VII. BÁZISOK

14. Adja meg meg az $\mathbf{a} = (1,0,0)$, a $\mathbf{b} = (0,1,0)$ és a $\mathbf{c} = (0,1,0)$ vektorokat az $(-1,0,2)$; $(0,-1,3)$; $(-2,1,1)$ bázisban.
15. Adja meg meg az $\mathbf{a} = (1,-1,2)$ vektort az $(-1,1,0)$; $(1,1,0)$; $(0,0,1)$ bázisban.
16. Adja meg meg az $\mathbf{a} = (-1,1,-2)$ vektort az $(-1,1,1)$; $(0,1,0)$; $(2,3,1)$ bázisban.

VIII. SÍKOK EGYENLETE

17. Adja meg a következő pontokon átmenő sík egyenletét: $A\,(1,2,3)$, $B\,(-1,1,0)$, $C\,(3,3,6)$.
18. Adja meg a következő pontokon átmenő sík egyenletét: $A\,(1,0,3)$, $B\,(1,1,0)$, $C\,(3,3,0)$.
19. Adott a $2x-3y+z=1$ sík és az $x-2y-z=4$ egy egyenes. Állapítsuk meg, metszik-e egymást, és ha igen, mi a metszéspontjuk!
20. Adott a $4x+y-3z=2$ sík és az $x-y+z=-5$ egy egyenes. Állapítsuk meg, metszik-e egymást, és ha igen, mi a metszéspontjuk!
21. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A\,(3,-1,0)$ és $B\,(-1,2,1)$ pontokra és merőleges a $2x-y+z=5$ síkra!
22. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A\,(0,-1,3)$ és $B\,(1,2,-1)$ pontokra és merőleges az $x-y+2z=5$ síkra!
23. Határozza meg a $4x-2y+3z+13=0$, $4y-5x+2z-12=0$ és $6x-4y-5z+11=0$ síkok közös pontjának koordinátáit!
24. Határozza meg a $2x+y-3z-7=0$, $-y-4x+5z+9=0$ és $6x-2y-z+10=0$ síkok közös pontjának koordinátáit!

IX. SAJÁTÉRTÉK PROBLÉMA

25. Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és a saját altereket, majd diagonizálja a mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

X. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

26. Az alábbi leképezések közül melyik lineáris? Adja meg a leképezés mátrixát is!

a.)

$$f\,(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 + 3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right)$$

b.)

$$g\,(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\right)$$

c.)

$$h\,(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_3 + 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right)$$

d.)

$$l\,(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 x_2 \\ 3x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\right)$$

XI. BÁZISTRANSZFORMÁCIÓK

27. Írja át az alábbi vektorokat ortogonális bázissá a Gram-Schmidt ortogonalizáció segítségével!

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\\1\\5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

28. Írja át az alábbi vektorokat ortogonális bázissá a Gram-Schmidt ortogonalizáció segítségével!

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. május 2.