(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 2.

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása I

- Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.
  1. A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).
  2. A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).
  3. A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a 180^o egész számú többszörösétől különböző szöggel.
  4. A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.
  5. A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

  Minden transzformáció lineáris.

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása II

1. Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.
2. A sík merőleges vetítése egy egyenesre - hasonlóan az előző esethez - helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a 0-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.
3. A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik 180^o egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása III

4. A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a 0 vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.
5. A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása IV

- Lineáris transzformáció diagonalizálása. A fenti transzformációkat diagonizáljuk.
  1. Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Tb} = -\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{T}$ a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
  2. Az egyenes, amelyre vetítünk egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{Pa} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{Pb} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{P}$ a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása V

3. Ennek leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajáteltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (invariáns altérnek), így ennek bázisával egy "diagonálishoz közeli" alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora a, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor 90^o-kal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató $\mathbf{F}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{Fa} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Fb} = \cos\alpha\mathbf{b} + \sin\alpha\mathbf{c}$, $\mathbf{Fc} = -\sin\alpha\mathbf{b} + \cos\alpha\mathbf{c}$.

Lineáris transzformációk sajátértéke, sajátaltere, diagonizálása VI

4. A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{Ta} = \mathbf{a}$, $\mathbf{Tb} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Tc} = \mathbf{c}$, így $\mathbf{T}$ mátrixa
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

LU-felbontás I

- (A LU-felbontás) Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz csak olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát valamely alatta lévő sorhoz adjuk. Minden ilyen elemi sorművelethez olyan elemi mátrix tartozik, mely alsó háromszög alakú. Ekkor tehát léteznek olyan $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$ elemi alsó háromszögmátrixok, melyekre

$$\mathbf{E}_k \ldots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Innen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_k \ldots \mathbf{E}_1)^{-1} \mathbf{U},$$

ahol $(\mathbf{E}_k \ldots \mathbf{E}_1)^{-1}$ alsó háromszögmátrixok szorzatának inverze, tehát maga is alsó háromszögmátrix. Ráadásul mindegyik mátrixban, így szorzatukban, és annak inverzében is a főátló csupa 1-esből áll.

LU-felbontás II

- Definíció: (LU-felbontás). Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.
- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása.
- Az LU-felbontás nem egyértelmű.
- Megmutatható viszont, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű.

LU-felbontás III

- Példa LU-felbontás kiszámítására: Elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

  mátrixot, majd e lépéseket fölhasználva írjuk föl mindkét mátrix egy-egy LU-felbontását!
  Végezzük el a Gauss-eliminációt lépésenként haladva, felírva az elemi transzformáció mátrixot!
  $\vdots$

LU-felbontás IV

Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}\right)\mathbf{U}$. Az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot.

Invertáljuk a háromszögmátrixokat, majd szorozzuk össze őket!

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Az elemi mátrixok szorzata a főátló alatti elemek átmásolásával megkapható. $\mathbf{L}$ egy alsó háromszögmátrix. Így az $\mathbf{A}$ LU-felbontása:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

LU-felbontás V

Mivel az **A** átalakítása közben az oszlopok közt nem végeztünk műveletet, és a **B** mátrix az **A**-ból a harmadik oszlopa elhagyásával kapható meg, ezért az előző felbontásból azonnal adódik a **B** felbontása is:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Algoritmus egy LU-felbontás előállítására: Wettl-jegyzet
- A LU-felbontás létezése és egyértelműsége: Wettl-jegyzet

LU-felbontás VI

- Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással: Ha már ismerjük egy $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$-t behelyettesítve $\mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \Leftrightarrow \mathbf{Ly} = \mathbf{b},\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

  Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakjából következik, hogy az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű visszahelyettesítésekkel megoldhatók.

LU-felbontás VII

- (Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 8 \quad (1)$$
$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4 \quad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \quad (3)$$

Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

LU-felbontás VIII

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$.

LU-felbontás IX

- Mátrix invertálása LU-felbontással: Mátrix invertálásához elég megoldani az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{E}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{LY} = \mathbf{E}, \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

  E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag visszahelyettesítésekkel is.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!