Név / Name: ____________________ Neptun kód / code: ____________________

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra vizsga / Elementary Linear Algebra exam

1. Mi az a vektor? Mikor egyenlő két vektor? / What is a vector? When are two vectors equal? (10 pont)
   (a) A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás/lassulás (**a**), a forgás, a körsebesség (ω).

   Vectors are quantities with direction. For example: weight (**F**), velocity (**v**), position (**r**), acceleration/deceleration (**a**), rotation, rotational speed (ω).

   (b) A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.

   Limited length line segments from Point A to Point B: $\vec{AB}$. The start point is Point A, and the end is Point B.

   (c) Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók. Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

   Two vectors are equal if you can transform the first vector to the second vector using parallel shift/translation displacement. Or, if the lengths and directions of the vectors are the same.

2. Mi értünk **a** és **b** vektor összegén? Mit értünk **a** és **b** vektor különbségén? Készítsen ábrákat! / What is the sum of **a** and **b** vectors? What is the subtract of **a** and **b** vectors? Draw images.

   (a) Vektorok összeadása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

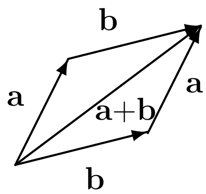
   $$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$$

   ahol $a_1,\ a_2,\ a_3, b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.

   Sum of vectors. If $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, then

   $$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$$

   where $a_1,\ a_2,\ a_3,,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az **a** *és* **b** *vektort úgy adjuk össze, hogy az* **a** *végpontjába toljuk a* **b***-t. Az összegvektor* ($\mathbf{a} + \mathbf{b}$) *az* **a** *kezdőpontjától a* **b** *végpontjába tartó vektor lesz.*
To add vectors **a** *and* **b** *you should transform vector* **b** *to the end point of the vector* **a**. *Their sum* ($\mathbf{a} + \mathbf{b}$) *is the vector from the start point of* **a** *to the endpoint of the vector* **b**.

(b) Vektorok kivonása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

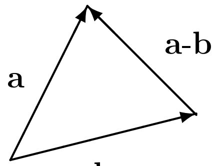
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

ahol a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$.

Subtracktion of vectors. If $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, then

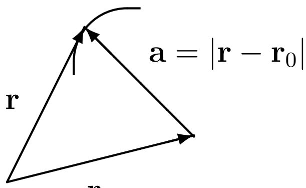
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

where a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$.



Az **a** *és* **b** *vektort úgy vonjuk ki, hogy a vektorokat közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *a* **b** *végpontjától az* **a** *végpontjába tartó vektor lesz.*
To get the difference of vectors **a** *and* **b**, *you should transfer to the vectors in a common start point. The difference of the vectors* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *starts from the end point of the vector* **b** *to the endpoint of vector* **a**.

3. Írja fel az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenletét a térben! / What is the equation of a sphere with a radius and (x_0, y_0, z_0) centre? (10 pont)



<u>Állítás:</u> Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

<u>Bizonyítás:</u> Egy a sugarú, $\mathbf{r}_0$ középpontú gömb azon pontok halmaza a térben $(\mathbf{r})$, amelyek a távolságban vannak $\mathbf{r}_0$-től. Azaz $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. Azaz, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$, vagyis $\underline{\underline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}}_{\text{q. e. d.}}$.

<u>Thesis:</u> The equation of the sphere with a radius and (x_0, y_0, z_0) centre is

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

<u>Deduction:</u> A sphere with radius a and $\mathbf{r}_0$ centre is the set of those points in 3D $(\mathbf{r})$, that are a distance from Point $\mathbf{r}_0$. It means that $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. Therefore, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$, or $\underline{\underline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}}_{\text{q. e. d.}}$.

4. Definiálja az egymással γ szöget bezáró **a** és **b** vektorok skaláris szorzatát! / Define the scalar product of **a** and **b** vectors with γ angle. (10 pont)

(a) Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.

The scalar (or inner) multiplication of two vectors is

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

where $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.

(b) Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

The scalar multiplication of $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectors is

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

5. Határozza meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? / What is the operator? What do you mean by the representation of an operator? (10 pont)

(a) Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

Operators are the linear vector-vector functions.

(b) Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

The representation of operators is the matrixes. See $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ and $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, where $m, n \in \mathbb{N}^+$. The

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

table is called $m \times n$ type matrix. The set of the $m \times n$ type matrixes is $M_{m \times n}$.

6. Definálja a determináns fogalmát! / What is the determinant? (10 pont)

(a) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det(\mathbf{A}), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|.$$

If Matrix $\mathbf{A}$ is type $n \times n$, where $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$ (Square Matrix), then the determinant of Matrix $\mathbf{A}$ is the following number:

$$det\,(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

where the summary is for al the permutations of $1, 2, \ldots, n$ numbers, and $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ means the number of inversions in the permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$:

$$\det(\mathbf{A}), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|.$$

7. Mi az a Sarrus szabály? / What is the Sarrus rule? (10 pont)

Kis mátrixokat a Sarrus szabállyal számolunk ki. 2×2-es mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

Azaz, átlósan a bal felső sarokból a jobb alsóba szorozzuk a számokat, majd kivonjuk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba húzott átló menti számokat.

3×3-as mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{11}$$

Small matrixes could be calculated using the Sarrus rule. For 2×2 matrixes:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

The elements of the main diagonal are multiplied, then the elements of the other diagonal are multiplied and subtracted from the previous multiplication.

For 3×3 matrixes:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{11}$$

8. Mikor mondjuk az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorokra, ahol $n \in \mathbf{N}^+$, hogy lineárisan függetlenek? / When are $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vectors, where $n \in \mathbf{N}^+$ linear independent? (10 pont)
Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

9. Mikor nevezünk egy vektorrendszer ortonormáltnak? / What is an orthonormal system of vectors? (10 pont)

Egy vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$, $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, ahol $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A system of vectors is called orthonormal if it consists of pairwise perpendicular unit vectors, i.e., $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, where $(i \neq j)$, and $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ for $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

10. Mit értünk egy lineáris leképezés sajátvektorán és sajátértékén? / What is the eigenvalue and eigenvector of a linear map? (10 pont)

    Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.

    Let V be a vector space over $\mathbb{R}$. Let $\varphi : V \to V$ be a linear mapping. If for a nonzero vector $\mathbf{a} \in V$ and a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, the equation $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ holds, we say that $\mathbf{a}$ is an eigenvector of φ, and λ is the eigenvalue of φ corresponding to $\mathbf{a}$.

A vizsga osztályzása: 0-40 pont: elégtelen (1), 41-55 pont: elégséges (2), 56-70 pont: közepes (3), 71-85 pont: jó (4) és 86-100 pont: jeles (5).

Grades: 0-40 points: Fail (1), 41-55 points: Pass (2), 56-70 points: Satisfactory (3), 71-85 points: Good (4) és 86-100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2024. december 16. / December 16, 2024