

(MATNA1901) Lineáris algebra vizsga

1. Adja meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? (10 pont)

Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.

Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

2. Határozza meg a determináns fogalmát! (10 pont)

Leibnitz-féle definíció: Ha az \mathbf{A} mátrix $n \times n$ -es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az \mathbf{A} mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \dots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jelöli az (i_1, i_2, \dots, i_n) permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det(\mathbf{A}), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|.$$

Axiomatikus definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ezt a $\det(\mathbf{A})$ függvényt az $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix determinánsának hívjuk, ha

- (a) Homogén: $\det(\dots \lambda_i \mathbf{a}_i \dots) = \lambda_i \det(\dots \mathbf{a}_i \dots)$;
- (b) Additív $\det(\dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}_i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}_i \dots)$;
- (c) Alternáló: $\det(\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots)$;
- (d) Az egység mátrix determinánsa 1: $\det(\mathbf{E}_n) = 1$,

ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}^{n \times n}$ mátrix oszlop vektorai. Ezt a leképezést egy n változós függvénynek tekinthetjük a mátrix oszlopai felett: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ezek az axiómák egyértelműen meghatározzák a leképezést. Egy másik $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ezekkel a tulajdonságokkal azonos a \det -tel. Másképpen, a mátrix egyértelműen hozzá lehet rendelni egy értéket ezekkel a szabályokkal. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor a determináns n^{th} -ed rendű. A determináns egy funkcionál. Ez egy olyan leképezés, amely skalárt rendel egy függvényhez.

3. Adja meg az $|\mathbf{A}|$ és a $|\mathbf{B}|$ determinánsok értékét anélkül, hogy számolna!

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Mindkét determináns értéke nulla, mivel az \mathbf{A} determinánsnak két sora, a \mathbf{B} determinánsnak pedig két szlopa megegyezik.

4. Definiálja egy $n \times n$ -es valós elemű mátrix inverzét, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$. (10 pont)

Az $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times n}$, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}_n$. Az \mathbf{A} mátrix inverzét \mathbf{A}^{-1} -gyel jelöljük.

5. Mikor mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek? (10 pont)

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

6. Mit jelent egy vektortér lineáris altere? (10 pont)

A V vektortér L nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha L maga is vektortér a V -beli műveletekkel.

7. Mit értünk egy mátrix sajátértékén, sajátvektorán és sajátalterén? (10 pont)

Legyen V egy vektortér \mathbb{R} felett. Legyen $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ -re $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy \mathbf{a} sajátvektora φ -nek és λ az \mathbf{a} -hoz tartozó sajátértéke φ -nek.

Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}\}$ a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ -hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

8. Mit jelent a mátrix diagonális alakja? Mikor diagonalizálható egy mátrix? (10 pont)

A mátrix diagonális alakja azt jelenti, hogy csak a főátlóban találhatóan nem nulla elemek.

Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható \mathbf{C} mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$.

9. Adja meg a következő lineáris transzformációk sajátértékét, sajátalterét és diagonális alakját: a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre, a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre, a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül olyan szöggel, amely nem egész számú többszöröse 180° -nak, a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra, valamint a tér vektorainak tükrözése egy síkra. (10 pont)

Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.

- A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).
- A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).
- A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a 180° egész számú többszörösétől különböző szöggel.
- A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.
- A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Minden transzformáció lineáris.

- Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok men-

nek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek pedig a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. A pontosra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen \mathbf{a} , egy rá merőleges, nemnulla vektor legyen \mathbf{b} . Ekkor $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{T}\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, ahol \mathbf{T} a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a nullvektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

Az egyenes, amelyre vetítünk, egyik irányvektora legyen \mathbf{a} , egy rá merőleges, nemnulla vektor legyen \mathbf{b} . Ekkor $\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ahol \mathbf{P} a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik a 180° egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyel párhuzamos vektorokból áll.

Ennek a leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajátaltér van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (invariáns altérnek tekinthető), így ennek bázisával egy "diagonálishoz közeli" alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora \mathbf{a} , a rá merőleges sík ortonormált bázisa pedig $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a \mathbf{b} vektor 90° -kal való elforgatottja éppen \mathbf{c} , akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató \mathbf{F} leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\mathbf{F}\mathbf{b} = \cos \alpha \mathbf{b} + \sin \alpha \mathbf{c}$, $\mathbf{F}\mathbf{c} = -\sin \alpha \mathbf{b} + \cos \alpha \mathbf{c}$.

- (d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a nullvektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre vetítünk, az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és \mathbf{c} egy a síkra merőleges, nemnulla vektor, akkor $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $\mathbf{T}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, így \mathbf{T} mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

A sík, melyre tükrözünk, az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és \mathbf{c} egy a síkra merőleges, nemnulla vektor, akkor $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $\mathbf{T}\mathbf{c} = -\mathbf{c}$, így \mathbf{T} mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékei mindig ugyanazok, hiszen egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

A vizsga osztályzása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. június 19.