(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. február 26.

Négyzetes mátrixok determinánsa I

- <u>Leibnitz-féle definíció:</u> Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az A mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(A) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát.
Jelölése:

$$\det\,(A)\,, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |A|\,.$$

Négyzetes mátrixok determinánsa II

- A determináns az egy nézetes mátrixhoz rendelt szám, amelynek a tulajdonságait a mátrix határozza meg. Valójában a vegyes szorzat kiterjesztése magasabb dimenziókra. Multivektorok pszeudoskalár komponense, amely megadja az elemi térfogatok nagyságát.
- Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha
  1. Homogén: $\det(\dots \lambda_i \mathbf{a}_i \dots) = \lambda_i \det(\dots \mathbf{a}_i \dots)$;
  2. Additív $\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots)$;
  3. Alternáló: $\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots)$;
  4. Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

  ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix oszlop vektorai.
- Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Négyzetes mátrixok determinánsa III

- Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a det-tel.
- Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal.
- Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor a determináns n^{th}-ed rendű.
- A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

Diagonális mátrixok I

- Diagonális mátrixok: egyszerű velük műveleteket végezni
  Legyen $\mathbf{A} = diag\,(1,2,3)$ és $\mathbf{B} = diag\,(5,4,3)$. Ekkor:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}, \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Diagonális mátrixok II

- Tétel: (Műveletek diagonális mátrixokkal) Legyen $\mathbf{A} = diag\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = diag\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ és legyen $k \in \mathbb{Z}$. Ekkor
  1. $\mathbf{AB} = diag\,(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$,
  2. $\mathbf{A}^k = diag\,\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right)$, speciálisan
  3. $\mathbf{A}^{-1} = diag\,\left(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\right)$.

  A (3) és negatív k esetén a (2) művelet akkor végezhető el, ha $a_i \neq 0$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$.

Permutációs mátrixok I

- A permutációs mátrixokat és kígyókat a diagonális mátrixok sorainak permutációjáva kapjuk.
- Minden permutáció megkapható elempárok cseréjével. Ha egy mátrix sorait permutáljuk, akkor azt megtehetjük sorcseréket adó elemi mátrixokkal való szorzásokkal. Ezeknek az elemi mátrixokat a szorzataként kapott mátrix úgy kapható meg az egységmátrixból, hogy a megadott sorcseréket végrehajtjuk rajta.
- Pl. a $\{2,4,3,1\}$ permutációt végrehajtva az $\mathbf{E}_n$ egységmátrixon a következő $\mathbf{P}$ mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_2 \leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}$$

Permutációs mátrixok II

Ezzel balról szorozva egy tetszőleges $4 \times m$-es mátrixot, annak sorait a fenti permutáció szerint fogja fölcserélni, például

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

- Definíció: (Permutáló mátrix, kígyó). A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (vagy permutációmátrixnak) hívjuk.

Permutációs mátrixok III

- Pl.: az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- A permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, az összes többi elem 0.
- A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van.
- Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is.

Permutációs mátrixok IV

- Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.
- Ha $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix, akkor $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{E}$-ből a $\mathbf{P}$-t kaptuk.
- Tétel: (Műveletek permutáló mátrixokkal). Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix. Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.
  Bizonyítás: Legyen $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ két permutáló mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{P}_{i*}\mathbf{Q}$ alakúak, ahol $\mathbf{P}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{P}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$ -val megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0.

Permutációs mátrixok V

Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás, aminek bizonyításához elég azt az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^T$ szorzatot. A $\left(\mathbf{PP}^T\right)_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $\left(\mathbf{P}^T\right)_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$\left(\mathbf{PP}^T\right)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}\left(\mathbf{P}^T\right)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i-edik sorának j-edik eleme a $\mathbf{P}$ i-edik és j-edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van.

Permutációs mátrixok VI

- Pl.:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Háromszögmátrixok

- Definíció: (Háromszögmátrix). Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek felső háromszögmátrixnak, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak alsó háromszögmátrixnak nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, egység háromszögmátrixról beszélünk.
- Tétel (Műveletek háromszögmátrixokkal). Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.

  Bizonyítás: Triviális.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok I

- Definíció: (Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.
- Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

  $\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, a $\mathbf{C}$ egyik se.
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fönn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok II

- Állítás: (Műveletek (ferdén) szimmetrikus mátrixokkal). Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmerikus.
  Bizonyítás: Triviális.
- Tétel: (Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére). Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden A négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right),$$

  ahol az összeg első tagja szimmetrikus, a második tagja pedig ferdén szimmetrikus.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok III

Bizonyítás: Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ mátrix szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

Hasonlóképpen az $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ mátrix ferdén szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

A két mátrix összege $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok IV

- Tétel: ($\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szimmetrikus). Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.
  Bizonyítás: $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ és $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^T = \mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Mátrix inverze I

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
  Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n\times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}\right)_{n\times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ mátrix, mert b_{ij} definiciója miatt lenulláza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij}.

Mátrix inverze II

- Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.
- Állítás: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.

Mátrix inverze III

- Az inverz mátrix kiszámítható elemi átalakítással
  - Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  - Egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
  - Sorok cseréje.

  Ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze.

  Szinguláris mátrix esetén az átalakítás nem végezhető el.

- Példák mátrix inverzének kiszámítására elemi eljárással.

Mátrix inverze IV

- Az inverz mátrix kiszámítása algebrai aldeterminánssal
  - Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix.
  - Minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij} -t, majd az a kapott mátrixot transzponálva és elosztva $\det(A)$-val, megkapjuk az A mátrix inverzét:
  $$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}.$$

  (Az A mátrix α_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsa.)

- Példák mátrix inverzének kiszámítására algebrai aldeterminánssal.

Mátrix inverze V

- Állítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
  1. Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  2. $(AB)^T = B^T A^T$
  3. A invertálható, akkor A^T is és $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Ellenőrizzük ezeket az állításokat néhány példával!

Shermann-Morrison-Woodbury elmélet I

- Sherman – Morrison-formula: Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, v \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ invertálható, és
$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$
- Tétel: (Sherman–Morrison–Woodbury formula) Egy k-ad rendű korrekció inverze néhány mátrixnak kiszámítható egy k-rangú korrekciójával az eredeti mátrix invezének:
$$(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\left(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1},$$
ahol $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$ are $n \times n$, $k \times k$, $n \times k$, $k \times n$ mátrixok, értelemszerűen.
Bizonyítás: N/A

Shermann-Morrison-Woodburry elmélet II

- A fenti formula olcsó alternatívát kínál mátrixok inverzének, azaz lineáris egyeletrendszerek kiszámítására. Az numerikus stabilitásáról azonban nem ismert.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!