(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. április 17.

Ütemterv I

- **Már csak néhány óránk lesz: 2025. április 17 és május 8.**
- Alterek összege és direkt összege. ~~Faktortér.~~
- Képtér. Magtér. Dimenziótétel.

Vektortér I

- Definíció: A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy $+$-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V)\\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V)\\
\exists \mathbf{0}\in V \mathrm{úgy, hogy}\quad \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a}\quad \forall \mathbf{a}\in V\quad \mathrm{esetén}\\
\forall \mathbf{a}\in V \exists\,(-\mathbf{a})\in V : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

Vektortér II

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda\mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\,\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\ (\lambda+\mu)\,\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V\ \mathrm{és}\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ \forall\mathbf{a} \in V{-}\mathrm{re} 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert V^2 és V^3 halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, a valós szám-n-esek halmaza, illetve a legfeljebb n-edfokú polinomok $R_n[x]$ halmaza is.

Vektortér III

- Definíció: A V vektortér L nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel.
- Tétel: A V vektortér L nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad & \text{esetén} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \in L \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in L \quad & \text{esetén} \quad \lambda \mathbf{a} \in L. \end{aligned}$$

- Definíció: Legyen $H \neq \emptyset$ részhalmaza a V vektortérnek. A H által generált altér az a legszűkebb altere V-nek, mely tartalmazza H-t. (Azaz bármely H-t tartalmazó altérnek részhalmaza.) Jele: $\mathcal{L}(H)$.
- Mindig létezik H-t tartalmazó legszűkebb altér: tekintsük a H-t tartalmazó összes alterek metszetét.

Vektortér IV

- Definíció: A H halmaz generátorrendszere a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.
- Definíció: A V vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.
- Megjegyzés: A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált V vektortérnek, ha a V halmaz minden eleme felírható a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.
- Definíció: A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük.
- Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.
- Definíció: A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Jele: $dim(V)$.

Vektortér V

- Definíció: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis V -ben és $\mathbf{a} \in V$. Ekkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat, amelyekre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, az $\mathbf{a}$ vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.
- Az $L = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmaz éppen az $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ által generált lineáris altér. Amennyiben $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ lineárisan függetlenek, az L halmaz egy m-dimenziós lineáris altér. Ekkor a $K = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m + \mathbf{v} : \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \in \mathbb{R}\}$ halmazt egy m-dimenziós affin altérnek nevezzük. Minden affin altér előáll $K = L + \mathbf{v}$ alakban, ahol L egy lineáris altér és $\mathbf{v} \in V$.
- Definíció: Halmazok (Minkowski-)összege: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
- Állítás: Alterek összege és metszete: $L_1 + L_2$ és $L_1 \bigcap L_2$ is altér.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$ direkt összeget alkot, ha $L_1 \bigcap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Képtértér, magtér I

- Minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozik egy $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés. E leképezéseket lineáris leképezéseknek nevezük.
- A mátrixleképezés fogalma Mátrixhoz tartozó leképezésen, vagy egyszerűen mátrixleképezésen az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést értjük, ahol $\mathbf{A}$ egy mátrix. Egy $m \times n$-es $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.
- A mátrixok jelölésére félkövér betűket használunk, a leképezésekére dőlt (kurzív) betűket. A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy egy mátrixhoz tartozó mátrixleképezést ugyanannak a betűnek a dőlt változatával jelöljük, például az A mátrixhoz tartozó mátrixleképezést A jelöli, azaz

$$A : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Az $A(\mathbf{x})$ mellett az $A\mathbf{x}$ jelölés is használatos.

Képtértér, magtér II

- Az A leképezés értékkészletét $\mathrm{Im}(A)$ jelöli, mely az $\mathbb{R}^m$ altere. Ezt szokás képtérnek is nevezni, minthogy ez az $\mathbb{R}^n$ tér képe. Ez megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterével, azaz $\mathcal{O}\left(\mathbf{A}\right)$-val.
- Azoknak a vektoroknak az alterét, melyet A a nullvektorba visz, az A leképezés magterének nevezzük. Magtérre a kernel szó is használatos. $\mathrm{Ker}(A)$-val jelöljük. Ez megegyezik a hozzá tartozó $\mathbf{A}$ mátrix nullterével. Tehát

$$Im\left(A\right)=\mathcal{O}\left(\mathbf{A}\right),\ Ker\left(A\right)=\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right).$$

- Az Im rövidítés a kép jelentésű image, a Ker a mag jelentésű kernel szóból származik.

Képtértér, magtér III

- (Vektori szorzással definiált mátrixleképezés). Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Legyen A az a transzformá- ció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

  Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
  Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{xy} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}$$

Képtértér, magtér IV

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixleképezés, hisz **y** minden koordinátája **x** koordinátáinak lineáris kifejezése. A szorzatot **x** koordinátái szerint rendezzük, ahonnan azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, amit a továbbiakban $(\mathbf{a})_\times$ jelöl. Segítségével fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -a_3x_2 + a2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Képtértér, magtér V

- Definíció: (Nulltér). Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.
- Definíció: (Sortér, oszloptér). Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük. A sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ jelöli.
- Tétel: (Dimenziótétel (rang-nullitási tétel)). Bármely valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:

$$dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n \;\; (r(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = n).$$

Bizonyítás: A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával. Megmutatjuk, hogy a nulltér dimenziója megegyezik a szabad változók számával, így e két szám összege valóban n, ami bizonyítja az állítást.

Képtértér, magtér VI

Elég tehát megmutatnunk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer redukált lépcsős alakkal előállított megoldásában a szabad változók száma megegyezik a nulltérből kiválasztható bázis elemszámával.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahol $x_2 = s$, $x_4 = t$ és $x_5 = u$ a három szabad változó. A nullteret kifeszítő három vektor közül az elsőben $x_2 = 1$, de az összes többiben $x_2 = 0$, így az első vektor független a többitől. Hasonlóképp általában is igaz, hogy a redukált lépcsős

Képtértér, magtér VII

alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egyet kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!