(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. szeptember 12.

Egységvektor I

- Definíció: Egységvektornak nevezzük azon vektorokat, melyek hossza 1. Tekintsük a térben a következő egységvektorokat, melyeket $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisának is hívunk:
$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = (1,0,0)\,, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\,, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\,.$$
- Állítás: Tetszőleges $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen:
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

  Bizonyítás:
  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$
- Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hosszára fennáll, hogy $|\mathbf{v}| \neq 0$, ezért értelmezhető a normalizáltja:
  Definíció: A $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ vektor normalizáltja, normáltja, vagy irányvektora: $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Egységvektor II

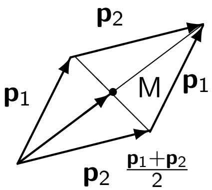
- A normalizált vektor már egységvektor:

$$\left|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\,|\mathbf{v}| = 1.$$

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete I

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontokat összekötő szakasz M felezőpontja a következő pont:

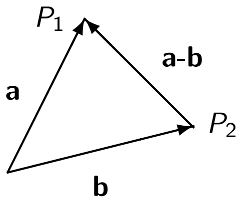
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$



A P_1-be és a P_2-be mutató $\mathbf{p_1}$ és $\mathbf{p_2}$ vektorokkal felrajzoljuk a vektorösszeadást. A két-két vektor egymással párhuzamos, így egy paralelogrammát alkot. A paralelogramma átlói azonban felezik egymást, így az M pont a két vektor összegének a felénél található. Így a képlet igaz.

Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete II

- A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága a P_1 és P_2 végpontú **a**, **b** vektorok különbségeinek a hossza: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

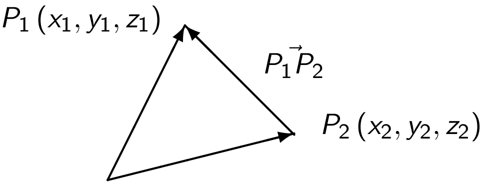


Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete III

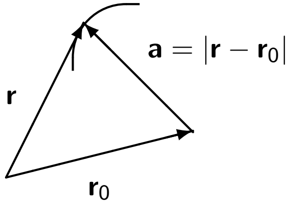
- Állítás: A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bizonyítás: A P_1 és P_2 pontok távolsága a két pontba mutató vektorok különbsége. A különbségvektor hossza pedig a fenti képlet.



Felezőpont, pontok távolsága, gömb egyenlete IV



- Állítás: Az a sugarú és (x_0, y_0, z_0) középpontú gömb egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Bizonyítás: Egy a sugarú, $\mathbf{r}_0$ középpontú gömb azon pontok halmaza a térben ($\mathbf{r}$), amelyek a távolságban vannak $\mathbf{r}_0$-től. Azaz $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. Azaz,
$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a$, vagyis
$\underline{\underline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}}$ $_{q.\ e.\ d.}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai I

- Definíció. Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

  ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
- Vegyük észre, hogy $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.
- A skaláris szorzás tulajdonságai
  1. Állítás: Vektorok skaláris szorzása kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ba}}}$ *q. e. d.*
  2. Állítás: Vektorok skaláris szorzása disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor
     $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta + |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ac} + \mathbf{bc}}}$ *q. e. d.*

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai II

3. Állítás: Vektorok skaláris szorzása homogén, azaz $(\lambda\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és$\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
   Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor
   $(\lambda\mathbf{a})\,\mathbf{b} = |\lambda\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \underline{\underline{\lambda\,(\mathbf{ab})}}$ *q. e. d.*
4. Vektorok skaláris szorzása pozitív definit: $\mathbf{aa} \geq 0$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$ és $\mathbf{aa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A fenti állításokat a következő tétel segítségével is be lehet látni.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai III

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bizonyítás: A skaláris szorzat definíciója és $\cos 90^\circ = 0$, valamint $\cos 0^\circ = 1$ alapján belátjuk, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j. \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Majd kifejtjük a bal oldalt:

$\mathbf{ab} = (\mathbf{a}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = a_1 b_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3 b_1 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 =$
$\underline{\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}}$ $_{q.e.d.}$

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai IV

- Állítás: Két nemnulla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha $\mathbf{ab} = 0$.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ vektorra való merőleges projekciója (vetülete) alatt azon $\mathbf{b}$ irányú vektort értjük, amelynek végpontját az a vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai V

- <u>Állítás:</u> Ha $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$, akkor

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}.$$

- Ha a **b** irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b}.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!