(MATNA1902) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 10.

Lineáris transzformációk diagonizálása I

- Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.
  1. A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).
  2. A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).
  3. A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a 180^o egész számú többszörösétől különböző szöggel.
  4. A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.
  5. A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

  Minden transzformáció lineáris.

Lineáris transzformációk diagonizálása II

- Lineáris transzformáció diagonalizálása. A fenti transzformációkat diagonizáljuk.
  1. Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Tb} = -\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{T}$ a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
  2. Az egyenes, amelyre vetítünk egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Pa} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Pb} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{P}$ a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineáris transzformációk diagonizálása III

3. Ennek leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajáteltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (invariáns altérnek), így ennek bázisával egy "diagonálishoz közeli" alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora a, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor 90^o-kal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató $\mathbf{F}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{Fa} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Fb} = \cos\alpha\mathbf{b} + \sin\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{Fc} = -\sin\alpha\mathbf{b} + \cos\alpha\mathbf{c}$.

Lineáris transzformációk diagonizálása IV

4. A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{c}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció I

- Definíció: Egy E vektorteret Euklideszinek nevezünk, ha el van látva egy $\cdot$ belső szorzattal. (Ekkor természetesen norma is van: $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.)
- Definíció: Egy vektorrendszert ortogonálisnak nevezünk, ha a vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$.
- Definíció: Egy vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$, $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, ahol $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
- Tétel: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ az E Euklideszi tér egy bázisa. Ekkor ± 1 szorzótól eltekintve egyértelműen létezik E-ben olyan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormált bázis, melyre

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\right),$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, n$.

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció II

- Ortogonalizációs eljárás:
  1. $\mathbf{e}_1^{'} = \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1^{'}}{\left\|\mathbf{e}_1^{'}\right\|}$.
  2. Kiszámítjuk az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ vektorokat.
  3. Végül

$$\mathbf{e}_{k+1}^{'} = \mathbf{b}_{k+1} - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 - \cdots - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k,$$

továbbá

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{e}_{k+1}^{'}}{\left\|\mathbf{e}_{k+1}^{'}\right\|}.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!