(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 6.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A két teszt alapján gyakorlati jegyet kapnak
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát lehet tenni, ha megszerezték az érvényes gyakorlati jegyet
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15.

Bibliography

FREUD R. 2004: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

P. D. LAX. 2008: Lineáris algebra és alkalmazásai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

GYÉMÁNT I., GÖRBE T. F. 2011, Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon Jegyzettár, Szeged.

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek I

- Algebrai tört fogalma és alkalmazása. Lineráris törtfüggvények ábrázolása, jellemzése.
- **Abszolútt értéket tartalmazó egyenletek megoldása.**
- Másodfokú egyenleteknél a gyökök és együtthatók összefüggései. Másodfokú egyenletrendszer megoldása.
- Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között.
- **Négyzetgyök alatt csak olyan elsőfokú polinomok, amelyek főegyütthatója 1, azaz $\sqrt{ax+b} = cx + d$ helyett a $\sqrt{x+c} = ax + b$ megoldása elegendő. (Eddig az ax+b alakú elsőfokú polinomok négyzetgyökét is vizsgálták.)**
- A függvény transzformációk közül az $f\left(cx\right)$ ábrázolása.
- Magasságtétel, befogótétel a derékszögű háromszögben.
- **Szög ívmértéke.**
- Logarimusfüggvény, logaritmus azonosságai, logaritmusos egyenletek.

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek II

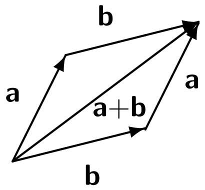
- **Függvény inverze.**
- **Az egyenes egyenletének normálvektoros és irányvektoros alakja, kör és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátageometriában.**
- **Két vektor skaláris szorzata.**
- A valós számok halmazán értelmezett triginometrikus függvények értelmezése, ábrázolása és trigonometrikus egyenletek megoldása.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása I

- <u>Definíció:</u> Vektorok összeadása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$$

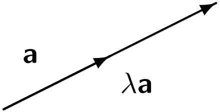
ahol $a_1,\ a_2,\ a_3, b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az **a** *és* **b** *vektort úgy adjuk össze, hogy az* **a** *végpontjába toljuk a* **b***-t. Az összegvektor* $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ *az* **a** *kezdőpontjától a* **b** *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása II

- Definíció: Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$
Figyelem, gondoljunk bele, mit jelent, ha λ 0, 1, -1, $<$1, vagy $>$1.



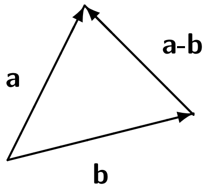
*Az **a** vektort egy λ skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de λ-szoros hosszúságú vektort rajzolunk.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása III

- Definíció: Vektorok kivonása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

ahol $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy vonjuk ki, hogy a vektorokat közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *a* $\mathbf{b}$ *végpontjától az* $\mathbf{a}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása IV

- Vektorok összegzésének tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok összeadása kommutatív, azaz $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
  - Állítás: Vektorok összeadása asszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.
  - Létezik null vektor: $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.
  - Minden vektornak van egy inverz vektora: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \; \exists (-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- A vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skalárral való szorzása asszociatív, azaz $\lambda (\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  - Állítás: Vektorok összeadása disztributív a skaláris szorzásra, azaz $\lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$.
  - Állítás: Skalárok összeadása disztributív a vektorral való szorzásra, azaz $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  - $\forall \in \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása I

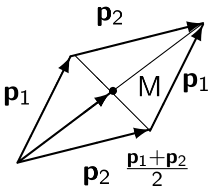
- Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hosszára fennáll, hogy $|\mathbf{v}| \neq 0$, ezért értelmezhető a normalizáltja:
  Definíció: A $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ vektor normalizáltja, normáltja, vagy irányvektora: $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.
- A normalizált vektor már egységvektor:

$$\left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\,|\mathbf{v}| = 1.$$

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete I

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M felezőpontja a következő pont:

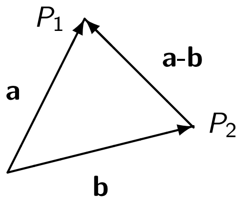
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$



A P_1-be és a P_2-be mutató $\mathbf{p_1}$ *és* $\mathbf{p_2}$ *vektorokkal felrajzoljuk a vektorösszeadást. A két-két vektor egymással párhuzamos, így egy paralelogrammát alkot. A paralelogramma átlói azonban felezik egymást, így az M pont a két vektor összegének a felénél található. Így a képlet igaz.*

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete II

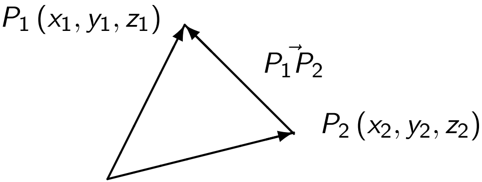
- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága a P_1 és P_2 végpontú **a**, **b** vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.



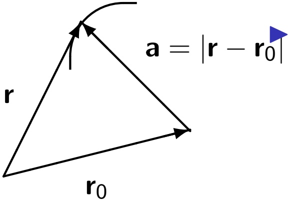
Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete III

- Állítás: A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$



Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete IV



- Állítás: Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai I

- Definíció. Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$$

  ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
- Vegyük észre, hogy $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.
- A skaláris szorzás tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skaláris szorzása kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
  - Állítás: Vektorok skaláris szorzása disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
  - Állítás: Vektorok skaláris szorzása homogén, azaz $(\lambda\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és$\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
  - Vektorok skaláris szorzása pozitív definit: $\mathbf{aa} \geq 0$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$ és $\mathbf{aa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

  A fenti állításokat a következő tétel segítségével is be lehet látni.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai II

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:
$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$
- Állítás: Két nemnulla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$
- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha $\mathbf{ab} = 0$.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ vektorra való merőleges projekciója (vetülete) alatt azon $\mathbf{b}$ irányú vektort értjük, amelynek végpontját az a vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai III

- Állítás: Ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$, akkor

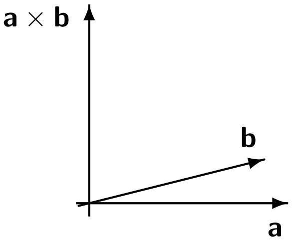
$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}.$$

- Ha a $\mathbf{b}$ irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b}.$$

Vektoriális szorzat I

- Definíció: Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nemnulla vektorokból álló vektorrendszert jobbrendszernek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180^o-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)



- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
  Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, ahol $(\mathbf{a} \in V^3)$.

Vektoriális szorzat II

- A vektoriális szorzat tulajdonságai
  1. Állítás: A vektoriális szorzás antiszimmetrikus, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.
  2. Állítás: A vektoriális szorzás homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
  3. Állítás: A vektoriális szorzás disszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3)$.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Jele: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Vektoriális szorzat III

- Bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{a} \in V^3$-re. esetén.
- Ezen felül $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül legalább az egyik nullvektor.
- Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

- Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott paralelogramma területével, mivel $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$ a magassága, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\angle$.

Vegyes szorzat

- <u>Definíció:</u> Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c}.$$

- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk.
- Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!