(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. március 5.

Műveletek blokkmátrixokkal I

- Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, ha a mátrixokat blokkokra osztjuk, majd a műveleteket ezekkel kisebb részmátrixokkal végezzük el.
- Ha egy mátrixot vízszintes és függőleges vonalakkal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy ez a mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott blokkmátrix.
- Egy blokkmátrix sorait és oszlopait a mátrix blokksorainak és blokkoszlopainak nevezzük.
- A blokkmátrixokat hipermátrixnak is hívják, de így hívják a többdimenziós tömböket is, ezért inkább blokk mátrixnak hívjuk őket.

Műveletek blokkmátrixokkal II

- Egy egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixa egy két blokkból álló blokkmátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ez 5-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer bővített mátrixa. Az első blokkoszlop a kötött változóknak, a második a szabad változóknak, a harmadik az egyenletrendszer jobb oldalának felel meg, a második blokksor a zérussorokat tartalmazza.

Műveletek blokkmátrixokkal III

- <u>Állítás:</u> (Műveletek blokkmátrixokkal). Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz

$$c\,[\mathbf{A}_{ij}] = [c\mathbf{A}_{ij}]\,, \quad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] = [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}]\,.$$

  Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$ és $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz $\mathbf{C}$ olyan blokkmátrix, melynek i-edik blokksorában és j-edik blokkoszlopában álló blokk

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal IV

- Példa blokkmátrixok szorzására:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{array}\right).$$

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény I

- Bizonyos blokkmátrixműveletek nem származtathatóak egyszerű mátrixműveletekből.
- A *vec* függvény egy tetszőleges mátrixot vektorrá alakít a mátrix oszlopvektorainak egymás alá tételével. Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \ldots | \mathbf{a}_n]$, akkor

$$vec\,(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

Például, ha $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, akkor $vec\,(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény II

- Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. Kronecker-szorzatukon (vagy más néven tenzorszorzatukon) azt az $A \otimes B$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

- Például

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kroneceker-szorzat és a vec-függvény III

- Tétel: (A Kronecker-szorzat tulajdonságai). Adottak az $\mathbf{A}_{m\times n}$, a $\mathbf{B}_{m\times n}$, a $\mathbf{C}_{p\times q}$ és a $\mathbf{D}_{r\times s}$ mátrixok. Ekkor
  1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{C}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{B}$,
  2. $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D}=\mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$,
  3. $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})^T=\mathbf{C}^T\otimes\mathbf{A}^T$.

  Bizonyítás: A definíció alapján, pl. (2):

$$(\mathbf{AXB})_{*j}=\mathbf{AXB}_{*j}=\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}\mathbf{A})\,\mathbf{X}_{*i}=(b_{1j}\mathbf{A}|\ldots|b_{nj}\mathbf{A})\,vec\,(\mathbf{X})=\left(\mathbf{B}^T\otimes\mathbf{A}\right)_{*j}vec\,(\mathbf{X})\,.$$

Hipermátrixok I

- Bizonyos adatok, 2-nél magasabb dimenziós tömbben rendezhetők el jól.
- <u>Definíció:</u> (Hipermátrix). Legyen $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{N}^+$ és legyen S egy tetszőleges halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \ldots$). d-edrendű (vagy d-dimenziós) $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_d$-típusú hipermátrixnak nevezzük az

$$\mathbf{A} : \{1, \ldots, n_1\} \times \{1, \ldots, n_2\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n_d\} \to S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}\,(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ elemet $a_{i_1 i_2 \ldots i_d}$ -vel jelöljük, amely egy d-dimenziós táblázat egy eleme és a mátrixoknál megszokotthoz hasonlóan írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right)_{i_1, i_2, \ldots, i_d}^{n_1, n_2, \ldots, n_d} = 1, \text{vagy egyszerűbben } \mathbf{A} = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right).$$

Ha $n_1 = n_2 = \cdots = n_d = n$, akkor a hiper-kockamátrixról beszélünk.

Hipermátrixok II

- Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_d$ -típusú hipermátrixok halmazát $S^{n_1 \times n_2 \times \dots n_d}$ jelöli.
- A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.
- A 3-adrendű hipermátrixok elemeinek leírását úgy oldhatjuk meg, hogy a harmadik index szerint szeletekre vágjuk. E szeletek mindegyike egy mátrix, melyeket függőleges vonallal elválasztva egymás mellé írunk. Így például a $4 \times 2 \times 3$-típusú hipermátrixok általános alakja

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{array}\right)$$

Hipermátrixok III

- Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása a mátrixokhoz hasonlóan elemenként történik:

$$\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) + \left(b_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d} + b_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right),$$
$$c\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) = \left(c a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right).$$

- <u>Definíció:</u> (Hipermátrix transzponáltja). Legyen π az $\{1, 2, \ldots, d\}$ halmaz egy permutációja. A d-edrendű $\mathbf{A} = \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_d}\right) \in S^{n_1 \times n_2 \times \ldots n_d}$ hipermátrix π-transzponáltján az
$$\mathbf{A}^\pi = \left(a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(d)}}\right) \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \ldots n_{\pi(d)}}$$
hipermátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \cdots \times n}$ hiper-kockamátrix szimmetrikus, ha minden π permutációra $\mathbf{A}^\pi = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A}^\pi = sgn\left(\pi\right)\mathbf{A}$, ahol $sqg\left(\pi\right) = -1$, ha a π páratlan permutáció, és 1, ha páros.

Hipermátrixok IV

- Eszerint a $2 \times 2 \times 2$-es hipermátrixok és szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array}\right)$$

  A $3 \times 3 \times 3$-as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!