Név / Name: Dr. FACSKÓ Gábor István Neptun kód / code: BQQQFY

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra vizsga / Elementary Linear Algebra exam

1. Mi az a vektor? Mikor egyenlő két vektor egymással? Készítsen ábrákat! / What is a vector? When are two vectors equal? Draw images. (10 pont)
   (a) A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly ($\mathbf{F}$), a sebesség ($\mathbf{v}$), a helyzet ($\mathbf{r}$), a gyorsulás/lassulás ($\mathbf{a}$), a forgás, a körsebesség (ω).

   Vectors are quantities with direction. For example: weight ($\mathbf{F}$), velocity ($\mathbf{v}$), position ($\mathbf{r}$), acceleration/deceleration ($\mathbf{a}$), rotation, rotational speed (ω).

   (b) A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.

   Limited length line segments from Point A to Point B: $\vec{AB}$. The start point is Point A, and the end is Point B.

   (c) Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók. Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

   Two vectors are equal if you can transform the first vector to the second vector using parallel shift/translation displacement. Or, if the lengths and directions of the vectors are the same.

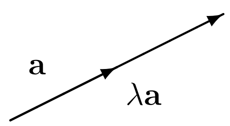
2. Mit értünk az egymással γ szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán? / What is the scalar product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ vectors with γ angle? (10 po(i)nt)
   (a) Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor

   $$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$

   Multiplication of vectors with a scalar. If $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, where a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, then

   $$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$

   (b) Grafikusan:



   Az **a** *vektort egy λ skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de λ-szoros hosszúságú vektort rajzolunk. To multiply an* **a** *vector by a λ number, you should draw a vector from the starting point of* **a** *vector in the direction of* **a** *that has λ length of the* **a** *vector.*

   (c) Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

   $$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

   ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.

   The scalar (or inner) multiplication of two vectors is

   $$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

   where $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.

(d) Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

The scalar multiplication of $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectors is

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

3. Definiálja az egymással γ szöget bezáró **a** és **b** vektorok vektoriális szorzatát és adja meg a kiszámítás módját! / Define the vectorial product of the vectors **a** and **b**, specifying the role of the angle γ. (10 pont)

   (a) Az **a** és **b** nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges **a** és a **b** vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.

   The vectorial product of non-zero Vectors **a** and **b** is that $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vector, which length is $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, where $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. The Vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is perpendicular to Vectors **a** and **b**, furthermore $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ consist of a right-handed system.

   (b) Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.

   The vectorial product with components is $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.

4. Definiálja az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? / What is the operator? What is meant by the representation of an operator? (10 pont)

   (a) Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

   Operators are the linear vector-vector functions.

   (b) Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m\times n}$.

   The representation of operators is the matrixes. See $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ and $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, where $m, n \in \mathbb{N}^+$. The

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   table is called $m \times n$ type matrix. The set of the $m \times n$ type matrixes is $M_{m\times n}$.

5. Definálja a determináns fogalmát! / What is the determinant? (10 pont)
   Ha az **A** mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az **A** mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)}\, \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det(\mathbf{A}), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|.$$

If Matrix $\mathbf{A}$ is type $n \times n$, where $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$ (Square Matrix), then the determinant of Matrix $\mathbf{A}$ is the following number:

$$det(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

where the summary is for al the permutations of $1, 2, \ldots, n$ numbers, and $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ means the number of inversions in the permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$:

$$\det(\mathbf{A}), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|.$$

6. Adja meg az $|\mathbf{A}|$ determináns értékét, illetve fejezze ki egymással a $|\mathbf{B}|$ és a $|\mathbf{C}|$ determinánsok értékeit anélkül, hogy kiszámolná az értékeiket. / Give the value of the determinant $|\mathbf{A}|$; furthermore, express the relation between the determinants $|\mathbf{B}|$ and $|\mathbf{C}|$ without calculating their values.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(10 pont)

Az A mátrixnak két oszlopa megegyezik, így a determinánsa 0. A B mátrixban két oszlopot egymással felcseréltünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $det(C) = -det(B)$.

Two rows columns) of A matrix are the same, therefore its determinant is zero. You change the order of two columns, then the determinant of the new matrix will be the opposite of the determinant of the original matrix: $det(C) = -det(B)$.

7. Mikor mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek? / When are the az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vectors linear independent? (10 pont)
Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

8. Mikor mondjuk, hogy egy V halmaz vektortér? / When is the V set a vector space? (10 pont)

A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy +-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V)\\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V)\\
\exists\mathbf{0}\in V \text{úgy, hogy}\;\; \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a}\;\;\forall\mathbf{a}\in V \quad \text{esetén}\\
\forall\mathbf{a}\in V\exists\,(-\mathbf{a})\in V:\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda\mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\lambda\,(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\,\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\
\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\lambda\in\mathbb{R})\\
(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a}\in V\;\text{és}\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\
\forall\mathbf{a}\in V\text{−re}1\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

The set $V \neq \emptyset$ a vector space above $\mathbb{R}$ set, if there isan "+" operation with the following features:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \text{where}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V)\\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \text{where}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V)\\
\exists\mathbf{0}\in V\;\; \text{that}\;\; \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a}\;\;\forall\mathbf{a}\in V\\
\forall\mathbf{a}\in V\exists\,(-\mathbf{a})\in V:\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

furthermore, for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and for all $\mathbf{a} \in V$ the term $\lambda\mathbf{a} \in V$ exists, and the following features are fullfilled:

$$\begin{aligned}
\lambda\,(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\,\mathbf{a}, \text{where}\,(\mathbf{a}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\
\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \text{where}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\lambda\in\mathbb{R})\\
(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}, \text{where}\,(\mathbf{a}\in V\;\text{és}\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\
\forall\mathbf{a}\in V\text{−re}1\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

9. Határozza meg egy $n \times n$ mátrix inverzét. / What the inverse of a $n \times n$ matrix? (10 pont)

   Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.

   Square matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ exists inverse if exist such a Matrix $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, that $AB = BA = E_n$. The inverse of Matrix A is A^{-1}.

10. Mit értünk a mátrix rangján? / What is the rank of a matrix? (10 pont)
    Egy $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.
    The rank of Matrix $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ is the rank of its row vector system.

A vizsga osztályzása: 0-40 pont: elégtelen (1), 41-55 pont: elégséges (2), 56-70 pont: közepes (3), 71-85 pont: jó (4) és 86-100 pont: jeles (5).

Grades: 0-40 points: Fail (1), 41-55 points: Pass (2), 56-70 points: Satisfactory (3), 71-85 points: Good (4) and 86-100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. január 13. / January 13, 2025