Név: `Dr. FACSKÓ Gábor István` Neptun kód: `BQQQFY`

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra 1. zárthelyi dolgozat

1. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (-2, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -3, 1)$ és $\mathbf{c} = (2, 1, 1)$. Határozza meg a következő összefüggéseket:

a.) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \left[\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right](2,1,1) = \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}(2,1,1) = -2\cdot 2 + 3\cdot 1 - 2\cdot 1 = \underline{\underline{-3}}$

b.) $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \left[\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot(-1) - 2\cdot 0\\ 2\cdot(-2) - 2\cdot(-1)\\ 2\cdot 0 - (-2)(-2)\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} = \underline{\underline{2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}}}$

c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \left[\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 1 - (-1)(-3)\\ -1\cdot 0 - (-2)\cdot 1\\ -2(-3) - 0\cdot 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 6\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

d.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közbezárt szög?

$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-2\cdot 0 + 0\cdot(-3) + (-1)\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2}\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{10}}}$

e.) Egy síkban vannak-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?
`Korábban kiszámoltuk, hogy az` $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ `vektorok által meghatározott paralelpipedon térfoga, azaz` $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ `nem zérus. Azaz, a három vektor nem egy síkban található.`

f.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az $\mathbf{b}$ vektorra.
`Látható, hogy a` $\mathbf{b}$ `vector az` y `és a` z `tengelyek síkjában található. Erre minden` x `tengellyel párhuzamos vektor meröleges, tehát pl. a` $(1, 0, 0)$ `vektor is.`

(8 pont)

2. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-1 & 2 & 4\\-2 & 4 & 3\end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 1\\2 & 1 & -1 & 2\\1 & 0 & 0 & 1\\-2 & -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-1)(-1) = 8$

$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\-1 & 2 & 4\\-2 & 4 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4\cdot(-2) + (-2)(-1)\,4 - [(-2)\cdot 2\cdot(-2) + (-1)(-1)\,3 + 1\cdot 4\cdot 4] =$
$6 + 8 + 8 - (8 + 3 + 16) = 22 - 27 = \underline{\underline{-5}}$

$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix}4 & 2 & -1 & 1\\2 & 1 & -1 & 2\\1 & 0 & 0 & 1\\-2 & -2 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\1 & -1 & 2\\-2 & 2 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\2 & 1 & -1\\-2 & -2 & 2\end{vmatrix} =$
$\{2(-1)\,2 + (-1)\,2(-2) + 1\cdot 1\cdot 2 - [1(-1)(-2) + 1(-1)\,2 + 2\cdot 2\cdot 2]\} -$
$\{4\cdot 1\cdot 2 + 2(-1)(-2) + (-1)\,2(-2) - [(-1)\,1(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 + 4(-1)(-2)]\} =$
$-4 + 4 + 2 - (2 - 2 + 8) - [8 + 4 + 4 - (2 + 8 + 8)] = -6 - (16 - 18) = \underline{\underline{-4}}$

(10 pont)

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a.)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(II)-2(I), (III)-3(I)

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 8x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

(III)-8(II)

$$20x_3 = 29$$

Az utolsó egyenletből: $x_3 = \frac{29}{20}$. Az utolsó elötti egyenletrendszer elsö egyenletéből: $x_2 = -4 + 3\frac{29}{20} = \frac{7}{20}$. Az eredeti egyenletrendszer elsö egyenletéből: $x_1 = 1 + \frac{7}{20} - 2\frac{29}{20} = -\frac{31}{20}$.

b.)

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(II)+(I), (III)+4(I)

$$\begin{aligned} 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 13x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

13(I), 6(II)

$$\begin{aligned} 78x_2 + 26x_3 &= 13 \\ 78x_2 + 6x_3 &= 30 \end{aligned}$$

(II)-(I)

$$-20x_3 = 17$$

Az utolsó egyenletből: $x_3 = -\frac{17}{20}$. A második egyenletrendszer második elsö egyenletéből: $x_2 = \frac{1}{6}\left[1 - 2 \cdot \left(-\frac{17}{20}\right)\right] = \frac{9}{20}$. Az eredeti egyenletrendszer elsö egyenletéből: $x_1 = -3\frac{9}{20} + \frac{17}{20} = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2}$. (12 pont)

4. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 2, 1, 3)$, a $\mathbf{b} = (0, 5, -2, 2)$ és a $\mathbf{c} = (1, 1, 3, 1)$ vektorok?

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok akkor lineárisan függetlenek, ha az $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Azaz, a vektorokat az együtthatókkal beszorozva és lineáris egyenletrendszer alakjában felírva:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Az elsö egyenletböl következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_3$, amit behelyettesítünk a másik háromba:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletböl ki lehet fejezni, hogy $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Ezt behelyettesítjük a maradék két egyenletbe:

$$\begin{aligned} 13\lambda_1 &= 0 \\ 8\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ez csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 = 0$. Tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, azaz a három vektor lineárisan független. (8 pont)

5. Altér -e az $\mathbb{R}^3$-on az $U = \{(x_1 + x_2, -x_1 - x_2, 4x_2) \,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$?
A $\mathbb{R}^3$ vektortér U nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \quad &\text{esetén} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \in U \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in U \quad &\text{esetén} \quad \lambda \mathbf{a} \in U. \end{aligned}$$

Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$. Ekkor:

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 \\ 4a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \\ 4b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ -a_1 - a_2 - b_1 - b_2 \\ 4a_2 + 4b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ -(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \\ 4(a_2 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 - c_2 \\ 4c_2 \end{pmatrix},$$

ahol $c_i = a_i + b_i$ és $i \in \{1, 2, 3\}$. Tehát az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ vektorokból elöállított $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor is az U halmaz része.
Legyen $\mathbf{a} \in L$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 \\ 4a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda a_2 \\ -\lambda a_1 - \lambda a_2 \\ 4\lambda 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ -d_1 - d_2 \\ 4d_2 \end{pmatrix}$$

ahol $d_i = \lambda a_i$ és $i \in \{1, 2, 3\}$. Tehát a $\mathbf{a} \in U$ vektorból és az $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárból elöállított $\lambda \mathbf{a}$ vektor is az U halmaz része. Ezzel beláttuk, hogy U halmaz lineáris altere a $\mathbb{R}^3$-nek. (4 pont)

6. Adja meg meg az $\mathbf{a} = (-1, 0, 0)$ vektort az $(-1, 1, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(1, 2, 1)$ bázisban.

A feladat átfogalmazva azt jelenti, hogy:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

azaz a három vektor λ_1, λ_2, λ_3 szorosaként áll elö az $\mathbf{a}$ vektor. Ez egy lineáris egyenletrendszer a λ_1, λ_2, λ_3 számhármasra:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Látható a harmadik egyenletböl, hogy $\lambda_1 = -\lambda_3$. Ezt behelyettesítjük a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 &= -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Az elsö egyenletböl látható, hogy $\lambda_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, a másodikból pedig $\lambda_2 = \lambda_1$. Így $\lambda_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ és $\lambda_3 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$. Tehát $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (8 pont)

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2024. október 31.