Analisi e Progetto di Algoritmi

Giuseppe Facchi

A.A. 2020-2021

Indice

1 LIS

Problema Principale Data una sequenza X di lunghezza m trovare la più lunga sottosequenza crescente

Problema Ridotto Data una sequenza X di lunghezza m trovare la **lunghezza** della più lunga sottosequenza crescente

Problema Vincolato Data una sequenza X di lunghezza m trovare la **lunghezza** della più lunga sottosequenza crescente <u>che termina con x_m</u>

Sottoproblema di dimensione (i) Lunghezza LIS di X_i che termina con x_i

$$i \in \{0, \dots, m\}$$

Variabile
C_i = Lunghezza LIS di X_i che termina con x_i

Casi Base

- $C_0 = 1$

Passo Ricorsivo

$$C_i = \begin{cases} 1 + max\ \{C_h \neq 0 \mid 0 \leq h < i \wedge x_h < x_i\} & \forall\ i > 0 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Soluzione PV
C_m = Lunghezza LIS di X che termina con x_m

Soluzione PR

$$max\ \{C_i \mid 0 \leq i \leq m\}$$

Algorithm 1 LIS di X

```
C[0] = 1
for i = 1 to m do
    max = 0
    for h = 0 to i − 1 do
        if C[h] > max ∧ x[h] < x[i] then
            max = C[h]
        end if
    end for
    C[i] = 1 + max
end for
ottimo = 1
for i = 1 to m do
    if C[i] > ottimo then
        max = C[h, k]
    end if
end for
return ottimo
```

2 LCS

Problema Principale Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la loro LCS

Problema Ridotto Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS

Problema Vincolato Date due sequenze X e Y trovare la **lunghezza** della loro LCS <u>che termina con $x_m = y_n$</u>

Sottoproblema di dimensione (i, j) Lunghezza LCS di X_i e Y_j che termina con $x_i = y_j$

$$i \in \{0, \dots, m\}$$
$$j \in \{0, \dots, n\}$$

Variabile
$C_{i,j}$ = Lunghezza LCS di X_i e Y_j che termina con $x_i = y_j$

Casi Base

- $C_{i,0} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Passo Ricorsivo

- se $x_i = y_j$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j\} & \forall\ i,\ j > 0 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Soluzione PV
$C_{m,n}$ = Lunghezza LCS di X e Y che termina con $x_m = y_n$

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$$

Algorithm 2 LCS tra X e Y

```
for i = 1 to m do
  C[i, 0] = 0
end for
for j = 1 to n do
  C[0, j] = 0
end for
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if x[i] ≠ y[j] then
      C[i, j] = 0
    end if
    if x[i] == y[j] then
      max = 0
      for h = 0 to i − 1 do
        for k = 0 to j − 1 do
          if C[h, k] > max then
            max = C[h, k]
          end if
        end for
      end for
      C[i, j] = 1 + max
    end if
  end for
end for
ottimo = 0
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if C[i, j] > ottimo then
      ottimo = C[i, j]
    end if
  end for
end for
return ottimo
```

3 LICS

Problema Principale Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la loro LICS

Problema Ridotto Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LICS

Problema Vincolato Date due sequenze X e Y trovare la **lunghezza** della loro LICS $\underline{\text{che termina con } x_m = y_n}$

Sottoproblema di dimensione (i, j) Lunghezza LICS di X_i e Y_j che termina con $x_i = y_j$

$$i \in \{0, \dots, m\}$$
$$j \in \{0, \dots, n\}$$

Variabile
$C_{i,j}$ = Lunghezza LICS di X_i e Y_j che termina con $x_i = y_j$

Casi Base

- $C_{i,0} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Passo Ricorsivo

- se $x_i = y_j$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j \wedge x_h < x_i\} \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases} \qquad \forall\ i,\ j > 0$$

Soluzione PV
$C_{m,n}$ = Lunghezza LICS di X e Y che termina con $x_m = y_n$

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$$

Algorithm 3 LICS tra X e Y

```
for i = 1 to m do
  C[i, 0] = 0
end for
for j = 1 to n do
  C[0, j] = 0
end for
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if x[i] ≠ y[j] then
      C[i, j] = 0
    end if
    if x[i] == y[j] then
      max = 0
      for h = 0 to i − 1 do
        for k = 0 to j − 1 do
          if C[h, k] > max ∧ x_h < x_i then
            max = C[h, k]
          end if
        end for
      end for
      C[i, j] = 1 + max
    end if
  end for
end for
ottimo = 0
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if C[i, j] > ottimo then
      ottimo = C[i, j]
    end if
  end for
end for
return ottimo
```

4 LZS

Problema Principale Data una sequenza X di lunghezza m trovare la più lunga sottosequenza zig-zag

Problema Ridotto Data una sequenza X di lunghezza m trovare la **lunghezza** della più lunga sottosequenza zig-zag

Problemi Vincolati

- **0**: Data una sequenza X di lunghezza m trovare la **lunghezza** della sua più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_m e che ha lunghezza pari
- **1**: Data una sequenza X di lunghezza m trovare la **lunghezza** della sua più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_m e che ha lunghezza dispari

Sottoproblemi

- **0 Sottoproblema di dimensione** (i): Trovare la **lunghezza** della sua più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_i e che ha lunghezza pari

$$i \in \{0, \dots, m\}$$

- **1 Sottoproblema di dimensione** (i): Trovare la **lunghezza** della sua più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_i e che ha lunghezza dispari

$$i \in \{0, \dots, m\}$$

Variabili

- $C_{i,\underline{0}}$ = Lunghezza della più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_i e ha lunghezza pari
- $C_{i,\underline{1}}$ = Lunghezza della più lunga sottosequenza zig-zag che termina con x_i e ha lunghezza dispari

Casi Base

- $C_{1,\underline{0}} = 0$
- $C_{1,\underline{1}} = 1$

Passo Ricorsivo

$$C_{i,\underline{0}} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,\underline{1}} \neq 0 \mid 0 \leq h < i \wedge x_h < x_i\} & \forall\ i > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

$$C_{i,\underline{1}} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,\underline{0}} \neq 0 \mid 0 \leq h < i \wedge x_h > x_i\} & \forall\ i > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Soluzioni PV

- $C_{m,\underline{0}}$ = Lunghezza LZS di X che termina con x_m e ha lunghezza pari
- $C_{m,\underline{1}}$ = Lunghezza LZS di X che termina con x_m e ha lunghezza dispari

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,\underline{0}}\ C_{i,\underline{1}} \mid 1 \leq i \leq m\}$$

Algorithm 4 LZS di X

```
C_0[1] = 0
C_1[1] = 1
for i = 2 to m do
    max_0 = max_1 = 0
    for h = 1 to i − 1 do
        if C_1[h] > max_0 ∧ x[h] < x[i] then
            max_0 = C_1[h]
        end if
        if C_0[h] > max_1 ∧ x[h] > x[i] then
            max_1 = C_0[h]
        end if
    end for
    if max_0 ≠ 0 then
        C_0[i] = 1 + max_0
    end if
    C_1[i] = 1 + max_1
end for
ottimo = 1
for i = 1 to m do
    if max(C_0[i], C_1[i]) > ottimo then
        ottimo = max(C_0[i], C_1[i])
    end if
end for
return ottimo
```

5 LCS che non ha due caratteri consecutivi

Problema Principale Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la loro LCS che non ha due caratteri consecutivi

Problema Ridotto Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS che non ha due caratteri consecutivi

Problema Vincolato Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la lunghezza della loro LCS che non ha due caratteri consecutivi e che termina con x_m $(= y_n)$

Sottoproblema di dimensione (i, j) Lunghezza LCS di X_i e Y_j che non ha due caratteri consecutivi che termina con $x_i = y_j$

$$i \in \{0, \dots, m\}$$

$$j \in \{0, \dots, n\}$$

Variabile
$C_{i,j}$ = Lunghezza della LCS tra X_i e Y_j che non ha due caratteri consecutivi e che termina con $x_i = y_j$

Casi base

- $C_{i,0} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Caso Ricorsivo

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j \wedge x_h \neq x_i\} & \forall\ i,\ j > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Soluzione PV
$C[m, n]$ = Lunghezza della LCS tra X di lunghezza m e Y di lunghezza n che non ha due caratteri consecutivi e che termina con x_m $(= y_n)$

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$$

Algorithm 5 LCS tra X e Y che non ha due caratteri consecutivi

```
for i = 1 to m do
  C[i, 0] = 0
end for
for j = 1 to n do
  C[0, j] = 0
end for
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if x[i] ≠ y[j] then
      C[i, j] = 0
    end if
    if x[i] == y[j] then
      max = 0
      for h = 0 to i − 1 do
        for k = 0 to j − 1 do
          if C[h, k] > max ∧ x[h] ≠ x[i] then
            max = C[h, k]
          end if
        end for
      end for
      C[i, j] = 1 + max
    end if
  end for
end for
ottimo = 0
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if C[i, j] > ottimo then
      ottimo = C[i, j]
    end if
  end for
end for
return ottimo
```

6 LCS che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10

Problema Principale Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la loro LCS che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10

Problema Ridotto Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10

Problema Vincolato Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la lunghezza della loro LCS che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10 e che termina con x_m $(= y_n)$

Sottoproblema di dimensione (i, j) Lunghezza LCS di X_i e Y_j che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10 che termina con $x_i = y_j$

$$i \in \{0, \ldots, m\}$$

$$j \in \{0, \ldots, n\}$$

Variabile
$C_{i,j}$ = Lunghezza della LCS tra X_i e Y_j che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10 e che termina con $x_i = y_j$

Casi base

- $C_{i,0} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$
- se $x_i == y_j \wedge 5 < x_i < 10 \qquad C_{i,j} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Casi Ricorsivi

- se $x_i == y_j \wedge x_i \leq 5$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j \wedge x_h \geq 10\} & \forall\ i,\ j > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Sottostruttura Ottima: La lunghezza dell'LCS in cui si alternano valori ≤ 5 e valori ≥ 10 e che termina in $x_i = y_j \leq 5$ sarà data dall'aggiunta di **1** alla lunghezza della **massima** LCS in cui si alternano valori ≤ 5 e valori ≥ 10 che finisce con due elementi $x_h = y_k (h < i,\ k < j)$ ed è tale per cui $x_h \geq 10$

- se $x_i == y_j \wedge x_i \geq 10$

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j \wedge x_h \leq 5\} & \forall\ i,\ j > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Sottostruttura Ottima: La lunghezza dell'LCS in cui si alternano valori ≤ 5 e valori ≥ 10 e che termina in $x_i = y_j \geq 10$ sarà data dall'aggiunta di **1** alla lunghezza della **massima** LCS in cui si alternano valori ≤ 5 e valori ≥ 10 che finisce con due elementi $x_h = y_k (h < i,\ k < j)$ ed è tale per cui $x_h \leq 5$

Soluzione PV

$C_{m,n}$ = Lunghezza della LCS tra X di lunghezza m e Y di lunghezza n che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10 e che termina con $x_m = y_n$)

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$$

Algorithm 6 LCS tra X e Y che alterna valori ≤ 5 e valori ≥ 10

```
for i = 1 to m do
    C[i, 0] = 0
end for
for j = 1 to n do
    C[0, j] = 0
end for
for i = 1 to m do
    for j = 1 to n do
        if x[i] ≠ y[j] then
            C[i, j] = 0
        end if
        if x[i] == y[j] ∧ x[i] ≤ 5 then
            max = 0
            for h = 0 to i − 1 do
                for k = 0 to j − 1 do
                    if C[h, k] > max ∧ x[h] ≥ 10 then
                        max = C[h, k]
                    end if
                end for
            end for
            C[i, j] = 1 + max
        end if
        if x[i] == y[j] ∧ x[i] ≥ 10 then
            max = 0
            for h = 0 to i − 1 do
                for k = 0 to j − 1 do
                    if C[h, k] > max ∧ x[h] ≤ 5 then
                        max = C[h, k]
                    end if
                end for
            end for
            C[i, j] = 1 + max
        end if
    end for
end for
```

```
ottimo = 0
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if C[i, j] > ottimo then
      ottimo = C[i, j]
    end if
  end for
end for
return ottimo
```

7 LCS tra X e Y che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari

Problema Principale Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la loro LCS che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari

Problema Ridotto Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari

Problemi Vincolati

- **0**: Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS di **lunghezza pari** che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_m = y_n$
- **1**: Date due sequenze X di lunghezza m e Y di lunghezza n trovare la **lunghezza** della loro LCS di **lunghezza pari** che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_m = y_n$

Sottoproblemi di dimensione (i, j)

- **0 Sottoproblema di dimensione** (i, j): Trovare la **lunghezza** della LCS di **lunghezza pari** di X_i e Y_i che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_i = y_j$ (pari ≥ 10)

$$i \in \ 0, ..., m$$
$$j \in \ 0, ..., n$$

- **0 Sottoproblema di dimensione** (i, j): Trovare la **lunghezza** della LCS di **lunghezza dispari** di X_i e Y_i che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_i = y_j$

$$i \in \ 0, ..., m$$
$$j \in \ 0, ..., n$$

Variabili

- $C_{i,j,\underline{0}}$ = **lunghezza** della LCS di **lunghezza pari** di X_i e Y_i che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_i = y_j$
- $C_{i,j,\underline{1}}$ = **lunghezza** della LCS di **lunghezza dispari** di X_i e Y_i che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_i = y_j$

Casi base PV_0

- $C_{i,0,\underline{0}} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j,\underline{0}} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j,\underline{0}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$
- se $x_i == y_j \wedge 5 < x_i < 10 \qquad C_{i,j,\underline{0}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$
- se $x_i == y_j \wedge x_i \leq 5 \qquad C_{i,j,\underline{0}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Passo Ricorsivo PV_0

- se $x_i = y_j \wedge x_i (= y_j) \geq 10$

$$C_{i,j,\underline{0}} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k,\underline{1}} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j\} & \forall\ i,\ j > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Casi base PV_1

- $C_{i,0,\underline{1}} = 0 \qquad \forall\ i$
- $C_{0,j,\underline{1}} = 0 \qquad \forall\ j$
- se $x_i \neq y_j \qquad C_{i,j,\underline{1}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$
- se $x_i == y_j \wedge 5 < x_i < 10 \qquad C_{i,j,\underline{1}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$
- se $x_i == y_j \wedge x_i \geq 10 \qquad C_{i,j,\underline{1}} = 0 \qquad \forall\ i,\ j > 0$

Passo Ricorsivo PV_1

- se $x_i = y_j \wedge x_i(= y_j) \leq 5$

$$C_{i,j,\underline{1}} = \begin{cases} 1 + max\ \{C_{h,k,\underline{0}} \neq 0 \mid 0 \leq h < i,\ 0 \leq k < j\} & \forall\ i,\ j > 1 \\ max\ \{\emptyset\} = 0 \end{cases}$$

Soluzioni PV

- $C_{m,n,\underline{0}}$ = Lunghezza LCS di X_i di lunghezza pari che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_m = y_n$
- $C_{m,n,\underline{1}}$ = Lunghezza LCS di X_i di lunghezza dispari che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari e che termina con $x_m = y_n$

Soluzione PR

$$max\ \{C_{i,j,\underline{0}}\ C_{i,j,\underline{1}} \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$$

Algorithm 7 LCS tra X e Y che alterna valori ≤ 5 in posizione dispari e valori ≥ 10 in posizione pari

```
for i = 1 to m do
  C[i, 0, 0] = 0
  C[i, 0, 1] = 0
end for
for j = 1 to n do
  C[0, j, 0] = 0
  C[0, j, 1] = 0
end for
for i = 1 to m do
  for j = 1 to n do
    if x[i] ≠ y[j] then
      C[i, j, 0] = 0
      C[i, j, 1] = 0
    end if
    if x[i] == y[j] ∧ x[i] > 5 ∧ x[i] < 10 then
      C[i, j, 0] = 0
      C[i, j, 1] = 0
    end if
    if x[i] == y[j] ∧ x[i] ≤ 5 then
      max = 0
      for h = 0 to i − 1 do
        for k = 0 to j − 1 do
          if C[h, k, 0] > max then
            max = C[h, k, 0]
          end if
        end for
      end for
      C[i, j, 1] = 1 + max
    end if
    if x[i] == y[j] ∧ x[i] ≥ 10 then
      max = 0
      C[i, j, 0] = 0
      for h = 0 to i − 1 do
        for k = 0 to j − 1 do
          if C[h, k, 1] > max then
            max = C[h, k, 1]
          end if
        end for
      end for
      if max ≠ 0 then
        C[i, j, 0] = 1 + max
      end if
    end if
  end for
```

```
ottimo = 1
for i = 0 to m do
  for j = 0 to n do
    if max(C[i, j, 0], C[i, j, 1]) > ottimo then
      ottimo = max(C[i, j, 0], C[i, j, 1])
    end if
  end for
end for
return ottimo
```