



(MATNA1902) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Úrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2025. február 13.

Folyó ügyek

- ▶ Lefoglaltam az F07-es termet az F épületben 2025. május 15-én, 10:00-tól 14:00-ig pótzh írás céljára.
- ▶ Akarnak CubeSatot építeni?
- ▶ A toborzó előadás a PTE MIK B224-es termében lesz 2025. február 18-án kedde 14:00-tól 16:00-ig.
- ▶ OTDK szekció Pécsett a tavaszi szünetben.

Követelmények

- ▶ Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- ▶ Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- ▶ A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát kell tenni
- ▶ Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- ▶ 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: *Lineáris algebra fizikusoknak*, Polygon 2011.

Bártfai Pál: *Az n -dimenziós tér lineáris geometriája*. Typotex Kiadó 2014.

Rózsa Pál: *Bevezetés a mátrixelméletbe*. Typotex Kiadó 2009.

Martin Cockett, Graham Doggett: *Maths for Chemists*. 2nd Ed., RSC Publishing 2012.

Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: *Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press 2018. <https://ucls-book.stanford.edu/>

Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban: *Applied Linear Algebra*, 2nd Ed., Springer International Publishing AG 2018.

Gilbert Strang: *Introduction to Linear Algebra*, 5th Ed., Wellesley-Cambridge Press 2016. <https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/>

Operátorok I

- ▶ Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- ▶ Például:
 - ▶ Egység operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}$, minden \mathbf{A} operátorra.
 - ▶ Null operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, minden \mathbf{A} operátorra.
 - ▶ Tükrözési operátor: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}$, minden \mathbf{A} operátorra.
 - ▶ Projekció operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$, minden \mathbf{A} operátorra.
 - ▶ Forgatási operátor: később.
- ▶ Mindkét oldalról lehet szorozni.

Operátorok II

- ▶ Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

Operátorok III

- ▶ A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- ▶ Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex (i), a második pedig az oszlopindex (j).
- ▶ A mátrix i -edik sorát A_i , j -edik oszlopát pedig A_j jelölésekkel említjük.
- ▶ Determináns!!!

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T = (\alpha_{ji})_{n \times m}$. Ez az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti. Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözés a transzponálás.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja II

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m \times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m \times n}$ mátrixot, az A mátrix λ -szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})_{m \times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad B_{m \times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja III

$$\lambda A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} & \cdots & \lambda \alpha_{1n} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} & \cdots & \lambda \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \alpha_{m1} & \lambda \alpha_{m2} & \cdots & \lambda \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n \times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m \times k}$ mátrixot értjük, ahol

$$\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lj}.$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja IV

Azaz:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad B_{n \times k} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & \beta_{nk} \end{pmatrix}$$
$$A \cdot B_{m \times k} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1k} + \alpha_{12}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{nk} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1k} + \alpha_{22}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta_{11} + \alpha_{m2}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{n1} & \alpha_{m1}\beta_{12} + \alpha_{m2}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1k} + \alpha_{m2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{nk} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja V

- ▶ Definíció: Az n -ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$ -es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n \times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lj})_{n \times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrix, mert β_{lj} definíciója miatt lenullázza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij} .

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VI

- ▶ Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix esetén tehát értelmezhető a hatványozás:

$$A^1 = A \quad \text{és} \quad A^m = AA^{m-1}$$

ahol $(m \geq 2)$ és $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_n$.

- ▶ Állítás: A mátrixhatványozás azonosságai:

$$\begin{aligned} A^m A^k &= A^{m+k} \\ (A^m)^k &= A^{mk}, \end{aligned}$$

ahol $m, k \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás: A mátrixszorás definíciója alapján triviális.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VII

- ▶ Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$.
- ▶ Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
 1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
 2. Egy vektor λ -szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
 3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
 4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- ▶ Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VIII

- ▶ A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq \min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.
- ▶ A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!