



(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Úrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2025. február 20.

Követelmények

- ▶ Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- ▶ Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- ▶ A két teszt alapján gyakorlati jegyet kapnak
- ▶ A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát lehet tenni, ha megszerezték az érvényes gyakorlati jegyet
- ▶ Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- ▶ 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

FREUD R. 2004: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

P. D. LAX. 2008: Lineáris algebra és alkalmazásai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

GYÉMÁNT I., GÖRBE T. F. 2011, Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon Jegyzettár, Szeged.

Négyzetes mátrixok determinánsa I

- ▶ Definíció: Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.

vagy

Az A véges halmaz permutációja az A elemeinek egy meghatározott átrendezése vagy sorbarendezése.

Pl.: kártyakeverés, futóverseny eredményei.

- ▶ Definíció: Tekintsük az $1, 2, \dots, n$ elemek egy (i_1, i_2, \dots, i_n) permutációját. Azt mondjuk, hogy i_j és i_k elemek inverzióban vannak, ha $j < k$ és $i_j > i_k$, vagyis a két elem nem követi egymást monoton növekvő sorrendben.
- ▶ Egy permutációban lévő inverziók száma ezen inverziók összessége.

Négyzetes mátrixok determinánsa II

- Definíció: Ha az A mátrix $n \times n$ -es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az A mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$\det(A) = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \dots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jelöli az (i_1, i_2, \dots, i_n) permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det(A), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |A|.$$

Négyzetes mátrixok determinánsa III

- Determináns kiszámítása kifejtési tétel szerint. Sakktábla szabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Az A mátrixot az első sor szerint fejtjük ki, azaz végigmegyünk az első sor oszlopain, kitöröljük az adott sort és oszlopot, ezzel egy 2×2 -es aldeterminánst hozva létre. Az eredeti determinánst felírjuk az adott helyen lévő elem és az aldeterminánssuk szorzatainak összegeként, a sakktábla szabályból vett előjellel:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$
$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}$$

Négyzetes mátrixok determinánsa IV

- Kis mátrixokat a Sarrus szabállyal számolunk ki. 2×2 -es mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

Azaz, átlósan a bal felső sarokból a jobb alsóba szorozzuk a számokat, majd kivonjuk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba húzott átló menti számokat.

3×3 -as mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{11}$$

A fenti szabályokat a kifejtési tétel alkalmazásával lehet bizonyítani. (Az előző oldalon pont ezt kaptuk mindkét esetre.)

Négyzetes mátrixok determinánsa V

- Állítás: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \mathbf{e}_3 =$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás: N/A

- Állítás: A vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- A fenti determináns megadja az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralepipedon térfogatát.

Négyzetes mátrixok determinánsa VI

- ▶ A determináns néhány elemi tulajdonsága:
 - ▶ Ha az A mátrixban két sort (illetve oszlopot) egymással felcserélünk, akkor az így kapott B mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $\det(B) = -\det(A)$.
 - ▶ Ha a mátrixnak két sora (ill. oszlopa) megegyezik, akkor a determinánsa 0.
 - ▶ Ha az A mátrix egy sorának (ill. oszlopának) minden elemét megszorozzuk az α számmal, akkor a kapott mátrix determinánsa $\alpha \cdot \det(A)$.
 - ▶ Legyen A, B, C három olyan mátrix, melyek csak az i -edik sorban (ill. oszlopban) különböznek egymástól a következőképpen: $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$. Ekkor $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.
 - ▶ (Az előzőekből következik, hogy) ha az A mátrix valamely sorához (ill. oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (ill. oszlopának) konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Ezeket a tulajdonságokat a determináns kiszámításához fogjuk használni.

Négyzetes mátrixok determinánsa VII

- Állítás: (Kifejtési tétel) Legyen a D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát. Ezt az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsának nevezzük. Az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa a következő szám:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Tétel: (i -edik sor szerinti kifejtés): Tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

Négyzetes mátrixok determinánása VIII

Tétel: (j -edik oszlop szerinti kifejtés): Tetszőleges $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására I

- ▶ Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrixot felső háromszög alakúnak vagy felső trianguláris mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ -re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek 0-val egyenlőek.)
- ▶ Állítás: A felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás: A 2×2 és 3×3 -as mátrixokra a Sarrus szabály alapján triviális. Hasonlóképpen a kifejtési tétel alapján minden főátlón kívüli szorzat nulla lesz.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására II

- ▶ A Gauss-elimináció célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.
 1. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$. (Sorcseré esetén a determináns előjele megváltozik)
 2. Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.
 3. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.
 4. A második sor alkalmas konstansszorosát a 3, 4, \dots , n . sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \dots, \alpha_{n2} = 0$ legyen.

Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására III

- Tekinsük a következő determinánst és számítsuk ki az értékét kifejtési tétellel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \times (0 + 12 + 18 - 0 + 6 - 36) + 2 \times (0 - 4 + 12 - 0 + 4 - 12) = 0 + 2 \times 0 = 0$$

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására IV

► És most Gauss eliminációval:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{5}{3} \times 4 & -1 - \frac{5}{3} \times 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Mátrix inverze I

- Definíció: Az n -ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$ -es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n \times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lj})_{n \times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrix, mert β_{ij} definíciója miatt lenullázza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij} .

Mátrix inverze II

- ▶ Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1} -gyel jelöljük.
- ▶ Állítás: Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det(A) \neq 0$.
- ▶ $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$.
- ▶ $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.
- ▶ Az inverz mátrix kiszámítható elemi átalakítással
 - ▶ Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
 - ▶ Egy sor λ -szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
 - ▶ Sorok cseréje.

Ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze.

Szinguláris mátrix esetén az átalakítás nem végezhető el.

Mátrix inverze III

- ▶ Az inverz mátrix kiszámítása algebrai aldeterminánssal
 - ▶ Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix.
 - ▶ Minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij} -t, majd az a kapott mátrixot transzponálva és elosztva $\det(A)$ -val, megkapjuk az A mátrix inverzét:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}.$$

(Az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az a_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsa.)

Mátrix inverze IV

► Állítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

1. Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. A invertálható, akkor A^T is és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!