(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. március 20.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér I

- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az
$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$
n-edfokú polinomot értjük.
- Állítás: (Háromszögmátrixok sajátértékei). A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér II

- Állítás: (Determináns, nyom és a sajátértékek). Ha az n-edrendű **A** mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \\ trace(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{aligned}$$

  Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.
- Tétel: (A 2×2-es szimmetrikus mátrixok sajátalterei). Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor
  1. **A** minden sajátértéke valós,
  2. **A**-nak pontosan akkor van két azonos sajátértéke, ha $a\mathbf{I}$ alakú, ekkor a sík összes vektora sajátvektor,
  3. ha **A**-nak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér III

- Tétel: (Mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték). Az **A** mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.
- Tétel: (Speciális mátrixok sajátértéke). Legyen **A** egy n-edrendű valós mátrix. Ekkor
  1. ha **A** szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
  2. ha **A** ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!