(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. március 19.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér I

- Definíció: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
- Definíció: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér II

- Definíció: Legyen φ az $\mathbb{R}^n$ -en ható lineáris transzformáció és legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A mátrix karakterisztikus polinomját értjük.
- Definíció: A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció karakterisztikus gyökének nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.
- Tétel: A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.
- Állítás: (A sajátvektorok alterei). Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.
  Bizonyítás: A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = 0$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér III

- Definíció: (Sajátaltér). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Állítás: (Háromszögmátrixok sajátértékei). A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.
  Bizonyítás Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ is, és egy háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ háromszögmátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0,$$

  aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér IV

- Állítás: (Determináns, nyom és a sajátértékek). Ha az n-edrendű **A** mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \\ trace(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{aligned}$$

Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.
Bizonyítás: A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n .$$

Az állítás nyomra vonatkozó részének bizonyítása triviális.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér V

- Tétel: (A 2×2-es szimmetrikus mátrixok sajátalterei). Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor
  1. $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós,
  2. $\mathbf{A}$-nak pontosan akkor van két azonos sajátértéke, ha $a\mathbf{I}$ alakú, ekkor a sík összes vektora sajátvektor,
  3. ha $\mathbf{A}$-nak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra

  Bizonyítás: A 2×2-es szimmetrikus valós mátrix általános alakja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$. Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. Tehát a gyökök, vagyis a sajátértékek valósak. Ez bizonyítja (1)-t. A két sajátérték pontosan akkor egyezik meg, ha $D = 0$, ez viszont csak $a = d$ és $b = 0$ esetén lehetséges, ami bizonyítja (2)-t. A (3) állítás igazolása triviális.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér VI

- (Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása) Egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:
  1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,
  2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{II}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ-hoz tartozó sajátvektorok.
- Tétel: (Mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték). Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.
  Bizonyítás: $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér VII

- Tétel: (Speciális mátrixok sajátértéke). Legyen $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós mátrix. Ekkor
  1. ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
  2. ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius.

  Bizonyítás: (1) és (2) Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. Az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlőség mindkét oldalát balról szorozzuk be $\mathbf{x}$ adjungáltjával (konjugáltjának transzponáltjával):

$$\mathbf{x}^H\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^H\lambda\mathbf{x} = \lambda\,|\mathbf{x}|^2\,.$$

  Vegyük mindkét oldal adjungáltját (konjugáltjának transzponáltját), kihasználva hogy mivel $\mathbf{A}$ valós, ezért $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{x}^H\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,|\mathbf{x}|^2\,.$$

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér VIII

Legyen $\lambda = a + ib$. Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \overline{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$. Így λ imaginárius része 0, tehát λ valós. Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$, azaz λ valós része 0, így λ imaginárius.

Le Verrier-Souriau algoritmus I

The Algorithm [edit]

The objective is to calculate the coefficients c_k of the characteristic polynomial of the $n \times n$ matrix A,

$$p_A(\lambda) \equiv \det(\lambda I_n - A) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \ ,$$

where, evidently, $c_n = 1$ and $c_0 = (-1)^n \det A$.

The coefficients c_{n-i} are determined by induction on i, using an auxiliary sequence of matrices

$$\begin{aligned} M_0 &\equiv 0 & c_n &= 1 & (k &= 0) \\ M_k &\equiv AM_{k-1} + c_{n-k+1} I & c_{n-k} &= -\frac{1}{k}\mathrm{tr}(AM_k) & k &= 1, \ldots, n \ . \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} &M_1 = I \ , \quad c_{n-1} = -\mathrm{tr}A = -c_n \mathrm{tr}A; \\ &M_2 = A - I\mathrm{tr}A, \quad c_{n-2} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}A^2 - (\mathrm{tr}A)^2\right) = -\frac{1}{2}(c_n \mathrm{tr}A^2 + c_{n-1}\mathrm{tr}A); \\ &M_3 = A^2 - A\mathrm{tr}A - \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}A^2 - (\mathrm{tr}A)^2\right)I, \\ &\quad c_{n-3} = -\tfrac{1}{6}\left((\mathrm{tr}\,A)^3 - 3\,\mathrm{tr}(A^2)(\mathrm{tr}\,A) + 2\,\mathrm{tr}(A^3)\right) = -\frac{1}{3}(c_n \mathrm{tr}A^3 + c_{n-1}\mathrm{tr}A^2 + c_{n-2}\mathrm{tr}A); \end{aligned}$$

etc.,[9][10] ...;

$$M_m = \sum_{k=1}^{m} c_{n-m+k} A^{k-1} \ ,$$

$$c_{n-m} = -\frac{1}{m}(c_n \mathrm{tr}A^m + c_{n-1}\mathrm{tr}A^{m-1} + \ldots + c_{n-m+1}\mathrm{tr}A) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} c_{n-m+k}\mathrm{tr}A^k \ ; \ldots$$

Observe $A^{-1} = -M_n/c_0 = (-1)^{n-1} M_n/\det A$ terminates the recursion at λ. This could be used to obtain the inverse or the determinant of A.

Derivation [edit]

The proof relies on the modes of the adjugate matrix, $B_k \equiv M_{n-k}$, the auxiliary matrices encountered. This matrix is defined by

$$(\lambda I - A)B = I\, p_A(\lambda)$$

and is thus proportional to the resolvent

$$B = (\lambda I - A)^{-1} I\, p_A(\lambda) \ .$$

It is evidently a matrix polynomial in λ of degree $n-1$. Thus,

$$B \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k M_{n-k},$$

where one may define the harmless $M_0 \equiv 0$.

Inserting the explicit polynomial forms into the defining equation for the adjugate, above,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^{k+1} M_{n-k} - \lambda^k (AM_{n-k} + c_k I) = 0 \ .$$

Now, at the highest order, the first term vanishes by $M_0=0$; whereas at the bottom order (constant in λ, from the defining equation of the adjugate, above),

$$M_n A = B_0 A = c_0 \ ,$$

so that shifting the dummy indices of the first term yields

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \left(M_{1+n-k} - AM_{n-k} + c_k I\right) = 0 \ ,$$

which thus dictates the recursion

$$\therefore \qquad M_m = AM_{m-1} + c_{n-m+1} I \ ,$$

for $m=1,\ldots,n$. Note that ascending index amounts to descending in powers of λ, but the polynomial coefficients c are yet to be determined in terms of the Ms and A.

This can be easiest achieved through the following auxiliary equation (Hou, 1998),

$$\lambda \frac{\partial p_A(\lambda)}{\partial \lambda} - np = \mathrm{tr}\, AB \ .$$

This is but the trace of the defining equation for B by dint of Jacobi's formula

Le Verrier-Souriau algoritmus II

This is but the trace of the defining equation for B by dint of Jacobi's formula,

$$\frac{\partial p_A(\lambda)}{\partial \lambda} = p_A(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-(m+1)} \operatorname{tr} A^m = p_A(\lambda) \ \operatorname{tr} \frac{I}{\lambda I - A} \equiv \operatorname{tr} B\,.$$

Inserting the polynomial mode forms in this auxiliary equation yields

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \left(k c_k - n c_k - \operatorname{tr} A M_{n-k} \right) = 0\,,$$

so that

$$\sum_{m=1}^{n-1} \lambda^{n-m} \left(m c_{n-m} + \operatorname{tr} A M_m \right) = 0\,,$$

and finally

$$\therefore \qquad c_{n-m} = -\frac{1}{m} \operatorname{tr} A M_m\,.$$

This completes the recursion of the previous section, unfolding in descending powers of λ.

Further note in the algorithm that, more directly,

$$M_m = A M_{m-1} - \frac{1}{m-1} (\operatorname{tr} A M_{m-1}) I\,,$$

and, in comportance with the Cayley–Hamilton theorem,

$$\operatorname{adj}(A) = (-1)^{n-1} M_n = (-1)^{n-1} (A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + c_2 A + c_1 I) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_k A^{k-1}\,.$$

The final solution might be more conveniently expressed in terms of complete exponential Bell polynomials as

$$c_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \mathcal{B}_k \Big(\operatorname{tr} A, -1!\ \operatorname{tr} A^2, 2!\ \operatorname{tr} A^3, \ldots, (-1)^{k-1}(k-1)!\ \operatorname{tr} A^k \Big).$$

ample [edit]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad c_3 \quad = 1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A\,M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad c_2 = -\frac{1}{1} 10 = -10$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 4 & 6 & -6 \end{bmatrix} \qquad A\,M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 26 & -14 \\ -8 & -12 & 12 \\ 6 & -14 & 2 \end{bmatrix} \qquad c_1 = -\frac{1}{2}(-8) = 4$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 6 & 26 & -14 \\ -8 & -8 & 12 \\ 6 & -14 & 6 \end{bmatrix} \qquad A\,M_3 = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \qquad c_0 = -\frac{1}{3} 120 = -40$$

Furthermore, $M_4 = A\,M_3 + c_0\,I = 0$, which confirms the above calculations.

The characteristic polynomial of matrix A is thus $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 4\lambda - 40$; the determinant of A is $\det(A) = (-1)^3 c_0 = 40$; the trace is 10=$-c_2$; and the inverse of A is

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} M_3 = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 6 & 26 & -14 \\ -8 & -8 & 12 \\ 6 & -14 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.65 & -0.35 \\ -0.20 & -0.20 & 0.30 \\ 0.15 & -0.35 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

An equivalent but distinct expression [edit]

A compact determinant of an $m\times m$-matrix solution for the above Jacobi's formula may alternatively determine the coefficients c,[11][12]

$$c_{n-m} = \frac{(-1)^m}{m!} \begin{vmatrix} \operatorname{tr} A & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr} A^2 & \operatorname{tr} A & m-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \operatorname{tr} A^{m-1} & \operatorname{tr} A^{m-2} & \cdots & \cdots & 1 \\ \operatorname{tr} A^m & \operatorname{tr} A^{m-1} & \cdots & \cdots & \operatorname{tr} A \end{vmatrix}.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!