Név: Dr. FACSKÓ Gábor István                                        Neptun kód: BQQQFY

(MATNA1901) Lineáris algebra vizsga

1. Mi az a vegyes szorzat és hogyan fejthető ki determináns segítségével? (10 pont)

   Vegyes szorzat: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c}.$$

   Állítás: A vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Adja meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? (10 pont)

   Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

   Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

3. Határozza meg a determináns fogalmát! (10 pont)

   Leibnitz-féle definíció: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1 i_1} \cdot \alpha_{2 i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{n i_n},$$

   ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det\,(\mathbf{A})\,, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|\,.$$

   Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det\,(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

   (a) Homogén: $\det\,(\ldots \lambda_i \mathbf{a}_i \ldots) = \lambda_i \det\,(\ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (b) Additív $\det\,(\ldots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \ldots) = \det\,(\ldots \mathbf{a}_i \ldots) + \det\,(\ldots \mathbf{b}_i \ldots)$;

   (c) Alternáló: $\det\,(\ldots \mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_j \ldots) = -\det\,(\ldots \mathbf{a}_j \ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det\,(\mathbf{E}_n) = 1$, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix oszlop vektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a det-tel. Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns $n^{th}$-ed rendű. A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

4. Mit értünk egy mátrix inverzén? (10 pont)

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}_n$. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelöljük.

5. Mit jelent a reguláris és a szinguláris mátrix? (10 pont)

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.

6. Mit értünk egy vektorendszer rangján? (10 pont)

Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.

7. Mikor mondjuk, hogy egy $V$ halmaz vektortér? (10 pont)

A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy +-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b} \in V) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V) \\
\exists \mathbf{0} \in V \text{úgy, hogy}\;\; \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a} \;\; \forall \mathbf{a} \in V \;\; \text{esetén} \\
\forall \mathbf{a} \in V \exists (-\mathbf{a}) \in V : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda\mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\
(\lambda+\mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a} \in V \text{ és} \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\forall \mathbf{a} \in V\text{−re } 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

8. Mikor mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek? (10 pont)

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

9. Mit értünk egy mátrix sajátértékén, sajátvektorán és sajátalterén? (10 pont)

Legyen $V$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora $\varphi$-nek és $\lambda$ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke $\varphi$-nek.

Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A $L_\lambda$ alteret alkot, ezért a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

10. Mit jelent a mátrix diagonális alakja? Mikor diagonizálható egy mátrix? (10 pont)

A mátrix diagonális alakja azt jelenti, hogy csak a főátlóban találhatóan nem nulla elemek.

Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Facskó Gábor
*facskog@gamma.ttk.pte.hu*

Pécs, 2025. június 11.