)} \cdots X^{(N)}$$

- Also határ a GHZ állapottal való átlapolásra

$$Tr(\rho |GHZ\rangle\langle GHZ|) \geq Tr(\rho \sum_k c_k \tilde{S}_k^{(GHZ)})$$

Be lehet látni, hogy alkalmas c_k-kal nagyon kevés mérés elegendő.

- Tanú GHZ állapotra, igazi többtest összefonódottság detektálására stabilizáló operátorkkal.

G. Tóth and O. Gühne, PRL **94**, 060501 (2005).

G. Tóth and O. Gühne, PRA 2005

Összefoglalás

- Bell egyenlőtlenségek, CHSH egyenlőtlenség
- Összefonódottság detektálása a sűrűségmátrix alapján
  - Pozitív parciális transzponált
  - Korrelációs mátrix
- Összefonódottság detektálása méréssel, tanúoperátorok
- Többtest összefonódottság
- Összefonódottság detektálása kevés többtest korrelációval
  - Spinlánc Hamiltonoperátor
  - Tanú stabilizáló operátorokkal

Honlap:

http://www.mpq.mpg.de/Theorygroup/CIRAC/people/toth