



(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Úrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2025. március 6.

Vektortér I

- Definíció: A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük \mathbb{R} felett, ha értelmezve van rajta egy $+$ -al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \text{ ahol } (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \text{ ahol } (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V)$$

$$\exists \mathbf{0} \in V \text{ úgy, hogy } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in V \text{ esetén}$$

$$\forall \mathbf{a} \in V \exists (-\mathbf{a}) \in V : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

Vektortér II

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda \mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu) \mathbf{a}, \text{ ahol } (\mathbf{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \text{ ahol } (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R})$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \text{ ahol } (\mathbf{a} \in V \text{ és } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\forall \mathbf{a} \in V \text{ --re } 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert V^2 és V^3 halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, a valós szám-n-esek halmaza, illetve a legfeljebb n -edfokú polinomok $R_n[x]$ halmaza is.

Vektortér III

- ▶ Kérdés: Mi az a szorzat? És mi az a polinom?
- ▶ Definíció: A és B halmazok Descartes-féle szorzatának azt a halmazt nevezzük, amely azon rendezett párok halmaza, ahol az pár első tag az A halmaz, a második tagja pedig a B halmaz eleme és a szorzat minden lehetséges párt tartalmaz. Vagyis

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

- ▶ Például Descartes-szorozattal alkothatóak két tagú személynevek:
 $\{\text{Kovács, Szabó, Horváth}\} \times \{\text{János, Anna}\} = \{\text{Kovács János, Kovács Anna, Szabó János, Szabó Anna, Horváth János, Horváth Anna}\}.$
- ▶ Ez általánosítható $3, 4, \dots, n \in \mathbb{N}^+$ tagú szorzatokra is, ahol $n \geq 2$.

Vektortér IV

- Definíció: A polinom egy olyan kifejezés, melyben csak számok és változók nemnegatív egész kitevőjű hatványainak szorzatai, illetve ilyenek összegei szerepelnek. Például:

$$p(x, y, z, u) = 5x^4y^6 - 3xz^3 + 11y^{15}u^7$$

$$q(x) = 2x^2 + 6x + 9$$

$$r(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3x^2y + y^3$$

Vektortér V

Másképpen:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, n \in \mathbb{N}^+.$$

Itt x a polinom változója, n a polinom foka. Vannak többváltozós polinomok is, ezekben több változó szerepel. Egy többváltozós polinom foka az a legnagyobb szám, amit az egyes tagok tényezőinek kitevőinek összeadásával kapunk. Minden kitevőnek nemnegatív egész számnak kell lennie.

Vektortér VI

- ▶ Definíció: A V vektortér L nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha L maga is vektortér a V -beli műveletekkel.
- ▶ Tétel: A V vektortér L nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad \text{esetén} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \in L \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in L \quad \text{esetén} \quad \lambda \mathbf{a} \in L. \end{aligned}$$

- ▶ Definíció: Legyen $H \neq \emptyset$ részhalmaza a V vektortérnek. A H által generált altér az a legszűkebb altere V -nek, mely tartalmazza H -t. (Azaz bármely H -t tartalmazó altérnek részhalmaza.) Jele: $\mathcal{L}(H)$.
- ▶ Mindig létezik H -t tartalmazó legszűkebb altér: tekintsük a H -t tartalmazó összes alterek metszetét.

Vektortér VII

- ▶ Definíció: A H halmaz generátorrendszere a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.
- ▶ Definíció: A V vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.
- ▶ Megjegyzés: A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált V vektortérnek, ha a V halmaz minden eleme felírható a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.
- ▶ Definíció: A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük.
- ▶ Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.
- ▶ Definíció: A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Jele: $\dim(V)$.

Vektortér VIII

- ▶ Definíció: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázis V -ben és $\mathbf{a} \in V$. Ekkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat, amelyekre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, az \mathbf{a} vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.
- ▶ Definíció: Legyen $\mathbf{v} \in V^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vagy $\mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Az $l = \{\alpha \mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origón átmenő) egyenesnek nevezzük.
- ▶ Definíció: Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. Ekkor az $L = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origóra illeszkedő) síknak nevezzük.
- ▶ Az $L = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmaz éppen az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ által generált lineáris altér. Amennyiben $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ lineárisan függetlenek, az L halmaz egy m -dimenziós lineáris altér. Ekkor a $K = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m + \mathbf{v} : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmazt egy m -dimenziós affin altérnek nevezzük. Minden affin altér előáll $K = L + \mathbf{v}$ alakban, ahol L egy lineáris altér és $\mathbf{v} \in V$.

Vektortér IX

- ▶ Az $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete:
 $n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.
- ▶ Definíció: Halmazok (Minkowski-)összege: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
- ▶ Állítás: Alterek összege és metszete: $L_1 + L_2$ és $L_1 \cap L_2$ is altér.
- ▶ Definíció: Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$ direkt összeget alkot, ha $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.

A mátrix rangja I

- ▶ Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$.
- ▶ Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
 1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
 2. Egy vektor λ -szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
 3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
 4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- ▶ Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

A mátrix rangja II

- ▶ A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq \min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.
- ▶ A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!