(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. szeptember 5.

A kurzus célja

- A lineáris algebra fogalmainak és alapvető eljárásainak az elsajátítása
- Egyszerű problémák megoldása a lineáris algebra módszereivel
- Annak felismerése, hogy mikor érdemes a lineáris algebra módszereit használni

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból.
- Mindkét tesztet legalább 40 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni.
- Ha valaki legalább közepest (3) szerez év közben, akkor azt megajánlom neki vizsgajegyként.
- Ha ez nem sikerül, vagy nem tetszik az illetőnek a jegy, akkor tehet írásbeli vizsgát.
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.

Bibliography

Bernard Kolman and David Hill: Elementary Linear Algebra with Applications, 9th ed., Pearson 2007

Philip N. Klein: Coding the Matrix: Linear Algebra through Applications to Computer Science, Newtonian Press 2013

K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence: Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide, Cambridge University Press; 3rd. ed. (2006)

Jánossy Lajos, Tasnádi Péter: Vektorszámítás I.(Vektor- és tenzoralgebra), Tankönyvkiadó Bp. 1980

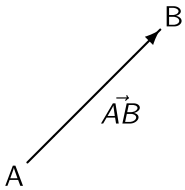
Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: Lineáris algebra fizikusoknak, Szegedi Egyetemi Kiadó 2011

Skalár és vektor mennyiségek

- A skalár mennyiségek irány nélküli mennyiségek. Például: a tömeg (m), a sebesség ($|\mathbf{v}|$, *not* velocity), a hőmérséklet (T), a hosszúság, a térfogat (V), vagy a sűrűség (ρ).
- A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás/lassulás (**a**), a forgás, a körsebesség (ω).
- Figyelem, két fajta vektor létezik:
  - A súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás (**a**).
  - A forgás és a körsebesség (ω).
- A vektorokat lehet vastag betűvel (**v**) , aláhúzással ($\underline{v}$), vagy nyíllal ($\vec{v}$) jelölni.
- Fura asszociáció **François Villon (1431– after 1463)** versére: *"Francia vagyok Párizs városából, mely lábam alatt a piszkos mélybe vész, s most méterhosszan lógok egy nyárfaágról, és nyakamon érzem, hogy seggem míly nehéz."*

A vektorok más meghatározásai I

- A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.



- Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók.
- Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

A vektorok más meghatározásai II

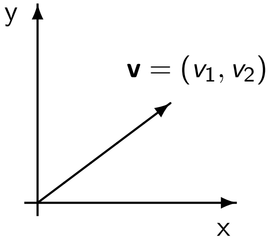
- Ha ezt meg lehet tenni két vektorral, akkor a szabad vektorok osztályához jutunk.
- Definíció: Sík (V^2) vagy térbeli vektoroknak nevezzük (V^3) azt a csoportot, amit párhuzamos eltolással egymásba lehet transzformálni.

Vektorok koordináta reprezentációi I

- Számpárokat, vagy számhármasokat (...) $\mathbb{R}^2$, vagy $\mathbb{R}^3$) meg lehet feleltetni a vektoroknak:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

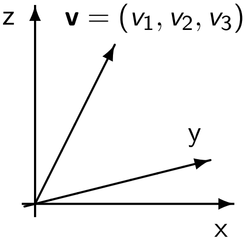
  ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$ a 2D vektor komponensei.



Vektorok koordináta reprezentációi II

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

ahol $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$, $v_3 \in \mathbb{R}$ a vektor komponensei 3D-ben.



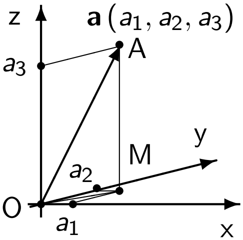
Vektorok egyenlősége és hossza I

- Definíció: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha az origó központú reprezentációik azonosak.
- Azaz $\mathbf{a}\left(a_1, a_2, a_3\right), \mathbf{b}\left(b_1, b_2, b_3\right) \in V^3$ egyenlő, és csak akkor egyenlő, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, és $a_3 = b_3$, ahol $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Vektorok egyenlősége és hossza II

- Állítás: Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektor nagysága, vagy hossza a következő nem nulla szám:

$$|\mathbf{a}| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



Bizonyítás: Az AOM pontok egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol OMA∠-nél van a derékszög. Így Pithagorasz-tétele miatt $|\mathbf{a}| = OM^2 + a_3^2$. Az O, $(a_1, 0, 0)$, $(0, a_2, 0)$ pontok szintén egy derékszögű háromszöget formáznak, ahol a derékszög az $[O, (a_1, 0, 0), (0, a_2, 0)]\angle$ szögnél van, így Pithagorasz-tétele miatt, $OM^2 = a_1^2 + a_2^2$. A két egyenlőséget összevonva $|\mathbf{a}| = OM^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, azaz $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. *q. e. d.*

Vektorok egyenlősége és hossza III

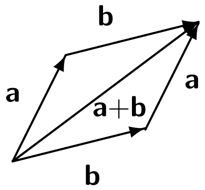
- A null vektornak nincsen se hossza, se iránya: $|\mathbf{0}\,(0,0,0)| = 0$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása I

- <u>Definíció:</u> Vektorok összeadása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$$

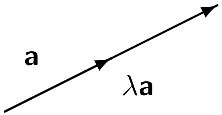
ahol $a_1,\ a_2,\ a_3, b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy adjuk össze, hogy az* $\mathbf{a}$ *végpontjába toljuk a* $\mathbf{b}$*-t. Az összegvektor* $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ *az* $\mathbf{a}$ *kezdőpontjától a* $\mathbf{b}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása II

- Definíció: Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$
Figyelem, gondoljunk bele, mit jelent, ha λ 0, 1, -1, $<$1, vagy $>$1.



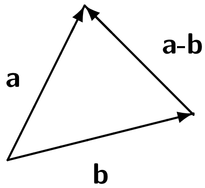
Az $\mathbf{a}$ *vektort egy* λ *skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de* λ*-szoros hosszúságú vektort rajzolunk.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása III

- Definíció: Vektorok kivonása. Ha $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$$

ahol $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \in \mathbb{R}$.



Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektort úgy vonjuk ki, hogy a vektorokat közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *a* $\mathbf{b}$ *végpontjától az* $\mathbf{a}$ *végpontjába tartó vektor lesz.*

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása IV

- Vektorok összegzésének tulajdonságai
  1. Állítás: Vektorok összeadása kommutatív, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$.
     Bizonyítás: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)=(b_1,b_2,b_3)+(a_1,a_2,a_3)=\underline{\underline{\mathbf{b}+\mathbf{a}}}$ *q. e. d.*
  2. Állítás: Vektorok összeadása asszociatív, azaz $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$.
     Bizonyítás: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)]+(c_1,c_2,c_3)=$
     $[(a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,(a_3+b_3)+c_3]=$
     $[a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),a_3+(b_3+c_3)]=$
     $(a_1,a_2,a_3)+[(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)]=\underline{\underline{\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})}}$ *q. e.d.*
  3. Létezik null vektor: $\exists\mathbf{0}\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$.
  4. Minden vektornak van egy inverz vektora: $\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3\ \exists(-\mathbf{a})\in\mathbb{R}^3$, ahol $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása V

- A vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai
  - Állítás: Vektorok skalárral való szorzása asszociatív, azaz $\lambda\left(\mu\mathbf{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda\left(\mu\mathbf{a}\right)=\lambda\left[\mu\left(a_1,a_2,a_3\right)\right]=\lambda\left(\mu a_1,\mu a_2,\mu a_3\right)=\left(\lambda\mu a_1,\lambda\mu a_2,\lambda\mu a_3\right)=\left(\lambda\mu\right)\left(a_1,a_2,a_3\right)=\underline{\underline{\left(\lambda\mu\right)\mathbf{a}}}$ $_{q.e.d.}$
  - Állítás: Vektorok összeadása disztributív a skaláris szorzásra, azaz $\lambda\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3,\lambda\in\mathbb{R}$.
    Bizonyítás: $\lambda\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)=\lambda\left[\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(b_1,b_2,b_3\right)\right]=\lambda\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)=\left[\lambda\left(a_1+b_1\right),\lambda\left(a_2+b_2\right),\lambda\left(a_3+b_3\right)\right]=\left(\lambda a_1+\lambda b_1,\lambda a_2+\lambda b_2,\lambda a_3+\lambda b_3\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)+\left(\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3\right)=\lambda\left(a_1,a_2,a_3\right)+\lambda\left(b_1,b_2,b_3\right)=\underline{\underline{\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}}$ $_{q.\ e.\ d}$

Vektorok összeadása, kivonása és skalárral való szorzása VI

- Állítás: Skalárok összeadása disztributív a vektorral való szorzásra, azaz $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Bizonyítás: $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\,(a_1, a_2, a_3) = [(\lambda + \mu)\,a_1, (\lambda + \mu)\,a_2, (\lambda + \mu)\,a_3] =$
  $(\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) =$
  $\lambda\,(a_1, a_2, a_3) + \mu\,(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}}}$ *q. e. d*
- $\forall \in \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!