(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. február 13.

Folyó ügyek

- Lefoglaltam az F07-es termet az F épületben 2025. május 15-én, 10:00-től 14:00-ig pótzh írás céljára.
- Akarnak CubeSatot építeni?
- A toborzó előadás a PTE MIK B224-es termében lesz 2025. február 18-án kedde 14:00-től 16:00-ig.
- OTDK szekció Pécsett a tavaszi szünetben.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát kell tenni
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon 2011.
Bártfai Pál: Az n-dimenziós tér lineáris geometriája. Typotex Kiadó 2014.
Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe. Typotex Kiadó 2009.
Martin Cockett, Graham Doggett: Maths for Chemists. 2nd Ed., RSC Publishing 2012.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press 2018. https://vmls-book.stanford.edu/
Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban: Applied Linear Algebra, 2nd Ed., Springer International Publishing AG 2018.
Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 5th Ed., Wellesley-Cambridge Press 2016. https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/

Operátorok I

- Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- Például:
  - Egység operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Null operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Tükrözési operátor: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Projekció operátor: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$, minden $\mathbf{A}$ operátorra.
  - Forgatási operátor: később.
- Mindkét oldalról lehet szorozni.

Operátorok II

- Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

Operátorok III

- A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex (i), a második pedig az oszlopindex (j).
- A mátrix i-edik sorát A_i , j-edik oszlopát pedig A_jj jelölésekkel említjük.
- Determináns!!!

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T = (\alpha_{ji})_{m\times n}$. Ez az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti. Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözés a transzponálás.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja II

- <u>Definíció:</u> Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja III

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n\times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m\times k}$ mátrixot értjük, ahol

$$\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj}.$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja IV

Azaz:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{i1}&\alpha_{i2}&\cdots&\alpha_{in}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\quad B_{n\times k}=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\cdots&\beta_{1j}&\cdots&\beta_{1k}\\ \beta_{21}&\beta_{22}&\cdots&\beta_{2j}&\cdots&\beta_{2k}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_{n1}&\beta_{n2}&\cdots&\beta_{nj}&\cdots&\beta_{nk}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B_{m\times k}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n1}&\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{11}\beta_{1k}+\alpha_{12}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{nk}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n1}&\alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{21}\beta_{1k}+\alpha_{22}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{nk}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}\beta_{11}+\alpha_{m2}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n1}&\alpha_{m1}\beta_{12}+\alpha_{m2}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{m1}\beta_{1k}+\alpha_{m2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{nk}\end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja V

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VI

- Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix esetén tehát értelmezhető a hatványozás:

  $$A^1 = A \quad \text{és} \quad A^m = AA^{m-1}$$

  ahol $(m \geq 2)$ és $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_m$.
- Állítás: A mátrixhatványozás azonosságai:

  $$\begin{aligned} A^m A^k &= A^{m+k} \\ (A^m)^k &= A^{mk}, \end{aligned}$$

  ahol $m, k \in \mathbb{N}$.

  Bizonyítás: A mátrixszorzás definíciója alapján triviális.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VII

- Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.
- Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
  1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  2. Egy vektor λ-szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
  3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
  4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

Műveletek mátrixokkal, a mátrix rangja VIII

- A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.
- A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Transzformációs mátrixok I

- Forgási mátrix 2D-ben:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Forgatási mátrixok 3D-ben z, x, y tengelyek körül:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Vektorok tükrözés az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre a síkban:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Transzformációs mátrixok II

- Vektorok tükrözése 3D-ben az **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T.$$

- Merőleges projekció a **b** irányvektorral adott egyenesre:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}\mathbf{b}\mathbf{b}^T.$$

- Merőleges projekció a **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T.$$

Transzformációs mátrixok III

- Eltolás az (a, b) vektorral a síkban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Eltolás az (a, b, c) vektorral a térben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hamarosan. . .

- Diagonális mátrixok
- Permutációs mátrixok
- Háromszög mátrixok
- Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok

Vége

Köszönöm a figyelmüket!