Név / Name: Dr. FACSKÓ Gábor István Neptun kód / Code: BQQQFY

(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra vizsga / (ENKEMNA0302) Applied Linear Algebra Exam

1. Adja meg a determináns axiomatikus definícióját! / What is the determinant? Give the second definition of the determinant (the first is the Leibniz formula). (10 pont)

   Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

   (a) Homogén: $\det(\dots\lambda_i\mathbf{a}_i\dots) = \lambda_i \det(\dots\mathbf{a}_i\dots)$;
   (b) Additív: $\det(\dots\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i\dots) = \det(\dots\mathbf{a}_i\dots) + \det(\dots\mathbf{b}_i\dots)$;
   (c) Alternáló: $\det(\dots\mathbf{a}_i\dots\mathbf{a}_j\dots) = -\det(\dots\mathbf{a}_j\dots\mathbf{a}_i\dots)$;
   (d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik, $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ tartományú és ezekkel a tulajdonságokkal bíró függvény megegyezik a det függvénnyel. Másképpen: a mátrixhoz ezekkel a szabályokkal egyértelműen rendelhető egy szám. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns n-ed rendű. A determináns egy funkcionál, azaz olyan leképezés, amely egy skalárt rendel egy függvényhez.

   Axiomatic definition: Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a square matrix and $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ a function. The function $\det(\mathbf{A})$ is called the determinant of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$ if

   (a) Homogeneous: $\det(\dots\lambda_i\mathbf{a}_i\dots) = \lambda_i \det(\dots\mathbf{a}_i\dots)$;
   (b) Additive: $\det(\dots\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i\dots) = \det(\dots\mathbf{a}_i\dots) + \det(\dots\mathbf{b}_i\dots)$;
   (c) Alternating: $\det(\dots\mathbf{a}_i\dots\mathbf{a}_j\dots) = -\det(\dots\mathbf{a}_j\dots\mathbf{a}_i\dots)$;
   (d) The determinant of the identity matrix is 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   where $\lambda_i \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ are the column vectors of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$. This mapping can be considered as an n-variable function over the columns of the matrix: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. These axioms uniquely determine the mapping. Any other function $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ with these properties is equal to det. In other words, a unique scalar value can be assigned to each matrix according to these rules. If $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, then the determinant is of order n. The determinant is a functional — that is, a mapping assigning a scalar to a function.

2. Mi a diagonális, a háromszög, a permutáló mátrix és a kígyó? / What are diagonal, triangular, and permutation matrices, and what is the "snake"? (10 pont)

   Diagonális mátrixok: Csak a mátrix főátlójában vannak nem nulla elemek. Egyszerű velük műveleteket végezni.
   Legyen $\mathbf{A} = diag(1,2,3)$ és $\mathbf{B} = diag(5,4,3)$. Ekkor:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}, \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Háromszögmátrix: Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek felső háromszögmátrixnak, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak alsó háromszögmátrixnak nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, egység háromszögmátrixról beszélünk.

Permutáló mátrix, kígyó: A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (vagy permutációmátrixnak) hívjuk.
Pl.: az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van. Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk. Ha $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix, akkor $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{E}$-ből a $\mathbf{P}$-t kaptuk.

Diagonal matrices: There are non-zero elements only in the main diagonal of the matrix. It is simple to perform operations with them.
Let $\mathbf{A} = diag\,(1,2,3)$ and $\mathbf{B} = diag\,(5,4,3)$. Then:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}, \text{where } k \in \mathbb{Z}.$$

Triangular Matrix: A matrix in which all elements below the main diagonal are zero is called an upper triangular matrix, while a matrix in which all elements above the main diagonal are zero is called a lower triangular matrix. If all the elements on the main diagonal of a triangular matrix are 1, it is called a unit triangular matrix.

Permutation matrix, snake: Matrices obtained by permuting the rows of a diagonal matrix are called snakes (or transversals). In particular, if the starting matrix is the identity matrix, the resulting matrix is called a permutation matrix.

For example, the following matrices are all snakes; the last two are also permutation matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The permutation matrix is a square matrix that has exactly one 1 in each row and each column, and all other elements are 0. A snake is a square matrix that has at most one non-zero element in each row and each column. Every snake can be obtained from a diagonal matrix by permuting columns. A snake can also be obtained from a diagonal matrix by permuting both rows and columns. If $\mathbf{P}$ is a permutation matrix, then $\mathbf{PA}$ is obtained from $\mathbf{A}$ by applying the same row permutation that transforms $\mathbf{E}$ into $\mathbf{P}$.

3. Mi az a szimmetrikus és a ferdén szimmetrikus mátrix? Bizonyítsa be, hogy minden mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére! / What are symmetric and skew-symmetric matrices? Prove that every matrix can be decomposed into the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. (10 pont)

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok: A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikusnak, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Példák szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokra:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, $\mathbf{C}$ egyik sem. Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén teljesül, tehát a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában minden elem nulla.

Tétel: (Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére). Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right),$$

ahol az összeg első tagja szimmetrikus, a második tagja pedig ferdén szimmetrikus.

Bizonyítás: Mivel egy mátrix szimmetrikus marad konstans szorzás után is, elegendő belátni, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

Hasonlóan, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ferdén szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

A két mátrix összege $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Definition: (Symmetric and Skew-Symmetric Matrices). A square matrix $\mathbf{A}$ is called symmetric if $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, and it is called skew-symmetric if $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Examples of symmetric and skew-symmetric matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ is symmetric, $\mathbf{B}$ is skew-symmetric, and $\mathbf{C}$ is neither.

If $\mathbf{A}$ is skew-symmetric, then each element satisfies $a_{ij} = -a_{ji}$, meaning that for $i = j$, we have $a_{ii} = -a_{ii}$. This is only possible if $a_{ii} = 0$, meaning that the main diagonal of a skew-symmetric matrix consists entirely of zeros.

Thesis: (Decomposition into the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix). Every square matrix can be expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. Specifically, for every square matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right),$$

where the first term in the sum is symmetric, and the second term is skew-symmetric.

Deduction: Since a constant multiple of a symmetric matrix is also symmetric, it suffices to show that the matrix $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ is symmetric:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

Similarly, the matrix $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ is skew-symmetric:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

The sum of these two matrices gives $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

4. Mi az az LU-felbontás? Melyek az LU-felbontás előnyei? Mire lehet használni az LU-felbontást, és miért? / What is LU decomposition? What are the advantages of LU decomposition? What are its applications and why? (10 pont)

   LU-felbontás: Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

   Mivel az oszlopok között nem végzünk műveletet, egyetlen LU-felbontással több, kevesebb oszlopot tartalmazó mátrix LU-felbontását is meghatároztuk. Könnyen belátható, hogy végtelen számú egyenletrendszert tudunk megoldani egyetlen LU-felbontással. Mátrixok invertálása is egyszerűbb LU-felbontással.

   LU Decomposition: We say that the factorization of an $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ into the form $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ is an LU decomposition (LU factorization or LU decomposition) if $\mathbf{L}$ is a unit lower triangular matrix (i.e., ones on the diagonal and zeros above it), and $\mathbf{U}$ is an upper triangular matrix.

   Since no operations are performed between columns, a single LU decomposition can also be used for matrices with fewer columns. It is easy to see that an infinite number of systems of linear equations can be solved with a single LU decomposition. The inversion of matrices is also easier using LU decomposition.

5. Mi az az ortogonális, Hermite-féle, illetve az önadjungált vagy unitér mátrix? / What are orthogonal, Hermitian, and unitary matrices? (10 pont)

   Ortogonális és szemiortogonális mátrix: Egy valós négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, szemiortogonális mátrixról beszélünk.

   Önadjungált mátrixok: Ahogyan a transzponált fogalmának – a komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, úgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Egy mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a saját transzponáltjával, és önadjungált, ha megegyezik a saját adjungáltjával. Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Az önadjungált mátrixokat Hermite-féle mátrixnak is nevezik. Egy önadjungált mátrix főátlójában csak valós számok állhatnak, mert csak ezek egyeznek meg saját konjugáltjukkal. Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, mivel a valós számok megegyeznek a saját konjugáltjukkal.

   Unitér mátrix: Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

   Orthogonal and semi-orthogonal matrix: A real square matrix is called orthogonal if its column vectors or row vectors form an orthonormal system. If we do not require the matrix to be square, we speak of a semi-orthogonal matrix.

Self-adjoint matrices: Just as the adjoint is the extension of the transpose (considering the complex scalar product), the self-adjoint matrix is the extension of the symmetric matrix. A symmetric matrix is equal to its own transpose, while a self-adjoint matrix is equal to its own adjoint. A complex matrix $\mathbf{A}$ is self-adjoint if $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Self-adjoint matrices are also called Hermitian matrices. The diagonal of a self-adjoint matrix contains only real numbers, as only real numbers are equal to their own conjugate. Every real symmetric matrix is self-adjoint, since real numbers are equal to their own conjugate.

Unitary matrix: A square complex matrix $\mathbf{U}$ is unitary if $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

6. Mi a mátrix nyoma? Bizonyítsa be, hogy a nyom lineáris transzformáció! / What is the trace of a matrix? Prove that the trace is a linear transformation. (10 pont)

Mátrix nyoma: Egy négyzetes mátrix főátlójában lévő elemek összegét a mátrix nyomának nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix nyomát *trace* $\mathbf{A}$ vagy *tr* $\mathbf{A}$ jelöli. Például:

$$trace\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 5,\ trace\,(\mathbf{E}_n) = n,\ [\mathbf{a}]_X = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

Állítás: (A nyom lineáris leképezés.) A nyom additív és homogén, azaz tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra:

$$trace\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = trace\,(\mathbf{A}) + trace\,(\mathbf{B})\,,\quad trace\,(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\, trace\,(\mathbf{A})\,.$$

Bizonyítás: Triviális. Továbbá, $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ konstansok esetén:

$$trace\,(\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{B}) = \lambda\, trace\,(\mathbf{A}) + \mu\, trace\,(\mathbf{B})\,.$$

Trace of a matrix: The sum of the elements on the main diagonal of a square matrix is called the trace of the matrix. The trace of matrix $\mathbf{A}$ is denoted by *trace* $\mathbf{A}$ or *tr* $\mathbf{A}$. For example:

$$trace\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 5,\ trace\,(\mathbf{E}_n) = n,\ [\mathbf{a}]_X = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

Thesis: (Trace as a linear mapping.) The trace is additive and homogeneous, meaning that for any matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and any scalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$trace\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = trace\,(\mathbf{A}) + trace\,(\mathbf{B})\,,\quad trace\,(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\, trace\,(\mathbf{A})\,.$$

7. Mi a mátrix sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere? Hogyan függ ez össze a mátrix nyomával? / What are the eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces of a matrix? How are they related to the trace of the matrix? (10 pont)

Sajátérték, sajátvektor: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $\varphi : V \to V$ egy lineáris leképezés. Ha létezik olyan $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor $\mathbf{a}$ a φ sajátvektora, és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátérték.

Sajátaltér: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. Ez a halmaz a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból áll, és alteret alkot. Ezt nevezzük a λ-hoz tartozó sajátaltérnek.

Eigenvalue, eigenvector: Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ and $\varphi : V \to V$ a linear mapping. If there exists a nonzero vector $\mathbf{a} \in V$ and a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$, then $\mathbf{a}$ is called an eigenvector of φ and λ the corresponding eigenvalue.

Eigenspace: Let $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. This set of eigenvectors corresponding to λ, together with the zero vector, forms a subspace called the eigenspace corresponding to λ.

8. Mit értünk a mátrixok hasonlóságán? Mi az a diagonalizálás? / What is meant by the similarity of matrices? What is the diagonalization of a matrix? (10 pont)

Hasonlóság: Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Diagonalizálhatóság: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

Tétel: (A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele.) Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ pedig a sajátvektoraiból áll.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva a $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]\,.$$

A bal oldali mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i\mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{Ax}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állítás egyik felét.
Tegyük most fel, hogy $\mathbf{A}$-nak van n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot úgy, hogy a $\mathbf{C}$ mátrix i-edik oszlopába kerülő $\mathbf{x}_i$ vektorhoz tartozó λ_i sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix i-edik főátlóbeli elemébe kerüljön. Mivel $\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{Ax}_i$, ezért $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

Similarity: We say that the $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is similar to the matrix $\mathbf{B}$ if there exists an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Notation: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Diagonalizability: The $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable if it is similar to a diagonal matrix, i.e., if there exists a diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}$ and an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

Theorem: (Necessary and sufficient condition for diagonalizability.) The $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable if and only if it has n linearly independent eigenvectors. In this case, the diagonal matrix consists of the eigenvalues of $\mathbf{A}$, and $\mathbf{C}$ is formed from the corresponding eigenvectors.

Proof: If $\mathbf{A}$ is similar to a diagonal matrix, there exists a matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Multiplying both sides from the left by $\mathbf{C}$ yields $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$. Writing $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]$ and $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, we get

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]\,.$$

The i-th column of the matrix on the left-hand side is $\lambda_i\mathbf{x}_i$, while the i-th column of the matrix on the right-hand side is $\mathbf{Ax}_i$. These are equal, i.e., $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, so $\mathbf{x}_i$ is an eigenvector corresponding to the eigenvalue λ_i. Since $\mathbf{C}$ is invertible, its column vectors are linearly independent, which proves one part of the statement.
Now, suppose that $\mathbf{A}$ has n linearly independent eigenvectors. Construct a diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}$ from the eigenvalues, such that the eigenvalue λ_i corresponding to the vector $\mathbf{x}_i$ (placed in the i-th column of $\mathbf{C}$) appears in the i-th diagonal entry of $\mathbf{\Lambda}$. Since $\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{Ax}_i$, it follows that $\mathbf{\Lambda}$ is similar to $\mathbf{A}$.

9. Adja meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit, sajátaltereit és diagonális alakját: a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre, a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre, a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül egy nem 180° egész számú többszörösével megegyező szöggel, a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra, valamint a tér vektorainak tükrözése egy síkra. / Give the eigenvalues, eigenspaces, and diagonal forms of the following linear transformations: reflection of plane vectors across a line, orthogonal projection of plane vectors onto a line, rotation of space vectors around a line by an angle not equal to an integer multiple of 180°, orthogonal projection of space vectors onto a plane, and reflection of space vectors across a plane. (10 pont)

Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.

(a) A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).

(b) A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).

(c) A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a 180° egész számú többszörösétől különböző szöggel.

(d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.

(e) A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Minden transzformáció lineáris.

(a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek pedig a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges, nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Tb} = -\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{T}$ a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a nullvektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

Az egyenes, amelyre vetítünk, egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges, nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Pa} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Pb} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{P}$ a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik a 180° egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyel párhuzamos vektorokból áll.

Ennek a leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajáteltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (invariáns altérnek tekinthető), így ennek bázisával egy "diagonálishoz közeli" alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora $\mathbf{a}$, a rá merőleges sík ortonormált bázisa pedig $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor 90°-kal való elforgatottja éppen $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató $\mathbf{F}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{Fa} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Fb} = \cos\alpha\,\mathbf{b} + \sin\alpha\,\mathbf{c}$, $\mathbf{Fc} = -\sin\alpha\,\mathbf{b} + \cos\alpha\,\mathbf{c}$.

(d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a nullvektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre vetítünk, az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges, nemnulla vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre tükrözünk, az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges, nemnulla vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = -\mathbf{c}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékei mindig ugyanazok, hiszen egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

Eigenvalues and eigenvectors of linear transformations.

(a) Reflection of plane vectors across a line (or reflection of points across a line passing through the origin).

(b) Orthogonal projection of plane vectors onto a line (or orthogonal projection of points onto a line passing through the origin).

(c) Rotation of space vectors around a line by an angle different from an integer multiple of 180°.

(d) Orthogonal projection of space vectors onto a plane.

(e) Reflection of space vectors across a plane.

All these transformations are linear.

(a) In reflection across a line, only vectors parallel and perpendicular to the line are mapped to scalar multiples of themselves: parallel vectors remain unchanged, while perpendicular vectors are mapped to their negations. Thus, the eigenspace corresponding to eigenvalue 1 consists of vectors parallel to the line, while the eigenspace corresponding to eigenvalue -1 consists of vectors perpendicular to the line. The corresponding statement for points follows from their position vectors.

Let $\mathbf{a}$ be a direction vector of the reflection line, and $\mathbf{b}$ a nonzero vector perpendicular to it. Then the reflection transformation $\mathbf{T}$ satisfies $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$ and $\mathbf{Tb} = -\mathbf{b}$. In the basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, the matrix of $\mathbf{T}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) In orthogonal projection onto a line, vectors parallel to the line remain unchanged, while perpendicular vectors are mapped to the zero vector. Thus, the eigenspace for eigenvalue 1 consists of vectors parallel to the line, while the eigenspace for eigenvalue 0 consists of perpendicular vectors.

Let $\mathbf{a}$ be a direction vector of the projection line, and $\mathbf{b}$ a nonzero vector perpendicular to it. Then the projection transformation $\mathbf{P}$ satisfies $\mathbf{Pa} = \mathbf{a}$ and $\mathbf{Pb} = \mathbf{0}$. In the basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, the matrix of $\mathbf{P}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Rotation of space vectors around an axis leaves vectors parallel to the axis unchanged. If the rotation angle is not an integer multiple of 180°, no other vectors are mapped to scalar multiples of themselves. Thus, the only eigenvalue is 1, with an eigenspace consisting of vectors parallel to the rotation axis.

This transformation does not have a real diagonal matrix because it has only a single real eigenspace, which is one-dimensional: the subspace spanned by the axis direction vector. The plane perpendicular to the rotation axis is not an eigenspace but is an invariant subspace, allowing a "nearly diagonal" form. If $\mathbf{a}$ is a direction vector of the rotation axis and $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ is an orthonormal basis of the perpendicular plane, where $\mathbf{b}$ is rotated by 90° to $\mathbf{c}$, then in the basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, the matrix of the rotation transformation $\mathbf{F}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

since $\mathbf{Fa} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Fb} = \cos\alpha\,\mathbf{b} + \sin\alpha\,\mathbf{c}$, and $\mathbf{Fc} = -\sin\alpha\,\mathbf{b} + \cos\alpha\,\mathbf{c}$.

(d) Orthogonal projection of space vectors onto a plane leaves all vectors in the plane unchanged while mapping perpendicular vectors to the zero vector. Thus, the two eigenvalues are 1 and 0, with eigenspaces consisting of the plane's vectors and the perpendicular vectors, respectively.

The plane onto which we project corresponds to eigenvalue 1. Choosing a basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ in the plane and letting $\mathbf{c}$ be a nonzero vector perpendicular to it, we have $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, and $\mathbf{Tc} = \mathbf{0}$, so the matrix of $\mathbf{T}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) The two eigenvalues are 1 and -1, with eigenspaces consisting of the plane's vectors and the perpendicular vectors, respectively.

(f) The two eigenvalues are 1 and -1, with the eigenspaces consisting of the plane's vectors and the perpendicular vectors, respectively.

The plane across which we reflect corresponds to the eigenvalue 1. Choosing a basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ in the plane and letting $\mathbf{c}$ be a nonzero vector perpendicular to it, we have $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, and $\mathbf{Tc} = -\mathbf{c}$, so the matrix of $\mathbf{T}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

For a linear transformation, different bases may yield different matrices, but the eigenvalues remain the same because the image of a vector depends only on the transformation, not on the chosen basis.

10. Esszé formában, ábrákkal kiegészítve válaszoljon a következő kérdésekre: Mi az a Fourier-transzformáció? Mi a diszkrét Fourier-transzformáció? Mi az a gyors Fourier-transzformáció (FFT) és az inverz Fourier-transzformáció (IFFT)? Hogyan végezne zajszűrést az FFT és az IFFT segítségével? / What is the Fourier transform? What is the discrete Fourier transform? What are the Fast Fourier Transform (FFT) and the Inverse Fast Fourier Transform (IFFT)? How would you perform noise filtering using FFT and IFFT? Answer in essay form and include illustrations if possible. (10 pont)

Tetszőleges hullám (függvény) felbontható szinuszhullámok összegére, amelyeknek különböző hullámhossza (periódusa) és amplitúdója van, illetve ilyen hullámokból tetszőleges hullámforma előállítható. Ezt nevezzük Fourier- és inverz Fourier-transzformációnak. A gyakorlatban diszkrét mintákkal dolgozunk, ezért integrálok és folytonos függvények helyett diszkrét értékekkel számolunk. Ezt nevezzük diszkrét Fourier-transzformációnak (DFT), illetve inverz diszkrét Fourier-transzformációnak (IDFT). Azokat az algoritmusokat, amelyek a szokásos $\mathcal{O}(n^2)$ helyett legfeljebb $\mathcal{O}(n \log n)$ lépésből állnak, gyors Fourier-transzformációnak (FFT), illetve inverz gyors Fourier-transzformációnak (IFFT) nevezzük. Egy tipikus alkalmazási terület a zajszűrés: először FFT-vel amplitúdó–frekvencia-függvénnyé alakítjuk a jelet, majd aluláteresztő szűrő segítségével eltávolítjuk a magas frekvenciájú, de kis amplitúdójú jeleket. Végül IFFT-vel visszaalakítjuk a megszűrt, zajcsökkentett jelet.

Every wave (function) can be decomposed into a sum of sine waves with different wavelengths (periods) and amplitudes. Conversely, any waveform can be constructed from such waves. This process is called the Fourier transform and the inverse Fourier transform. In practice, we work with discrete samples, so instead of integrals and continuous functions, we use discrete values. This is referred to as the Discrete Fourier Transform (DFT) and the Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT). Algorithms that perform the transformation in at most $\mathcal{O}(n \log n)$ steps instead of the usual $\mathcal{O}(n^2)$ are called Fast Fourier Transform (FFT) and Inverse Fast Fourier Transform (IFFT). A typical application is noise filtering: first, we transform the signal into an amplitude–frequency function using FFT. Then we apply a low-pass filter to remove high-frequency, low-amplitude components. Finally, we use IFFT to reconstruct the filtered, noise-reduced signal.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Grades: 0–40 points: Fail (1), 41–55 points: Pass (2), 56–70 points: Satisfactory (3), 71–85 points: Good (4), 86–100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. május 21. / May 21, 2025