(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. február 13.

Folyó ügyek

- Lefoglaltam az F07-es termet az F épületben 2025. május 15-én, 10:00-től 14:00-ig pótzh írás céljára.
- Akarnak CubeSatot építeni?
- A toborzó előadás a PTE MIK B224-es termében lesz 2025. február 18-án kedde 14:00-től 16:00-ig.
- OTDK szekció Pécsett a tavaszi szünetben.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A két teszt alapján gyakorlati jegyet kapnak
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát lehet tenni, ha megszerezték az érvényes gyakorlati jegyet
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15.

Bibliography

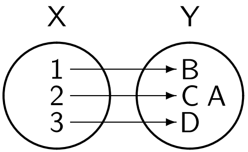
FREUD R. 2004: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

P. D. LAX. 2008: Lineáris algebra és alkalmazásai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

GYÉMÁNT I., GÖRBE T. F. 2011, Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon Jegyzettár, Szeged.

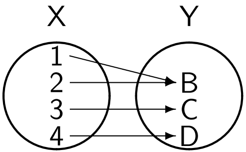
Operátorok I

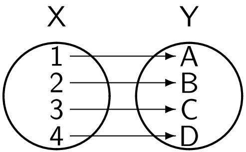
- Definíció: Halmaz dolgok összesége. Alapfogalom. Kell egy kijelentés, ami kollektivizál, azaz ami alapján egyértelműen eldönthető, hogy egy elem része-e a halmaznak.
- Definíció: Párok két elemű halmazok.
- Definíció: Az e_1 és az e_2 elemek rendezett párt alkotnak, ha $\{e_1, \{e_2\}\}$. Ezt (e_1, e_2)-vel jelöljük.
- Definíció: Relációnak rendezett párok halmazát nevezzük.



- Definíció: A injekciónak, injektív relációnak, egy-egy értelmű relációnak vagy kölcsönösen egyértelmű relációnak nevezzük azokat a relációkat, melyek az értelmezési tartomány (X) különböző elemeihez az értékkészlet (Y) különböző elemeit rendelik.

Operátorok II





- Definíció: A ráképezésnek vagy szürjekciónak, illetve szürjektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyeknél a reláció értékkészlete megegyezik a függvény érkezési halmazával.
- Definíció: A bijekciónak vagy bijektív relációnak nevezzük azokat a relációkat, amelyek egyidejűleg injektívek és szürjektívek. Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy a bijektív leképezések kölcsönösen egyértelmű relációk. Amennyiben az X halmaz összes eleméhez rendel elemet, akkor bijekció olyan megfeleltetést létesít két halmaz között, aminél az egyik halmaz minden egyes elemének a másik halmaz pontosan egy eleme felel meg, és fordítva.

Operátorok III

- Definíció: Függvényen rendezett párok olyan halmazát értjük, amiben első komponensként legfeljebb csak egyszer szerepelhet egy elem:

$$(\forall x)\,(\forall y_1)\,(\forall y_2)\,[(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$$

  Ezt egyértelműségi tulajdonságnak nevezik.
- Definíció: Legyen V és U a $\mathbb{T}$ test feletti két vektortér Az $f : V \to U$ leképezést lineárisnak nevezzük, ha
  1. Additív, azaz minden $v_1, v_2 \in V$ vektora $f\,(v_1 + v_2) = f\,(v_1) + f\,(v_2)$.
  2. Homogén, azaz minden $v \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{T}$ elemre $f\,(\lambda v) = \lambda f\,(v)$.
- Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- Például:
  - Egység operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Null operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.

Operátorok IV

- Tükrözési operátor: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
- Projekció operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
- Forgatási operátor: később.

- Mindkét oldalról lehet szorozni.
- Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

Operátorok V

- A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex (i), a második pedig az oszlopindex (j).
- A mátrix i-edik sorát A_i , j-edik oszlopát pedig A_jj jelölésekkel említjük.
- Determináns!!!

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T = (\alpha_{ji})_{m\times n}$. Ez az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti. Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözés a transzponálás.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja II

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja III

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n\times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m\times k}$ mátrixot értjük, ahol

$$\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}.$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja IV

Azaz:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} \qquad B_{n\times k}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1k}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & \beta_{nk}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B_{m\times k}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1k}+\alpha_{12}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{nk}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{1k}+\alpha_{22}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{nk}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}\beta_{11}+\alpha_{m2}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n1} & \alpha_{m1}\beta_{12}+\alpha_{m2}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1k}+\alpha_{m2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{nk}\end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja V

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
  Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n \times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj})_{n \times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrix, mert b_{ij} definiciója miatt lenulláza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij}.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VI

- Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix esetén tehát értelmezhető a hatványozás:

$$A^1 = A \quad \text{és} \quad A^m = AA^{m-1}$$

  ahol $(m \geq 2)$ és $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_m$.
- Állítás: A mátrixhatványozás azonosságai:

$$\begin{aligned} A^m A^k &= A^{m+k} \\ (A^m)^k &= A^{mk}, \end{aligned}$$

  ahol $m, k \in \mathbb{N}$.
  Bizonyítás: A mátrixszorás definíciója alapján triviális.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VII

- Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.
- Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
    1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
    2. Egy vektor λ-szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
    3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
    4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VIII

- A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.
- A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!