Név: Dr. FACSKÓ Gábor István Neptun kód: BQQQFY

(MATNA1901) Lineáris algebra vizsga

1. Adja meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? (10 pont)

   Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

   Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

2. Határozza meg a determináns fogalmát! Adja meg legalább az egyik definíciót, majd indokolja meg, miért azt választotta! (10 pont)

   Leibnitz-féle definíció: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

   ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I\left(i_1, i_2, \ldots, i_n\right)$ jelöli az $\left(i_1, i_2, \ldots, i_n\right)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det\left(\mathbf{A}\right), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad \left|\mathbf{A}\right|.$$

   Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det\left(\mathbf{A}\right)$ függvényt az $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

   (a) Homogén: $\det\left(\ldots \lambda_i \mathbf{a}_i \ldots\right) = \lambda_i \det\left(\ldots \mathbf{a}_i \ldots\right)$;
   (b) Additív $\det\left(\ldots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \ldots\right) = \det\left(\ldots \mathbf{a}_i \ldots\right) + \det\left(\ldots \mathbf{b}_i \ldots\right)$;
   (c) Alternáló: $\det\left(\ldots \mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_j \ldots\right) = -\det\left(\ldots \mathbf{a}_j \ldots \mathbf{a}_i \ldots\right)$;
   (d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det\left(\mathbf{E}_n\right) = 1$,

   ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix oszlop vektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a det-tel. Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor a determináns $n^{th}$-ed rendű. A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

3. Adja meg az $|\mathbf{A}|$ determináns értékét, illetve fejezze ki egymással a $|\mathbf{B}|$ és a $|\mathbf{C}|$ determinánsok értékét anélkül, hogy kiszámolná azok numerikus értékét!

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&5&6&7&8&1\\3&4&5&6&7&8&1&2\\4&5&6&7&8&1&2&3\\5&6&7&8&1&2&3&4\\6&7&8&1&2&3&4&5\\7&8&1&2&3&4&5&6\end{vmatrix}\mathbf{B}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&5&6&7&8&1\\3&4&5&6&7&8&1&2\\4&5&6&7&8&1&2&3\\5&6&7&8&1&2&3&4\\6&7&8&1&2&3&4&5\\7&8&1&2&3&4&5&6\\8&1&2&3&4&5&6&7\end{vmatrix}\mathbf{C}=\begin{vmatrix}2&3&4&5&6&7&8&1\\1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&7&8&1&2\\4&5&6&7&8&1&2&3\\5&6&7&8&1&2&3&4\\6&7&8&1&2&3&4&5\\7&8&1&2&3&4&5&6\\8&1&2&3&4&5&6&7\end{vmatrix}$$

(10 pont)

Az $A$ mátrixnak két oszlopa megegyezik, így a determinánsa 0. A $B$ mátrixban két oszlopot egymással felcseréltünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $det\,(C)=-det\,(B)$.

4. Mikor mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n\in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek? (10 pont)

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n\in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0},$$

ahol $(\lambda_i\in\mathbb{R},i\in\{1,2,\dots,n\}\,,n\in\mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, hogy $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

5. Mikor mondjuk, hogy egy $V$ halmaz vektortér? (10 pont)

A $V\neq\emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy $+$-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b}&=\mathbf{b}+\mathbf{a},\text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V)\\(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}&=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,,\text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V)\\\exists\mathbf{0}\in V\text{úgy, hogy }\ \mathbf{a}+\mathbf{0}&=\mathbf{a}\ \ \forall\mathbf{a}\in V\ \ \text{ esetén}\\\forall\mathbf{a}\in V\exists\,(-\mathbf{a})\in V:\mathbf{a}+(-\mathbf{a})&=\mathbf{0},\end{aligned}$$

továbbá minden $\lambda\in\mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a}\in V$ esetén értelmezve van $\lambda\mathbf{a}\in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}\lambda\,(\mu\mathbf{a})&=(\lambda\mu)\,\mathbf{a},\text{ahol}\,(\mathbf{a}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})&=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b},\text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\lambda\in\mathbb{R})\\(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}&=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a},\text{ahol}\,(\mathbf{a}\in V\text{ és}\lambda,\mu\in\mathbb{R})\\\forall\mathbf{a}\in V\text{−re }1\cdot\mathbf{a}&=\mathbf{a}.\end{aligned}$$

6. Definiálja egy $n\times n$-es mátrix inverzét, ahol $n\in\mathbb{N}$ és $n\geq2$. (10 pont)

Az $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}_n$. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelöljük.

7. Mit értünk a mátrix rangján? (10 pont)

Legyenek $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_s\in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}\,(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho\,(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_s)$.

8. Mit értünk egy mátrix sajátértékén, sajátvektorán és sajátalterén? (10 pont)

   Legyen $V$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora $\varphi$-nek és $\lambda$ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke $\varphi$-nek.

   Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A $L_\lambda$ alteret alkot, ezért a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

9. Mit értünk hasonlóság alatt? Mi a mátrix diagonális alakja? Mi a diagonizálhatóság szükséges és elégséges feltétele? (10 pont)

   Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

   Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

   Tétel: (Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele). Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van $n$ lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.
   Bizonyítás: Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]$ és $\lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n].$$

   A bal oldali mátrix $i$-edik oszlopa $\lambda_i\mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{x}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a $\lambda_i$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$-nak $n$ független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, úgy hogy a $\mathbf{C}$ mátrix $i$-edik oszlopába kerülő $\mathbf{x}_i$ vektorhoz tartozó $\lambda_i$ sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix $i$-edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ , ezért $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

10. Adja meg a következő lineáris transzformációk sajátértékét, sajátalterét és diagonális alakját: a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre, a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre, a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül olyan szöggel, amely nem egész számú többszöröse 180°-nak, a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra, valamint a tér vektorainak tükrözése egy síkra. (10 pont)

    Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.

    (a) A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).
    (b) A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).
    (c) A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a $180^o$ egész számú többszörösétől különböző szöggel.
    (d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.
    (e) A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

    Minden transzformáció lineáris.

(a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Tb} = -\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{T}$ a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre - hasonlóan az előző esethez - helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a 0-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

Az egyenes, amelyre vetítünk egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Pa} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Pb} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{P}$ a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik $180^o$ egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

Ennek leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajáteltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (invariáns altérnek), így ennek bázisával egy "diagonálishoz közeli" alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora a, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor $90^o$-kal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató $\mathbf{F}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{Fa} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Fb} = \cos\alpha\mathbf{b} + \sin\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{Fc} = -\sin\alpha\mathbf{b} + \cos\alpha\mathbf{c}$.

(d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a 0 vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{c}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Facskó Gábor
*facskog@gamma.ttk.pte.hu*

Pécs, 2025. május 21.