(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra gyakorló feladatok

I. MŰVELETEK VEKTOROKKAL

1. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 3)$ és $\mathbf{c} = (-2, 1, 1)$. Határozza meg a következő összefüggéseket:
   - a.) $\mathbf{c}\,(\mathbf{a} - \mathbf{b})$
   - b.) $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$
   - c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   - d.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közbezárt szög?
   - e.) Mennyi az $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - f.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - g.) Egy síkban vannak-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?
   - h.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra.
2. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 2)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, 1)$. Határozza meg a következő összefüggéseket:
   - a.) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c}$
   - b.) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
   - c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   - d.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közbezárt szög?
   - e.) Mennyi az $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - f.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - g.) Egy síkban vannak-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?
   - h.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az $\mathbf{b}$ vektorra.
3. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 0)$ és $\mathbf{c} = (0, 1, 3)$. Határozza meg a következő összefüggéseket:
   - a.) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c}$
   - b.) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
   - c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   - d.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közbezárt szög?
   - e.) Mennyi az $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - f.) Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által közbezárt szög?
   - g.) Egy síkban vannak-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?
   - h.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az $\mathbf{c}$ vektorra.

II. DETERMINÁNSOK

4. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát kifejtési tétellel!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát Sarrus szabállyal!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát Gauss eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

III. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

7.) Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval és Cramer szabályokkal!

a.)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

IV. LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

8. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 2, 1, 4)$, a $\mathbf{b} = (0, 5, -1, 1)$ és a $\mathbf{c} = (1, 1, 5, 2)$ vektorok?
9. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$, a $\mathbf{b} = (-2, -1, 0)$ és a $\mathbf{c} = (-3, 2, 0)$ vektorok?
10. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1, 2, -1)$, a $\mathbf{b} = (-1, -2, 1)$ és a $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$ vektorok?

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2024. október 7.