(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 3.

Előadás

- A zárthelyikről: mátrix szorzás jobbról és balról
- Közeljövő: még négy alkalom
- Sajátérték probléma, transzformációk, diagonizálás

Transzformációs mátrixok I

- Forgási mátrix 2D-ben:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Forgatási mátrixok 3D-ben z, x, y tengelyek körül:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

- Vektorok tükrözés az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre a síkban:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Transzformációs mátrixok II

- Vektorok tükrözése 3D-ben az **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^T.$$

- Merőleges projekció a **b** irányvektorral adott egyenesre:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}^T.$$

- Merőleges projekció a **n** normál vektorral adott síkra:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^T.$$

Transzformációs mátrixok III

- Eltolás az (a, b) vektorral a síkban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Eltolás az (a, b, c) vektorral a térben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér I

- Definíció: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda \mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
- Definíció: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér II

- Definíció: Legyen φ az $\mathbb{R}^n$ -en ható lineáris transzformáció és legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A mátrix karakterisztikus polinomját értjük.
- Definíció: A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció karakterisztikus gyökének nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.
- Tétel: A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.
- Állítás: (A sajátvektorok alterei). Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.

  Bizonyítás: A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = 0$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér III

- Definíció: (Sajátaltér). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

Lineáris transzformációk sajátértéke és sajátaltere I

- Lineáris transzformációk sajátértékei és sajátalterei.
  1. A sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre).
  2. A sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre).
  3. A tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a 180^o egész számú többszörösétől különböző szöggel.
  4. A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra.
  5. A tér vektorainak tükrözése egy síkra.

  Minden transzformáció lineáris.

Lineáris transzformációk sajátértéke és sajátaltere II

1. Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.
2. A sík merőleges vetítése egy egyenesre - hasonlóan az előző esethez - helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a 0-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.
3. A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik 180^o egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

Lineáris transzformációk sajátértéke és sajátaltere III

4. A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a 0 vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.
5. A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!