(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. április 9.

Ütemterv I

- **Hátralévő órák: 2025. április 9-10, 16-17, 30, május 7.**
- Merőleges vetítés és a legjobb közelítés, ortonormált bázis, ortogonális mátrixok, komplex és végest test feletti terek.
- ~~Kvadratikus formák.~~
- Szinguláris érték, szinguláris vektor, SVD, PCA.
- ~~Mátrixok összehasonlítása, pozitív mátrixok, nemnegatív mátrixok, irreducibilis mátrixok, SMRC, NMF.~~
- Reakcióegyenletek sztöchiometrikus rendezése.
- ~~Lineáris programozási feladatok mátrixaritmetikai megoldhatósága. (MLF?)~~
- ~~Power of matrices. Applications: linear recursions, power of incidence matrixes.~~
- ~~Gram-Schmidt ortogonalization. LU and~~ QR decomposition. Fourier-series.

Ütemterv II

- ~~Further applications. (MLF?)~~

Merőleges vetítés és legjobb közelítés I

- Alterek összege és direkt összege: Wettl-jegyzet
- Kiegészítő alterek tulajdonságai: Wettl-jegyzet
- Direkt összeg: Wettl-jegyzet
- A merőleges kiegészítő altér tulajdonságai: Wettl-jegyzet
- Merőleges vetítés Rn egy alterére: Wettl-jegyzet
- Altérre való vetítés mátrixa: Wettl-jegyzet
- Merőleges vetület kiszámítása: Wettl-jegyzet
- Merőleges vetítés mátrixai: Wettl-jegyzet
- Legjobb közelítés tétele: Wettl-jegyzet
- ~~Vektor felbontása összetevőkre~~
- ~~Egyenletrendszer optimális megoldása~~
- ~~Lineáris és polinomiális regresszió~~
- ~~Linearizálható regressziós modellek~~

Merőleges vetítés és legjobb közelítés II

- ~~Vetítés altérre~~
- ~~A projekció tulajdonságai~~
- ~~A vetítés ekvivalens definíciója~~
- ~~Mikor merőleges egy vetítés?~~

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix I

- Segíti az alterek vizsgálatát, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, ekkor ugyanis a különböző bázisvektorok skaláris szorzata 0. További könnyítést jelenthet, ha a bázisvektorok egységvektorok, mert ekkor egy vektor velük vett skaláris szorzata a merőleges vetület hosszát adja.
- Páronként merőleges vektorok egy rendszerét ortogonális rendszernek nevezzük. Ortogonális rendszernek lehetnek 0-vektor tagjai. Páronként merőleges egységvektorok egy rendszerét ortonormált rendszernek nevezzük. Ortonormált rendszerben nincsenek 0-vektorok. A következő tételből azonnal adódik, hogy zérusvektort nem tartalmazó ortogonális rendszer vagy egy tetszőleges ortonormált rendszer mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. Ezt az altér ortogonális bázisának (rövidítve OB), illetve ortonormált bázisának (rövidítve ONB) nevezzük. Ortogonális bázisból mindig kaphatunk egy ortonormáltat, ha az OB minden bázisvektorát elosztjuk a hosszával. Ezt a vektor normálásának nevezzük.

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix II

- Ortogonális vektorok függetlensége: Wettl-jegyzet
- Legjobb közelítés ONB esetén: Wettl-jegyzet
- Definíció: (Ortogonális és szemiortogonális mátrix). Egy valós négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, szemiortogonális mátrixról beszélünk.
- Tétel: (Szemiortogonális mátrixok ekvivalens definíciói) Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:
  1. $\mathbf{Q}$ szemiortogonális,
  2. $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}_n$.

  Hasonlóképp $m \leq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{E}_m$. A(z) 2. állítás algebrai nyelven azt mondja, hogy $m \leq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha transzponáltja a bal oldali inverze.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix III

- Tétel: (Ortogonális mátrixok ekvivalens definíciói). Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:
  1. $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
  2. $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}_n$.
  3. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.
  4. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{E}_n$.
  5. $\mathbf{Q}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.
- Tétel: (Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés) Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:
  1. $\mathbf{Q}$ ortogonális.
  2. $|\mathbf{Qx}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
  3. $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix IV

- Tétel: (Ortogonális mátrixok tulajdonságai)
  1. Ha $\mathbf{Q}$ valós ortogonális mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.
  2. Az $n \times n$-es valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet
- Tétel: Minden O(2)-be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa.
- Az $n \times n$-es 1 determinánsú valós ortogonális mátrixok halmazából sem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete. E mátrixhalmazt $SO(n)$ jelöli.

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix V

- A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi. Forgatások és tükrözések segítségével leírhatók az ortogonális mátrixok.
- Tétel: Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa.
  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.
- ~~Givens-forgatás, Householder-tükrözés~~
- ~~Egy vektor tükrözése egy másikba~~
- Gram–Schmidt-ortogonalizáció: tanultuk előző félévben.
- A QR-felbontás: Ahogyan egy mátrix elemi sorműveletekkel való háromszögalakra hozását tömör formában őrzi az LU-felbontás, ugyanígy a QR-felbontás őrzi az ortogonalizációs eljárás eredményét. E felbontás mind a legkisebb négyzetek módszerében, mind a sajátértékprobléma megoldásában fontos szerephez jut.

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix VI

- Definíció: (QR-felbontás). Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú valós mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást QR-felbontásnak vagy redukált QR-felbontásnak nevezzük, ha $\mathbf{Q}$ az $\mathbf{A}$-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és $\mathbf{R}$ négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.
- Tétel: (QR-felbontás létezése és egyértelműsége). Bármely valós, teljes oszloprangú A mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix és egy $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Az így kapott felbontás egyértelmű.
  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.
- QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal: Wettl-jegyzet.
- Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással: Wettl-jegyzet.
- Legkisebb négyzetek QR-felbontással: Wettl-jegyzet.

Komplex és véges test feletti terek

- Komplex vektorok és terek, komplex vektorok skaláris szorzata
- Definíció: (Komplex mátrix adjungáltja). Az A komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^H$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!