



# (PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

*facskog@gamma.ttk.pte.hu*

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.  
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.  
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2024. október 3.

## A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására

- ▶ A Gauss-elimináció célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.
  1. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy  $\alpha_{11} \neq 0$ . (Sorcseré esetén a determináns előjele megváltozik)
  2. Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy  $\alpha_{21}, \alpha_{32}, \dots, \alpha_{n1} = 0$  legyen.
  3. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy  $\alpha_{22} \neq 0$ .
  4. A második sor alkalmas konstansszorosát a 3, 4,  $\dots$ ,  $n$ . sorokhoz adva elérjük, hogy  $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \dots, \alpha_{n2} = 0$  legyen.

Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

# Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek I

- ▶ Definíció: Legyen  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V^3$  és  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  vektorok  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  együtthatókkal vett lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- ▶ Definíció: Egyenletek lineáris kombinációja alatt azok valamely valós együtthatókkal vett összegét értjük.
- ▶ Definíció: Legyenek  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$  és  $\beta_i \in \mathbb{R}$ , ahol  $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$  és  $m, n \in \mathbb{N}^+$ . Az alábbi egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned} \right\}$$

## Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek II

- Definíció: A lineáris egyenletrendszer alaplátrixa (együtthatómlátrixa) alatt a következőt értjük:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

# Gauss-féle eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására

- ▶ Definíció: Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az összes megoldásaik halmaza megegyezik.
- ▶ Tétel: Az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert egy vele ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:
  1. Egy egyenlet szorzása  $\lambda \neq 0$ -val.
  2. Egy egyenlet  $\lambda$ -szorosának hozzáadása egy másik egyenlethez, ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja
  4. Egyenletek sorrendjének felcserélése
  5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt.

A lineáris egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldása azt jelenti, hogy a fenti átalakításokkal trapéz alakúra hozzuk azt. (Cél:  $\alpha_{ij} = 0$  minden  $i > j$  esetén.)

## Cramèr szabály I

- ▶ Ha az  $n$  egyenletből álló  $n$  ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ( $\det(A) \neq 0$ ), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|}, \quad (k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}^+)$$

ahol

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \beta_n & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

azaz a  $k$ -adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

## Cramèr szabály II

- ▶ Igaz továbbá, hogy ha  $\det(A) = 0$ , de  $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$  úgy, hogy  $\Delta_k \neq 0$ , akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ám  $\det(A) = \Delta_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) esetén lehet végtelen sok vagy 0 megoldás.

# Vége

Köszönöm a figyelmüket!