(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 3.

LU-felbontás I

- (Mátrix invertálása LU-felbontással). Invertáljuk a
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
mátrixot az LU-felbontása segítségével! A **B** mátrix LU-felbontását használva

LU-felbontás II

először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{E}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $(y_{11}, y_{12}, y_{13}) = (1, 0, 0)$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + (y_{21}, y_{22}, y_{23}) = (0, 1, 0)$. Behelyettesítés után $(y_{21}, y_{22}, y_{23}) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$. Végül a harmadik sorral való szorzásból: $\frac{1}{4}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + \frac{1}{2}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) + (y_{31}, y_{32}, y_{33})$, amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, így $(y_{31}, y_{32}, y_{33}) = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Ezután

LU-felbontás III

ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{(}{3}4 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- A LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-eliminációéval, azaz egy n-edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$.

LU-felbontás IV

- A LU-felbontás előnyei:
  1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyenletrendszer jobb oldalára, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több különböző jobb oldallal is dolgozni kell.
  2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető mint egyébként, pl. ilyen a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.
  3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok, vagy a ritka mátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.
  4. A komputer algebra programok úgy működnek, hogy ha egy mátrixon valamilyen számítást kell elvégezni, ami megoldható az LU-felbontással (vagy a következő pontban tárgyalandó PLU-felbontással), akkor azzal oldják meg. Így ha később egy másik számítást is el kell e mátrixszal végezni, e felbontás ismeretében az már sokkal gyorsabb lehet.

LU-felbontás V

5. (PLU-felbontás) Nincs minden **A** mátrixnak LU-felbontása, de sorcserékkel - azaz egy permutáló mátrixszal való balról szorzással - olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása: Wettl-jegyzet.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!