(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. február 27.

Négyzetes mátrixok determinánsa I

- Leibnitz-féle definíció: Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az A mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\left(A\right) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1 i_1} \cdot \alpha_{2 i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{n i_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I\left(i_1, i_2, \ldots, i_n\right)$ jelöli az $\left(i_1, i_2, \ldots, i_n\right)$ permutációban lévő inverziók számát.
Jelölése:

$$\det\left(A\right), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |A|.$$

Négyzetes mátrixok determinánsa II

- A determináns az egy nézetes mátrixhoz rendelt szám, amelynek a tulajdonságait a mátrix határozza meg. Valójában a vegyes szorzat kiterjesztése magasabb dimenziókra. Multivektorok pszeudoskalár komponense, amely megadja az elemi térfogatok nagyságát.
- Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha
  1. Homogén: $\det(\ldots \lambda_i \mathbf{a}_i \ldots) = \lambda_i \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;
  2. Additív $\det(\ldots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \ldots) = \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots) + \det(\ldots \mathbf{b}_i \ldots)$;
  3. Alternáló: $\det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_j \ldots) = -\det(\ldots \mathbf{a}_j \ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;
  4. Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

  ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix oszlop vektorai.
- Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Négyzetes mátrixok determinánsa III

- Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a det-tel.
- Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal.
- Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns n^{th}-ed rendű.
- A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

Mátrix inverze I

- <u>Definíció:</u> Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Állítás:</u> Bármely $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
  <u>Bizonyítás:</u> Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n \times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj})_{n \times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrix, mert b_{ij} definiciója miatt lenulláza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij}.

Mátrix inverze II

- Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.
- Állítás: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.
- Az inverz mátrix kiszámítható elemi átalakítással
  - Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  - Egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
  - Sorok cseréje.

  Ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze.

  Szinguláris mátrix esetén az átalakítás nem végezhető el.

Mátrix inverze III

- Az inverz mátrix kiszámítása algebrai aldeterminánssal
  - Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix.
  - Minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij} -t, majd az a kapott mátrixot transzponálva és elosztva $\det(A)$-val, megkapjuk az A mátrix inverzét:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}.$$

(Az A mátrix α_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsa.)

Mátrix inverze IV

- Állítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
  1. Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  2. $(AB)^T = B^T A^T$
  3. A invertálható, akkor A^T is és $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek I

- Definíció: Legyen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- Definíció: Egyenletek lineáris kombinációja alatt azok valamely valós együtthatókkal vett összegét értjük.
- Definíció: Legyenek $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ és $\beta_i \in \mathbb{R}$, ahol $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ és $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az alábbi egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\
&\vdots \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m
\end{aligned}\right\}$$

Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek II

- Definíció: A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa (együtthatómátrixa) alatt a következőt értjük:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Gauss-féle eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására

- Definíció: Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az összes megoldásaik halmaza megegyezik.
- Tétel: Az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert egy vele ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:
  1. Egy egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$-val.
  2. Egy egyenlet λ-szorosának hozzáadása egy másik egyenlethez, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.
  3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja
  4. Egyenletek sorrendjének felcserélése
  5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt.

  A lineáris egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldása azt jelenti, hogy a fenti átalalkításokkal trapéz alakúra hozzuk azt. (Cél: $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén.)

Cramèr szabály I

- Ha az n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ($det\,(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|}, (k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+)$$

ahol

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \beta_n & \ldots & \alpha_{mn} & \end{pmatrix},$$

azaz a k-adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

Cramèr szabály II

- Igaz továbbá, hogy ha $det\,(A) = 0$, de $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\Delta_k \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ám $det\,(A) = \Delta_k = 0\,(k = 1, 2, \ldots., n)$ esetén lehet végtelen sok vagy 0 megoldás.

Lineáris függetlenség

- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

  ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!