# (PTIB0301) Elemi lineáris algebra

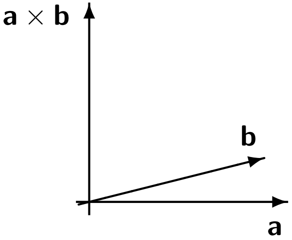
Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
*facskog@gamma.ttk.pte.hu*

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2024. szeptember 19.

# Vektoriális szorzat I

- Definíció: Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nemnulla vektorokból álló vektorrendszert jobbrendszernek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor $180^o$-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)




- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
  Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$.

# Vektoriális szorzat II

- A vektoriális szorzat tulajdonságai
  1. Állítás: A vektoriális szorzás antiszimmetrikus, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: A jobbsodrású rendszer definíciója alapján nyilvánvaló.
  2. Állítás: A vektoriális szorzás homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Bizonyítás: $|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}|\, |\mathbf{b}| \sin\theta = \lambda\, |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, ahol $\theta = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$.
     A vektorok irány pedig megegyezik, mert $\mathbf{a}$ párhuzamos a $\lambda \mathbf{a}$ vektorral.
  3. Állítás: A vektoriális szorzás disszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Később, komponensek alapján.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Jele: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

# Vektoriális szorzat III

- Bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{a} \in V^3$-re. esetén.
- Ezen felül $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül legalább az egyik nullvektor.
- Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

- Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott paralelogramma területével, mivel $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$ a magassága, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$.

# Vegyes szorzat

- Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

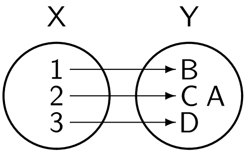
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c}.$$

- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk.
- Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

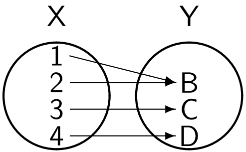
# Operátorok I

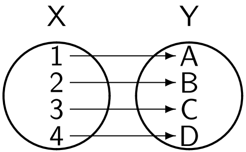
- Definíció: Halmaz dolgok összesége. Alapfogalom. Kell egy kijelentés, ami kollektivizál, azaz ami alapján egyértelműen eldönthető, hogy egy elem része-e a halmaznak.
- Definíció: Párok két elemű halmazok.
- Definíció: Az $e_1$ és az $e_2$ elemek rendezett párt alkotnak, ha $\{e_1, \{e_2\}\}$. Ezt $(e_1, e_2)$-vel jelöljük.
- Definíció: Relációnak rendezett párok halmazát nevezzük.




- Definíció: A injekciónak, injektív relációnak, egy-egy értelmű relációnak vagy kölcsönösen egyértelmű relációnak nevezzük azokat a relációkat, melyek az értelmezési tartomány (X) különböző elemeihez az értékkészlet (Y) különböző elemeit rendelik.

# Operátorok II




- Definíció: A ráképezésnek vagy szürjekciónak, illetve szürjektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyeknél a reláció értékkészlete megegyezik a függvény érkezési halmazával.
- Definíció: A bijekciónak vagy bijektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyek egyidejűleg injektívek és szürjektívek. Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy a bijektív leképezések kölcsönösen egyértelmű relációk. Amennyiben az X halmaz összes eleméhez rendel elemet, akkor bijekció olyan megfeleltetést létesít két halmaz között, aminél az egyik halmaz minden egyes elemének a másik halmaz pontosan egy eleme felel meg, és fordítva.

# Operátorok III

- Definíció: Függvényen rendezett párok olyan halmazát értjük, amiben első komponensként legfeljebb csak egyszer szerepelhet egy elem:

$$(\forall x)\,(\forall y_1)\,(\forall y_2)\,[(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$$

  Ezt egyértelműségi tulajdonságnak nevezik.
- Definíció: Legyen $V$ és $U$ a $\mathbb{T}$ test feletti két vektortér Az $f : V \to U$ leképezést lineárisnak nevezzük, ha
  1. Additív, azaz minden $v_1, v_2 \in V$ vektora $f\,(v_1 + v_2) = f\,(v_1) + f\,(v_2)$.
  2. Homogén, azaz minden $v \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{T}$ elemre $f\,(\lambda v) = \lambda f\,(v)$.
- Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- Például:
  - Egység operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Null operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.

# Operátorok IV

  - Tükrözési operátor: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Projekció operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Forgatási operátor: később.
- Mindkét oldalról lehet szorozni.
- Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

  számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

# Operátorok V

- A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- Az $\alpha_{ij}$ elem indexei közül az első a sorindex ($i$), a második pedig az oszlopindex ($j$).
- A mátrix i-edik sorát $A_i$ , j-edik oszlopát pedig $A_j$j jelölésekkel említjük.
- Determinháns!!!

# Vége

Köszönöm a figyelmüket!