

Business Intelligence e Servizi per la Finanza

Giuseppe Facchi

A.A. 2020-2021

Indice

1	Introduzione alla Finanza	4
1.1	Bonds	4
1.2	Azioni	6
1.2.1	OHLC Data	7
1.2.2	Payoff e Profitto delle Azioni	7
1.2.3	Indici azionari	8
1.3	Opzioni e strumenti derivati	9
1.3.1	Payoff e Profitto di un'opzione	9
1.3.2	Come calcolare il prezzo (premium) di un'opzione . . .	10
1.4	Futures e Forwards	10
1.4.1	Payoff e Profitto di Futures e Forwards	10
2	Portfoli e Investimenti di tipo collettivo	11
2.1	Gestione del portfolio	11
2.2	Trading	12
2.2.1	Trading Positions	12
2.2.2	Attitudini di Trading	12
2.2.3	Tori e Orsi	13
2.2.4	Market Timing e Buy-And-Hold	13
2.2.5	Discounted Cashflow Model	13
2.2.6	Arbitraggio	14
2.2.7	EMH (Efficient Market Hypotesis)	14
3	Electronic Markets e Limit Order Books	16
3.1	Limit Order Book e Spread	16
3.1.1	Alcuni tipi di ordine	17
3.2	Colocation	18
3.3	Exchange Fees	18
3.4	Ulteriori classificazioni dei traders	18
4	Ritorni di Asset e Portfoli	20
4.1	One Period Simple Return	20
4.2	Compound Return	20
5	Portfolio Investment	21
5.1	Ritorni del Portfolio	21

6	Portfolio Optimization	23
6.1	Minimo rischio nel modello media-varianza	23
6.1.1	Frontiera Efficiente	24
6.1.2	Portfolio con asset risk-free	24
6.2	CAPM e BETA	25
7	Portfolio Selection	27
7.1	Strategia Buy And Hold	29
7.2	Strategia Constant Rebalanced Portfolio (CRP)	29

1 Introduzione alla Finanza

Gli strumenti sono chiamati **securities**

Security Un qualsiasi strumento finanziario con un valore finanziario utilizzabile e negoziabile. Tipologie:

- **Debito:** Security risk-free (Bonds, depositi ecc.)
- **Equity:** Azioni delle compagnie
- **Derivatives:** Il loro valore dipende da altre variabili (**futures, forward, swaps, options**)

Si trovano nei **mercati finanziari**

1.1 Bonds

I **bond** sono considerati **benchmark risk-free**. Sono **contratti di prestito a lungo termine** tra due parti (es. stato-stato, stato-cittadino):

- **Issuer:** Debitore (es. stato)
- **Holder:** Creditore (es. cittadino)

La *data di riscossione* del credito viene detta **maturity date**. Il **valore del bond** varia in base alla *maturity date* e al *tasso d'interesse* così come la *frequenza di pagamento*

Formula del compounding del tasso d'interesse

$$P_n = P_0(1 + r)^n$$

Dove:

P_0 : *Principal* (Investimento iniziale)

r : *Tasso d'interesse* annuale

n : *Maturity* (anni)

Con r annuale, ma **pagamenti frazionari**:

$$P_n = P_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

m : n° di pagamenti annui

NB A parità di P_0 e r un bond con $m > 1$ **rende di più**

Payoff Valore della security alla maturity

Profit Payoff aggiustato secondo il rischio decurtato dall'investimento iniziale \neq principal perché bisogna considerare anche fattori esterni (tasse, ecc.)

Profitto di un Bond I bond non richiedono tassazione, quindi

$$P_\tau - P_0 = P_0(1 + \frac{r}{m})^{m\tau} - P_0 = P_0((1 + \frac{r}{m})^{m\tau} - 1)$$

τ : Maturity date

Continuous Compounding Il trading può essere effettuato continuamente per via del continuo mutamento del **model pricing behaviour**. Ad esempio per i bond avremo:

$$P_n = P_0(1 + \frac{r}{m})^{mn}$$

e con

$$m = +\infty$$

n infinitesimale

avremo:

$$P_\tau = P_0 \times e^{r\tau}$$

Questa formula viene utilizzata per **confrontare securitites**. Se P_t è il valore del bond a tempo t , allora il suo valore all'istante $t+\tau$ con il **continuous compounding** è

$$P_{t+\tau} = P_t \times e^{r\tau}$$

$$P_{t-\tau} = P_t \times e^{-r\tau}$$

1.2 Azioni

3 tipologie di ordine:

- **Market Order**
- **Limit Order**
- **Stop Order**

Market *Esecuzione immediata del trade al miglior prezzo sul mercato.*

- Tempo di esecuzione ha priorità sul prezzo
- Il prezzo non corrisponderà quasi mai a quello indicato quando viene eseguita la richiesta

Limit *Esecuzione del trade ad un prezzo prefissato o migliore.*

- Prezzo ha priorità sul tempo

Stop *Esecuzione del trade ad un prezzo fissato (**stop price**), specificando un valore sotto/sopra il quale NON scendere/salire*

- Raffinamento del Limit
- Dopo aver raggiunto lo stop price si sceglie di trasformare il trade in un limit order o market order
- Usato per **limitare le perdite** (Stop Loss)
- Usato per **prefissare il profitto** (Stop Gains)

Stop vs Limit

- Solo il **limit order** viene spedito **immediatamente** al mercato
- Il mercato **non vede** gli **stop order**

1.2.1 OHLC Data

Open High Low Close (+Adjusted Close, +Volume)

- OPEN: prezzi di apertura del mercato
- HIGH: prezzo più alto raggiunto in giornata
- LOW: prezzo più basso raggiunto in giornata
- CLOSE: prezzo di chiusura (corrente)
- ADJ CLOSE: prezzo di chiusura dopo operazioni di amministrazione
- VOLUME: scambi

NB: OPEN non corrisponde quasi mai a CLOSE del giorno prima per via di GROSSE OPERAZIONI eseguite sempre a chiusura di mercato

1.2.2 Payoff e Profitto delle Azioni

Se compro un'azione a $t = t_0$ al prezzo S_0 e la vendo a tempo $t = T$ al prezzo di S_T ($m \times S_T$ nel caso di trade multipli), assumendo la regola del *continuous compounding* ad un tasso d'interesse r il **profitto** di un'azione comprata a t_0 per S_0 e venduta a T per S_t sarà

$$S_T + D_T - C(S_0)e^{rT}$$

Dove:

S_T : *Payoff* (Valore delle azioni vendute)

D_T : *Dividendo*

$C(S_0)e^{rT}$: *Payoff che avrei avuto per un investimento iniziale risk-free*
(costo risk-free del mio investimento iniziale)

1.2.3 Indici azionari

Un indice è una **funzione matematica** che *misura i cambiamenti in un gruppo rappresentativo di dati*. Nel mercato azionario sono i dati sono i **prezzi** e l'indice traccia i cambiamenti di un gruppo di azioni selezionate che rappresentano il mercato di un settore industriale. Costituisce anche una referenza generale dello **stato di salute del mercato**. Gli indici vengono divisi in due categorie:

- **Pesati per prezzo:** Viene considerato solo il prezzo degli indici (es. Dow Jones). Negli indici pesati per prezzo *un **significativo** cambio di **prezzo** di una componente può influenzare pesantemente il valore dell'indice* senza tener conto della *dimensione della compagnia*
- **Pesati per capitalizzazione:** Considerano la capitalizzazione degli indici (*prezzo \times outstanding*) (es. Nasdaq Composite). Negli indici pesati per capitalizzazione *un **piccolo** cambiamento di **prezzo** di una grande compagnia influenzerà molto il valore dell'indice*

Sono importanti perché

- Sono usati come **riferimento** dagli investitori
- Il confronto è fatto tra il **tasso cumulativo dei benefici** che si ottengono nel periodo di investimenti rispetto a quello che si sarebbe ottenuto dall'indice di mercato

Ritorno $R_t = \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) - 1$

1.3 Opzioni e strumenti derivati

Un'opzione è un **contratto** che si può comprare per avere un'**opportunità** (non l'obbligo) di commerciare un asset in una **data futura** (**exercise date**) e ad un **preciso prezzo** (**exercise price**).

- **Call option**: Opportunità di **comprare** alla maturity date
- **Put option**: Opportunità di **vendere** alla maturity date

Esercitare un'opzione Il trade viene eseguito in quella data a quel prezzo

Premium Il prezzo di un azione

1.3.1 Payoff e Profitto di un'opzione

- **Payoff Call** option (comprare): $\max(P_T - K, 0)$
- **Payoff Put** option (vendere): $\max(0, P_T - K)$

Dove:

P_T : Prezzo dell'asset alla data T

K : *Strike Price* (Prezzo prefissato sull'opzione)

Il payoff di un'opzione dipende dalla **possibilità di poter esercitarla oppure no**, tranne che per le *path dependent*.

Il **profitto** di una **call** option al netto di tassazioni e oneri vari sarà dato da

$$\max(P_T - K, 0) - C(P_0, T) \times e^{r\tau}$$

Dove:

$\max(P_T - K, 0)$: *Payoff della call option in data T*

$C(P_0, T) \times e^{r\tau}$: *Payoff che avrei avuto per un investimento iniziale risk-free* (costo risk-free del mio investimento iniziale)

Perché utilizzare le opzioni invece delle azioni?

- **Comprare** (o riservarsi di comprare) azioni con meno soldi (premium < costo azione)
- **Limitare possibili perdite in anticipo**

Straddle Strategy Consiste nel comprare sia una call sia una put option con stesso Strike Price e Maturity Date.

1.3.2 Come calcolare il prezzo (premium) di un'opzione

In un'opzione **entrambe** le parti assumono un **rischio**

- Il compratore se l'opzione non viene esercitata
- Il venditore se l'opzione viene esercitata

1.4 Futures e Forwards

Differiscono dalle opzioni perché viene comprato un **obbligo** di commercializzazione ad un **delivery price** in una **specifica data**.

- **Forward contracts:** Non vengono emessi sul mercato (scambi tra privati)
- **Futures:** Vengono emessi sul mercato

Gli asset sono spesso **commodities** (beni indifferenziati)

1.4.1 Payoff e Profitto di Futures e Forwards

$$Payoff = Profitto$$

- **Compratore:** $P_T - K$
- **Venditore:** $K - P_T$

P_T : Prezzo di esercizio in data T

K : Delivery Price (in data T)

Non ci sono tasse/commissioni su futures/forwards e non c'è investimento iniziale

2 Portfoli e Investimenti di tipo collettivo

Portfolio Collezione di una o più securities detenuta da un investitore o una compagnia d'investimenti

Posizioni Elementi di un portfolio

Valore di un portfolio Somma del valore di tutte le posizioni in quel momento

Profitto di un portfolio Somma dei profitti di ogni posizione in quel momento

2.1 Gestione del portfolio

- Aprire nuove posizioni
- Chiudere posizioni (*venderle al mercato o aggiungere nuove posizioni "inverse per mitigare le perdite"*)

Allocazione degli Asset La dinamica di comprare/vendere assets per minimizzare i rischi e massimizzare i guadagni

NB: Invece di investire in un portfolio personale è possibile investire in un **veicolo d'investimento collettivo** gestito da compagnie professionali

- **Mutual Funds**
 - Regolati dal mercato di scambio
 - Disponibili pubblicamente
 - Due tipi:
 - * *Closed End*: Quote massime prestabilite
 - * *Open End*: Quote massime non ristrette
- **ETF**: come i fondi *closed-end*
 - Ottimi nel mercato azionario
 - Replica un indice di mercato, infatti è spesso legato ad un indice azionario

2.2 Trading

2.2.1 Trading Positions

- Un investitore che **possiede** una security si dice **in posizione long su quella security**
- Un investitore che **deve** una security si dice **in posizione short su quella security**
- Si esegue uno **short selling** su una security quando ce la facciamo **prestare** per rivenderla sul mercato (non la possediamo). Non è sempre permessa dai mercati.

Andare LONG su una security Significa **comprare** una security pensando che il suo valore **aumenti**

Andare SHORT su una security Significa **vendere** una security pensando che il suo valore **diminuisca**

2.2.2 Attitudini di Trading

Tre tipi:

- **Hedgers:** Bassa attitudine al rischio
 - Proteggono il loro portfolio dalla perdita di valore anche a costo di minimizzare i benefici
 - Una *hedging strategy* consiste nell'inserire nel portfolio posizioni **contrarie (correlate negativamente)**
- **Speculators:** Alta attitudine al rischio, investono sulle previsioni degli andamenti
- **Arbitrageous:** Prendono vantaggio dalle differenze di prezzo tra due o più mercati
 - La maggior parte delle volte i costi di transazione non permettono l'arbitraggio

2.2.3 Tori e Orsi

Rappresentano le **attitudini degli investitori lato MARKET**

- Se il mercato **cresce** si dice **bullish**
- Se il mercato **scende** si dice **bearish**

NB: Quando il mercato è **bullish** bisogna assumere **long positions**, quando il mercato è **bearish** bisogna assumere **short positions**. La classificazione del mercato presuppone un **giudizio soggettivo**.

2.2.4 Market Timing e Buy-And-Hold

Il Buy-And-Hold è un'**attitudine passiva**: le securities vengono mantenute per un lungo periodo.

Timing Strategies

- Modelli per prevedere i ritorni (profitto rispetto l'investimento iniziale)
- Analisi delle proprietà strutturali dei prezzi
- Analisi del business economico aziendale

NB: Il test generale prevede di **comparare** i risultati di una **timing strategy** e di una **buy-and-hold**

2.2.5 Discounted Cashflow Model

Il prezzo di un'azione è determinato dalla forza di domanda e offerta degli investitori.

Il guadagno futuro di un investitore sarà composto da **dividendi per quota** e dal **prezzo atteso per quota**.

NB: Quando devo stimare il **valore presente** S_0 di una quota azionaria, ad esempio dopo un anno, devo stimarne il **payoff** (prezzo futuro + dividendi)

$$S_0 = \frac{S_1 + D_1}{1 + r}$$

Dove:

S_0 : Valore stimato presente

S_1 : Prezzo stimato dopo un anno

D_1 : Dividendo stimato dopo un anno

r : Perdita di valore del denaro annua

L'anno dopo ancora sarà

$$S_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{S_2}{(1+r)^2}$$

NB: Non ha senso tenere le azioni per molto tempo perché, con il passare degli anni, l'esponente al denominatore aumenta e fa tendere la frazione a 0.

Per fare stime di DCF bisogna conoscere r

$$r = \frac{D_1 + S_1}{S_0} - 1$$

r viene detto **Market Capitalization Rate/Cost of Equity Capital** (è il *ritorno atteso* dello stock)

2.2.6 Arbitraggio

Parliamo di **Extended no arbitrage** quando *l'arbitraggio non è possibile*. In questi casi, *se abbiamo due portafogli uguali dovrebbero rimanere entrambi uguali in ogni tempo t , mentre se due portafogli sono diversi, il maggiore sarà maggiore anche in tutti gli altri stati*, proprio perché non c'è possibilità di arbitraggi su scambi. Quando si parla di **valutazione dell'investimento**, la teoria più semplice è quella della **risk neutral valuation**: si valuta l'opzione con l'assunzione che l'investitore sia indifferente al rischio. Ma se fosse così, tutte le securities sarebbero di tipo bond, il beneficio portato da uno stock sarebbe uguale a quello risk free, il che sappiamo non essere coerente con la realtà finanziaria.

2.2.7 EMH (Efficient Market Hypotesis)

I mercati sono **informativamente efficienti**, le **informazioni** presenti all'istante di compravendita riflettono i prezzi veri e attuali delle securities e

nessuno dei partecipanti può quindi essere avvantaggiato.

Ci sono informazioni fittizie, ad esempio il *volume*: non abbiamo un'idea reale di quante azioni vengono acquistate, infatti esistono livelli di informazione differenti che permettono di conoscere questi dettagli.

Conoscere il volume è sicuramente vantaggioso, in quanto gli indici sono molto approssimativi, infatti, il prezzo delle azioni è strettamente legato alle forze di domanda e offerta degli investitori. Per un investitore è fondamentale **percepire il possibile guadagno futuro**. *Il guadagno futuro viene dal guadagno atteso dai dividendi per unità di share e dal prezzo atteso a fine investimento*. Le parole chiave sono **velocità** e **informazione**. L'informazione è totalmente condivisa secondo questa teoria, anche se sappiamo che non è proprio così, in quanto molti traders sono più informati di altri. L'eccesso di guadagno che otteniamo nell'avere informazioni permette di capire se il mercato è efficiente oppure no. Dobbiamo definire il set di informazioni a seconda di come appare:

- **Weak**: Solo i prezzi costituiscono l'informazione
- **Semi-strong**: Tutte le informazioni pubbliche sono disponibili
- **Strong**: Tutte le informazioni sia pubbliche che private sono disponibili

I test per le EMH sono:

- Weak: **Technical Analysis**
- Semi-Strong: **Fundamental Analysis**

Strong EMH

- Impossibile in pratica
- Dimostrato che chi è in possesso di info in una situazione di **strong EMH** è troppo più avvantaggiato

Grossman propose un modello per le ipotesi **strong**: un modello con una variabile che rappresenta il costo per accedere alle informazioni di natura privata in un mercato competitivo. Si è dimostrato che tutti sono disponibili a pagare per ottenere informazioni private.

Computational Complexity EMH Da un punto di vista computazionale un mercato è detto efficiente se *rispetto a risorse computazionali R* , **nessuna strategia** può generare profitto

3 Electronic Markets e Limit Order Books

- Gli **ordini** sono gestiti da un **matching engine** e da un **Limit Order Book**
- Il LOB tiene traccia degli ordini
- Il matching engine utilizza un algoritmo definito per gestire il trading con dei criteri

La maggior parte dei mercati prioritizzano il **market order** al **limit order** e utilizzano quindi una priorità prezzo-tempo.

3.1 Limit Order Book e Spread

- Il LOB è definito su una tabella
- Lo step (differenza tra prezzi tra un limit order e il successivo) è chiamato **tick** ed è definito dalla borsa
- Lo **spread** è la differenza tra **ask** e **bid** price

$$QuotedSpread_t = P_t^a - P_t^b$$

Dove:

P_t^a : *Miglior bid price*

P_t^b : *Miglior ask price*

Quando ask e bid sono uguali lo **spread** è **0**, si parla quindi di **mercato bloccato (locked)**

Midprice *Media aritmetica tra bid e ask price*

Price-Time strategy Limit Order posizionati nel LOB in ordine di prezzo, se esistono già dei limit order per quel prezzo allora viene accodato. Si parla quindi di **FIFO**.

Per quanto riguarda i market order invece è possibile non consumare correttamente l'ordine perché non esiste la giusta corrispondenza tra market order e record nel LOB. Si parla quindi di **walking the book** quando, per consumare correttamente il market order, si consumano gli ordini di prezzo immediatamente adiacente per poi andare a consumare quelli di prezzo successivo. Se un market order viene eseguito al **bid price** viene detto **hit the bid**, altrimenti si dice **lift the offer**.

Può presentarsi anche una situazione in cui un market order può essere un **IOC (Immediate or Cancel)**, ovvero può essere cancellato se non eseguito al miglior prezzo.

Un'altra situazione riguarda invece il **re-routing**, ovvero un market order che, quando non consumato correttamente, viene reindirizzato su altri mercati per evitare il walk.

Il **tempo** è fondamentale perché gli investitori agiscono sulle loro posizioni in anticipo rispetto alle variazioni di mercato

Microprice Utilizzato come **proxy**, è più preciso rispetto al mid price e viene utilizzato per *misurare la tendenza di variazione* del prezzo verso il bid o l'ask

$$Microprice_t = \frac{V_t^b}{V_t^b + V_t^a} P_t^a + \frac{V_t^a}{V_t^b + V_t^a} P_t^b$$

3.1.1 Alcuni tipi di ordine

Day Orders Ordini eseguiti all'apertura o alla chiusura del mercato

Non-Routable Ordini non reindirizzabili verso altri mercati

Pegged Ordini che si muovono con il midpoint (non hanno prezzo specifico, vengono piazzati sul mercato nazionale)

Hidden Non mostrano la quantità

Iceberg Mostrano parzialmente la quantità (al momento del consumo viene mostrata interamente)

Immediate or Cancel Ordini eseguiti al miglior prezzo e il resto viene cancellato

Fill-or-Kill Ordini che vengono consumati interamente oppure non vengono eseguiti

Discretionary Viene mostrato al limit price ma può essere eseguito ad un prezzo nascosto

3.2 Colocation

I traders hanno le loro macchine in prossimità degli exchange. Accedervi prevede enormi vantaggi in termini di velocità. Tutti gli investitori in colocation sono alla pari.

3.3 Exchange Fees

- **Maker-Taker:** Le fees sono pagate maggiormente dai compratori perché sottraggono liquidità al mercato
- **Taker-Maker:** Viceversa

3.4 Ulteriori classificazioni dei traders

- **Fundamental:** Operazioni guidate da concetti economici estranei al mercato
- **Informed traders:** Il loro profitto è dato da informazioni che non sono riflesse dai prezzi di mercato
 - *Attivi/Aggressivi:* Agiscono in previsione
- **Market makers:** Traders professionali che traggono profitto dalle variazioni di prezzo
 - *Passivi/Reattivi:* Si adattano di conseguenza

- **Proprietary Traders:** Ottengono profitti da asset mispriced, price momentum e sentimenti del mercato
- **Regular Investors e Fundamental Traders:** Investono su aziende per parteciparne

4 Ritorni di Asset e Portfoli

4.1 One Period Simple Return

Holding period e ritorno Con P_t : prezzo di un asset a tempo t

$$R_{0,1} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

Net Simple Return

$$R_{t-1, t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Gross Simple Return

$$1 + R_{t-1, t} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Che interpretiamo come il valore futuro di \$1 investito nell'asset per un singolo mese.

4.2 Compound Return

Ritorno Semplice Netto su k periodi

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1 = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}(k))$$

Ritorno Semplice Lordo su k periodi

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i}(k))$$

Continuously Compounded Return Le moltiplicazioni sono abbastanza pesanti dal punto di vista computazionale, ed è quindi bene cercare di limitarle al minor numero possibile.

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = P_t - P_{t-1} \text{ dove } P_t = \ln(P_t)$$

5 Portfolio Investment

Si parla di **Portfolio Investment** quando si vuole avere un sistema di investimento passivo di securities in un portfolio con l'aspettativa di guadagnarci un ritorno. Ci si aspetta che il **Portfolio Return** sia direttamente correlato con il **Rischio Atteso** degli investimenti di cui il portfolio è composto.

5.1 Ritorni del Portfolio

Abbiamo un investimento di $V\$$ in due assets A e B

- x_a : Percentuale di azioni in A
- x_b : Percentuale di azioni in B

Insieme (x_a, x_b) formano il **portfolio** sul quale stiamo cercando di ottenere i ritorni.

- Quantità di \$ investiti in A = $V\$ \cdot x_A$
- Quantità di \$ investiti in B = $V\$ \cdot x_B$

Il ritorno semplice di un singolo periodo di questi due asset è rispettivamente $R_{A,t}$ e $R_{B,t}$. Vogliamo quindi definire il ritorno semplice di un singolo periodo t dato da entrambi gli asset x_a e x_b . Sappiamo quindi definire il valore dell'investimento sugli asset A, B alla fine del periodo t , definito come segue:

- *Valore di A* = $V\$ \cdot x_a(1 + R_{A,t})$ per A
- *Valore di B* = $V\$ \cdot x_b(1 + R_{B,t})$ per B

Ritorno netto semplice del portfolio

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^n x_i R_{i,t}$$

Ritorno lordo semplice del portfolio

$$1 + R_{p,t} = \sum_{i=1}^n x_i (1 + R_{i,t})$$

Considerando i Dividendi

$$R_t^{totale} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$
$$1 + R_t^{totale} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}$$

Considerando l'Inflazione I ritorni calcolati finora sono calcolati su **prezzi nominali**, quindi vengono chiamati **ritorni nominali**. Il termine inflazione si riferisce ad una crescita (o decrescita) costante sul livello del prezzo dei beni e servizi in un determinato periodo di tempo. Quando il livello dei prezzi sale, ogni unità della valuta corrente compra meno beni e servizi. Di conseguenza, l'inflazione riflette una *riduzione nel potere di acquisto per unità monetaria*. Il **ritorno reale** di un asset su un particolare periodo deve essere calcolato tenendo conto del tasso di crescita del prezzo generale su quel determinato periodo, e possono accadere due cose:

- Se il *prezzo nominale* degli asset cresce più **velocemente** del livello del prezzo generale, allora il ritorno nominale sarà **maggiore** del tasso di inflazione ed il ritorno reale sarà **positivo**
- Se il *prezzo nominale* degli asset cresce più **lentamente** del livello del prezzo generale, allora il ritorno nominale sarà **minore** del tasso di inflazione ed il ritorno reale sarà **negativo**

Per poter calcolare il ritorno reale su un asset si effettuano due step:

1. Deflazionare il prezzo nominale dell'asset sul livello del prezzo generale
2. Calcolare i ritorni nel modo normale usando i prezzi deflazionati

$$R_t^{real} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{CPI_{t-1}}{CPI_t} - 1$$
$$\pi_t = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}}$$
$$R_t^{real} = \frac{1 + R_t}{1 + \pi_t} - 1$$

Ritorno Annuale Lordo (Compound Annual Gross Return CAGR)

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R_m)^{12}$$

6 Portfolio Optimization

Prevede due step

- Identificare la combinazione di asset o portfoli che sono ottimali rispetto all'**expected return** e al **rischio**
- Scegliere quel portfolio che meglio incontra le necessità dell'investitore (es. tolleranza al rischio, numero di assets ecc.)

L'obiettivo principale è quello di **diversificare il portfolio per ridurre la varianza**. Ricordando che:

- Media: $\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_{i,t})$
- Varianza: $\sigma_w^2 = Var(R_t^w) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$

Consideriamo due casi:

- I ritorni degli N asset sono **incorrelati a coppie** \rightarrow *Maggiore è il numero di coppie incorrelate minore è il rischio*
- I ritorni degli N asset sono **correlati a coppie** \rightarrow *Maggiore è il numero di coppie correlate maggiore è il rischio*

6.1 Minimo rischio nel modello media-varianza

Makovitz Portfolio Selection Problem Trovare i pesi $w = (w_1, \dots, w_n)$ tali che, per una dato **ritorno atteso** r^* , il ritorno atteso del portfolio dato da w è r^* mentre si minimizza la varianza. Questo si riconduce ad un problema di ottimizzazione, che si risolve mediante tecnica di programmazione quadratica, con rilassamento langrangiano.

$$\begin{aligned} \min \quad & w' C w \\ \text{s.a.} \quad & w' \mu = r^* \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{aligned}$$

- Nessuna limitazione sui pesi
- Soluzione definita efficiente

Possibilità di calcolare i pesi per tanti possibili scenari (vairando r^*) e ottenere portfoli diversi. Dai pesi ottenuti è possibile ottenere la deviazione standard del portfolio w

$$\sigma^* = \sqrt{(w^*)' C w^*}$$

6.1.1 Frontiera Efficiente

Il problema viene poi rappresentato graficamente nel piano $\sigma - \mu$ dove sulle ascisse abbiamo le **varianze** e sulle ordinate abbiamo i **ritorni**. I punti ammissibili vengono chiamati **frontiera efficiente** e sono i punti che favorevoli al nostro investimento. Oltre la frontiera **non esistono** portfoli con lo stesso ritorno attesa e minor varianza (portfoli impossibili). Il **vertice** dell'iperbole rappresenta l'**MVP Minimum Variance Portfolio**. I casi sottostanti a MVP e simmetrici quindi al paraboloide di soluzione, sono tutti punti dove i ritorni sono sfavorevoli nel rapporto ritorno/rischio (minimum variance locus)

6.1.2 Portfolio con asset risk-free

Aggiungere un asset **risk-free** ad un portfolio corrisponde a prestare o a farsi prestare denaro ad un tasso d'interesse r_0 con rischio **nullo**.

- **Prestare** corrisponde ad avere un peso **positivo**
- **Farsi prestare** corrisponde ad avere un peso **negativo**

Ritorno risk-free:

$$r_f = r_0\tau$$

Con solo questo asset avremo $\mu = r_f$ e $\sigma^2 = 0$ quindi sul piano $\sigma - \mu$ avremo il punto di coordinate $(0, r_f)$.

Consideriamo un portfolio di soli asset risk-free con media e varianza aggregati, avremo quindi

$$1 - w_f = w_1 + \dots + w_N$$

Dove:

1: *Totale*

w_f : *Peso investimento risk-free*

$w_1 + \dots + w_N$: *Peso investimenti rischiosi*

E media e varianza saranno rappresentati quindi come

$$\mu_\omega = w_f r_f + (1 - w_f) \mu_w$$

$$\sigma_\omega = (1 - w_f) \omega_w$$

w_f varia tra 0 e 1.

- Se $w_f = 1$ allora avremo un portfolio rappresentato da $(0, r_f)$
- Se $w_f = 0$ allora avremo un portfolio rappresentato da (σ_w, μ_w)

Queste due condizioni sul piano $\sigma - \mu$ generano una retta chiamata **Capital Market Line**. M è il **Market Portfolio** e rappresenta il punto di intersezione tra la soluzione d'investimento risky e quella risk-free. Dobbiamo considerare che qualsiasi portafoglio **efficiente**, dovrebbe avere **valore simile** al Market Portfolio. Supponiamo invece che $(std(R_m), E(R_m)) = M$

$$E(R^w) = w_f r_f + (1 - w_f) E(R_m)$$

$$std(R^w) = (1 - w_f) std(R_m)$$

- Se $w_f \geq 0$ Stiamo prestando a un rate risk-free
- Se $w_f < 0$ Stiamo ricevendo in prestito a un rate risk-free

Il rapporto usato per misurare l'efficienza del portafoglio, quindi verificare che effettivamente, il portafoglio rappresenti una soluzione favorevole a quello del mercato è lo **Sharpe Ratio**.

$$SR_M = \frac{E(R_m) - r_f}{std(R_m)}$$

Questo indice misura il guadagno del portfolio rispetto al rischio aggiunto

- Maggiore sarà l' SR migliori saranno gli investimenti
- Non si può migliorare SR_M

6.2 CAPM e BETA

Capital Asset Pricing Model Equilibrio rischio-guadagno di asset singoli di un portfolio generico

$$E(R_i) = r_f + \beta_i (E(R_m) - r_f)$$

- $E(R_i)$: Ritorno atteso di un asset i
- r_f : Ritorno atteso risk-free in un tempo τ
- $E(R_m)$: Ritorno atteso Market Portfolio (M)

Beta Beta è un indice che rappresenta quanto un dato elemento finanziario contribuisce all'eccesso di ritorno del mio portafoglio.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$$

- $E(R_i) - r_f$ Premio di rischio
- $E(R_M) - r_f$ Premio di mercato

Vogliamo conoscere il prezzo P di un asset il cui payoff dopo un tempo τ è random P_τ . Mediante CAPM il ritorno sarà:

$$E(R_\tau) = \frac{E(P_\tau)}{P} - 1 = r_f + \beta(E(R_M) - r_f)$$

e mediante la formula del **discounted cash flow model includendo strumenti finanziari di rischio** avremo che

$$P = \frac{E(P_\tau)}{1 + r_f + \beta(E(R_M) - r_f)}$$

Per uno strumento **risk-free** avremo che $\beta = 0$ e $E(P_\tau) = P_\tau$, quindi avremo $P = \frac{P_\tau}{1+r_f}$.

Se riscriviamo β come $\beta_i = \rho(R_i, R_M) \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$ possiamo anche ricavare interpretazioni dei valori del beta di un asset come una misura del movimento correlato del mercato. Se $\beta = \beta_i$ e $\rho = \rho(R_i, R_M)$

Value of beta	Effect on correlation and volatility ratio	Interpretation
$\beta < 0$	$\rho < 0,$ $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 0$	Asset moves in the opposite direction of the movement of the market
$\beta = 0$	$\rho = 0$	Movements of the asset and the market are uncorrelated
$0 < \beta \leq 1$	$\rho > 0,$ $0 < \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \leq 1/\rho$	Asset moves in the same direction as the market, volatility of asset can be < or > volatility of market
$\beta > 1$	$\rho > 0,$ $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 1/\rho > 1$	Asset moves in the same direction as the market but with greater volatility

Figura 1: Beta

Diversi vincoli per la portfolio optimization

- **Limiti superiori e inferiori per gli holders:** per regolare le proporzioni tra gli asset oppure obbligare l'investitore ad avere solo long positions ($w_i \geq 0$)
- **Limiti di turnover nell'acquisto/vendita:** Per stabilire un limite superiore alla proporzione della variazione degli holding da un periodo all'altro
- **Limiti di trading:** Per stabilire un limite inferiore alla produzione della variazione degli holding da un periodo all'altro
- **Dimensioni del portfolio:** Limiti sul numero di asset di un portfolio

7 Portfolio Selection

Quando un portfolio devia dall'expected return dell'investitore le sue posizioni devono essere riviste ribilanciando i pesi.

Consideriamo un investitore con m long securities con un orizzonte temporale, senza costi di transazione e investimento fisso iniziale

- Il **tempo** tra presente e orizzonte viene **diviso** in n periodi dove $t = 0$ è l'inizio e $t = n$ è la fine
- **Alla fine** di ogni **periodo** $[t - 1, t]$ la **proporzione** di **peso** investita in ogni posizione **viene rivista**

Il **cambiamento del market price** per un dato periodo è rappresentato dal **vettore di mercato**

$$x_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm})$$

Dove:

$$x_{ti} = \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)}$$

Ovvero il *rapporto tra close e opening price dell' i -esima security nel periodo $[t - 1, t]$* La **distribuzione di pesi** tra le m securities per un dato periodo t è rappresentata dal **vettore di portfolio**

$$w_t = (w_{t1}, w_{t2}, \dots, w_{tm})$$

$$w \in W \text{ dove } W = \{w \in \mathbb{R}_+^m, \sum_{j=1}^m w_j = 1\}$$

Quindi **un investimento per portfolio** w_t produce un **incremento di peso** rispetto al vettore di mercato x_t nel periodo $[t-1, t]$ di un fattore

$$w'_t \cdot x_t = \sum_{j=1}^m w_{tj} \cdot x_{tj}$$

Una **sequenza di investimenti** per una **selezione di n vettori portfolio** $w_n = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ risulta in un incremento di wealth di

$$S_n(w^n, x^n) = \prod_{t=1}^n w'_t \cdot x_t = \prod_{t=1}^n \sum_{j=1}^m w_{tj} w_{tj}$$

Con

- $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ sequenza di vettori prezzo corrispondenti agli n periodi
- $S_n(w^n, x^n)$ è il fattore wealth ottenuto da w^n rispetto alla sequenza di vettori mercato x^n

Definizione Una strategia di portfolio selection per n periodi di trading è una sequenza di n scelte di vettori portfolio $w^n = (w_1, \dots, w_n)$ dove ogni $w_t \in W$.

Un algoritmo di portfolio selection è un algoritmo che produce una strategia di portfolio selection

$$S_n(w^n, x^n) \rightarrow S_n(ALG, x^n)$$

Per valutare le performance di questi algoritmi:

- Confronto dei wealth factor
- Confronto dell'exponential growth rate

7.1 Strategia Buy And Hold

- Allocare tutto il wealth lungo le m security secondo $w_1 \in W$
- Non eseguire trading

$$S_n(w_1, x^n) = \prod_{t=1}^n \sum_{j=1}^m w_{1j} x_{tj}$$

7.2 Strategia Constant Rebalanced Portfolio (CRP)

- Strategia timing
- Utilizza la stessa distribuzione dei pesi in ogni periodo
- CRP_w strategia con pesi fissi $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$

$$S_n(CRP_w, X^n) = \prod_{t=1}^n \sum_{j=1}^m w_j x_{tj}$$

- Ribilanciamento dei pesi alla fine di ogni periodo, ovvero trovare w^* tale che $\max S_n(CRP_w, x^n)$

CRP_{w^*} è migliore delle altre strategie di portfolio selection, ma irrealizzabile perché basata su previsioni del futuro di x^n