(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. március 26.

Mátrix nyoma I

- Definíció: (Mátrix nyoma). Egy négyzetes mátrix főátlójában lévő elemek összegét a mátrix nyomának nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix nyomát *trace* $\mathbf{A}$ vagy *tr* $\mathbf{A}$ jelöli. Pl.:

$$trace\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 5,\ \ trace\left(\mathbf{E}_n\right) = n,\ \ [\mathbf{a}]_X = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} = 0.$$

- Állítás: (A nyom lineáris leképezés). A nyom additív és homogén, azaz tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra:

$$trace\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right) = trace\left(\mathbf{A}\right) + trace\left(\mathbf{B}\right), trace\left(\lambda\mathbf{A}\right) = \lambda trace\left(\mathbf{A}\right).$$

Bizonyítás: Triviális, továbbá $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ konstansok esetén

$$trace\left(\lambda\mathbf{A}+\phi\mathbf{B}\right) = \lambda trace\left(\mathbf{A}\right) + \mu trace\left(\mathbf{B}\right).$$

Mátrix nyoma II

- Továbbá $trace\left(\mathbf{A}^T\right) = trace\,(\mathbf{A})$.
- Állítás: (A nyom tulajdonságai). Legyen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ekkor

$$\begin{aligned} trace\,(\mathbf{AB}) &= trace\,(\mathbf{BA})\,, \\ trace\left(\mathbf{C}^T\mathbf{C}\right) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Mivel

$$trace\,(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = trace\,(\mathbf{BA})\,.$$

A második egyenlőség bizonyítása triviális.

Mátrix nyoma III

- Bármely két négyzetes mátrixra $\mathit{trace}\left(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}\right) = 0$.
- Az $\mathbf{x}$ vektor hosszának négyzete $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_i x_i^2$. Ennek általánosítása a fenti tétel második pontja.

Diagonizálás I

- Definíció: (Hasonlóság). Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
- Tétel: (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok). Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor
  1. $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$,
  2. $dim(\mathbb{N}(\mathbf{A})) = dim(\mathbb{N}(\mathbf{B}))$,
  3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
  4. $trace(\mathbf{A}) = trace(\mathbf{B})$.

  Bizonyítás:
  1. $\rho(\mathbf{A}) = \rho\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}\right) \leq \rho(\mathbf{B})$ és $\rho(\mathbf{B}) = \rho\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right) \leq \rho(\mathbf{A})$. Innen $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$.
  2. $dim(\mathbb{N}(\mathbf{A})) = n - \rho(\mathbf{A}) = n - \rho(\mathbf{B}) = dim(\mathbb{N}(\mathbf{B}))$.
  3. $\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}\right) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}\right)\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det\left(\mathbf{C}^{-1}\right) = 1$.

Diagonizálás II

4. $trace\left(\mathbf{A}\right) = trace\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}\right) = trace\left(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\right) = trace\left(\mathbf{B}\right)$, és itt kihasználjuk, hogy két mátrix szorzatának nyoma nem változik, ha a tényezők sorrendjét felcseréljük.

- <u>Definíció:</u> (Kvadratikus alak). Valós kvadratikus alaknak (vagy kvadratikus formának) nevezzük azt az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \to \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ függvényt, ahol $\mathbf{A}$ valós szimmetrikus mátrix. A komplex kvadratius alakon a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \to \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ függvényt értjük, ahol $\mathbf{A}$ komplex négyzetes mátrix.
- Főtengelytétel, főtengelytramszformáció, kvadratikus alakok és mátrixok definitsége, definitség meghatározása sajátértékekből, pozitív (szemi)definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás, definitség és főminortok kapcsolata, szélsőérték... Szorgalmi feladat: Wettl-jegyzet.

Diagonizálás III

- Tétel: (Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok). Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.
  Bizonyítás: A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Ekkor

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{C}\right) = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{C},$$

  azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ is hasonlóak. Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right) = \det\left(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}\right)$, azaz megegyeznek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomjai is. Így megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ nullterének dimenziója megegyezik, amit korábban igazoltunk.

Diagonizálás IV

- Lineális transzformáció sajátértéke és a sajátaltere: gyakorlaton megnézzük, érdekes.
- Definíció: (Diagonalizálhatóság). Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.
- Tétel: (Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele). Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.
  Bizonyítás: Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva a $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]$ és $\lambda = \mathit{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, akkor

Diagonizálás V

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] \, .$$

A bal oldali mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{x}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$-nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, úgy hogy a $\mathbf{C}$ mátrix i-edik oszlopába kerülő $\mathbf{x}_i$ vektorhoz tartozó λ_i sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix i-edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$, ezért $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

Diagonizálás VI

- A $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontásának nevezünk.
- Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja, Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel, Diagonalizálható mátrix polinomja, Cayley–Hamilton-tétel, Különböző sajátértékek sajátvektorai, Különböző sajátértékek és a diagonalizálhatóság, Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata, Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás, Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása, Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása, Alterek direkt összege, A direkt összeg tulajdonságai, Diagonalizálható mátrixok sajátalterei. . . Wettl-jegyzet.

LU-felbontás

- Definíció: (LU-felbontás). Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.
- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása.
- Az LU-felbontás nem egyértelmű.
- Megmutatható viszont, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű.
- Példa LU-felbontás kiszámítására, Algoritmus egy LU-felbontás előállítására, A LU-felbontás létezése és egyértelműsége, Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással, + példa, Mátrix invertálása LU-felbontással, + példa... gyakorlaton.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!