(PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2024. szeptember 12.

Egységvektor I

- Definíció: Egységvektornak nevezzük azon vektorokat, melyek hossza 1. Tekintsük a térben a következő egységvektorokat, melyeket $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának is hívunk:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$

- Állítás: Tetszőleges $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\,.$$

- Definíció: A $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ vektor normalizáltja, normáltja, vagy irányvektora: $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Pontok távolsága, gömb egyenlete I

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága a P_1 és P_2 végpontú **a**, **b** vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
- Definíció: A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

- Definíció: Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai I

- Definíció. Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

  ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
- Állítás: (A skaláris szorzás tulajdonságai):
  kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
  additív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
  homogén: $(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és$\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
  pozitív definit: $\mathbf{aa} \geq 0$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$ és $\mathbf{aa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai II

- <u>Állítás:</u> Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- <u>Állítás:</u> Két nemnulla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- <u>Definíció:</u> Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha $\mathbf{ab} = 0$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai III

- Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ vektorra való merőleges projekciója (vetülete) alatt azon $\mathbf{b}$ irányú vektort értjük, amelynek végpontját az a vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.
- Állítás: Ha $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$, akkor

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}.$$

- Ha a $\mathbf{b}$ irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b}.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!