(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 5.

A kurzus célja

- A lineáris algebra fogalmainak, alapvető eljárásainak és szakszókincsének elsajátítása
- A lineáris algebra értését és alkalmazását igénylő tárgyak tanulásához szükséges ismeretek elsajátítása
- Problémák megoldása a lineáris algebra módszereivel
- Annak felismerése, hogy mikor érdemes a lineáris algebra módszereit használni

  ⋮
- A tematikát fogom követni és számonkérni, de el fogom mondani, főleg gyakorlaton, hogy mi a hasznos
- Mondják el, hogy milyen ismeretek szükségesek a tanulmányaikhoz
- Minden diát, tematikát, video felvételt, gyakorló feladatot és dolgozat feladatsort fel fogok tölteni a Teamsre
- Látják a tárgy Teams csoportját? Most csak egy csoport lesz és nem lesz Moodle

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát kell tenni
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

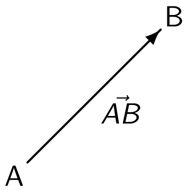
Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon 2011.
Bártfai Pál: Az n-dimenziós tér lineáris geometriája. Typotex Kiadó 2014.
Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe. Typotex Kiadó 2009.
Martin Cockett, Graham Doggett: Maths for Chemists. 2nd Ed., RSC Publishing 2012.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press 2018. https://vmls-book.stanford.edu/
Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban: Applied Linear Algebra, 2nd Ed., Springer International Publishing AG 2018.
Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 5th Ed., Wellesley-Cambridge Press 2016. https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/

Skalár és vektor mennyiségek

- A skalár mennyiségek irány nélküli mennyiségek. Például: a tömeg (m), a sebesség ($|\mathbf{v}|$, *not* velocity), a hőmérséklet (T), a hosszúság, a térfogat (V), vagy a sűrűség (ρ).
- A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás/lassulás (**a**), a forgás, a körsebesség (ω).
- Figyelem, két fajta vektor létezik:
  - A súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás (**a**).
  - A forgás és a körsebesség (ω).
- A vektorokat lehet vastag betűvel (**v**) , aláhúzással ($\underline{v}$), vagy nyíllal ($\vec{v}$) jelölni.

A vektorok más meghatározásai I

- A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.



- Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók.
- Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

A vektorok más meghatározásai II

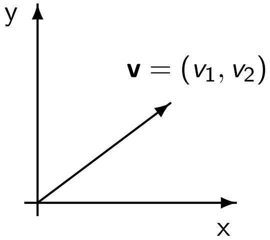
- Ha ezt meg lehet tenni két vektorral, akkor a szabad vektorok osztályához jutunk.
- Definíció: Sík (V^2) vagy térbeli vektoroknak nevezzük (V^3) azt a csoportot, amit párhuzamos eltolással egymásba lehet transzformálni.

Vektorok koordináta reprezentációi I

- Számpárokat, vagy számhármasokat (...) $\mathbb{R}^2$, vagy $\mathbb{R}^3$) meg lehet feleltetni a vektoroknak:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

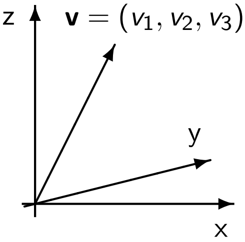
ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$ a 2D vektor komponensei.



Vektorok koordináta reprezentációi II

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$, $v_3 \in \mathbb{R}$ a vektor komponensei 3D-ben.



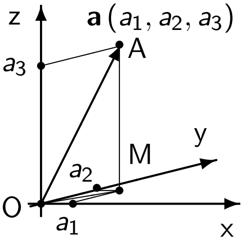
Vektorok egyenlősége és hossza I

- Definíció: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha az origó központú reprezentációik azonosak.
- Azaz $\mathbf{a}\left(a_1, a_2, a_3\right), \mathbf{b}\left(b_1, b_2, b_3\right) \in V^3$ egyenlő, és csak akkor egyenlő, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, és $a_3 = b_3$, ahol $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Vektorok egyenlősége és hossza II

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektor nagysága, vagy hossza a következő nem nulla szám:

$$|\mathbf{a}| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



Bizonyítás: Az AOM pontok egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol OMA$\angle$-nél van a derékszög. Így Pithagorasz-tétele miatt $|\mathbf{a}| = OM^2 + a_3^2$. Az O, $(a_1, 0, 0)$, $(0, a_2, 0)$ pontok szintén egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol a derékszög az $[O, (a_1, 0, 0), (0, a_2, 0)]\angle$ szögnél van, így Pithagorasz-tétele miatt, $OM^2 = a_1^2 + a_2^2$. A két egyenlőséget összevonva $|\mathbf{a}| = OM^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, azaz

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

q. e. d.

Vektorok egyenlősége és hossza III

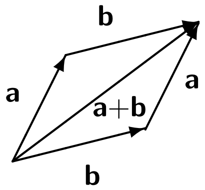
- A null vektornak nincsen se hossza, se iránya: $|\mathbf{0}\,(0,0,0)| = 0$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása I

- <u>Definíció:</u> Vektorok összeadása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\,,$$

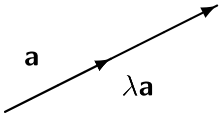
ahol $a_1,\ a_2,\ a_3, b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy adjuk össze, hogy az* $\mathbf{a}$ *végpontjába toljuk a* $\mathbf{b}$*-t. Az összegvektor* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ *az* $\mathbf{a}$ *kezdőpontjától a* $\mathbf{b}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása II

- Definíció: Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$
Figyelem, gondoljunk bele, mit jelent, ha λ 0, 1, -1, $<$1, vagy $>$1.



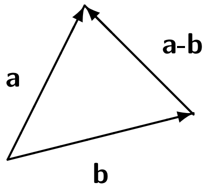
Az **a** *vektort egy λ skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de λ-szoros hosszúságú vektort rajzolunk.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása III

- Definíció: Vektorok kivonása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

ahol a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy vonjuk ki, hogy a vektorokat közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *a* $\mathbf{b}$ *végpontjától az* $\mathbf{a}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása IV

- Vektorok összegzésének tulajdonságai
  1. Állítás: Vektorok összeadása kommutatív, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$.
     Bizonyítás: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)=(b_1,b_2,b_3)+(a_1,a_2,a_3)=\underline{\underline{\mathbf{b}+\mathbf{a}}}$ *q. e. d.*
  2. Állítás: Vektorok összeadása asszociatív, azaz $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$.
     Bizonyítás: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)]+(c_1,c_2,c_3)=$
     $[(a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,(a_3+b_3)+c_3]=$
     $[a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),a_3+(b_3+c_3)]=$
     $(a_1,a_2,a_3)+[(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)]=\underline{\underline{\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})}}$ *q. e.d.*
  3. Létezik null vektor: $\exists\mathbf{0}\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$.
  4. Minden vektornak van egy inverz vektora: $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3\ \exists(-\mathbf{a})\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása V

- A vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skalárral való szorzása asszociatív, azaz $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda[\mu(a_1, a_2, a_3)] = \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = (\lambda\mu a_1, \lambda\mu a_2, \lambda\mu a_3) = (\lambda\mu)(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{(\lambda\mu)\mathbf{a}}}$ *q.e.d.*
  - Állítás: Vektorok összeadása disztributív a skaláris szorzásra, azaz $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda[(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)] = \lambda(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = [\lambda(a_1+b_1), \lambda(a_2+b_2), \lambda(a_3+b_3)] = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \lambda b_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) + \lambda(b_1, b_2, b_3) = \underline{\underline{\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}}$ *q. e. d*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása VI

- Állítás: Skalárok összeadása disztributív a vektorral való szorzásra, azaz $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Bizonyítás: $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\,(a_1, a_2, a_3) = [(\lambda + \mu)\,a_1, (\lambda + \mu)\,a_2, (\lambda + \mu)\,a_3] = (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda\,(a_1, a_2, a_3) + \mu\,(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}}}$ *q. e. d*
- $\forall \in \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Egységvektor I

- Definíció: Egységvektornak nevezzük azon vektorokat, melyek hossza 1. Tekintsük a térben a következő egységvektorokat, melyeket $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának is hívunk:
$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$
- Állítás: Tetszőleges $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen:
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$
Bizonyítás:
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$
- Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hosszára fennáll, hogy $|\mathbf{v}| \neq 0$, ezért értelmezhető a normalizáltja:
Definíció: A $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ vektor normalizáltja, normáltja, vagy irányvektora: $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Egységvektor II

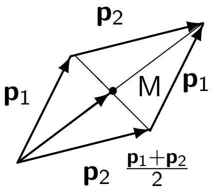
- A normalizált vektor már egységvektor:

$$\left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{v}| = 1.$$

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete I

- A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M felezőpontja a következő pont:

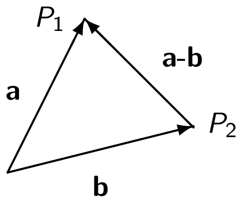
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$



A P_1-be és a P_2-be mutató $\mathbf{p_1}$ és $\mathbf{p_2}$ vektorokkal felrajzoljuk a vektorösszeadást. A két-két vektor egymással párhuzamos, így egy paralelogrammát alkot. A paralelogramma átlói azonban felezik egymást, így az M pont a két vektor összegének a felénél található. Így a képlet igaz.

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete II

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága a P_1 és P_2 végpontú **a**, **b** vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

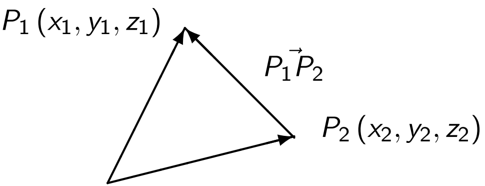


Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete III

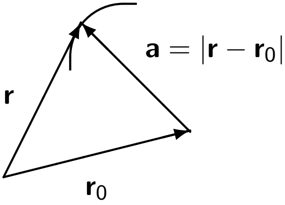
- Állítás: A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bizonyítás: A P_1 és P_2 pontok távolsága a két pontba mutató vektorok különbsége. A különbségvektor hossza pedig a fenti képlet.



Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete IV



- Állítás: Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Bizonyítás: Egy a sugarú, $\mathbf{r}_0$ középpontú gömb azon pontok halmaza a térben ($\mathbf{r}$), amelyek a távolságban vannak $\mathbf{r}_0$-től. Azaz $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. Azaz,
$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$, vagyis
$\underline{\underline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}}_{\;q.\ e.\ d.}$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!