(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. március 6.

Diagonális mátrixok I

- Diagonális mátrixok: egyszerű velük műveleteket végezni
  Legyen $\mathbf{A} = \mathit{diag}\,(1,2,3)$ és $\mathbf{B} = \mathit{diag}\,(5,4,3)$. Ekkor:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}, \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Diagonális mátrixok II

- Tétel: (Műveletek diagonális mátrixokkal) Legyen $\mathbf{A} = diag\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = diag\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ és legyen $k \in \mathbb{Z}$. Ekkor
  1. $\mathbf{AB} = diag\,(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$,
  2. $\mathbf{A}^k = diag\,\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right)$, speciálisan
  3. $\mathbf{A}^{-1} = diag\,\left(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\right)$.

  A (3) és negatív k esetén a (2) művelet akkor végezhető el, ha $a_i \neq 0$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$.

Permutációs mátrixok I

- A permutációs mátrixokat és kígyókat a diagonális mátrixok sorainak permutációjáva kapjuk.
- Minden permutáció megkapható elempárok cseréjével. Ha egy mátrix sorait permutáljuk, akkor azt megtehetjük sorcseréket adó elemi mátrixokkal való szorzásokkal. Ezeknek az elemi mátrixokat a szorzataként kapott mátrix úgy kapható meg az egységmátrixból, hogy a megadott sorcseréket végrehajtjuk rajta.
- Pl. a $\{2,4,3,1\}$ permutációt végrehajtva az $\mathbf{E}_n$ egységmátrixon a következő $\mathbf{P}$ mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_2 \leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}$$

Permutációs mátrixok II

Ezzel balról szorozva egy tetszőleges $4 \times m$-es mátrixot, annak sorait a fenti permutáció szerint fogja fölcserélni, például

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

- Definíció: (Permutáló mátrix, kígyó). A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (vagy permutációmátrixnak) hívjuk.

Permutációs mátrixok III

- Pl.: az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- A permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, az összes többi elem 0.
- A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van.
- Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is.

Permutációs mátrixok IV

- Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.
- Ha **P** egy permutáló mátrix, akkor **PA** az **A**-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval **E**-ből a **P**-t kaptuk.
- Tétel: (Műveletek permutáló mátrixokkal). Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix. Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha **P** permutáló mátrix, akkor $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$. Oszlopokra az állítás hasonlóan

Permutációs mátrixok V

bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás, aminek bizonyításához elég azt az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^T$ szorzatot. A $\left(\mathbf{PP}^T\right)_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $\left(\mathbf{P}^T\right)_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$\left(\mathbf{PP}^T\right)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}\left(\mathbf{P}^T\right)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i-edik sorának j-edik eleme a $\mathbf{P}$ i-edik és j-edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van.

Permutációs mátrixok VI

- Pl.:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Háromszögmátrixok

- Definíció: (Háromszögmátrix). Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek felső háromszögmátrixnak, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak alsó háromszögmátrixnak nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, egység háromszögmátrixról beszélünk.
- Tétel (Műveletek háromszögmátrixokkal). Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok I

- <u>Definíció:</u> (Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.
- Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

  $\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, a $\mathbf{C}$ egyik se.
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fönn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok II

- Állítás: (Műveletek (ferdén) szimmetrikus mátrixokkal). Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmerikus.
  Bizonyítás: Triviális.
- Tétel: (Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére). Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden A négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right),$$

  ahol az összeg első tagja szimmetrikus, a második tagja pedig ferdén szimmetrikus.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok III

Bizonyítás: Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ mátrix szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

Hasonlóképpen az $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ mátrix ferdén szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

A két mátrix összege $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok IV

- Tétel: ($\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szimmetrikus). Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.

Shermann-Morrison-Woodbury elmélet I

- Sherman – Morrison-formula: Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, v \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ invertálható, és
$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$
- Tétel: (Sherman–Morrison–Woodbury formula) Egy k-ad rendű korrekció inverze néhány mátrixnak kiszámítható egy k-rangú korrekciójával az eredeti mátrix invezének:
$$(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\left(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1},$$
ahol $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$ are $n \times n$, $k \times k$, $n \times k$, $k \times n$ mátrixok, értelemszerűen.

Shermann-Morrison-Woodburry elmélet II

- A fenti formula olcsó alternatívát kínál mátrixok inverzének, azaz lineáris egyeletrendszerek kiszámítására. Az numerikus stabilitásáról azonban nem ismert.

Műveletek blokkmátrixokkal I

- Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, ha a mátrixokat blokkokra osztjuk, majd a műveleteket ezekkel kisebb részmátrixokkal végezzük el.
- Ha egy mátrixot vízszintes és függőleges vonalakkal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy ez a mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott blokkmátrix.
- Egy blokkmátrix sorait és oszlopait a mátrix blokksorainak és blokkoszlopainak nevezzük.
- A blokkmátrixokat hipermátrixnak is hívják, de így hívják a többdimenziós tömböket is, ezért inkább blokk mátrixnak hívjuk őket.

Műveletek blokkmátrixokkal II

- Egy egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixa egy két blokkból álló blokkmátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ez 5-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer bővített mátrixa. Az első blokkoszlop a kötött változóknak, a második a szabad változóknak, a harmadik az egyenletrendszer jobb oldalának felel meg, a második blokksor a zérussorokat tartalmazza.

Műveletek blokkmátrixokkal III

- Állítás: (Műveletek blokkmátrixokkal). Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz
$$c\,[\mathbf{A}_{ij}] = [c\mathbf{A}_{ij}]\,, \quad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] = [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}]\,.$$
Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$ és $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz $\mathbf{C}$ olyan blokkmátrix, melynek i-edik blokksorában és j-edik blokkoszlopában álló blokk
$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal IV

- Példa blokkmátrixok szorzására:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{array}\right).$$

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény I

- Bizonyos blokkmátrixműveletek nem származtathatóak egyszerű mátrixműveletekből.
- A *vec* függvény egy tetszőleges mátrixot vektorrá alakít a mátrix oszlopvektorainak egymás alá tételével. Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n]$, akkor

$$vec\,(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

Például, ha $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, akkor $vec\,(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény II

- Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. Kronecker-szorzatukon (vagy más néven tenzorszorzatukon) azt az $A \otimes B$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

- Például

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény III

- Tétel: (A Kronecker-szorzat tulajdonságai). Adottak az $\mathbf{A}_{m\times n}$, a $\mathbf{B}_{m\times n}$, a $\mathbf{C}_{p\times q}$ és a $\mathbf{D}_{r\times s}$ mátrixok. Ekkor
  1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{C}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{B}$,
  2. $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D}=\mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$,
  3. $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})^T=\mathbf{C}^T\otimes\mathbf{A}^T$.

Hipermátrixok I

- Bizonyos adatok, 2-nél magasabb dimenziós tömbben rendezhetők el jól.
- <u>Definíció:</u> (Hipermátrix). Legyen $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{N}^+$ és legyen S egy tetszőleges halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \ldots$). d-edrendű (vagy d-dimenziós) $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_d$-típusú hipermátrixnak nevezzük az

$$\mathbf{A} : \{1, \ldots, n_1\} \times \{1, \ldots, n_2\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n_d\} \to S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}\,(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ elemet $a_{i_1 i_2 \ldots i_d}$ -vel jelöljük, amely egy d-dimenziós táblázat egy eleme és a mátrixoknál megszokotthoz hasonlóan írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \ldots i_d})_{i_1, i_2, \ldots, i_d = 1}^{n_1, n_2, \ldots, n_d}, \text{vagy egyszerűbben } \mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \ldots i_d})\,.$$

Ha $n_1 = n_2 = \cdots = n_d = n$, akkor a hiper-kockamátrixról beszélünk.

Hipermátrixok II

- Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_d$ -típusú hipermátrixok halmazát $S^{n_1 \times n_2 \times \ldots n_d}$ jelöli.
- A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.
- A 3-adrendű hipermátrixok elemeinek leírását úgy oldhatjuk meg, hogy a harmadik index szerint szeletekre vágjuk. E szeletek mindegyike egy mátrix, melyeket függőleges vonallal elválasztva egymás mellé írunk. Így például a $4 \times 2 \times 3$-típusú hipermátrixok általános alakja

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{array}\right)$$

Hipermátrixok III

- Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása a mátrixokhoz hasonlóan elemenként történik:

$$\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) + \left(b_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d} + b_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right),$$
$$c\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) = \left(c a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right).$$

- Definíció: (Hipermátrix transzponáltja). Legyen π az $\{1, 2, \ldots, d\}$ halmaz egy permutációja. A d-edrendű $\mathbf{A} = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) \in S^{n_1 \times n_2 \times \ldots n_d}$ hipermátrix π-transzponáltján az

$$\mathbf{A}^{\pi} = \left(a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(d)}}\right) \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \ldots n_{\pi(d)}}$$

hipermátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \cdots \times n}$ hiper-kockamátrix szimmetrikus, ha minden π permutációra $\mathbf{A}^{\pi} = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A}^{\pi} = sgn\left(\pi\right)\mathbf{A}$, ahol $sqg\left(\pi\right) = -1$, ha a π páratlan permutáció, és 1, ha páros.

Hipermátrixok IV

- Eszerint a $2 \times 2 \times 2$-es hipermátrixok és szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

  $$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array}\right)$$

  A $3 \times 3 \times 3$-as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

  $$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right),$$

  $$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!