Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Tanszék

Lineáris Algebra 1.

Simon Ilona, PTE TTK

Pécs, 2019

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Vektorok. A V^2 és V^3 vektorterek

1.1. Vektorok

Bizonyos mennyiségek meghatározásához elég a mennyiségük megadása, ilyen a tömeg, idő, hosszúság. Az erő, elmozdulás és sebesség megadásához több adatra van szükségünk. Ezen esetekre szolgál hasznos eszközül a vektor a számítástechnikai, gazdasági, műszaki és tudományos élet számos területén.

A hallgatónak már középiskolai/gimnáziumi tanulmányaiból ismerős a vektor fogalma. Ott *irányított véges szakasz*ként értelmezték a vektorokat a síkban (V^2) és a térben (V^3), ezt a fogalmat pontosítjuk.

1. Definíció. *(Gimnáziumi)* ***Vektor*** *alatt irányított véges szakaszokat értünk. Az $\overrightarrow{AB}$ vektornak van A kezdőpontja és B végpontja, a vektor hosszát pedig $|\overrightarrow{AB}|$ jelöli.*
Két irányított véges szakaszt ***egyenlő****nek nevezünk, ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (vagyis ha megegyezik a hosszuk, irányuk és irányításuk).*

Egyetemi verzió: Tekintsük az irányított véges szakaszokat. Két irányított véges szakaszt egyenlőnek nevezünk, ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (vagyis ha megegyezik a hosszuk, irányuk és irányításuk). Ha az egymással egyenlő irányított véges szakaszokat egy osztályba soroljuk, egy új vektorfogalomhoz jutunk: ezen osztályokat nevezzük **szabadvektor**nak. A $\mathbf{v}$ szabadvektor egy reprezentánsáról beszélünk, ha az osztály egy adott kezdőponttal rendelkező elemét tekintjük. Kijelölve egy adott pontot a síkban (ill. a térben), mondjuk az origót, (a térben ez a $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$,) tekinthetjük csak az origó kezdőpontú reprezentánsokat. A továbbiakban vektor alatt szabadvektort értünk. (A vektortér fogalomhoz szükséges a fenti definícióval élnünk. Amennyiben a szabadvektor fent értelmezett fogalma idegenül hangzik az olvasónak, gondoljon arra, hogy egyszerűen leszűkítettük a vizsgálódást az origó kezdőpontú irányított véges szakaszokra.)

2. Definíció. *Síkbeli vagy térbeli vektorok alatt a V^2 sík vagy V^3 tér irányított véges szakaszainak azon osztályait értjük, melyben az elemek párhuzamos eltolással egymásba átvihetők.*

Koordinátás alak

A valós számpárok halmaza, az $\mathbb{R}^2$ elemei azonosíthatók a geometriai sík pontjaival. Rögzítve a síkon egy koordinátarendszert, minden pontnak megfelel egy és csakis egy valós, rendezett számpár, ti. a pont koordinátáiból képezett számpár. A sík pontjai viszont azonosíthatók a rögzített koordinátarendszer origójából a szóban forgó pontokba mutató irányított szakaszokkal (a pontok helyvektoraival).

Hasonlóan, az $\mathbb{R}^3$ elemei azonosíthatók a geometriai tér pontjaival, azok pedig az origóból a szóban forgó pontokba mutató térbeli vektorokkal.

Ha $\mathbf{v}$ egy síkbeli vektor, melynek kezdőpontja az origóban van és végpontjának koordinátái (v_1, v_2), akkor a **$\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakja**

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ha $\mathbf{v}$ egy térbeli vektor, melynek kezdőpontja az origóban van és végpontjának koordinátái (v_1, v_2, v_3), akkor a $\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakja

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

A fenti definícióban szereplő v_1, v_2, v_3 számokat a **$\mathbf{v}$ vektor koordinátái**nak nvezzük.

Ebben a részfejezetben a továbbiakban térbeli vektorokkal foglalkozunk. Az alábbi definíciók és állítások igazak síkbeli vektorok esetén is, csak két koordinátával.

3. Definíció. *Két vektor akkor és csak akkor* **egyenlő**, *ha az origó középpontú reprezentánsaik megegyeznek.*

Koordinátás alakban ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ akkor és csak akkor egyenlő, ha $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$.

4. Definíció. *Az* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ***vektor nagysága vagy hossza*** *a következő nemnegatív szám:*

$$|\mathbf{a}| = \|\mathbf{a}\| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Az origó, azaz a nulla vektor koordinátás alakja természetesen: $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. Nyilvánvaló, hogy a hossza 0. Az origó az egyetlen vektor, aminek hossza 0. Ez az egyetlen vektor, melynek nincs iránya sem.

5. Definíció (Vektorok összeadása). *Ha* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$*és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, *akkor legyen*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

6. Definíció (Egy vektor skalárral való szorzása). *Ha* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor a* $\lambda\mathbf{a}$ ***skalárszorzat*** *legyen*

$$\lambda\mathbf{a} \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Említettük, hogy a sík pontjai azonosíthatók a rögzített koordinátarendszer origójából a szóban forgó pontokba mutató irányított szakaszokkal. Ebben a megfeleltetésben a fent definiált összeadás épp a jól ismert paralelogramma szabállyal meghatározott összegvektor, míg a skalárral való szorzás a nyújtásnak felel meg. Síkbeli vektorok esetén a paralelogramma-szabály kimondja, hogy vektorok összegét a vektorok által meghatározott paralelogramma átlója adja. Fizikában az erők komponensenként adódnak össze. A $\lambda\mathbf{v}$ geometriai jelentése: a skalárral való szorzás egy nyújtás, ha $|\lambda| > 1$; és egy zsugorítás, ha $|\lambda| < 1$. Ha $\lambda > 0$, akkor $\lambda\mathbf{v}$-nek ugyanaz az iránya, mint $\mathbf{v}$-nek, egyébként, azaz ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda\mathbf{v}$ iránya a $\mathbf{v}$ irányának ellentettje. Neki is ugyanaz a hossza, mint $\mathbf{v}$-nek, de a másik irányba mutat. Látjuk tehát, hogy ebben a speciális esetben visszakapjuk a geometriai síkvektor-fogalmat.

Hasonlóan, az $\mathbb{R}^3$ elemei azonosíthatók a geometriai tér pontjaival. Rögzítve a térben egy koordinátarendszert, minden pontnak megfelel egy és csakis egy valós, rendezett számhármas, ti. a pont koordinátáiból képezett számhármas. A tér pontjai pedig azonosíthatók a rögzített koordinátarendszer origójából a vizsgált pontokba mutató irányított szakaszokkal (a pontok helyvektoraival). Így, $\mathbb{R}^3$ elemei a geometriai térvektoroknak is felfoghatók, ahol az összeadást a paralelogramma szabállyal, a skalárral való szorzást a nyújtással definiáljuk.

Speciálisan, $-\mathbf{v} := (-1)\mathbf{v}$.

Két vektor különbsége:

$$\mathbf{u} \;-\; \mathbf{v} := \mathbf{u} \;+\; (-\mathbf{v}) := (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

1. Állítás (Az összeadás tulajdonságai).

a vektorok összeadása kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$

és asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \underset{\sim}{c})$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3)$

a nullvektor létezése: $\exists\ \mathbf{0} \in V^3 : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \in V^3)$

minden elemnek van inverze: $\forall \mathbf{a} \in V^3\ \exists(-\mathbf{a}) \in V^3$ *úgy hogy* $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

2. Állítás (A skalárral való szorzás tulajdonságai).

asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \in V^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

disztributív: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R})$

disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \in V^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$\forall \mathbf{a} \in V^3 : 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

7. Definíció. ***Egységvektor****nak nevezzük azon vektorokat, melyek hossza 1.*

Tekintsük a térben a következő egységvektorokat, melyeket $\mathbb{R}^3$ **kanonikus bázis**ának is hívunk:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

3. Állítás. *Tetszőleges* $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ *térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen:*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

Bizonyítás: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$.

Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hosszára fennáll, hogy $|\mathbf{v}| \neq 0$, ezért értelmezhető a **normalizált**ja:

8. Definíció. *A* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *vektor* ***normalizált****ja/normáltja/irányvektora:* $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

A normalizált vektor már egységvektor: $\left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1$.

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M felezőpontja a következő pont:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok **távolsága** a P_1 és P_2 végpontú $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

9. Definíció. *A* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *és* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ***pontok távolsága****:*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

10. Definíció. *Az* a *sugarú és* (x_0, y_0, z_0) *középpontú* ***gömb egyenlete****:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

11. Definíció. *Két vektor* ***skaláris szorzata*** *(más néven* ***belső szorzata****):*

$$\langle \mathbf{a}, \underline{b} \rangle \doteq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3).$$

Vegyük észre, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$.

4. Állítás (A skaláris szorzás tulajdonságai).

szimmetrikus: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$

additív: $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3)$

homogén: $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R})$

pozitív definit: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ $(\underline{a} \in V^3)$ *és* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

5. Állítás. *Az* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *skláris szorzata:*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Bizonyítás: Előbb a skaláris szorzat definíciója alapján és a $\cos 90° = 0$ ismeretében belátjuk, hogy

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \end{cases}.$$

Majd kifejtjük a többtagú kifejezés többtagúval való szorzását követve:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle &= \langle a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3\rangle = \\ &= a_1b_1\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle + a_1b_2\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle + \dots \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

6. Állítás. *Két nemnulla* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$

12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0$.

13. Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *vektornak a* $\mathbf{b}$ *vektorra való* **merőleges projekció***ja (vetülete) alatt azon* $\mathbf{b}$ *irányú vektort értjük, amelynek végpontját az* $\mathbf{a}$ *vektor végpontjából a* $\mathbf{b}$ *vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése:* $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$

7. Állítás.

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \cdot \mathbf{b}.$$

Amennyiben a $\mathbf{b}$ irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\mathbf{b}$.

1.2. 3×3-mas mátrixok determinánsa

Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük. Az A véges halmaz permutációja az A elemeinek egy meghatározott átrendezése vagy sorbarendezése. Ha például A egy csomag kártya, akkor a kártyák megkeverésével A egy permutációját állítjuk elő. Hasonlóképpen, ha A elemei egy futóverseny résztvevői, akkor a verseny minden lehetséges végeredménye A egy permutációját adja.

A mátrix fogalma: Legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú **mátrix**nak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$.

A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük. Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex, a második pedig az oszlopindex. A mátrix i-edik sorát A_i, j-edik oszlopát pedig a^j jelölésekkel említjük.

Bizonyos mátrixokhoz rendelhetünk egy számot, a determinánsát, mely sokat elárul annak tulajdonságairol. (Ezen tulajdonságokra később fog fény derülni.)

Determinánson egy négyzetes mátrixhoz rendelt számot értünk.

14. Definíció. *Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú (azaz négyzetes), akkor A* **determinánsa** *alatt a következő számot értjük:*

$$\det(A) \doteq \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}\in P_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\cdot \ldots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, ..., i_n)$ permutációban lévő inverziók számát.

Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációját. Azt mondjuk, hogy i_j és i_k elemek inverzióban vannak, ha $j < k$ és $i_j > i_k$, vagyis a két elem nem követi egymást monoton növekvő sorrendben. Egy permutációban lévő inverziók száma ezen inverziók összessége. (Könnyen látható, hogy ez ugyanannyi, mint az egymás melletti elemek cseréjének minimális száma, amelyek az $(1, 2, ..., n)$ alapesetből kiindulva ahhoz kellenek, hogy az adott $(i_1, i_2, ..., i_n)$ permutációt előállítsuk.)

A mátrix minden sorából és oszlopából kiválasztva pontosan egy elemet, az indexek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok egy permutációját adják. A fenti formula azt jelenti, hogy a mátrix determinánsát úgy kapom, ha minden ilyen kiválasztás szerinti elemek szorzatát összeadom, de a páratlan inverziójú tagokat negatív előjellel véve.

A következő jelöléseket használjuk az A mátrix determinánsára:

$$\det(A), \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A|.$$

Sarrus szabály 2×2-es mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Sarrus szabály 3×3-mas mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

Nagyobb méretű mátrixokra külön eljárásokat használunk... a fenti képletek nem érvényesek rájuk.

1.3. Két vektor vektoriális szorzata

15. Definíció. *Az* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *nemnulla vektorokból álló vektorrendszert* **jobbrendszer***nek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor* $180°$*-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)*

16. Definíció (A vektoriális szorzat). *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *nemnulla térbeli vektorok* **vektoriális szorzata** *az az* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*-vel jelölt vektor, amelynek*

$$\begin{aligned} &\textit{hossza}: \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &\textit{iránya}: \mathbf{a} \times \mathbf{b} \textit{ merőleges } \mathbf{a}\textit{-ra és } \mathbf{b}\textit{-re} \\ &\textit{irányítása}: \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\} \textit{ jobbrendszert alkot.} \end{aligned}$$

Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} \doteq \mathbf{0}$ $(\mathbf{a} \in V^3)$*.*

Tulajdonságok:

a vektoriális szorzás antiszimmetrikus: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$

a művelet homogén: $(\lambda\mathbf{a}) \times \underline{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R})$

és additív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \underline{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3)$

17. Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha* $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$*. Jele:* $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$*.*

A definíció azonnali következménye, hogy bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ tetszőleges $\mathbf{a} \in V^3$ esetén.

Igaz továbbá, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül legalább az egyik a nullvektor.

Belátható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

8. Állítás.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} =& (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot \mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot \mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot \mathbf{e}_3 \\ =& \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_3 \\ =& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

Említsük meg, hogy $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott **paralelogramma területé**vel, hiszen $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}| \cdot |\sin\theta|$ a magassága.

1.4. Vegyes szorzat

18. Definíció. *Az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ *vektorok* **vegyes szorzata***:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \doteq \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

1. Tétel. *A vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk. Összefoglalva, $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ megadja az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített **paralelepipedon térfogatá**t.

Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

1.5. Feladatok

1.1. Feladat. *Adottak a következő vektorok:* $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{c} = (4, 1, 3)$. *Adja meg a következő vektorokat:*

$$i) - 2\mathbf{a} + \mathbf{b} =$$
$$ii) \mathbf{a} \times \mathbf{b} =$$
$$iii) (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$$
$$iv) proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

és a következő számokat:
v) $\|\mathbf{a}\|$
vi) $\langle \mathbf{a}, \underline{b} \rangle$
vii) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
viii) $\cos(\alpha)$, *ahol* $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Megoldás:

i) $-2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2, -6, 4) + (-1, 2, 4) = (-3, -4, 8)$

ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) \times (-\underline{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + 6\underline{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_3 \times \underline{e}_1 - 4\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 2\underline{e}_3 - 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 12\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_1 = 16\underline{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 = (16, -2, 5)$

Vagy a determináns fogalmának ismeretével:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 = (16, -2, 5)$$

iii) $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 3\mathbf{b} \times \mathbf{b} = -4\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -4(16, -2, 5) = (-64, 8, -20)$

iv) $proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \underline{a} = \frac{-3}{14} \cdot (1,3,-2) = (\frac{-3}{14}, \frac{-9}{14}, \frac{3}{7})$
v)$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$
vi) $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = -1+6-8 = -3$
vii) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \underline{c}\rangle = 16\cdot 4 - 2\cdot 1 + 5\cdot 3 = 64 - 2 + 15 = 77$ vagy a determináns segítségével:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 77$$

viii) $\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|} = \frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \frac{-3}{7\sqrt{6}}$

1.2. Feladat. *Adottak a következő vektorok:* $\mathbf{a} = (3,1,2),\ \mathbf{b} = (-1,2,4),\ \mathbf{c} = (1,2,3)$. *Adja meg a következő vektorokat:*

$$i) 3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} =$$
$$ii) \mathbf{a}\times\mathbf{b} =$$
$$iii) (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) =$$
$$iv) proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} =$$

és a következő számokat:

$$v) \|\mathbf{a}\|$$
$$vi) \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$$
$$vii) (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$
$$viii) \cos(\alpha) =? \quad , ahol \alpha = \sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

1.3. Feladat. *Adja meg az alábbi vektorokat az* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *segítségével:*

$$a)\ (\mathbf{a}+4\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) =$$
$$b)\ (3\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+3\mathbf{a}) =$$
$$c)\ (\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}-\mathbf{b}) =$$

Megoldás: a) $(\mathbf{a}+4\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\times\mathbf{b} + 4\mathbf{b}\times\mathbf{a} - 8\mathbf{b}\times\mathbf{b} = -6\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

1.4. Feladat. *Számítsa ki annak a paralelogrammának a területét, amit az* $\mathbf{u} = (-9,0,9)$ *és* $\mathbf{v} = (7,2,-5)$ *vektorok feszítenek ki!*

Megoldás: A paralelogramma területe $t = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 0 & 9 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-18, 18, -18),$$

ezért a keresett terület $T = 18\sqrt{3} \sim 31,18$ területegység.

1.5. Feladat. *Számítsa ki a következő vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:*

$$\mathbf{u} = (1, 5, -1)$$
$$\mathbf{v} = (-3, -1, 2)$$
$$\mathbf{w} = (1, -2, -1)!$$

Megoldás: Mivel a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata $V = |(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$ és

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

ezért a keresett térfogat $V = 7$.

1.6. Feladat. *Számítsa ki a következő vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:*

$$\mathbf{u} = (2, 3, -1)$$
$$\mathbf{v} = (-5, -1, 2)$$
$$\mathbf{w} = (1, -2, -1)!$$

1.7. Feladat. *Döntse el, hogy egy egyenesen van-e a következő három pont?*

a) $A = (2, 1, -1), B = (3, 1, 2), C = (4, 1, 5)$;

b) $A = (-4, 5, 2), B = (2, 0, -3), C = (14, -10, -13)$;

c) $A = (1, 1, 1), B = (4, 1, 7), C = (5, -1, -1)$.

Megoldás: a) Amennyiben a pontok egy egyenesen vannak, úgy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok (ill. azok origó középpontú reprezentánsai) egymás konstansszorosai. Tehát keresendő olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$. Az $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} = (1, 0, 3)$, míg $\overrightarrow{AC} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a} = (2, 0, 6)$, s így az $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ összefüggésből látjuk, hogy a pontok egy egyenesen vannak.

1.8. Feladat. *A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék-, vagy tompaszöget zárnak-e be:*

$$a)\ \underline{u}(-3,2,0), \underline{v}(4,1,5);$$
$$b)\ \underline{u}(1,1,9), \underline{v}(2,1,3);$$
$$c)\ \underline{u}(1,1,1), \underline{v}(-10,7,3);$$
$$d)\ \underline{u}(5,-3,4), \underline{v}(1,-1,2).$$

Útmutatás: Mivel a vektor hossza nemnegatív, a skaláris szorzás definíciójából látható ($\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \doteq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cos \sphericalangle(\underline{u}, \underline{v})$) hogy a két vektor skaláris szorzatának előjele megegyezik a közrezárt szög koszinuszának előjelével. Tehát amennyiben a skaláris szorzat pozitív, úgy hegyesszöget zárnak be a vektorok; negatív szám esetén tompaszöget, a nulla esetén pedig derékszöget.

Így például az a) pontban $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (-3)4 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = -10 < 0$, tehát tompaszögről van szó.

1.9. Feladat. *Adott $\underline{a}$, $\underline{b} \in V^3$ vektorok esetén határozzuk meg a p értékét úgy, hogy $\underline{a} + p \cdot \underline{b}$ merőleges legyen a $\underline{b}$ vektorra!*

Megoldás: A feltétel alapján $\langle \underline{a} + p \cdot \underline{b}, \underline{b} \rangle = 0$, s így $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + p\langle \underline{b}, \underline{b} \rangle = 0$. Ha tehát $\underline{b} \neq \underline{0}$, akkor $p = -\frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{b}\|^2}$ a megoldás, ám $\underline{b} = \underline{0}$ esetén tetszőleges $p \in \mathbb{R}$ megoldás lesz.

1.10. Feladat. *Döntse el, hogy az alábbi pontnégyesek egy síkban vannak-e:*
a) $(1,2,-1),\ (0,1,5),\ (-1,2,1),\ (2,1,3)$;
b) $(1,2,0),\ (0,1,1),\ (3,5,-4),\ (-4,-2,6)$;

Útmutatás: Négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha a belőlük képezhető 3 vektor egy síkban van, (ami akkor és csak akkor teljesül, ha az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata 0, azaz) ha a három vektor vegyesszorzata 0.

2. fejezet

Mátrixok determinánsa

Mielőtt rátérnénk a mátrix determinánsának értelmezésére, szükséges, hogy átnézzük a permutációk inverziójának fogalmát.

19. Definíció. *Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemek egy sorrendjét ezen elemek egy* **permutáció***jának nevezzük.*

Jelölés: $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ vagy pedig $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

20. Definíció. *Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes permutációjának halmazát P_n-nel jelöljük.*

Például az $\{1, 2, 3\}$ összes permutációi halmazának elemei a következőek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutációban az i_k* **elem inverzióban van az i_l-lel***, ha $k < l$, de $i_k > i_l$.*

Például a $\{2, 5, 4, 1, 3\}$ permutációnak 6 darab inverziója van. Ellenőrizze a kedves olvasó!

Jelölje $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ az $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ **permutáció inverzióinak a számá**t. Például $I(2, 5, 4, 1, 3) = 6$. Egy permutációt **páros**nak, illetve **páratlan**nak nevezünk aszerint, hogy az inverzióinak a szá páros, illetve páratlan.

Állítás: a) Ha egy permutációban két szomszédos elemet felcserélünk, akkor az inverziók száma 1-gyel változik.

b) Ha egy permutációban két tetszőleges elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlannal változik.

Most már elérkeztünk a mátrix fogalmához: Legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú **mátrix**nak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$.

A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük. Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex, a második pedig az oszlopindex. A mátrix i-edik sorát A_i, j-edik oszlopát pedig a^j jelölésekkel említjük.

Bizonyos mátrixokhoz rendelhetünk egy számot, a determinánsát, mely sokat elárul annak tulajdonságairol. (Ezen tulajdonságokra később fog fény derülni.)

22. Definíció. *Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú (azaz négyzetes), akkor A* **determináns***a alatt a következő számot értjük:*

$$\det(A) \doteq \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \dots, i_n)} \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{ni_n}.$$

(Itt az összegzést az $1, 2, \dots, n$ számok minden lehetséges permutációjára kell elvégezni.)

A mátrix minden sorából és oszlopából kiválasztva pontosan egy elemet, az indexek az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok egy permutációját adják. A fenti formula azt jelenti, hogy a mátrix determinánsát úgy kapom, ha minden ilyen kiválasztás szerinti elemek szorzatát összeadom, de a páratlan inverziójú tagokat negatív előjellel véve.

A következő jelöléseket használjuk az A mátrix determinánsára:

$$\det(A), \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |A|$$

Sarrus szabály 2×2-es mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Sarrus szabály 3×3-mas mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

Nagyobb méretű mátrixokra külön eljárásokat használunk: a kifejtési tételt, mely eggyel kisebb méretű négyzetes mátrixok determinánsára vezet (használata ajánlatos pl. 4×4-es mátrix esetén) illetve a Gauss-elimináció segítségével felső trianguláris mátrixszá való átalakítással.

A determináns elemi tulajdonságaiból megemlítjük a következőket:

♣ Ha az A mátrixban két sort (illetve oszlopot) egymással felcserélünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $\det(A) = -\det(A)$.

♣ Ha a mátrixnak két sora (ill. oszlopa) megegyezik, akkor a determinánsa 0.

♣ Ha az A mátrix egy sorának (ill. oszlopának) minden elemét megszorozzuk az α számmal, akkor a kapott mátrix determinánsa $= \alpha \cdot \det(A)$.

♣ Legyen A, B, C három olyan mátrix, melyek csak az i-edik sorban (ill. oszlopban) különböznek egymástól a következőképpen: $\underline{c}_i = \underline{a}_i + \underline{b}_i$. Ekkor $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

♣ (Az előzőekből következik, hogy) ha az A mátrix valamely sorához (ill. oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (ill. oszlopának) konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Az utóbbi tulajdonságra épül a Gauss-elimináció.

Kifejtési tétel: Jelölje a D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát. Ezt az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsának nevezzük. Az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa a következő szám:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Tétel (i-edik sor szerinti kifejtés): Tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}.$$

Tétel (j-edik oszlop szerinti kifejtés): Tetszőleges $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}.$$

2.1. A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására

23. Definíció. *Az $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ mátrixot* **felső háromszög alakú***nak vagy* **felső trianguláris** *mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ -re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek* 0*-val egyenlőek.)*

Könnyen látható, hogy felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.

A Gauss-elimináció módszerének célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Lépései:

$\diamond$ Esetleg sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$. (Sorcsere esetén a determináns előjele megváltozik)

$\diamond$ Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.

$\diamond$ Esetleg sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.

$\diamond$ A második sor alkalmas konstansszorosát a $3., 4., \dots, n.$ sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \dots, \alpha_{n2} = 0$ legyen.

$\vdots$

Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

2.2. Feladatok

2.1. Feladat. *a) Legyen σ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy permutációja. Lássuk be, hogy $0 \leq I(\sigma) \leq \binom{n}{2}$. b) Legyen $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ tetszőleges egész. Bizonyítsuk be, hogy van olyan σ permutáció, amelyre $I(\sigma) = k$.*

2.2. Feladat. *Egy permutációban az első helyen álló elemet az utolsó, n-edik helyre viszük, a többi elem pedig egy hellyel előbbre csúszik. Mi volt az elmozgatott elem, ha az új permutációban ugyanannyi inverzió van, mint az eredetiben?*

2.3. Feladat. *Mely n-ekre létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak olyan permutációja, amelyben minden elem pontosan a)1; b)2 másik elemmel áll inverzióban?*

2.4. Feladat. *Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Megoldás:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-4)1 = 14$$

$$\det B = \left|\begin{matrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 0 + (-12) + 0 - (-12) - 0 - (-8) = 8$$

és a negyedik sor szerinti kifejtéssel: (ugyanilyen jó választás lett volna a harmadik oszlop szerinti kifejtés)

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$$

Végül pedig a Gauss-eliminációval (az első sor (-1)-szeresét adva a többihez):

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{n-1}.$$

2.5. Feladat. *Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eredmények: $\det A = 0$, $\det B = 25$, $\det C = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 66 = 390$.

2.6. Feladat. *Mi az alábbi polinomokban x^3 együtthatója?*

$$a)\begin{vmatrix} 3x & 5 & 7 & 1 \\ 2x^2 & 5x & 6 & 2 \\ 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 3x^2 & 5 & 7 & 1 \\ 2x^2 & 5x & 6 & 2 \\ 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

2.7. Feladat. *Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determminánsa is racionális szám. b) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determminánsa is irracionális szám. c) Ha egy mátrixnak pontosan egy eleme irracionális szám, a többi pedig racionális, akkor a mátrix determminánsa is irracionális szám. d) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0. e) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul 0 elem.*

2.8. Feladat. *Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás: Az A mátrix esetén a második sor (-1)-szeresét a többihez adva és kifejtve a 2. oszlop szerint:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) = (-2)(n-2)!$$

2.9. Feladat. *Mi történik egy determinánssal, ha a függőleges középvonalára tükrözzük?*

2.10. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat!*

$$a)\ \alpha_{ij} = \begin{cases} i, & ha\ i = j; \\ 1, & ha\ i \neq j. \end{cases} \qquad b)\ \alpha_{ij} = \min\{i, j\}.$$

$$c)\ \alpha_{ij} = ij. \qquad d)\ \alpha_{ij} = i + j. \qquad e)\ \alpha_{ij} = i^2 + j^2.$$

2.11. Feladat. *Egy páratlan rendű négyzetes mátrixban $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$ teljesül minden i, j-re (ferdén szimmetrikus mátrix). Mennyi a determinánsa?*

2.12. Feladat. *Egy $n \times n$-es mátrix bal felső sarkában 1-es áll, az első sor többi eleme β, az első oszlop többi eleme γ, a főátló többi eleme δ, az összes többi elem pedig 0. Számítsuk ki a mátrix determinánsát!*

2.13. Feladat. *Határozza meg a következő determinánsok értékét!* $(a, b, a_i, d_j \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1, n \in \mathbb{N})$

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix};$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_1+d_1 & \dots & a_1+(n-1)d_1 \\ a_2 & a_2+d_2 & \dots & a_2+(n-1)d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n+d_n & \dots & a_n+(n-1)d_n \end{vmatrix};\quad d)\ \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

2.14. Feladat. $\star$ *Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 5 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

3. fejezet

Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek, vektorok lineáris függetlensége

24. Definíció. *Legyen* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in V^3$*, és* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*. Az* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ *vektorok* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *együtthatókkal vett* **lineáris kombináció***ja:*

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n.$$

25. Definíció. *Hasonlóan, egyenletek lineáris kombinációja alatt azok valamely valós együtthatókkal vett összegét értjük.*

26. Definíció. *Legyenek* $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ *és* $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$*. Az*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert **lineáris egyenletrendszer***nek nevezzük.*

27. Definíció. *A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa (együtthatómátrixa) alatt a következőt értjük:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

3.1. Gauss-féle eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására

28. Definíció. *Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az összes megoldásaik halmaza megegyezik.*

Tétel: Az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert egy vele ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

✠ egy egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$-val

✠ egy egyenlet λ-szorosának hozzáadása egy másik egyenlethez

✠ olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja

✠ egyenletek sorrendjének felcserélése

✠ az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt.

A lineáris egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldása azt jelenti, hogy a fenti átalalkításokkal trapéz alakúra hozzuk azt. (Cél: $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén.)

3.2. Cramèr szabály

Ha az n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ($\det(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|},\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol

$$\Delta_k \doteq \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

azaz a k-adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

Igaz továbbá, hogy ha $\det(A) = 0$, de $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ úgy, hogy $\Delta_k \neq 0$, akkor az egyenletredszernek nincs megoldása, ám $\det(A) = \Delta_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) esetén lehet végtelen sok vagy 0 megoldás.

29. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_n \in V^3$ *vektorok* **lineárisan függetlenek***, ha*

$$\lambda_1 \underset{\sim}{a}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{0} \ (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$*. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán* 0*-kból álló* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*, hogy* $\lambda_1 \underset{\sim}{a}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{0}$*, akkor azt mondjuk, hogy az* $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_n$ *vektorok* **lineárisan függőek***.*

(Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.)

3.3. Feladatok

1) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$a)\ \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$b)\ \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 8x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 25x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$d)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$e)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: a) Gauss-eliminációval:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(-2)I.+II. és (-3)I.+III.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ 7x_2 + 10x_3 &= -13 \end{aligned}\right\}$$

(-7)II.+III.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ -39x_3 &= 78 \end{aligned}\right\},$$

ahonnan $x_3 = -2$, majd $x_2 = -13 - 7(-2) = 1$ és végül $x_1 = 2 - 6 + 6 = 2$ adódik.

Cramèr szabállyal: Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 39 \neq 0.$$

Így a Cramèr szabály értelmében egyetlen megoldás létezik:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 78, \text{ tehát}$$

$$x_1 = \frac{78}{39} = 2;$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39,$$

$$x_2 = \frac{39}{39} = 1$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -78,$$

$$x_3 = \frac{-78}{39} = -2.$$

b) Hasonlóan eljárva azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -9x_2 - 6x_3 &= -8 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

amely egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van a következő módon: Választhatjuk x_3-at tetszőlegesnek: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, ekkor $x_2 = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}t$; $x_1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}t$ adódik.

c) Hasonlóan,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= -1 \\ 14x_2 - 22x_3 &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

adódik, amely egyenletrendszer ellentmondásos, s így nincs megoldása. Tehát az eredeti egyenletrendszernek sincsen.

d)

$$\begin{cases} x_1 = -t + \dfrac{7}{5} \\ x_2 = -t + \dfrac{9}{5} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x_1 = -3t + r - 5s + 3 \\ x_2 = t - 2r + 2s - 1 \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \\ x_4 = r \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \\ x_5 = s \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \end{cases}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

2) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$a) \quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

$$b) \quad \left.\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

$$c)\quad \left.\begin{aligned} x_1-x_2-2x_3+4x_4-x_5&=2\\ -3x_1+5x_2+4x_3-10x_4+3x_5&=-8\\ 2x_1-x_2-5x_3+9x_4-2x_5&=3\\ -x_1+3x_3-5x_4+x_5&=-1 \end{aligned}\right\}$$

$$d)\quad \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=4\\ 5x_1+6x_2+7x_3&=8\\ 9x_1+10x_2+11x_3&=12\\ 13x_1+14x_2+15x_3&=16 \end{aligned}\right\}$$

3) Tekintsünk egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszert. Az alábbi változtatások kötül melyek vezetnek az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerhez? a) Az első egyenlet helyére az összes egyenlet összegét írjuk. b) Az első egyenlet helyére az összes többi egyenlet összegét írjuk. c) Az első két egyenlet helyére az összes egyenlet összegét írjuk. d) Az első két egyenlet helyére ezek összegét és különbségét írjuk. e) Minden egyenletben minden együtthatóhoz és a konstans tagokhoz is egyet hozzáadunk.

4) Oldjuk meg a valós számok körében:

$$x_1+x_2=1,\quad x_2+x_3=1,\quad \dots,\quad x_n+x_1=1.$$

Eredmény: Páratlan n esetén $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{2}$, páros n esetén pedig $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=1-t,\ x_2=x_4=\ldots=x_n=t$, ahol $t\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

5) Legyen $A, A_i\in\mathcal{M}_{k\times n},\ \underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \underline{b},\underline{b}_i\in\mathbb{R}^k$, és tekintsük az $A\underline{x}=\underline{b},\ A_1\underline{x}=\underline{b},\ldots$ egyenletrendszereket. Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha $A\underline{x}=\underline{b}_1$ és $A\underline{x}=\underline{b}_2$ megoldható, akkor $A\underline{x}=\underline{b}_1+\underline{b}_2$ is megoldható. b) Ha $A_1\underline{x}=\underline{b}$ és $A_2\underline{x}=\underline{b}$ megoldható, akkor $(A_1+A_2)\underline{x}=\underline{b}$ is megoldható. c) Ha $A\underline{x}=\underline{b}$-nek egyértelmű a megoldása, akkor $A\underline{x}=\underline{b}_1$-nek semmien b_1-re sem lehet egynél több megoldása. d) Ha $A\underline{x}=\underline{b}$-nek egyértelmű a megoldása, akkor $A\underline{x}=\underline{b}_1$ is biztosan megoldható bármely b_1-re. e) Ha $k<n$, akkor tetszőleges A-hoz van olyan $\underline{b}$, amelyre $A\underline{x}=\underline{b}$ nem oldható meg. f) Ha $k>n$, akkor tetszőleges A-hoz van olyan $\underline{b}$, amelyre $A\underline{x}=\underline{b}$ nem oldható meg.

6) Oldjuk meg a valós számok körében:

$$x_1 + 2x_2 = 3, \quad x_2 + 3x_3 = 4, \quad \ldots, \quad x_n + (n+1)x_1 = n+2.$$

Eredmény: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

7) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen

b) ne legyen megoldása

c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x + \ y - \ z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= 5 \\ x + 3y + \alpha z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 7.$$

A Cramèr szabály értelmében az egyetlen megoldás létezésének feltétele, hogy

$D \neq 0$. Tehát ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, akkor egyetlen megoldás létezik:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-9\alpha + 33}{\alpha - 7};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{7\alpha - 25}{\alpha - 7};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-6}{\alpha - 7}.$$

Továbbá $\alpha = 7$ esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek, mert ekkor $D = 0$, ám a D_x, D_y, D_z között létezik nemnulla. Nincs olyan α, hogy az adott lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

8) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen

b) ne legyen megoldása

c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + \ z &= -4 \\ 2x + 4y + \ z &= 3 \\ -2x + 3y + \alpha z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

$$a)\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{15}{8}\};$$
$$b)\ \alpha = -\frac{15}{8};$$
$$c)\ \text{nincs ilyen } \alpha.$$

9) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen

b) ne legyen megoldása

c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + \ \ z &= -4 \\ 2x + 4y + \ \ z &= 5 \\ 3x + 2y + \alpha z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

$$a)\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\};$$
$$b)\ \text{nincs ilyen } \alpha;$$
$$c)\ \alpha = 2.$$

10) Határozza meg az a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszereknek egyetlen megoldása legyen:

$$a)\ \left.\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= 4 \\ x + y &= a \end{aligned}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ (a+1)x + y &= 2 \\ 2x + 3y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

11) Határozzuk meg azt a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós f polinomot, amelyre a) $f(-1) = 12,\ f(4) = 7,\ f(6) = 5,\ f(9) = 2$; b) $f(1) = f(-1) = 3,\ f(2) = f(-2) = 9$.

12) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (6, 4, -1)$

$\underline{b} = (2, 1, 6)$

$\underline{c} = (1, 0, 4)$

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy mely $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq 3)$ együtthatókkal teljesülhet a

$$\lambda_1\underline{a} + \lambda_2\underline{b} + \lambda_3\underline{c} = \underline{0}$$

egyenlet!

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Így egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ismeretlenekre:

$$\left.\begin{aligned} 6\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 1\lambda_2 \qquad &= 0 \\ -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Először egyenletcserét alkalmazunk, majd a Gauss-eliminációval:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 25\lambda_2 + 16\lambda_3 &= 0 \\ 38\lambda_2 + 25\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

majd

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 25\lambda_2 + 16\lambda_3 &= 0 \\ \frac{17}{25}\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

melyből a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ megoldás adódik, tehát az adott vektorok lineárisan függetlenek.

13) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (3, 4, -1)$

$\underline{b} = (2, 5, 6)$

$\underline{c} = (1, 0, 1)$

Eredmény: A vektorok lineárisan függetlenek.

14) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (-2, 0, 5)$

$\underline{b} = (1, 2, 3)$

$\underline{c} = (-3, 2, 13)$

Eredmény: A vektorok lineárisan függőek.

15) Döntsük el az alábbi vektorokról, hogy lineárisan függetlenek-e?

$$a)\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

16) Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_5$ lineárisan független, de $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_7$ lineárisan függő, akkor $\underline{u}_6$ és u_7 közül legalább az egyik felírható az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_5$ vektorok lineáris kombinációjaként. b) Ha van olyan $\underline{u} \neq \underline{0}$ vektor, amely felírható $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ lineáris kombinációjaként és $\underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6$ lineáris kombinációjaként is, akkor az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_6$ vektorok lineárisan függők. c) Ha az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_6$ vektorok egyike sem a nullvektor és lineárisan függők, akkor van olyan $\underline{u} \neq \underline{0}$ vektor, amely felírható $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ lineáris kombinációjaként és $\underline{u}_4, \underline{u}_5, \underline{u}_6$ lineáris kombinációjaként is.

17) Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha egy $\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_m\underline{u}_m = \underline{0}$ nemtriviális lineáris kombinációban $\lambda_3 \neq \underline{0}$, akkor $\underline{u}_3$ előáll a többi $\underline{u}_i$ vektor lineáris kombinációjaként. b) Ha egy $\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_m\underline{u}_m = \underline{0}$ nemtriviális lineáris kombinációban $\lambda_3 = \underline{0}$, akkor $\underline{u}_3$ nem áll elő a többi $\underline{u}_i$ vektor lineáris kombinációjaként. c) Ha az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m$ vektorok között pontosan d olyan van, amely kifejezhető a többi $m-1$ vektor lineáris kombinációjaként, akkor az $\underline{u}_i$ vektorok közül kiválasztható $m-d$ elemű független rendszer. d) Ha az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m$ vektorok között pontosan d olyan van, amely kifejezhető a többi $m-1$ vektor lineáris kombinációjaként, akkor az $\underline{u}_i$ vektorok közül nem választható ki $m-d$-nél több elemű független rendszer.

18) Tegyük fel, hogy $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m$ lineárisan független, $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m, \underline{v}$ lineárisan függő, továbbá egyik $\underline{u}-i$ semírható fel a $\underline{v}$ és a többi $\underline{u}_j$ lineáris kombinációjaként. Határozzuk meg $\underline{v}$-t.

19) Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \in \mathbb{R}^5$ lineárisan függetlenek. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e? a) $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \underline{v}_3 - \underline{v}_4$; b)

$\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \underline{v}_3 - \underline{v}_1$; c) $\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_3 + \underline{v}_4, \underline{v}_4 + \underline{v}_1$; d) $\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_3 + \underline{v}_4, \underline{v}_4 + \underline{v}_2$.

4. fejezet

Vektortér, lineáris altér, generátorrendszer, bázis, egyenes és sík egyenlete

30. Definíció. *A $V \neq \emptyset$ halmazt* **vektortér***nek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy $+$-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\begin{aligned}
&\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \ (\underline{a}, \underline{b} \in V) \\
&(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \ (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V) \\
&\exists \ \underline{0} \in V \text{ úgy, hogy } \underline{a} + \underline{0} = \underline{a} \ \forall \underline{a} \in V \text{ esetén} \\
&\forall \underline{a} \in V \ \exists (-\underline{a}) \in V : \underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0},
\end{aligned}$$

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\underline{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda \underline{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
&\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda \mu)\underline{a} \ (\underline{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
&\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b} \ (\underline{a}, \underline{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\
&(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a} \ (\underline{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
&\forall \underline{a} \in V\text{-re } 1 \cdot \underline{a} = \underline{a}.
\end{aligned}.$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert V^2 és V^3 halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, a valós szám-$n$-esek halmaza, illetve a legfeljebb n-edfokú polinomok $R_n[x]$ halmaza is.

31. Definíció. *A V vektortér L nem üres részhalmazát* **lineáris altér***nek nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel.*

Tétel: A V vektortér L nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\forall\ \underline{a}, \underline{b} \in L \text{ esetén } \underline{a} + \underline{b} \in L$$

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \underline{a} \in L \text{ esetén } \lambda\underline{a} \in L.$$

32. Definíció. *Legyen $H \neq \emptyset$ részhalamaza a V vektortérnek. A H* **által generált altér** *az a legszűkebb altere V-nek, mely tartalmazza H-t. (Azaz bármely H-t tartalmazó altérnek részhalmaza.)*

Jelölés: $\mathcal{L}(H)$.

Jegyezzük meg, hogy ez a definíció értelmes, hiszen mindig létezik H-t tartalmazó legszűkebb altér: tekintsük a H-t tartalmazó összes alterek metszetét.

33. Definíció. *A H halamaz* **generátorrendszere** *a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.*

34. Definíció. *A V vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.*

Megjegyzés: A $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált V vektortérnek, ha a V halmaz minden eleme felírható a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.

35. Definíció. *A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy* **bázis***ának nevezzük.*

Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.

36. Definíció. *A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér* **dimenziójá***nak nevezzük. Jele: $dim(V)$.*

37. Definíció. *Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis V-ben és $\underline{a} \in V$. Ekkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat, melyekre $\underline{a} = \lambda_1\underline{b}_1 + \lambda_2\underline{b}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{b}_n$, az $\underline{a}$ vektor $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.*

38. Definíció. *Legyen $\underline{v} \in V^2 \setminus \{\underline{0}\}$ vagy $\underline{v} \in V^3 \setminus \{\underline{0}\}$. Az $l \doteq \{\alpha\underline{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origón átmenő)* **egyenes***nek nevezzük.*

39. Definíció. *Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in V^3 \setminus \{\underline{0}\}$ és $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{u} = \lambda \underline{v}$. Az $L \doteq \{\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origóra illeszkedő)* **sík***nak nevezzük.*

Vegyük észre, hogy az $L \doteq \{\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \ldots + \alpha_m \underline{u}_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmaz éppen az $\{u_1, \ldots, u_m\}$ által generált lineáris altér. Amennyiben $u_1, \ldots, u_m$ lineárisan függetlenek, az L halmaz egy m-dimenziós lineáris altér. Ekkor a $K \doteq \{\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \ldots + \alpha_m \underline{u}_m + \underline{v} : \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \in \mathbb{R}\}$ halmazt egy m-dimenziós affin altérnek nevezzük. Minden affin altér előáll $K = L + \underline{v}$ alakban, ahol L egy lineáris altér és $\underline{v} \in V$.

40. Definíció. *Halmazok (Minkowski-)összege: $A + B \doteq \{\underline{a} + \underline{b} : \underline{a} \in A,\ \underline{b} \in B\}$.*

Állítás: Alterek összege és metszete: $L_1 + L_2,\ L_1 \bigcap L_2$ is altér.

41. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$* **direkt összeg***et alkot, ha $L_1 \bigcap L_2 = \{\underline{0}\}$.*

Az $\underline{n}(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3.$$

4.1. Feladatok

1) Vektorteret alkotnak-e a következő halmazok $\mathbb{R}$ felett a szokásos műveletekkel? a) $\mathbb{R}^n$, az összes valós szám-n-esek halmaza; b) az összes $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvények halmaza; c) $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$, az egész számhármasok halmaza; d) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}_+\}$, a pozitív valós számpárok halmaza; e) a valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}[x]$ halmaza f) a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}_n[x]$ halmaza.

2) Vizsgálja meg, hogy a valós számpárok halmaza vektorteret alkot-e $\mathbb{R}$ felett, ha a műveleteket a következőképpen definiáljuk: a) $(a, b) + (c, d) \doteq (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) \doteq (\alpha a, b)$; b) $(a, b) + (c, d) \doteq (3b + 3d, -a - c)$ és $\alpha(a, b) \doteq (3\alpha b, -, \alpha a)$; c) $(a, b) + (c, d) \doteq (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) \doteq (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$; d) $(a, b) + (c, d) \doteq (a + c, b + d)$ és $\alpha(a, b) \doteq (\alpha a, 0)$; e) $(a, b) + (c, d) \doteq (a + 2, b + d + 1)$ és $\alpha(a, b) \doteq (\alpha a, b)$;

3) Döntsük el, hogy a valós együtthatós polinomok $R[x]$ halmazának alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett, ha a műveleteket a szokásos módon értelmezzük. ($\deg f$ jelöli az f polinom fokszámát, a_k pedig a k-adik tag együtthatóját, a_n a főegyütthatót, tehát $a_n \neq 0$, ha f nem a nullpolinom.) a) $\{f| \deg f = 7$ vagy $f = 0\}$; b) $\{f| \deg f \leq 7$ vagy $f = 0\}$; c) $\{f| \deg f \geq 7$ vagy $f = 0\}$; d) $\{f|x^3 + 1$ osztója f-nek $\}$; e) $\{f|x^3 + 1$-gyel osztva az f konstans maradékot ad $\}$; f) $\{f|f(3) = 2\}$; $g)$\{f|f(3)=0\}; h) $\{f|f(3) = 2f(4)\}$; i) $\{f|f$ együtthatóinak az összege $o\}$.

4) Döntsük el, hogy a valós számsorozatok alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett, ha a műveleteket a szokásos módon értelmezzük. Egy általános sorozatot most $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ alakban jelölünk. a) $\{\underline{a}|a_0 = 2a_3 + a_5\}$; b) $\{\underline{a}|a_0 = 2a_3a_5\}$; c) $\{\underline{a}|a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n71, 2, \ldots\}$; d) a korlátos sorozatok halmaza; e) a konvergens sorozatok halmaza; f) a monoton növekvő sorozatok halmaza; g) $\{\underline{a}|a_i = 0$ végtelen sok i-re $\}$; h) $\{\underline{a}|a_i = 0$ legfeljebb véges sok i kivételével $\}$.

5) Legyen $V = \mathcal{M}_{5\times5}$ az $\mathbb{R}$ feletti 5×5-ös mátrixok vektortere a mártxok összeadásával és skalárral való szorzásával. Az alábbi részhalmazok közül melyek alterek V-ben? a) $\{A \in V|AB = BA\}$, ahol $B \in V$ egy rögzített mátrix; b) $\{A \in V|AB = 0\}$, ahol $B \in V$ egy rögzített mátrix; c) a szinguláris mátrixok halmaza; d) a felsőháromszög-mátrixok halmaza.

6) Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett és $W \subseteq V$ egy nemüres részhalmaza. Az alábbi feltételek közül melyekből következik, hogy W altér V-ben? a) $\underline{u}, \underline{v} \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} \in W$; b) $\underline{u}, \underline{v} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\underline{u} + \underline{v} \in W$; c) $\underline{u}, \underline{v} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\underline{u} \in W$ és $\underline{u} - \underline{v} \in W$; d) $\underline{u}, \underline{v} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\underline{u} \in W$ valamint $\underline{u} - \underline{v} \in W$ és $\underline{u} + \underline{v} \in W$ közül legalább az egyik teljesül; e) $\underline{u} + \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u} \in W$ és $\underline{v} \in W$.

7) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok az adott vektortérben?

$L_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta)|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$L_1 \cap L_2 (=?)$

$L_3 = \{(2x_1 + 3, 5x_2, -x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Megoldás: Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in L_1$, és lássuk be, hogy $\underline{x} + \underline{y} \in L_1$. $\underline{x} \in L_1 \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{x} = (\alpha, \beta, \alpha, \beta)$, továbbá $\underline{y} \in L_1 \Longrightarrow \exists \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{y} = (\gamma, \delta, \gamma, \delta)$. Ekkor $\underline{x} + \underline{y} = (\alpha + \gamma, \beta + \delta, \alpha + \gamma, \beta + \delta)$, s erről látható, hogy eleme L_1-nek.

Hasonlóan, ha $\underline{x} \in L_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, lássuk be, hogy $\lambda \underline{x} \in L_1$. $\underline{x} \in L_1 \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{x} = (\alpha, \beta, \alpha, \beta)$. Ekkor a $\lambda \underline{x} = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\alpha, \lambda\beta)$ elemről is látható, hogy L_1-beli. Ezzel beláttuk, hogy L_1 lineáris altér.

Írjuk fel először L_2-t az L_1-hez hasonló alakban, majd a fenti módszerrel könnyen belátható, hogy L_2 lineáris altér. Gauss-eliminációval megoldjuk a következő egyenletet:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$

melyben az első egyenlet (-3)-szorosát a második egyenlethez adva kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Az $x_3 = s \in \mathbb{R}$ és $x_4 = t \in \mathbb{R}$ tetszőleges választással $x_2 = \frac{-4s-4t}{2} = -2s - 2t$, majd $x_1 = -4s - 4t - s - 2t = -5s - 6t$ adódik. Így L_2 kívánt alakja:

$$L_2 = \{(-5s - 6t, -2s - 2t, s, t) : s, t, \in \mathbb{R}\}.$$

Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in L_2$, és lássuk be, hogy $\underline{x} + \underline{y} \in L_2$. $\underline{x} \in L_2 \Longrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{x} = (-5s - 6t, -2s - 2t, s, t)$, továbbá $\underline{y} \in L_2 \Longrightarrow \exists u, v \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{y} = (-5u - 6v, -2u - 2v, u, v)$. Ekkor $\underline{x} + \underline{y} = (-5(s + u) - 6(t + v), -2(s + u) - 2(t + v), s + u, t + v)$, s erről látható, hogy eleme L_2-nek.

Hasonlóan, ha $\underline{x} \in L_2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, lássuk be, hogy $\lambda \underline{x} \in L_2$. $\underline{x} \in L_2 \Longrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{x} = (-5s - 6t, -2s - 2t, s, t)$. Ekkor a $\lambda \underline{x} = (-5\lambda s - 6\lambda t, -2\lambda s - 2\lambda t, \lambda s, \lambda t)$ elemről is látható, hogy L_2-beli. Ezzel beláttuk, hogy L_2 lineáris altér.

Mivel lineáris alterek metszete is lineáris altér, ezért $L_1 \cap L_2$ is az. A fenti vizsgálatot elvégezve az $L_3 = \{(2x_1 + 3, 5x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ halmazra, láthatjuk, hogy L_3 nem zárt pl. az összeadásra nézve, így nem lineáris altér, de a $H \doteq \{(2x_1, 5x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ halmaz lineáris altér és így $L_3 = H + (3, 0, 0, 0)$ affin altér.

8) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok az adott vektortérben?

$L_1 = \{(3x_1{+}2x_2, x_2, 4x_1, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in R\} \subseteq \mathbb{R}^4 L_2 = \{(5x_1, 3x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\} \subseteq \mathbb{R}^4 L_1 \cap$

Eredmény: $L_1, L_2, L_1 \cap L_2$ lineáris, L_3 és L_4 pedig affin alterek.

9) Az alábbi vektorrendszerek közül melyek alkotnak generátorrendszert a szokásos $\mathbb{R}^4$ vektortérben?

$$a) \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \qquad b) \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\16\\64\end{pmatrix}.$$

10) Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha egy generátorrendszerhez egy tetszőleges vektort hozzáveszünk, akkor ismét generátorrendszert kapunk. b) Ha egy legalább kételemű generátorrendszerből egy tetszőleges vektort elhagyunk, akkor ismét generátorrendszert kapunk. c) Minden legalább kételemű generátorrendszerben van olyan vektor, amelyet elhagyva a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak. d) Ha egy generátorrendszerben előfordul két azonos vektor, akkor ezek egyik példányát elhagyva a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak. e) Egy legalább kételemű generátorrendszerben akkor és csak akkor van olyan vektor, amelyet elhagyva a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak, ha a generátorrendszer valamelyik eleme felírható a többi elem lineáriskombinációjaként.

11) Legyen $V = R[x]$, a valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Melyek igazak az alábbi tartalmazások közül? a) $x^3+7x^2+5x \in \mathcal{L}(x^3+2x, 3x^3+4x, 5x^2+6x)$; b) $x^3+7x^2+5 \in \mathcal{L}(x^3+2x, 3x^3+4x, 5x^2+6x)$; c) $x-1 \in \mathcal{L}(x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2-3x+1)$; d) $x+1 \in \mathcal{L}(x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2-3x+1)$; e) $x+1 \in \mathcal{L}(x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2+3x+1)$.

12) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (2, 1, -2)$

$\underline{a}_2 = (2, 3, 1)$

$\underline{b}_1 = (-5, 2, 1)$

$\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$

Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2(=?)$ direkt összeget alkot-e?

13) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (2, 1, -2)$

$\underline{a}_2 = (2, 3, 1)$

$\underline{b}_1 = (-5, 2, 1)$

$\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$

Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2(=?)$ direkt összeget alkot-e?

14) Lineáris alteret alkotnak-e a következő halmazok az adott vektortérben?

$$L_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4 L_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n L_3 =$$

Amennyiben lineáris altér, adja meg egy bázisát! Megoldás: Az L_1-ről már beláttuk az 1) feladatban, hogy lineáris altér. A $\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$ és $\underline{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$ egy generátorrendszerét alkotja L_1-nek, hiszen $\forall \underline{x} \in L_1$ vektorhoz $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\underline{x} = (\alpha, \beta, \alpha, \beta) = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2$, tehát L_1 minden eleme felírható a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ lineáris kombinációjaként. De $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ lineárisan fü ggetlenek is, ezért bázisát alkotják L_1-nek.

15) Lineáris alteret alkotnak-e a következő halmazok az adott vektortérben?

$$L_1 = \{(x_1, x_2, 2x_1, 3x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4 L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Amennyiben lineáris altér, adja meg egy bázisát!

16) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (3, 2, 3)$

$\underline{a}_2 = (1, 2, 1)$

$\underline{b}_1 = (-1, 2, -2)$

$\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$

Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2(=?)$ direkt összeget alkot-e? Adjuk meg az $L_1 + L_2$ egy bázisát! Adjuk meg az $L_1 \bigcap L_2$ egy bázisát!

17) Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban az $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$ bázist. Adjuk meg ebben a bázisban az $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ vektorok koordinátáit.

18) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1,-2,3)$ pontra és párhuzamos a $3x-4y+5z=3$ síkkal! Eredmény: A keresett sík normálvektora $\underline{n}(3,-4,5)$, így a keresett egyenlet: $3x-4y+5z=26$.

19) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x=2+3t,\ y=-1+2t,\ z=3-2t$ és az $x=1+3t,\ y=2+2t,\ z=-3-2t$ párhuzamos egyenesekre! Útmutató: Szükségünk van a sík egy pontjára, legyen ez például az első egyenes $t=0$ pontjához tartozó pont: $P(2,-1,3)$. Az egyenesek közös irányvektora,$\underline{v}=(3,2,-2)$ a vizsgált sík egy vektora, de szükségünk van egy másikra is, ezért a második egyenes egy $Q(1,2,-3)$ pontját meghatározva adott a $\overrightarrow{PQ}(-1,3,-6)(=\underline{q}-\underline{p})$ irány is. Így a sík normálvektora ezek vektoriális szorzata:

$$\underline{n}=\overrightarrow{PQ}\times\underline{v}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ -1 & 3 & -6\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=(6,-20,-11).$$

Majd a sík egyenletének felírása következik: $6x-20y-11z+1=0$.

20) Határozza meg a $P(5,2,4)$ pontra és az $x=t+3,\ y=-2t-2,\ z=6$ egyenesre illeszkedő sík egyenletét! Eredmény: $2x+y+4z=28$

21) Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(3,-1,0)$ és $B(-1,2,1)$ pontokra és merőleges a $2x-y+z=5$ síkra!

Útmutató: A keresett sík $\underline{n}$ normálvektora merőleges az $\overrightarrow{AB}(-4,3,1)$ vektorra és merőleges az adott sík $\underline{n}_1(2,-1,1)$ normálisára, így $\underline{n}=\overrightarrow{AB}\times n_1=(4,6,-2)$. Akkor tehát a sík egyenlete: $2x+3y-z=3$

22) Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(0,-1,3)$ és $B(1,2,-1)$ pontokra és merőleges az $x-y+2z=5$ síkra!

23) Írja fel a $P(-1,2,3)$ pontra illeszkedő és az $x+2y-3z+1=0,\ x+3y-z+6=0$ síkokra merőleges sík egyenletét!

Útmutató: $\underline{n} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = (7, -2, 1)$

24) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-3, 2, 1)$ pontra, párhuzamos az $x = 3 + 2t,\ y = t,\ z = -1 + 4t$ egyenessel, és merőleges az $x - 2y + 5z - 3 = 0$ síkra!

Útmutató:

$$\underline{n} = \underline{v} \times \underline{n}_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (13, -6, -5).$$

25) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + 3t,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - t$ egyenesre, és párhuzamos a $2x - y + z - 3 = 0$ és $x + 2y - z - 5 = 0$ síkok metszésvonalával! Megoldás: Az adott síkok metszésvonalának irányvektora merőleges az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ normálisokra, így azt megkaphatjuk azok vektoriális szorzatával:

$$\underline{u} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 5).$$

Az adott egyenes irányvektora, $\underline{v}(3, 2, -1)$ is a keresett síkhoz tartozik, s így a síkhoz tartozó$\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok vektoriális szorzata adja a keresett sík normálvektorát:

$$\underline{n} = \underline{v} \times \underline{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (13, -14, 11).$$

A sík egyenletének felírásához szükségünk van még egy pontjára: az adott egyenes $t = 0$ paraméterértékhez tartozó $A(1, 3, -2)$ pontja megfelelő lesz, s az egyenlet: $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

26) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + t,\ y = 3-2t,\ z = -2+3t$ egyenesre, és párhuzamos a $2x-y+z-5 = 0$ és $x+2y-z-9 = 0$ síkok metszésvonalával!

27) Határozza meg a $4x - 2y + 3z + 13 = 0$, $4y - 5x + 2z - 12 = 0$ és $6x - 4y - 5z + 11 = 0$ síkok közös pontjának koordinátáit! Megoldás: A síkok közös pontja rajta van mindhárom síkon, ezért koordinátái kielégítik mindegyik

sík egyenletét. Tehát a következő lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a közös pont koordinátáit:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= -13 \\ -5x + 4y + 2z &= 12 \\ 6x - 4y - 5z &= -11 \end{aligned}\right\}$$

Így a közös pont: $P(-2, 1, -1)$.

(Nem kell akkor sem megijedni, ha végtelen sok megoldás adódik, és ezek épp egy egyenes pontjai. Miért?)

28) Határozza meg a $2x+y-3z-7=0$, $-y-4x+5z+9=0$ és $6x-2y-z+10=0$ síkok közös pontjának koordinátáit!

5. fejezet

Mátrixok

A második fejezetben már értelmeztük a mátrix, illetve a mátrix főátlójának fogalmát. Most nézzük meg a mátrixokkal végzett műveleteket és ezek tulajdonságait, a mátrix inverzének fogalmát és kiszámításának módjait, és a mátrix rangját. Az alkalmazások között beszélhetünk egy lineáris egyenletrendszer megoldásáról az alapmátrix inverzének kiszámításával, illetve mátrixos egyenletet is látni fogunk.

42. Definíció. *Az $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$* **mátrix transzponáltja** *a $A^T = (\alpha_{ji})_{n\times m}$ (ami tulajdonképpen az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti). (Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözésként is leírhatjuk a transzponálást.)*

43. Definíció. *Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B* **mátrixok összege** *alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A* **mátrix λ-szorosa** *alatt a $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.*

(Azt mondhatjuk, hogy a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden tagjának megszorzását jelenti.)

44. Definíció. *Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n\times k}$ két mátrix. Az A és B* **mátrixok szorzata** *alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m\times k}$ mátrixot értjük, ahol*

$$\gamma_{ij} \doteq \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}.$$

45. Definíció. *Az n-ed rendű* **egységmátrix** *a következő:*

$$E_n \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.

46. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik* **inverz***e, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-el jelöljük.*

Tétel: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

Megjegyzés: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det A \neq 0$, illetve szingulárisnak, ha $\det A = 0$.)

5.1. Az inverz mátrix kiszámításának egy módja: elemi átalakításokkal

A mátrix soraival végzett elemi átalakítások:
✓ sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal
✓ egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz
✓ sorok cseréje

Belátható, hogy ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze. (Szinguláris mátrix esetén pedig az átalakítás nem végezhető el.)

5.2. Az inverz mátrix kiszámításának egy másik módja: algebrai aldeterminánssal

Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix és minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij}-t, majd az így kapott mátrixot transzponálva és beszorozva a $\det A$ reciprokával, megkapjuk az A mátrix inverzét:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}.$$

Emlékeztetőül: Az A mátrix α_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsa.

Tétel: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$. a) Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; b) $(AB)^T = B^T A^T$; c) Ha A invertálható, akkor A^T is és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix estén tehát értelmezhető a hatványozás:

$$A^1 \doteq A \text{ és } A^m \doteq AA^{m-1} \ (m \geq 2),$$

ahol $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_m$.

Állítás (A mátrixhatványozás azonosságai):

$$a)\ A^m A^k = A^{m+k} \ (m, k \in \mathbb{N});$$
$$b)\ (A^m)^k = A^{mk} \ (m, k \in \mathbb{N}).$$

47. Definíció. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_s \in V$ vektorok. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$* **vektorrendszer rangja** *alatt az $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_s)$*

Tétel: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ vektorrendszer rangját:
♡ egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal
♡ egy vektor λ-szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz
♡ olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként
♡ vektorok sorrendjének felcserélése

48. Definíció. *Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$* **mátrix rangja** *alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.*

A mátrix rangjának meghatározása: Ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Itt oszlopcsere is megengedett. (**Trapéz alakú** egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$ ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq \min\{m, n\})$.) A 0 sorokat és oszlopokat kihúzhatjuk. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.

Belátható, hogy a mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével. Feladatok:

1) Adottak a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges:

$$\begin{aligned} &a) A + B; B + C; C + D; 4A - B; \\ &b) AB; AC; BC; BD; \\ &c) A^T; D^T; A^T B \\ &d) \varrho(A); \varrho(D); \\ &e) A^{-1}; D^{-1}. \end{aligned}$$

Megoldás:

a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4A - B = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 10 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Továbbá $B + C$ és $C + D$ nem végezhető el, mert nem azonos típusú mátrixok összeadása nem értelmezett.

b) AB nem végezhető el, mert nem teljesül az a feltétel, hogy A oszlopainak száma megegyezzen B sorainak számával.

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \qquad \varrho(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \varrho(D) = 3$$

e) Az A mátrix nem invertálható, mert nem négyzetes. Most adjuk meg a D inverzét két módszerrel is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Így

$$D^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A D mátrix inverzének kiszámítása az aldeterminánsok segítségével:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

és az aldeterminánsok:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

és így az algebrai aldeterminánsok:

$$A_{11} = -2 \qquad A_{12} = -2 \qquad A_{13} = 4$$

$$A_{21} = -1 \qquad A_{22} = -1 \qquad A_{23} = -1$$

$$A_{31} = 1 \qquad A_{32} = -5 \qquad A_{33} = 1$$

ezért

$$D^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Adottak a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges:

$$a) A + B; B + C; C + D; 2A - B;$$

$$b) AB; AC; BC; BD;$$

$$c) A^T; D^T;$$

$$d) \varrho(A); \varrho(C);$$

$$e) A^{-1}; D^{-1}.$$

3) Adja meg az X mátrix elemeit, ha

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}!$$

Megoldás: Az

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

jelölésekkel a fenti mátrixegyenlet: $XA = B$ az A mátrix inverzével jobbról való beszorzással oldható meg, mely után

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Szükséges tehát az A^{-1} mátrixot meghatározni. Ez a következő lesz:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Így } X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizze az eredményt!

4) Adja meg az X mátrix elemeit, ha teljesül a következő egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Adja meg az X mátrix elemeit, ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & -8 & 7 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Eredmény:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Oldja meg a következő mátrixegyenleteket!

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

7) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az alábbi mátrixegyenletek közül a megoldhatókat:

$$a)\ AX = B; \qquad b)\ XA^{-1} = B; \qquad c)\ B + X = A^2.$$

8) Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ adott mátrixok, X pedig ismeretlen, azonos méretű mátrix. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!

$$a)\ X + A = 2(X - B); \qquad b)\ 3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B).$$

Adjuk meg a megoldásokat abban az esetben, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

9) Oldja meg az alábbi mátrixegyenleteket az $n \times n$-es mátrixok körében, ahol $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ adottak.

$$a)\ AX^{-1}B - C = AX^{-1};$$
$$b)\ (AX)^{-1} + X^{-1} = B.$$

Adja meg a megoldásokat abban az estben, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10) Legyen E egy olyan négyzetes mátrix, amelynek főátlójában 1-esek állnak, többi eleme pedig 0. Mi lesz az EA illetve AE szorzat, ha A egy olyan tetszőleges mátrix, melyre a szorzás elvégezhető?

11) Mi történik egy 3×3-as mátrixszal, ha balról, illetve jobbról megszorozzuk az alábbi mátrixszal:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $c)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $d)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Általánosítsuk észrevételünket!

12) Számítsuk ki az alábbi mátrixokat! ($n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$)

$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{1111}$; $b)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{1111}$; $c)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{1111}$; $d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$;

$e)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n}$; $f)\ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^{n}$; $g)\ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}^{n}$.

13) Legyen A egy olyan mátrix, amelyben minden sorban és minden oszlopban az elemek összege 0, B pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az AB, illetve BA szorzat, ha a szorzás elvégezhető?

14) Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Mennyi az $AB - BA$ mátrix főátlójában levő elemek összege?

15) Melyek igazak az alábbi állítások közül az $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixokra? a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. c) Ha $AB = BA$, akkor $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. d) Ha $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, akkor $AB = BA$.

Amennyiben igaz, bizonyítsa be, ellenkező esetben keressen ellenpéldát!

16) Melyek igazak az alábbi állítások közül az $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixokra? a) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor AB-nek is létezik inverze. b) Ha AB-nek létezik inverze, akkor A-nak és B-nek is létezik inverze. c) Ha $A + B$-nek és $A - B$-nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$-nek is létezik inverze. d) Ha A-nak és B-nek létezik inverze, akkor $A + B$-nek is létezik inverze. e) Ha $A + B$-nek létezik inverze, akkor A és B közül legalább az egyiknek létezik inverze.

17) Melyek igazak az alábbi állítások közül az $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ adott és $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ismeretlen mátrixokra? a) Ha $\det A \neq 0$, akkor az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldható. b) Ha $\det A = 0$, akkor $AX = B$ nem oldható meg. c) Ha $\det A = 0, \det B \neq 0$, akkor $AX = B$ nem oldható meg. d) Ha $\det A = \det B = 0$, akkor $AX = B$ megoldható. e) $AX = B$-nek nem lehet egynél több megoldása. f) $AX = B$-nek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha $\det A \neq 0$. g) Ha $AX = B$ megoldható, akkor $YA = B$ is megoldható. h) Ha $AX = B$ és $YA = B$ is egyértelműen megoldható, akkor ezek a megoldások megegyeznek.

18) Tegyük fel, hogy $A^{100} = A^{72}$. Hány különböző pozitív egész kitevős hatványa van az A mátrixnak?

19) Legyen A valós elemű mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T négyzetes mátrix főátlójában az elemek összege 0. Határozzuk meg A-t.

20) Az inverz mátrix kiszámításának alkalmazásával oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 3x \quad + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: A fenti egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlettel. Az egyenletrendszer alapmátrixát A-val, az ismeretlenek vektorát $\underline{x}$-el, a szabadtagok vektorát pedig $\underline{b}$-vel jelölve, az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet megoldása:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Így a megoldás:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 3. \end{cases}$$

21) Az inverz mátrix kiszámításának alkalmazásával oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} &x - 3y + 2z = 2 \\ &-3x + 10y - 3z = -3 \\ &2x - 3y + 15z = 1 \end{aligned}\right\}$$

22) Válasszon ki az alábbi vektorrendszerből egy maximális lineárisan független részrendszert:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

23) Válasszon ki az alábbi vektorrendszerből egy maximális lineárisan független részrendszert:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

24) Hány $m \times m$-es aldeterminánsa van egy $k \times n$-es mátrixnak?

25) Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

26) Mennyi egy olyan mátrix rangja, amelynek minden sorában különböző nemnulla hányadosú mértani sorozat áll?

27) Legyen A egy 7×6-os valós mátrix, B pedig az a 4×6-os mátrix, amely A első 4 sorából áll. Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha B első három oszlopa lineárisan független, akkor A első három oszlopa is lineárisan független.

b) Ha B első három oszlopa lineárisan függő, akkor A első három oszlopa is lineárisan függő.

28) Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak az alábbi állításokközül? a) Ha az első 3 sor lineárisan függő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0. b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor lineárisan függő. c) Ha az első 3 oszlop lineárisan függő, és az utolsó 3 oszlop is lineárisan függő, akkor a mátrix rangja legfeljebb 3. d) Ha az első 2 oszlop lineárisan függő, és az utolsó 2 oszlop is lineárisan függő, akkor a mátrix rangja legfeljebb 3.

29) Melyek igazak az alábbi állítások közül? a) Ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $(A|b)$ kibővített mátrix oszlopai lineárisan függők. b) Ha az $(A|b)$ kibővített mátrix oszlopai lineárisan függők, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható. c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható. d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható . e) Ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. f) Ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az A mátrix sorai lineárisan függetlenek.

30) Megoldható-e az alábbi lineáris egyenletrendszer?

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= -6 \\ -3x + 2y - z &= 7 \\ -2x + y + z &= -7 \end{aligned}\right\}$$

Útmutatás: A fenti egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\varrho(A) = \varrho(A|b)$.

31) Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

32) Keressük meg az alábbi A mátrixok összes jobb- és baloldali nullosztó párját, azaz az összes olyan 4×4-es X és Y nemnulla mátrixot, amelyre $AX = 0$, illetve $YA = 0$.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. fejezet

Lineáris transzformációk

49. Definíció. *Legyenek V_1, V_2 lineáris vektorterek. A $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt* **lineáris leképezés***nek nevezzük, ha*

$$\text{additív: } \varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) \quad (\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R})$$
$$\text{és homogén: } \varphi(\lambda \underline{a}) = \lambda \varphi(\underline{a}) \quad (\underline{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Tétel (mátrixreprezentáció): A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$).

50. Definíció. *Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.*

51. Definíció. *Lineáris formának nevezzük az $f : V \to \mathbb{R}$ alakú lineáris leképezéseket.*

52. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés* **bilineáris forma***, ha mindkét változójban lineáris, azaz*

$$L(\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) = L(\underline{x}, \underline{z}) + L(\underline{y}, \underline{z}) \ (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V)$$
$$L(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda L(\underline{x}, \underline{y}) \ (\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R})$$
$$L(\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = L(\underline{x}, \underline{y}) + L(\underline{x}, \underline{z}) \ (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V)$$
$$L(\underline{x}, \lambda \underline{y}) = \lambda L(\underline{x}, \underline{y}) \ (\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Tétel: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés akkor és csak akkor bilineáris forma, ha (egy adott bázisra vonatkozóan) egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ számok, hogy $L(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i y_k$.

Tekintsük most $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, az $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ vektorrendszert. Láthatjuk, hogy ekkor $\alpha_{ik} = L(\underline{e}_i, \underline{e}_k)$. Az $A = (\alpha_{ik})_{n\times n}$ mátrixot az L bilineáris forma (kanonikus bázisra vonatkozó) mátrixának nevezzük.

53. Definíció. *Az L bilineáris forma* **szimmetrikus**, *ha $L(\underline{x}, \underline{y}) = L(\underline{y}, \underline{x})$ $(\underline{x}, \underline{y} \in V)$.*

54. Definíció. *Legyen L egy szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren. Akkor a $Q(\underline{x}) \doteq L(\underline{x}, \underline{x})$ függvényt* **kvadratikus formá***nak nevezzük.*

55. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus forma* **pozitív definit**, *ha $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ esetén $Q(\underline{x}) > 0$. Megjegyzés: Q pozitív szemidefinit, ha $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ esetén $Q(\underline{x}) \geq 0$ és $\exists \underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{y}) = 0$. A negatív definit és negatív szemidefinit fogalmak hasonlóan vezethetők be.*

56. Definíció. *Az olyan szimmetrikus bilineáris formát, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit,* **belső szorzat***nak nevezzük.*

Például a V^3 térben a skaláris szorzat egy belső szorzat.

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést **izomorfizmus**nak nevezzük, ha az bijektív is.

Belátható, hogy két vektortér akkor és csak akkor izomorf egymással, ha dimenziójuk megegyezik:

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow dimV_1 = dimV_2$$

6.1. Feladatok

1) Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, adja meg a mátrixukat!

$$f_1(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 5 \;\; (\underline{x} \in \mathbb{R}^2)$$

$$f_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \;\; (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\; (\underline{x} \in \mathbb{R}^2)$$

Megoldás: Míg az első függvény nem lineáris (hiszen $f_1(\underline{a}+\underline{b}) = 2(a_1+b_1)+3(a_2+b_2)+5 \neq [2a_1+3a_2+5]+[2b_1+3b_2+5] = f_1(\underline{a})+f_1(\underline{b})$), addig a másik kettő igen:

$$f_2(\underline{x}+\underline{y}) = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1)+(x_3+y_3) \\ -(x_2+y_2) \\ (x_2+y_2)+2(x_3+y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 \\ -x_2 \\ x_2+2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1+y_3 \\ -y_2 \\ y_2+2y_3 \end{pmatrix} = f_2(\underline{x})+f_2(\underline{y}) \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$f_2(\lambda\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2\lambda x_1+\lambda x_3 \\ -\lambda x_2 \\ \lambda x_2+2\lambda x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 \\ -x_2 \\ x_2+2x_3 \end{pmatrix} = \lambda f_2(\underline{x}) \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^3),$$

tehát f_2 lineáris. Ellenőrizze hasonlóan az f_3 esetén.

$$f_2 \text{ mátrixa } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ f_3 \text{ mátrixa pedig } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, adja meg a mátrixukat!

$$f_1(\underline{x}) = x_2+5x_4 \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^4)$$

$$f_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1+x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1+2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^2)$$

$$f_4(\underline{x}) = 7\underline{x} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^4)$$

Eredmény: f_3 nem lineáris, a többi viszont igen, mátrixaik a következők:

$$f_1 \text{ mátrixa } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ f_2 \text{ mátrixa } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f_4 \text{ mátrixa pedig } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3) Ellenőrizze, hogy az alábbi leképezés szimmetrikus-e, bilineáris-e, és ha igen, adja meg a mátrixát $\mathbb{R}^3$ (ill. a c)pontban $\mathbb{R}^n$)kanonikus bázisában. Majd írja fel a belőle származó Q kvadratikus formát és ellenőrizze, hogy pozitív definit-e? Amennyiben belső szorzatot értelmez, adja meg az $\underline{a}(1,2,3)$ vektor hosszát a Q által definiált metrikában!

a) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 8x_3y_3$

b) $L(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3$

c) $L(\underline{x},\underline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$

d) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 7x_2y_3 + x_3y_1 + 7x_3y_2 + 20x_3y_3$

e) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 15x_3y_3$

f) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 - 4x_2y_3 + 3x_3y_1 - 4x_3y_2 + 12x_3y_3$

g) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 - 4x_2y_3 + 3x_3y_1 - 4x_3y_2 + 10x_3y_3$

h) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 6x_2y_3 + 3x_3y_1 - 6x_3y_2 + 9x_3y_3$

i) $L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 5x_2y_1 + 4x_2y_2 - 6x_2y_3 - 4x_3y_1 - 6x_3y_2$

Megoldás/útmutatás: a) Mivel $L(\underline{x},\underline{y}) = L(\underline{y},\underline{x})$ és $L(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}x_iy_k$ alakú, ezért L egy szimmetrikus bilineáris forma, melynek mátrixa az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisában:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$

ami egy szimmetrikus mátrix. Írjuk fel a belőle származó kvadratikus formát! $Q(\underline{x}) = L(\underline{x},\underline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 8x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 \geq 0$ és $Q(\underline{x}) = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 0, \end{cases}$$

melynek egyetlen megoldása: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, azaz $\underline{x} = \underline{0}$, s így, mivel Q pozitív definit kvadratikus forma, L egy belső szorzat. Az adott $\underline{a}$ vektor hossza a Q által definiált metrikában:

$$\|\underline{a}\|^2 = L(\underline{a},\underline{a}) = Q(\underline{a}) = 5^2 + 1^2 + 3\cdot 3^2 = 53, \quad \text{s így} \quad \|\underline{a}\| = \sqrt{53}.$$

Alternatív módszer annak belátására, hogy Q pozitív definit, a következő: megvizsgáljuk, hogy L mátrixának sarokminorai, azaz a bal felső 1×1-es, 2×2-es, 3×3-as részmátrixok determinánsai pozitívak.

b) Az előzőhöz hasonló módon látjuk be, hogy L egy belső szorzatot értelmez. Vigyázzunk a kvadratikus forma négyzetösszegre alakításánál:

$$Q(\underline{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_3^2 = 2(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}x_3^2.$$

d) $Q(\underline{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 14x_2x_3 + 19x_3^2$, mely nem minden esetben pozitív, pl. $\underline{x} = (-2, 1, 0)$ esetén $Q(\underline{x}) = -1$, ami nem pozitív. A többi tulajdonságot az előzőekhez hasonlóan ellenőrizhetjük.

g) és h) pontokban csak pozitív szemidefinit a Q kvadratikus forma (hiszen $Q_g(\underline{x}) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 \geq 0$, de $Q(\underline{x}) = \underline{0}$ nemtriviális megoldásokkal rendelkezik, akárcsak a h) pontbeli $Q_h(\underline{x}) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2$.)

i) Nem szimmetrikus bilineáris forma.

7. fejezet

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció

57. Definíció. *Egy E vektorteret Euklideszinek nevezünk, ha el van látva egy $\langle .,. \rangle$ belső szorzattal. (Ekkor természetesen norma is van: $\|\underline{x}\| \doteq \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$.)*

58. Definíció. *Egy vektorrendszert* **ortogonális***nak nevezünk, ha a vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$.*

59. Definíció. *Egy vektorrendszert* **ortonormált***nak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$, $\|\underline{v}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Tétel: Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ az E Euklideszi tér egy bázisa. Ekkor ± 1 szorzótól eltekintve egyértelműen létezik E-ben olyan $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázis, melyre

$$\mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k) = \mathcal{L}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_k). \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Az **ortogonalizációs eljárás** a következő:

$$\underline{e}'_1 \doteq \underline{b}_1 \qquad \underline{e}_1 \doteq \frac{\underline{e}'_1}{\|\underline{e}'_1\|}$$

Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_k$ vektorokat már kiszámítottuk, akkor

$$\underline{e}'_{k+1} \doteq \underline{b}_{k+1} - \langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 - \langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_2 \rangle \underline{e}_2 - \ldots - -\langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_k \rangle \underline{e}_k, \qquad \underline{e}_{k+1} \doteq \frac{\underline{e}'_{k+1}}{\|\underline{e}'_{k+1}\|}.$$

7.1. Feladatok

1) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg K egy ortonormált bázisát!

Megoldás:

$$\underline{e}_1 = \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{e}_1 \doteq \frac{\underline{e}'_1}{\|\underline{e}'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}'_2 = \underline{b}_2 - \langle \underline{b}_2, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{\underline{e}'_2}{\|\underline{e}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}'_3 = \underline{b}_3 - \langle \underline{b}_3, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 - \langle \underline{b}_3, \underline{e}_2 \rangle \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{66} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{e}'_3}{\|\underline{e}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Így az eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hasznos lehet annak ellenőrzése, hogy ezek páronként merőlegesek egymásra.

2) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a K tér egy ortonormált bázisát!

Eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg K egy ortonormált bázisát!

Eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. fejezet

Sajátérték, sajátvektor

60. Definíció. *Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\underline{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(\underline{a}) = \lambda\underline{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{a}$* **sajátvektor***a φ-nek és λ az $\underline{a}$-hoz tartozó* **sajátérték***e φ-nek.*

61. Definíció. *Legyen $L_\lambda \doteq \{\underline{a} \in V : \varphi(\underline{a}) = \lambda\underline{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza.*

Egyszerűen látható, hogy L_λ alteret alkot, ezért **a λ-hoz tartozó sajátaltér**nek nevezzük.

A sajátértékek meghatározása:

62. Definíció. *Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix* **karakterisztikus polinom***ja alatt az*

$$f(x) \doteq |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

63. Definíció. *Legyen φ az $\mathbb{R}^n$-en ható lineáris transzformáció és legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A* **mátrix karakterisztikus polinomjá***t értjük.*

64. Definíció. *A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció* **karakterisztikus gyöké***nek nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.*

Tétel: A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.

8.1. Feladatok

1) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a sajátalterek egy bázisát!

Megoldás: A keresett karakterisztikus polinom a következő:

$$f(x) \doteq |A - x \cdot E_n| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ alkotják a φ sajátértékeinek a halmazát.

Most keressük meg a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E_n = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix}$$

miatt az

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrenszer megoldásai adják a sajátvektorok koordinátáit. Mivel a Gauss-elimináció során a második egyenletből $0 = 0$ addódik (hiszen lineárisan függött az előbbitől), ezért az $x_2 = t \in \mathbb{R}$ választással az $x_1 = -t$ adódik, így tertszőleges $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\underline{v} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor lesz. A megfelelő sajátaltér pedig:

$$L_{\lambda_1} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Most keressük meg a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat: az

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrenszer megoldásai: ha $x_1 = t \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $x_2 = 3t$, így a sajátvektorok a

$$\underline{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

alakú vektorok. Tehát a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$L_{\lambda_2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Az L_{λ_1} bázisa egyelemű: $\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, az L_{λ_2}-é pedig a következő: $\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

2) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Útmutatás: Mivel a karakterisztikus polinomnak nincsen valós gyöke, így φ-nek nincs sajátértéke.

3) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Útmutatás: A karakterisztikus polinomnak ($f(x) = (1-x)^3$) egy valós gyöke van, a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér pedig:

$$L_{\lambda} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Útmutatás: A karakterisztikus polinom: $f(x) = (x-3)(-x^2-3)$ (ha problémát okoz egy harmadfokú polinom gyökeinek megkeresése Horner-szabállyal, akkor javasoljuk a determináns egy alkalmas sor illetve oszlop szerinti kifejtésével való kiszámítását, persze miután elemi átalakítással egy adott sor/oszlop elemeit kinulláztuk.) Ennek egy valós gyöke van, így $\lambda = 3$ az egyetlen sajátérték, és az ehhez tartozó sajátaltér:

$$L_\lambda = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A sajátértékek: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$ és

$$L_{\lambda_1} = \left\{ t \begin{pmatrix} -5 \\ 29 \\ 8 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}; \quad L_{\lambda_2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}; \quad L_{\lambda_3} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

6) Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A sajátértékek: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ és

$$L_{\lambda_1} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{R} \right\}; \quad L_{\lambda_2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$