(PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2024. november 14.

Folyó ügyek

- A dolgozatok fogadóórán megtekinthetők (vagy csütörtök délután, a gyakorlat után).
- Pótzh decemberben lesz. Lehet jönni elégségesért, vagy javítani mindkét zárthelyit.
- Az első héten meg kellene iratnom – eléggé bele fogok zöldülni a javításba.
- A probléma a közép- és általános iskolai tudással van.
- Szíven ütött, hogy nem mentek a vektorműveletek és a vegyesszorzat.
- A Sarrus-szabály 2×2-es és 3×3-as mátrixokra alkalmazható. Gyorsabb a kifejtési tételnél. 4×4-es mátrixra nem alkalmazható.
- A Cramer-szabállyal nehezebb elrontani a lineáris egyenletrendszerek megoldását.

Lineáris transzformációk I

- Definíció: Legyenek V_1 és V_2 lineáris vektorterek. A $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \text{additív} : \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \varphi(\mathbf{a})+\varphi(\mathbf{b}) \\ \text{és homogén} : \varphi(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda\varphi(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: (Mátrixreprezentáció) A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ úgy, hogy $\varphi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Definíció: Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.
- Definíció: Lineáris formának nevezzük az $f : V \to \mathbb{R}$ alakú lineáris leképezéseket.

Lineáris transzformációk II

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés bilineáris forma, ha mindkét változójában lineáris, azaz

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{z}) + L(\mathbf{y},\mathbf{z}) \\
L(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
L(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{y}) + L(\mathbf{x},\mathbf{z}) \\
L(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés akkor és csak akkor bilineáris forma, ha (egy adott bázisra vonatkozóan) egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ számok, hogy $L(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i y_k$.

Lineáris transzformációk III

- Tekintsük most $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektorrendszert. Látható, hogy ekkor $\alpha_{ik} = L(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$. Az $A = (\alpha_{ik})_{n \times n}$ mátrixot az L bilineáris forma (kanonikus bázisra vonatkozó) mátrixának nevezzük.
- Definíció: Az L bilineáris forma szimmetrikus, ha $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- Definíció: Legyen L egy szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren. Ekkor a $Q(x) = L(x, x)$ függvényt kvadratikus formának nevezzük.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus forma pozitív definit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) > 0$.
  Megjegyzés: Q pozitív szemidefinit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ és $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, hogy $Q(\mathbf{y}) = 0$. A negatív definit és negatív szemidefinit fogalmak hasonlóan vezethetők be.

Lineáris transzformációk IV

- Definíció: Az olyan szimmetrikus bilineáris formát, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit, belső szorzatnak nevezzük.
  Pl. a $\mathbb{R}^3$ térben a skaláris szorzat egy belső szorzat.
- A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha az bijektív is.
- Belátható, hogy két vektortér akkor és csak akkor izomorf egymással, ha dimenziójuk megegyezik:

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!