Név / Name: Dr. Facskó Gábor István Neptun kód / Code: BQQQFY

(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra vizsga / (ENKEMNA0302) Applied Linear Algebra Exam

1. Adja meg a determináns axiomatikus definícióját! / What is the axiomatic definition of the determinant? (10 pont)

   Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

   (a) Homogén: $\det(\ldots \lambda_i \mathbf{a}_i \ldots) = \lambda_i \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (b) Additív: $\det(\ldots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \ldots) = \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots) + \det(\ldots \mathbf{b}_i \ldots)$;

   (c) Alternáló: $\det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_j \ldots) = -\det(\ldots \mathbf{a}_j \ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (d) Az egységmátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik, $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ tartományú és ezekkel a tulajdonságokkal bíró függvény megegyezik a det függvénnyel. Másképpen: a mátrixhoz ezekkel a szabályokkal egyértelműen rendelhető egy szám. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor a determináns n-ed rendű. A determináns egy funkcionál, azaz olyan leképezés, amely egy skalárt rendel egy függvényhez.

   Axiomatic definition: Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a square matrix and $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ a function. The function $\det(\mathbf{A})$ is called the determinant of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$ if

   (a) Homogeneous: $\det(\ldots \lambda_i \mathbf{a}_i \ldots) = \lambda_i \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (b) Additive: $\det(\ldots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \ldots) = \det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots) + \det(\ldots \mathbf{b}_i \ldots)$;

   (c) Alternating: $\det(\ldots \mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_j \ldots) = -\det(\ldots \mathbf{a}_j \ldots \mathbf{a}_i \ldots)$;

   (d) The determinant of the identity matrix is 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

   where $\lambda_i \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ are the column vectors of the matrix $\mathbf{A}^{n\times n}$. This mapping can be considered as an n-variable function over the columns of the matrix: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. These axioms uniquely determine the mapping. Any other function $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ with these properties is equal to det. In other words, a unique scalar value can be assigned to each matrix according to these rules. If $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, then the determinant is of order n. The determinant is a functional — that is, a mapping assigning a scalar to a function.

2. Mik azok a kígyók és a permutáció mátrixok? / What are the snakes and the permutation matrices? (10 pont)

   Permutáló mátrix, kígyó: A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (vagy permutációmátrixnak) hívjuk.
   Pl.: az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   A permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van. Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk. Ha $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix, akkor $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{E}$-ből a $\mathbf{P}$-t kaptuk.

Permutation matrix, snake: Matrices obtained by permuting the rows of a diagonal matrix are called snakes (or transversals). In particular, if the starting matrix is the identity matrix, the resulting matrix is called a permutation matrix.

For example, the following matrices are all snakes; the last two are also permutation matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The permutation matrix is a square matrix that has exactly one 1 in each row and each column, and all other elements are 0. A snake is a square matrix that has at most one non-zero element in each row and each column. Every snake can be obtained from a diagonal matrix by permuting columns. A snake can also be obtained from a diagonal matrix by permuting both rows and columns. If $\mathbf{P}$ is a permutation matrix, then $\mathbf{PA}$ is obtained from $\mathbf{A}$ by applying the same row permutation that transforms $\mathbf{E}$ into $\mathbf{P}$.

3. Mik azok a szimmetrikus és a ferdén szimmetrikus mátrixok? / What are symmetric and skew-symmetric matrices? (10 pont)

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok: A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikusnak, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Példák szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokra:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, $\mathbf{C}$ egyik sem. Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén teljesül, tehát a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában minden elem nulla.

4. Mi az a diadikus-szorzat? / What is the dyadic product? (10 pont)

Diadikus szorzat: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

Dyadic product: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

5. Mi a Levi-Cicita szimbólum? / What is the Levi-Civita symbol? (10 pont)

Levi-Civita szimbólum: $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3),\ (2,3,1),\ \text{vagy } (3,1,2). \\ -1, & \text{ha } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1),\ (2,1,3),\ \text{vagy } (1,3,2). \\ 0, & \text{ha } i = j,\ j = k,\ \text{vagy } i = k. \end{cases}$

Levi-Civita symbol: $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3),\ (2,3,1),\ \text{or } (3,1,2). \\ -1, & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1),\ (2,1,3),\ \text{or } (1,3,2). \\ 0, & \text{if } i = j,\ j = k,\ \text{or } i = k. \end{cases}$

6. Mi az az LU-felbontás? Melyek az LU-felbontás előnyei? Mire használható az LU-felbontás, és miért? / What is LU decomposition? What are the advantages of LU decomposition? What are its applications and why? (10 pont)

LU-felbontás: Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

Mivel az oszlopok között nem végzünk műveletet, egyetlen LU-felbontással több, kevesebb oszlopot tartalmazó mátrix LU-felbontását is meghatároztuk. Könnyen belátható, hogy végtelen számú egyenletrendszert tudunk megoldani egyetlen LU-felbontással. Mátrixok invertálása is egyszerűbb LU-felbontással.

LU Decomposition: We say that the factorization of an $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ into the form $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ is an LU decomposition (LU factorization or LU decomposition) if $\mathbf{L}$ is a unit lower triangular matrix (i.e., ones on the diagonal and zeros above it), and $\mathbf{U}$ is an upper triangular matrix.

Since no operations are performed between columns, a single LU decomposition can also be used for matrices with fewer columns. It is easy to see that an infinite number of systems of linear equations can be solved with a single LU decomposition. The inversion of matrices is also easier using LU decomposition.

7. Mi a mátrix sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere? / What are the eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces of a matrix? (10 pont)

   Sajátérték, sajátvektor: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $\varphi : V \to V$ egy lineáris leképezés. Ha létezik olyan $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor $\mathbf{a}$ a φ sajátvektora, és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátérték.

   Sajátaltér: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. Ez a halmaz a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból áll, és alteret alkot. Ezt nevezzük a λ-hoz tartozó sajátaltérnek.

   Eigenvalue, eigenvector: Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ and $\varphi : V \to V$ a linear mapping. If there exists a nonzero vector $\mathbf{a} \in V$ and a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$, then $\mathbf{a}$ is called an eigenvector of φ and λ the corresponding eigenvalue.

   Eigenspace: Let $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$. This set of eigenvectors corresponding to λ, together with the zero vector, forms a subspace called the eigenspace corresponding to λ.

8. Mit értünk mátrixok hasonlóságán? Mikor diagonizálható egy mátrix? / What is the similarity of matrices? When can you transform a matrix into dyadic form? (10 pont)

   Hasonlóság: Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

   Diagonalizálhatóság: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

   Similarity: We say that the $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is similar to the matrix $\mathbf{B}$ if there exists an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Notation: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

   Diagonalizability: The $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable if it is similar to a diagonal matrix, i.e., if there exists a diagonal matrix $\mathbf{\Lambda}$ and an invertible matrix $\mathbf{C}$ such that $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

9. Mik azok ortogonális és a Hermite-féle mátrixok? / What are the orthogonal and the Hermite matrices? (10 pont)

   Ortogonális mátrix: Egy valós négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

   Hermite, vagy önadjungált mátrixok: Ahogyan a transzponált fogalmának – a komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, úgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Egy mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a saját transzponáltjával, és önadjungált, ha megegyezik a saját adjungáltjával. Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

Az önadjungált mátrixokat Hermite-féle mátrixnak is nevezik. Egy önadjungált mátrix főátlójában csak valós számok állhatnak, mert csak ezek egyeznek meg saját konjugáltjukkal. Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, mivel a valós számok megegyeznek a saját konjugáltjukkal.

Orthogonal matrix: A real square matrix is called orthogonal if its column vectors or row vectors form an orthonormal system.

Hermitian, or self-adjoint matrices: Just as the complex conjugate is the extension of the transpose (considering the complex scalar product), the self-adjoint matrix is the extension of the symmetric matrix. A symmetric matrix is equal to its own transpose, while a self-adjoint matrix is equal to its own complex conjugate. A complex matrix $\mathbf{A}$ is Hermitian if $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$. Self-adjoint matrices are also called Hermitian matrices. The diagonal of a self-adjoint matrix contains only real numbers, as only real numbers are equal to their own conjugate. Every real symmetric matrix is self-adjoint since real numbers are equal to their own conjugate.

10. Mi az a Fourier-transzformáció? Milyen kapcsolatban van a konvolúcióval? Csak szövegesen válaszoljon, ne használjon képletet! Ha tud, akkor rajzoljon. / What is the Fourier Transformation? What is its realationship with convulution? Answer in essay form, do use not formulas. Draw some scetch if you can. (10 pont)

    Tetszőleges hullám (függvény) felbontható szinuszhullámok összegére, amelyeknek különböző hullámhossza (periódusa) és amplitúdója van, illetve ilyen hullámokból tetszőleges hullámforma előállítható. Ezt nevezzük Fourier- és inverz Fourier-transzformációnak. A gyakorlatban diszkrét mintákkal dolgozunk, ezért integrálok és folytonos függvények helyett diszkrét értékekkel számolunk. Ezt nevezzük diszkrét Fourier-transzformációnak (DFT), illetve inverz diszkrét Fourier-transzformációnak (IDFT).

    A konvolúció két paraméter egymástól valófüüggését fejezi ki. Ha Fourier-transzformáljuk a két paraméter függéssét, akkor a frekvenciatérben a konvolúcióból egyszerű szorzás lesz. Így sokszor a konvolúció közvetlen kiszámításánál egyszerűbb Fourier-transzofrmálni, szorozni a hullámtérben, majd inverz Fourier-transzformálni az erdeményt

    Every wave (function) can be decomposed into a sum of sine waves with different wavelengths (periods) and amplitudes. Conversely, any waveform can be constructed from such waves. This process is called the Fourier Transform and the Inverse Fourier Transform. In practice, we work with discrete samples, so instead of integrals and continuous functions, we use discrete values. This is referred to as the Discrete Fourier Transform (DFT) and the Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT).

    Convolution describes the interaction between two functions. If you apply the Fourier Transform to these functions, their convolution becomes a simple multiplication in the frequency domain. Therefore, it is often easier to apply the Fourier Transform, multiply the transformed functions, and then apply the Inverse Fourier Transform, rather than calculating the convolution directly.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Grades: 0–40 points: Fail (1), 41–55 points: Sufficient (2), 56–70 points: Satisfactory (3), 71–85 points: Good (4), 86–100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gábor FACSKÓ
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. június 4. / June 4, 2025