(MATNA1902) Lineáris algebra gyakorló feladatok

I. DETERMINÁNSOK

1. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát kifejtési tétellel!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát Sarrus szabállyal!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II. MŰVELETEK MÁTRIXOKAL

4. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Végezze el a következő műveleteket!

a.) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$

b.) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

c.) $\mathbf{A}^T + \mathbf{F}$

d.) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^T$

e.) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

f.) $\rho(\mathbf{A})$, $\rho(\mathbf{C})$

g.) $\mathbf{E}^{-1}$, $\mathbf{F}^{-1}$

III. MÁTRIXEGYENLETEK

5. Oldja meg az alábbi mátrixegyenleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 21 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

a.) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

b.) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$

6. Oldja meg az alábbi mátrixegyenleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \mathbf{C}$

b.) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} = 2\mathbf{X}^{-1}$

IV. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

7.) Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval és Cramer szabályokkal!

a.)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

V. LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

8. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 2, 1, 4)$, a $\mathbf{b} = (0, 5, -1, 1)$ és a $\mathbf{c} = (1, 1, 5, 2)$ vektorok?
9. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$, a $\mathbf{b} = (-2, -1, 0)$ és a $\mathbf{c} = (-3, 2, 0)$ vektorok?
10. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 2, -1)$, a $\mathbf{b} = (-1, -2, 1)$ és a $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$ vektorok?

VI. ALTEREK

11. Altér -e az $\mathbb{R}^3$-on az $U = \{(x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_2)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$?
12. Altér -e az $\mathbb{R}^3$-on az $U = \{(x_1 + x_3, x_1 - x_3, 4x_3)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$?
13. Altér -e az $\mathbb{R}^3$-on az $U = \{(2x_1 + x_2, 2x_1, -3x_2)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$?

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. március 7.