(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 6.

A kurzus célja

- A tárgy célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek a lineáris algebra alapvető fogalmaival és néhány alkalmazásával
- A kurzust sikeresen teljesítő hallgatók:
  - Ismerik az alapvető fogalmakat és tételeket, rendelkeznek alapvető szakszókinccsel a témakörben
  - Képesek az alapvető vonatkozó lineáris algebrai tulajdonságok alkalmazására;
  - Törekszenek az új matematikai fogalmak és tételek megértésére és elsajátítása;
  - Képesek önállóan értelmezni és megoldani a feladatokat.

- Minden diát, tematikát, video felvételt, gyakorló feladatot és dolgozat feladatsort fel fogok tölteni a Teamsre
- Látják a tárgy Teams csoportját? Csak egy csoport lesz az előadásnak és a gyakorlatnak, továbbá nem lesz Moodle

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A két teszt alapján gyakorlati jegyet kapnak
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát lehet tenni, ha megszerezték az érvényes gyakorlati jegyet
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15.

Bibliography

FREUD R. 2004: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

P. D. LAX. 2008: Lineáris algebra és alkalmazásai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

GYÉMÁNT I., GÖRBE T. F. 2011, Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon Jegyzettár, Szeged.

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek I

- Algebrai tört fogalma és alkalmazása. Lineráris törtfüggvények ábrázolása, jellemzése.
- **Abszolútt értéket tartalmazó egyenletek megoldása.**
- Másodfokú egyenleteknél a gyökök és együtthatók összefüggései. Másodfokú egyenletrendszer megoldása.
- Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között.
- **Négyzetgyök alatt csak olyan elsőfokú polinomok, amelyek főegyütthatója 1, azaz $\sqrt{ax+b} = cx + d$ helyett a $\sqrt{x+c} = ax + b$ megoldása elegendő. (Eddig az ax+b alakú elsőfokú polinomok négyzetgyökét is vizsgálták.)**
- A függvény transzformációk közül az $f(cx)$ ábrázolása.
- Magasságtétel, befogótétel a derékszögű háromszögben.
- **Szög ívmértéke.**
- Logarimusfüggvény, logaritmus azonosságai, logaritmusos egyenletek.

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek II

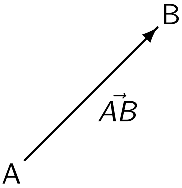
- **Függvény inverze.**
- **Az egyenes egyenletének normálvektoros és irányvektoros alakja, kör és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátageometriában.**
- **Két vektor skaláris szorzata.**
- A valós számok halmazán értelmezett triginometrikus függvények értelmezése, ábrázolása és trigonometrikus egyenletek megoldása.

Skalár és vektor mennyiségek

- A skalár mennyiségek irány nélküli mennyiségek. Például: a tömeg (m), a sebesség ($|\mathbf{v}|$, *not* velocity), a hőmérséklet (T), a hosszúság, a térfogat (V), vagy a sűrűség (ρ).
- A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás/lassulás (**a**), a forgás, a körsebesség (ω).
- Figyelem, két fajta vektor létezik:
  - A súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás (**a**).
  - A forgás és a körsebesség (ω).
- A vektorokat lehet vastag betűvel (**v**) , aláhúzással ($\underline{v}$), vagy nyíllal ($\vec{v}$) jelölni.

A vektorok más meghatározásai I

- A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.



- Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók.
- Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

A vektorok más meghatározásai II

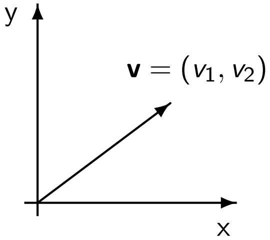
- Ha ezt meg lehet tenni két vektorral, akkor a szabad vektorok osztályához jutunk.
- Definíció: Sík (V^2) vagy térbeli vektoroknak nevezzük (V^3) azt a csoportot, amit párhuzamos eltolással egymásba lehet transzformálni.

Vektorok koordináta reprezentációi I

- Számpárokat, vagy számhármasokat (...) $\mathbb{R}^2$, vagy $\mathbb{R}^3$) meg lehet feleltetni a vektoroknak:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

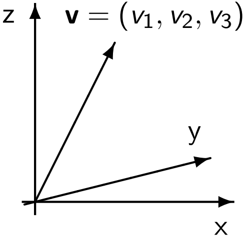
  ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$ a 2D vektor komponensei.



Vektorok koordináta reprezentációi II

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$, $v_3 \in \mathbb{R}$ a vektor komponensei 3D-ben.



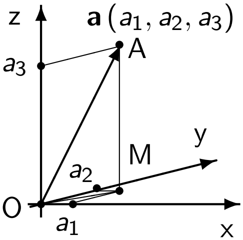
Vektorok egyenlősége és hossza I

- Definíció: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha az origó központú reprezentációik azonosak.
- Azaz $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)\,, \mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3) \in V^3$ egyenlő, és csak akkor egyenlő, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, és $a_3 = b_3$, ahol $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Vektorok egyenlősége és hossza II

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektor nagysága, vagy hossza a következő nem nulla szám:

$$|\mathbf{a}| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



Bizonyítás: Az AOM pontok egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol OMA$\angle$-nél van a derékszög. Így Pithagorasz-tétele miatt $|\mathbf{a}| = OM^2 + a_3^2$. Az O, $(a_1, 0, 0)$, $(0, a_2, 0)$ pontok szintén egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol a derékszög az $[O, (a_1, 0, 0), (0, a_2, 0)]\angle$ szögnél van, így Pithagorasz-tétele miatt, $OM^2 = a_1^2 + a_2^2$. A két egyenlőséget összevonva $|\mathbf{a}| = OM^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, azaz

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

q. e. d.

Vektorok egyenlősége és hossza III

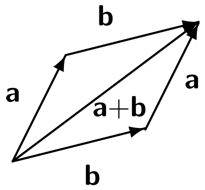
- A null vektornak nincsen se hossza, se iránya: $|\mathbf{0}\,(0,0,0)|=0$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása I

- <u>Definíció:</u> Vektorok összeadása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\,,$$

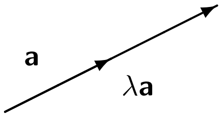
ahol $a_1,\ a_2,\ a_3, b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az **a** *és* **b** *vektort úgy adjuk össze, hogy az* **a** *végpontjába toljuk a* **b***-t. Az összegvektor* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ *az* **a** *kezdőpontjától a* **b** *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása II

- Definíció: Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$
Figyelem, gondoljunk bele, mit jelent, ha λ 0, 1, -1, $<$1, vagy $>$1.



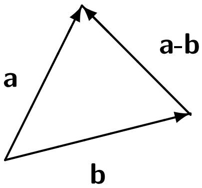
Az $\mathbf{a}$ *vektort egy* λ *skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de* λ*-szoros hosszúságú vektort rajzolunk.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása III

- Definíció: Vektorok kivonása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

ahol $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy vonjuk ki, hogy a vektorokat közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *a* $\mathbf{b}$ *végpontjától az* $\mathbf{a}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása IV

- Vektorok összegzésének tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok összeadása kommutatív, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$.
    Bizonyítás: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)=(b_1,b_2,b_3)+(a_1,a_2,a_3)=\underline{\underline{\mathbf{b}+\mathbf{a}}}$ *q. e. d.*
  - Állítás: Vektorok összeadása asszociatív, azaz $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$.
    Bizonyítás: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)]+(c_1,c_2,c_3)=$
    $[(a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,(a_3+b_3)+c_3]=$
    $[a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),a_3+(b_3+c_3)]=$
    $(a_1,a_2,a_3)+[(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)]=\underline{\underline{\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})}}$ *q. e.d.*
  - Létezik null vektor: $\exists\mathbf{0}\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$.
  - Minden vektornak van egy inverz vektora: $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3\ \exists(-\mathbf{a})\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása V

- A vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skalárral való szorzása asszociatív, azaz $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda[\mu(a_1, a_2, a_3)] = \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = (\lambda\mu a_1, \lambda\mu a_2, \lambda\mu a_3) = (\lambda\mu)(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{(\lambda\mu)\,\mathbf{a}}}$ *q.e.d.*
  - Állítás: Vektorok összeadása disztributív a skaláris szorzásra, azaz $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda[(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)] = \lambda(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = [\lambda(a_1+b_1), \lambda(a_2+b_2), \lambda(a_3+b_3)] = (\lambda a_1+\lambda b_1, \lambda a_2+\lambda b_2, \lambda a_3+\lambda b_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) + \lambda(b_1, b_2, b_3) = \underline{\underline{\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}}$ *q. e. d*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása VI

- Állítás: Skalárok összeadása disztributív a vektorral való szorzásra, azaz $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Bizonyítás: $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\,(a_1, a_2, a_3) = [(\lambda + \mu)\,a_1, (\lambda + \mu)\,a_2, (\lambda + \mu)\,a_3] = (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda\,(a_1, a_2, a_3) + \mu\,(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}}}$ *q. e. d*
- $\forall \in \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Egységvektor I

- <u>Definíció:</u> Egységvektornak nevezzük azon vektorokat, melyek hossza 1. Tekintsük a térben a következő egységvektorokat, melyeket $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának is hívunk:
$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1,0,0)\,, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\,, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\,.$$
- <u>Állítás:</u> Tetszőleges $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen:
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$
<u>Bizonyítás:</u>
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$
- Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hosszára fennáll, hogy $|\mathbf{v}| \neq 0$, ezért értelmezhető a normalizáltja:
<u>Definíció:</u> A $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ vektor normalizáltja, normáltja, vagy irányvektora: $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

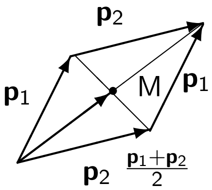
Egységvektor II

- A normalizált vektor már egységvektor:

$$\left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{v}| = 1.$$

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete I

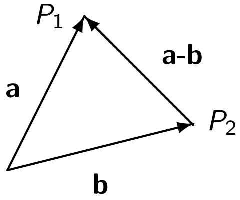
- A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M felezőpontja a következő pont:
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$



A P_1-be és a P_2-be mutató $\mathbf{p_1}$ és $\mathbf{p_2}$ vektorokkal felrajzoljuk a vektorösszeadást. A két-két vektor egymással párhuzamos, így egy paralelogrammát alkot. A paralelogramma átlói azonban felezik egymást, így az M pont a két vektor összegének a felénél található. Így a képlet igaz.

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete II

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága a P_1 és P_2 végpontú **a**, **b** vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

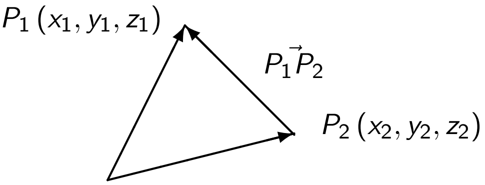


Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete III

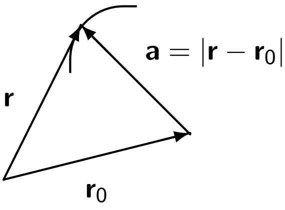
- Állítás: A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bizonyítás: A P_1 és P_2 pontok távolsága a két pontba mutató vektorok különbsége. A különbségvektor hossza pedig a fenti képlet.



Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete IV



- Állítás: Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Bizonyítás: Egy a sugarú, $\mathbf{r}_0$ középpontú gömb azon pontok halmaza a térben ($\mathbf{r}$), amelyek a távolságban vannak $\mathbf{r}_0$-től. Azaz $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. Azaz,
$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$, vagyis
$\underline{\underline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}}$ $_{q.\ e.\ d.}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai I

- Definíció. Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
- Vegyük észre, hogy $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.
- A skaláris szorzás tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skaláris szorzása kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
    Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ba}}}$ *q. e. d.*
  - Állítás: Vektorok skaláris szorzása disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
    Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor
    $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta + |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ac} + \mathbf{bc}}}$ *q. e. d.*

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai II

- Állítás: Vektorok skaláris szorzása homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
  Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\angle$, akkor
  $(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b} = |\lambda \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \underline{\underline{\lambda\,(\mathbf{ab})}}$ *q. e. d.*
- Vektorok skaláris szorzása pozitív definit: $\mathbf{aa} \geq 0$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$ és $\mathbf{aa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A fenti állításokat a következő tétel segítségével is be lehet látni.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai III

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bizonyítás: A skaláris szorzat definíciója és $\cos 90^\circ = 0$, valamint $\cos 0^\circ = 1$ alapján belátjuk, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j. \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Majd kifejtjük a bal oldalt:

$\mathbf{ab} = (\mathbf{a}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = a_1 b_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3 b_1 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \underline{\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}}$ $_{q.e.d.}$

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai IV

- Állítás: Két nemnulla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha $\mathbf{ab} = 0$.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ vektorra való merőleges projekciója (vetülete) alatt azon $\mathbf{b}$ irányú vektort értjük, amelynek végpontját az a vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai V

- Állítás: Ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$, akkor

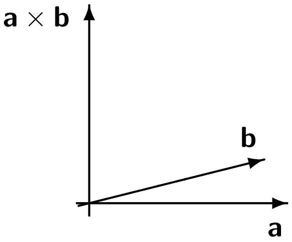
$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}.$$

- Ha a **b** irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b}.$$

Vektoriális szorzat I

- Definíció: Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nemnulla vektorokból álló vektorrendszert jobbrendszernek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180^o-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)



- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
  Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, ahol $(\mathbf{a} \in V^3)$.

Vektoriális szorzat II

- A vektoriális szorzat tulajdonságai
  - Állítás: A vektoriális szorzás antiszimmetrikus, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
    Bizonyítás: A jobbsodrású rendszer definíciója alapján nyilvánvaló.
  - Állítás: A vektoriális szorzás homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\left|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}\right| = |\lambda \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta = \lambda\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|$, ahol $\theta = \left(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}\right)\angle$.
    A vektorok irány pedig megegyezik, mert $\mathbf{a}$ párhuzamos a $\lambda \mathbf{a}$ vektorral.
  - Állítás: A vektoriális szorzás disszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
    Bizonyítás: Később, komponensek alapján.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Jele: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Vektoriális szorzat III

- Bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{a} \in V^3$-re. esetén.
- Ezen felül $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül legalább az egyik nullvektor.
- Könnyen belátható, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 .
\end{aligned}
$$

- Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\text{ů}\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\text{ů}\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott paralelogramma területével, mivel $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$ a magassága, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$.

Vegyes szorzat

- Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, \mathbf{c}.$$

- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk.
- Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})\,.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!