Név / Name: Dr. Facskó Gábor István　　　　Neptun kód / Code: BQQQFY

(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra vizsga / (ENKEMNA0302) Applied Linear Algebra Exam

1. Adja meg a determináns axiomatikus definícióját! / What is the axiomatic definition of the determinant? (10 pont)

   Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

   (a) Homogén: $\det(\dots \lambda_i \mathbf{a}_i \dots) = \lambda_i \det(\dots \mathbf{a}_i \dots)$;
   (b) Additív: $\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots)$;
   (c) Alternáló: $\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots)$;
   (d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik, $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ tartományú és ezekkel a tulajdonságokkal bíró függvény megegyezik a det függvénnyel. Másképpen: a mátrixhoz ezekkel a szabályokkal egyértelműen rendelhető egy szám. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns n-ed rendű. A determináns egy funkcionál, azaz olyan leképezés, amely egy skalárt rendel egy függvényhez.

   Axiomatic definition: Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a square matrix and $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ a function. The function $\det(\mathbf{A})$ is called the determinant of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$ if

   (a) Homogeneous: $\det(\dots \lambda_i \mathbf{a}_i \dots) = \lambda_i \det(\dots \mathbf{a}_i \dots)$;
   (b) Additive: $\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots)$;
   (c) Alternating: $\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots)$;
   (d) The determinant of the identity matrix is 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   where $\lambda_i \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ are the column vectors of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$. This mapping can be considered as an n-variable function over the columns of the matrix: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. These axioms uniquely determine the mapping. Any other function $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ with these properties is equal to det. In other words, a unique scalar value can be assigned to each matrix according to these rules. If $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, then the determinant is of order n. The determinant is a functional — that is, a mapping assigning a scalar to a function.

2. Mi az az önadjungált vagy unitér mátrix? / What are Hermitian and unitary matrices? (10 pont)

   Hermite, vagy önadjungált mátrixok: Ahogyan a transzponált fogalmának – a komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, úgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Egy mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a saját transzponáltjával, és önadjungált, ha megegyezik a saját adjungáltjával. Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Az önadjungált mátrixokat Hermite-féle mátrixnak is nevezik. Egy önadjungált mátrix főátlójában csak valós számok állhatnak, mert csak ezek egyeznek meg saját konjugáltjukkal. Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, mivel a valós számok megegyeznek a saját konjugáltjukkal.

   Unitér mátrix: Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

   Hermitian, or self-adjoint matrices: Just as the complex conjugate is the extension of the transpose (considering the complex scalar product), the self-adjoint matrix is the extension of the symmetric matrix. A symmetric matrix is equal to its own transpose, while a self-adjoint matrix is equal to its own complex conjugate. A complex matrix $\mathbf{A}$ is Hermitian if $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Self-adjoint matrices are also called Hermitian matrices. The diagonal of a self-adjoint matrix contains only real numbers, as only real numbers are equal to their own conjugate. Every real symmetric matrix is self-adjoint since real numbers are equal to their own conjugate.

Unitary matrix: A square complex matrix $\mathbf{U}$ is unitary if $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

3. Mi a mátrix nyoma? / What is the trace of a matrix? (10 pont)

Mátrix nyoma: Egy négyzetes mátrix főátlójában lévő elemek összegét a mátrix nyomának nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix nyomát *trace* $\mathbf{A}$ vagy *tr* $\mathbf{A}$ jelöli. Például:

$$trace\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 5,\ trace\,(\mathbf{E}_n) = n,\ [\mathbf{a}]_X = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

Trace of a matrix: The sum of the elements on the main diagonal of a square matrix is called the trace of the matrix. The trace of matrix $\mathbf{A}$ is denoted by *trace* $\mathbf{A}$ or *tr* $\mathbf{A}$. For example:

$$trace\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 5,\ trace\,(\mathbf{E}_n) = n,\ [\mathbf{a}]_X = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

4. Mi két mátrix Kronecker-szorzata? / What is the Kronecker product of two matrices? (10 pont)

Kronecker-szorzat: Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. Kronecker-szorzatukon (vagy más néven tenzorszorzatukon) azt az $A \otimes B$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix}a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B}\\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

Például:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4\\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Kronecker product: Let $\mathbf{A}$ be an $m \times n$ matrix and $\mathbf{B}$ a $p \times q$ matrix. Their Kronecker product (also called the tensor product) is the $mp \times nq$ matrix denoted by $A \otimes B$, which has the block matrix form:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix}a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B}\\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

For example,

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4\\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Mi a diagonális és a háromszögmátrix? / What are diagonal and triangular matrices? (10 pont)

Diagonális mátrixok: Csak a mátrix főátlójában vannak nem nulla elemek.

Háromszögmátrix: Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek felső háromszögmátrixnak, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak alsó háromszögmátrixnak nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, egység háromszögmátrixról beszélünk.

Diagonal matrices: There are non-zero elements only in the main diagonal of the matrix. It is simple to perform operations with them.

Triangular Matrix: A matrix in which all elements below the main diagonal are zero is called an upper triangular matrix, while a matrix in which all elements above the main diagonal are zero is called a lower triangular matrix. If all the elements on the main diagonal of a triangular matrix are 1, it is called a unit triangular matrix.

6. Mi az az LU-felbontás? Melyek az LU-felbontás előnyei? Mire használható az LU-felbontás, és miért? / What is LU decomposition? What are the advantages of LU decomposition? What are its applications and why? (10 pont)

LU-felbontás: Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

Mivel az oszlopok között nem végzünk műveletet, egyetlen LU-felbontással több, kevesebb oszlopot tartalmazó mátrix LU-felbontását is meghatároztuk. Könnyen belátható, hogy végtelen számú egyenletrendszert tudunk megoldani egyetlen LU-felbontással. Mátrixok invertálása is egyszerűbb LU-felbontással.

LU Decomposition: We say that the factorization of an $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ into the form $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ is an LU decomposition (LU factorization or LU decomposition) if $\mathbf{L}$ is a unit lower triangular matrix (i.e., ones on the diagonal and zeros above it), and $\mathbf{U}$ is an upper triangular matrix.

Since no operations are performed between columns, a single LU decomposition can also be used for matrices with fewer columns. It is easy to see that an infinite number of systems of linear equations can be solved with a single LU decomposition. The inversion of matrices is also easier using LU decomposition.

7. Mi a mátrix sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere? / What are the eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces of a matrix? (10 pont)

Sajátérték, sajátvektor: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $\varphi : V \to V$ egy lineáris leképezés. Ha létezik olyan $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor $\mathbf{a}$ a φ sajátvektora, és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátérték.

Sajátaltér: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. Ez a halmaz a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból áll, és alteret alkot. Ezt nevezzük a λ-hoz tartozó sajátaltérnek.

Eigenvalue, eigenvector: Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ and $\varphi : V \to V$ a linear mapping. If there exists a nonzero vector $\mathbf{a} \in V$ and a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$, then $\mathbf{a}$ is called an eigenvector of φ and λ the corresponding eigenvalue.

Eigenspace: Let $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. This set of eigenvectors corresponding to λ, together with the zero vector, forms a subspace called the eigenspace corresponding to λ.

8. Mit értünk mátrixok hasonlóságán? Mikor diagonizálható egy mátrix? / What is the similarity of matrices? When can you transform a matrix into dyadic form? (10 pont)

Hasonlóság: Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Diagonalizálhatóság: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

Similarity: We say that the $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is similar to the matrix $\mathbf{B}$ if there exists an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Notation: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Diagonalizability: The $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable if it is similar to a diagonal matrix, i.e., if there exists a diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}$ and an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

9. Mik azok ortogonális és a Hermite-féle mátrixok? / What are the orthogonal and the Hermite matrices? (10 pont)

   Ortogonális mátrix: Egy valós négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

   Hermite, vagy önadjungált mátrixok: Ahogyan a transzponált fogalmának – a komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, úgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Egy mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a saját transzponáltjával, és önadjungált, ha megegyezik a saját adjungáltjával. Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Az önadjungált mátrixokat Hermite-féle mátrixnak is nevezik. Egy önadjungált mátrix főátlójában csak valós számok állhatnak, mert csak ezek egyeznek meg saját konjugáltjukkal. Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, mivel a valós számok megegyeznek a saját konjugáltjukkal.

   Orthogonal matrix: A real square matrix is called orthogonal if its column vectors or row vectors form an orthonormal system.

   Hermitian, or self-adjoint matrices: Just as the complex conjugate is the extension of the transpose (considering the complex scalar product), the self-adjoint matrix is the extension of the symmetric matrix. A symmetric matrix is equal to its own transpose, while a self-adjoint matrix is equal to its own complex conjugate. A complex matrix $\mathbf{A}$ is Hermitian if $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Self-adjoint matrices are also called Hermitian matrices. The diagonal of a self-adjoint matrix contains only real numbers, as only real numbers are equal to their own conjugate. Every real symmetric matrix is self-adjoint since real numbers are equal to their own conjugate.

10. Mi az a főkomponens-analízis (Principal Component Analysis, PCA)? Csak szavakkal válaszoljon, írjon 2–3 mondatot. / What is Principal Component Analysis (PCA)? Answer in essay form, without formulas, using 2–3 sentences. (10 pont)

    Principal Component Analysis (PCA), avagy főkomponens-analízis vagy főkomponens-elemzés egy többváltozós statisztikai eljárás, mely az adatredukciós módszerek közé sorolható. Lényege, hogy egy nagy adathalmaz - melynek változói kölcsönös kapcsolatban állnak egymással - dimenzióit lecsökkentse, miközben a jelen lévő varianciát a lehető legjobban megtartsa.

    Principal Component Analysis (PCA) is a multivariate statistical procedure that falls under data reduction methods. Its essence lies in reducing the dimensions of a large dataset – whose variables are interrelated – while retaining as much of the existing variance as possible.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Grades: 0–40 points: Fail (1), 41–55 points: Sufficient (2), 56–70 points: Satisfactory (3), 71–85 points: Good (4), 86–100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gábor FACSKÓ
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. június 19. / June 19, 2025