Név / Name: ______________________ Neptun kód / code: ______________________

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra 4. zárthelyi dolgozat / Elementary Linear Algebra, Test 4

1. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 0)$ és $\mathbf{c} = (1, 2, 2)$. Határozza meg a következő összefüggéseket / Calculate the following expressions:
   a.) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c}$
   b.) $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$
   c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d.) Mennyi az **a** és **b** vektorok által közbezárt szög? / What is the angle of Vectors **a** and **b**?
   e.) Egy síkban vannak-e az **a**, **b**, **c** vektorok? / Are Vectors **a**, **b**, and **c** in the same plane?
   f.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az **b** vektorra. / Determine a perpendicular vector to Vector **b**.

   (10 po(i)nt)

2. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! / Calculate the deteminant of the following matrixes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (10 po(i)nt)

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert! / Solve the following system of linear equations:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   (10 po(i)nt)

4. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (1, 2, 1, 2)$, a $\mathbf{b} = (0, 2, 2, 2)$ és a $\mathbf{c} = (1, 1, 2, 1)$ vektorok? / Are independent linear Vectors $\mathbf{a} = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 2, 2)$, and $\mathbf{c} = (1, 1, 2, 1)$? (10 po(i)nt)

5. Altér -e az $\mathbb{R}^3$-on az $U = \{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)\,|\,x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$? / Is subspace on $\mathbb{R}^3$ the $U = \{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)\,|\,x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ set? (10 po(i)nt)

6. Adja meg az $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ vektort az $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 1, 1, 0)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(1, 0, 0, 1)$ bázisban. / Give the Vector $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ in the $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 1, 1, 0)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(1, 0, 0, 1)$ basis. (10 po(i)nt)

7. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Végezze el az alábbiak közül az elvégezhető műveleteket! / Calculate the following terms if possible:
   (a) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}$ (b) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ (c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{F}$ (d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^T$ (e) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ (f) $\mathbf{A}^{-1}$ (g) $\mathbf{C}^{-1}$ (10 po(i)nt)

8. Oldja meg az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Solve the $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ matrix equation above.

9. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és egy-egy, a sajátértékhez tartozó sajátvektort! / Calculate the eigenvalues of Matrix $\mathbf{A}$ and give an eigenvector for each eigenvalues:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(10 po(i)nt)

10. Az alábbi leképezés lineáris? Adja meg a leképezés mátrixát is, ha létezik! / Is this transformation a linear transformation? Give the matrix of the linear transformation if it exists.

$$f\left(\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right)$$

(10 po(i)nt)

A fenti feladatsor két részre oszlik. Az (1)-(5) feladatok megoldásával a első zárthelyit lehet javítani, illetve pótolni. A (6)-(10) feladatokkal pedig a másodikat. A zárthelyik osztályzása: 0-20 pont: elégtelen (1), 21-27 pont: elégséges (2), 28-35 pont: közepes (3), 36-42 pont: jó (4) és 43-50 pont: jeles (5). Mindkét témából zárthelyiből legalább elégségest (2) kell elérni a gyakorlati jegyhez. Ha mindkét zárthelyi legalább közepes (3), akkor megajánlott vizsgajegyet kapnak. A megajánlott jegyet nem szerzőknek, vagy a jegyet nem elfogadóknak vizsgáznia kell a kiírt időpo(i)ntokban.

You can improve the results of the first mid-term test by solving exercises (1)-(5). If you want to replace your second mid-term exam you must solace exercises (6)-(10). Grades: 0-20 points: Fail 81), 21-27 points: Pass (2), 28-35 points: Satisfactory (3), 36-42 points: Good (4) és 43-50 points: Excellent (5). You must pass both mid-term tests to get a grade for the practice. If you get at least an Average (3) grade for both mid-term tests I will offer you an exam grade based on the test results. If neither exam grade was offered nor you wish for a better grade you must pass a written exam.

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2024. december 19. / December 19, 2024