(PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. november 28.

Ismétlés - Lineáris transzformációk

- Definíció: Legyenek V_1 és V_2 lineáris vektorterek. A $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \text{additív} : \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \varphi(\mathbf{a})+\varphi(\mathbf{b}) \\ \text{és homogén} : \varphi(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda\varphi(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: (Mátrixreprezentáció) A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ úgy, hogy $\varphi(\mathbf{x}) = A\cdot\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Definíció: Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció

- Ortogonalizációs eljárás:
  1. $\mathbf{e}_1^{'} = \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1^{'}}{\|\mathbf{e}_1^{'}\|}$.
  2. Kiszámítjuk az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ vektorokat.
  3. Végül

$$\mathbf{e}_{k+1}^{'} = \mathbf{b}_{k+1} - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 - \cdots - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k,$$

továbbá

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{e}_{k+1}^{'}}{\left\|\mathbf{e}_{k+1}^{'}\right\|}.$$

Sajátérték, sajátvektor

- Definíció: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
- Definíció: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!