Név: Dr. FACSKÓ Gábor István Neptun kód: BQQQF

(MATNA1901) Lineáris algebra vizsga

1. Adja meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? (10 pont)

   Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

   Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m\times n}$.

2. Mit értünk két mátrix összegén és skalárral való szorzatán? (10 pont)

   <u>Definíció:</u> Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

3. Határozza meg a determináns fogalmát! (10 pont)

   <u>Leibnitz-féle definíció:</u> Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

   ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det\,(\mathbf{A})\,, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|\,.$$

Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

(a) Homogén: $\det(\dots \lambda_i \mathbf{a}_i \dots) = \lambda_i \det(\dots \mathbf{a}_i \dots)$;

(b) Additív $\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots)$;

(c) Alternáló: $\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots)$;

(d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix oszlop vektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a det-tel. Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns n^{th}-ed rendű. A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

4. Mit jelent a reguláris és a szinguláris mátrix? (10 pont)

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.

5. Definiálja egy $n \times n$-es mátrix inverzét, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$. (10 pont)

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}_n$. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelöljük.

6. Mit jelent a bázis fogalma? (10 pont)

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük.

7. Mi az a lineáris transzformáció? (10 pont)

Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.

8. Mi az az altér? (10 pont)

A V vektortér L nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel.

9. Mit értünk egy mátrix sajátértékén, sajátvektorán és sajátalterén? (10 pont)

Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda \mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.

Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

10. Mi az az ortonormált vektortér? (10 pont)

Egy vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$, $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, ahol $(i = 1, 2, \dots, n)$.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. május 28.