(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 12.

Folyó ügyek

- Lefoglaltam az F07-es termet az F épületben 2025. május 15-én, 10:00-től 14:00-ig pótzh írás céljára.
- Akarnak CubeSatot építeni?
- A toborzó előadás a PTE MIK B224-es termében lesz 2025. február 18-án kedde 14:00-től 16:00-ig.
- OTDK szekció Pécsett a tavaszi szünetben.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát kell tenni
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon 2011.
Bártfai Pál: Az n-dimenziós tér lineáris geometriája. Typotex Kiadó 2014.
Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe. Typotex Kiadó 2009.
Martin Cockett, Graham Doggett: Maths for Chemists. 2nd Ed., RSC Publishing 2012.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press 2018. https://vmls-book.stanford.edu/
Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban: Applied Linear Algebra, 2nd Ed., Springer International Publishing AG 2018.
Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 5th Ed., Wellesley-Cambridge Press 2016. https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai I

- Definíció. Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.

- Vegyük észre, hogy $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.
- A skaláris szorzás tulajdonságai
  1. Állítás: Vektorok skaláris szorzása kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ba}}}$ *q. e. d.*
  2. Állítás: Vektorok skaláris szorzása disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$, akkor
     $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta + |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = \underline{\underline{\mathbf{ac} + \mathbf{bc}}}$ *q. e. d.*

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai II

3. Állítás: Vektorok skaláris szorzása homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \lambda\,(\mathbf{ab})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
   Bizonyítás: Ha $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\angle$, akkor
   $(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b} = |\lambda \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta = \lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta = \underline{\underline{\lambda\,(\mathbf{ab})}}$ *q. e. d.*
4. Vektorok skaláris szorzása pozitív definit: $\mathbf{aa} \geq 0$, ahol $\left(\mathbf{a} \in V^3\right)$ és $\mathbf{aa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A fenti állításokat a következő tétel segítségével is be lehet látni.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai III

- <u>Állítás:</u> Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

<u>Bizonyítás:</u> A skaláris szorzat definíciója és $\cos 90^\circ = 0$, valamint $\cos 0^\circ = 1$ alapján belátjuk, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j. \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Majd kifejtjük a bal oldalt:

$\mathbf{ab} = (\mathbf{a}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = a_1 b_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 +$
$a_1 b_3 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3 b_1 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 =$
$\underline{\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}}$ $_{q.e.d.}$

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai IV

- Állítás: Két nemnulla $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor által közrezárt szög megkapható a következőképpen:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (merőlegesek), ha $\mathbf{ab} = 0$.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ vektorra való merőleges projekciója (vetülete) alatt azon $\mathbf{b}$ irányú vektort értjük, amelynek végpontját az a vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektorra bocsátott merőleges határozza meg. Jelölése: $proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Vektorok skaláris szorzása és tulajdonságai V

- Állítás: Ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$, akkor

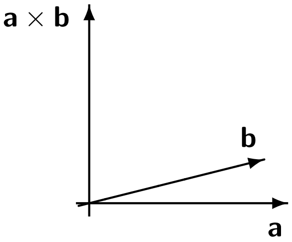
$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}.$$

- Ha a **b** irányvektor egységnyi hosszúságú, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$proj_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{ab})\,\mathbf{b}.$$

Vektoriális szorzat I

- Definíció: Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nemnulla vektorokból álló vektorrendszert jobbrendszernek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180^o-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)



- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
  Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, ahol $(\mathbf{a} \in V^3)$.

Vektoriális szorzat II

- A vektoriális szorzat tulajdonságai
  1. Állítás: A vektoriális szorzás antiszimmetrikus, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: A jobbsodrású rendszer definíciója alapján nyilvánvaló.
  2. Állítás: A vektoriális szorzás homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Bizonyítás: $|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta = \lambda\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, ahol $\theta = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$.
     A vektorok irány pedig megegyezik, mert $\mathbf{a}$ párhuzamos a $\lambda \mathbf{a}$ vektorral.
  3. Állítás: A vektoriális szorzás disszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ahol $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3\right)$.
     Bizonyítás: Később, komponensek alapján.
- Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Jele: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Vektoriális szorzat III

- Bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{a} \in V^3$-re. esetén.
- Ezen felül $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, vagy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ közül legalább az egyik nullvektor.
- Könnyen belátható, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

- Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{e}_3$.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott paralelogramma területével, mivel $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}|\,|\sin\theta|$ a magassága, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\angle$.

Vegyes szorzat

- <u>Definíció:</u> Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

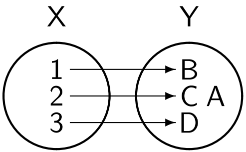
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk.
- Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})\,.$$

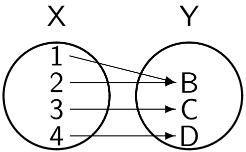
Operátorok I

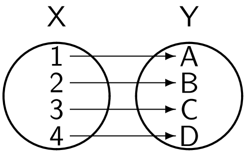
- Definíció: Halmaz dolgok összesége. Alapfogalom. Kell egy kijelentés, ami kollektivizál, azaz ami alapján egyértelműen eldönthető, hogy egy elem része-e a halmaznak.
- Definíció: Párok két elemű halmazok.
- Definíció: Az e_1 és az e_2 elemek rendezett párt alkotnak, ha $\{e_1, \{e_2\}\}$. Ezt (e_1, e_2)-vel jelöljük.
- Definíció: Relációnak rendezett párok halmazát nevezzük.



- Definíció: A injekciónak, injektív relációnak, egy-egy értelmű relációnak vagy kölcsönösen egyértelmű relációnak nevezzük azokat a relációkat, melyek az értelmezési tartomány (X) különböző elemeihez az értékkészlet (Y) különböző elemeit rendelik.

Operátorok II





- Definíció: A ráképezésnek vagy szürjekciónak, illetve szürjektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyeknél a reláció értékkészlete megegyezik a függvény érkezési halmazával.
- Definíció: A bijekciónak vagy bijektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyek egyidejűleg injektívek és szürjektívek. Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy a bijektív leképezések kölcsönösen egyértelmű relációk. Amennyiben az X halmaz összes eleméhez rendel elemet, akkor bijekció olyan megfeleltetést létesít két halmaz között, aminél az egyik halmaz minden egyes elemének a másik halmaz pontosan egy eleme felel meg, és fordítva.

Operátorok III

- Definíció: Függvényen rendezett párok olyan halmazát értjük, amiben első komponensként legfeljebb csak egyszer szerepelhet egy elem:

$$(\forall x)\,(\forall y_1)\,(\forall y_2)\,[(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$$

  Ezt egyértelműségi tulajdonságnak nevezik.
- Definíció: Legyen V és U a $\mathbb{T}$ test feletti két vektortér Az $f : V \to U$ leképezést lineárisnak nevezzük, ha
  1. Additív, azaz minden $v_1, v_2 \in V$ vektora $f\,(v_1 + v_2) = f\,(v_1) + f\,(v_2)$.
  2. Homogén, azaz minden $v \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{T}$ elemre $f\,(\lambda v) = \lambda f\,(v)$.
- Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- Például:
  - Egység operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Null operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.

Operátorok IV

- Tükrözési operátor: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
- Projekció operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
- Forgatási operátor: később.

- Mindkét oldalról lehet szorozni.
- Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

Operátorok V

- A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex (i), a második pedig az oszlopindex (j).
- A mátrix i-edik sorát A_i , j-edik oszlopát pedig A_jj jelölésekkel említjük.
- Determináns!!!

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja I

- <u>Definíció:</u> Az $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T=(\alpha_{ji})_{m\times n}$. Ez az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti. Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözés a transzponálás.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} \quad A^T_{n\times m}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja II

- <u>Definíció:</u> Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja III

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n\times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m\times k}$ mátrixot értjük, ahol

$$\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}.$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja IV

Azaz:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad B_{n\times k} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & \beta_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B_{m\times k} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1k} + \alpha_{12}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{nk} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1k} + \alpha_{22}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{2n}\beta_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta_{11} + \alpha_{m2}\beta_{21} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{n1} & \alpha_{m1}\beta_{12} + \alpha_{m2}\beta_{22} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1k} + \alpha_{m2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{nk} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja V

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
  Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n\times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj})_{n\times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ mátrix, mert b_{ij} definiciója miatt lenulláza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij}.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VI

- Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix esetén tehát értelmezhető a hatványozás:
$$A^1 = A \quad \text{és} \quad A^m = AA^{m-1}$$
ahol $(m \geq 2)$ és $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_m$.
- Állítás: A mátrixhatványozás azonosságai:
$$\begin{aligned} A^m A^k &= A^{m+k} \\ (A^m)^k &= A^{mk}, \end{aligned}$$
ahol $m, k \in \mathbb{N}$.
Bizonyítás: A mátrixszorás definíciója alapján triviális.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VII

- Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.
- Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
  1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  2. Egy vektor λ-szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
  3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
  4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VIII

- A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.
- A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Képfeldolgozás I

$$\begin{bmatrix}
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&6&3&4&5&3&2&2&5&6&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&4&1&0&0&2&2&0&0&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&4&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&3&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&4&1&0&1&2&1&0&0&0&1&2&1&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&2&2&2&2&1&1&0&1&1&3&3&2&1&0&5&9&9&9&9&9&9&9\\
9&5&1&2&3&3&2&1&2&2&4&4&3&2&1&0&3&9&9&9&9&9&9&9\\
9&3&1&3&7&8&7&6&6&5&6&4&3&2&2&0&2&9&9&9&9&9&9&9\\
9&4&1&5&8&8&8&7&6&5&5&4&3&2&2&1&0&6&9&9&9&9&9&9\\
9&5&2&5&8&8&7&6&5&5&5&4&4&3&2&2&1&3&7&9&9&9&9&9\\
9&9&2&3&6&7&7&6&5&5&4&4&4&0&0&0&3&3&5&9&9&9&9&9\\
9&9&5&1&4&6&7&7&7&5&4&3&1&1&1&1&2&3&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&2&2&6&7&5&1&0&2&3&1&2&3&2&2&3&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&1&6&6&1&0&1&1&6&3&2&2&3&3&2&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&3&6&4&2&3&3&5&8&4&3&3&3&2&2&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&5&6&6&7&5&3&7&8&6&3&3&4&3&2&3&7&7&7&7&9\\
9&9&9&9&7&4&7&8&7&5&7&8&8&4&3&4&3&2&3&7&3&3&4&5\\
9&9&9&9&9&7&7&6&6&7&7&6&6&2&2&3&3&3&3&4&3&3&3&5\\
9&9&9&9&9&9&8&6&6&7&5&7&7&2&3&3&2&3&3&3&3&3&3&4\\
9&9&9&9&9&5&3&5&6&7&5&7&7&4&2&1&3&3&2&3&3&3&3&3\\
9&9&9&8&6&1&3&7&6&6&5&4&3&2&3&3&3&3&3&3&3&4&4&3\\
9&9&9&7&5&3&2&7&8&6&5&4&6&4&2&3&3&2&3&3&3&4&4&3\\
9&9&7&6&5&4&2&7&8&7&6&4&4&4&6&4&3&1&4&4&6&6&6&6\\
9&8&7&6&4&4&3&7&8&8&6&6&3&5&3&1&0&1&6&8&7&6&6&5\\
8&8&7&5&4&3&4&7&8&8&6&2&2&0&1&2&3&8&7&7&7&7&7&6\\
8&8&7&5&4&3&4&6&8&8&6&5&2&0&1&1&6&8&8&7&7&6&5&3\\
8&8&8&5&4&4&4&4&7&8&5&5&3&3&1&3&8&8&8&6&6&5&6&4\\
8&8&8&7&5&4&4&4&6&8&7&5&2&2&5&8&8&8&8&7&6&3&3&2\\
6&8&7&5&6&5&4&3&4&7&7&7&4&4&7&8&8&8&8&7&6&7&6&4\\
4&7&6&4&4&6&5&4&4&5&6&7&7&7&7&8&8&8&8&8&6&4&2&3\\
6&4&7&5&3&4&6&4&4&4&5&7&8&6&8&8&8&8&7&4&2&1&2&3
\end{bmatrix}$$

- Az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix egy $m \times n$ greyscale képállomány reprezentációja.
- Minden mátrix elem megad egy színt a $\{0, 1, \ldots, k\}$ intervallumban, ahol 0 a fekete, $k-1$ a fehér és k átlátszóságot jelent.
- A $\mathbf{B}_{m\times n}$ mátrix a háttér.
- A $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [a_{ij} \odot b_{ij}]$ műveletet keressük, ami a második képet bemásolja az első kép hátterébe.
- Képlettel: $[a_{ij} \odot b_{ij}] = \begin{cases} b_{ij}, & \text{if } a_{ij} = k. \\ a_{ij}, & \text{otherwise.} \end{cases}$
- Használéljuk a $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ függvényt, ami lefelé kerekít.
- Ha $a \in [0, k]$, akkor $0 \leq a/k \leq 1$, így $\lfloor a/k \rfloor$ az 0, vagy 1.

Képfeldolgozás II

$$\begin{bmatrix}
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&6&3&4&5&3&2&2&5&6&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&4&1&0&0&2&2&0&0&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&4&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&3&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&4&1&0&1&2&1&0&0&0&1&2&1&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&2&2&2&2&1&1&0&1&1&3&3&2&1&0&5&9&9&9&9&9&9&9\\
9&5&1&2&3&3&2&1&2&2&4&4&3&2&1&0&3&9&9&9&9&9&9&9\\
9&3&1&3&7&8&7&6&6&5&6&4&3&2&2&0&2&9&9&9&9&9&9&9\\
9&4&1&5&8&8&8&7&6&5&5&4&3&2&2&1&0&6&9&9&9&9&9&9\\
9&5&2&5&8&8&7&6&5&5&5&4&4&3&2&2&1&3&7&9&9&9&9&9\\
9&9&2&3&6&7&7&6&5&5&4&4&4&0&0&0&3&3&5&9&9&9&9&9\\
9&9&5&1&4&6&7&7&7&5&4&3&1&1&1&1&2&3&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&2&2&6&7&5&1&0&2&3&1&2&3&2&2&3&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&1&6&6&1&0&1&1&6&3&2&2&3&3&2&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&3&6&4&2&3&3&5&8&4&3&3&3&2&2&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&5&6&6&7&5&3&7&8&6&3&3&4&3&2&3&7&7&7&7&9\\
9&9&9&9&7&4&7&8&7&5&7&8&8&4&3&4&3&2&3&7&3&3&4&5\\
9&9&9&9&9&7&7&6&6&7&7&6&6&2&2&3&3&3&3&4&3&3&3&5\\
9&9&9&9&9&9&8&6&6&7&5&7&7&2&3&3&2&3&3&3&3&3&3&4\\
9&9&9&9&9&5&3&5&6&7&5&7&7&4&2&1&3&3&2&3&3&3&3&3\\
9&9&9&8&6&1&3&7&6&6&5&4&3&2&3&3&3&3&3&3&3&4&4&3\\
9&9&9&7&5&3&2&7&8&6&5&4&6&4&2&3&3&2&3&3&3&4&4&3\\
9&9&7&6&5&4&2&7&8&7&6&4&4&4&6&4&3&1&4&4&6&6&6&6\\
9&8&7&6&4&4&3&7&8&8&6&6&3&5&3&1&0&1&6&8&7&6&6&5\\
8&8&7&5&4&3&4&7&8&8&6&2&2&0&1&2&3&8&7&7&7&7&7&6\\
8&8&7&5&4&3&4&6&8&8&6&5&2&0&1&1&6&8&8&7&7&6&5&3\\
8&8&8&5&4&4&4&4&7&8&5&5&3&3&1&3&8&8&8&6&6&5&6&4\\
8&8&8&7&5&4&4&4&6&8&7&5&2&2&5&8&8&8&8&7&6&3&3&2\\
6&8&7&5&6&5&4&3&4&7&7&7&4&4&7&8&8&8&8&7&6&7&6&4\\
4&7&6&4&4&6&5&4&4&5&6&7&7&7&7&8&8&8&8&8&6&4&2&3\\
6&4&7&5&3&4&6&4&4&4&5&7&8&6&8&8&8&8&7&4&2&1&2&3
\end{bmatrix}$$

- Másképpen $\lfloor a/k \rfloor$ az 1, akkor és csak akkor, ha $a = k$, avagy a pixel transzparens, különben 0.
- $1 - \lfloor a/k \rfloor$ az 0, akkor és csak akkor, ha $a = k$, vagy különben 1.
- Ennélfogva,

$$a \odot b = \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor b + \left(1 - \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor\right) a$$

  a keresett művelet.
- (Fent) 32×24 mátrix. (Lent balra) Eredeti kép. (Lent középen) Háttér. (Lent jobbra) A művelet eredménye.

Impulzus momentum

- Tömeg, megszorozva a tengelytől vett távolság négyzetével.
- N pontból álló merev testek m_k tömeggel az impulzus momentum tenzor:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

ahol

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\|\mathbf{r}_k\|^2 \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)} \right)$$

és $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{r}_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \right)$ a vektor az m_k tömeghez a ponttól, ahol a tenzort számoljuk. Végül δ_{ij} a Kronecker delta.

Transzformációs mátrixok I

- Forgási mátrix 2D-ben:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Forgatási mátrixok 3D-ben z, x, y tengelyek körül:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Vektorok tükrözés az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre a síkban:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Transzformációs mátrixok II

- Vektorok tükrözése 3D-ben az **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^T.$$

- Merőleges projekció a **b** irányvektorral adott egyenesre:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}^T.$$

- Merőleges projekció a **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^T.$$

Transzformációs mátrixok III

- Eltolás az (a, b) vektorral a síkban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Eltolás az (a, b, c) vektorral a térben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hamarosan. . .

- Diagonális mátrixok
- Permutációs mátrixok
- Háromszög mátrixok
- Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok

Vége

Köszönöm a figyelmüket!