(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 16.

Ütemterv

- **Hátralévő órák: 2025. április 16-17, 30, május 7.**
- Szinguláris érték, szinguláris vektor, SVD, PCA.
- ~~Mátrixok összehasonlítása, pozitív mátrixok, nemnegatív mátrixok, irreducibilis mátrixok, SMRC, NMF.~~
- Reakcióegyenletek sztöchiometrikus rendezése.
- ~~Lineáris programozási feladatok mátrixaritmetikai megoldhatósága. (MLF?)~~
- ~~Power of matrices. Applications: linear recursions, power of incidence matrixes.~~
- ~~Gram-Schmidt ortogonalization.~~ Fourier-series.
- ~~Further applications. (MLF?)~~

Diszkrét Fourier-transzformált I

- A Fourier-sorok komplex alakja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit}$$

és ezek

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit} = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)it}$$

részösszegei fontos szerepet játszanak a periodikus, illetve a korlátos tartományon értelmezett függvények leírásában. A fenti összeget diszkrét Fourier-összegnek nevezzük.

Diszkrét Fourier-transzformált II

- Állítás: (Fourier-összeg helyettesítési értékei). A Fourier-összeg együtthatóihoz a Fourier-összegnek a $[0, 2\pi\ ]$ intervallumot N egyenlő részre osztó $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{N}$ pontokban vett helyettesítési értékeit rendelő leképezés lineáris, melynek mátrixa $\left[e^{\frac{2\pi i}{N}mn}\right]$, ahol $(0 \leq m, n < N)$.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.

Diszkrét Fourier-transzformált III

- Tétel: (A Fourier-mátrixok tulajdonságai). Legyen N pozitív egész szám, $\epsilon = e^{2\pi i/N}$, $\omega = \overline{\epsilon} e^{-2\pi i/N}$. Az $\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}$ ésa $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ Fourier-mátrixok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:
  1. Bármelyik Fourier-mátrix k-adik és $N-k$-adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$-edik sorvektor $(1,-1,1,-1,\dots)$.
  2. A két Fourier-mátrix egymás konjugáltja és egyúttal egymás adjungáltja is, azaz $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \mathbf{\Phi}_{N,\epsilon} = \mathbf{\Phi}^H_{N,\epsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\omega} = \mathbf{\Phi}^H_{N,\omega}$.
  3. $\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = N\mathbf{E}_N$, így $\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálható,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\epsilon} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}, \quad \mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\omega} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon},$$

  továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ unitér mátrixok.

Bizonyítás: Wettl-jegyzet.

Diszkrét Fourier-transzformált IV

- $[\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}]_{kn} = \epsilon^{kn}$ és $[\mathbf{\Phi}_{N,\omega}]_{kn} = \omega^{kn}$, ahol $(0 \leq k,\ n < N)$ mátrixok a Fourier-mátrixok. Ezek egymás konjugáltjai. Másképpen leírva:

$$\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \dots & \epsilon^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{N-1} & \dots & \epsilon^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Diszkrét Fourier-transzformált V

- (Diszkrét Fourier-transzformáció) A diszkrét Fourier-transzformáció egy komplex függvény helyettesítési értékeinek vektorához a függvény trigonometrikus összetevői együtthatóinak vektorát rendelő lineáris $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ leképezésre.
- Feljebb egy Fourier-összeg együtthatóival kifejeztük a függvény megadott helyeken fölvett értékeit. Fordítsuk meg! Ismerjük egy f függvény N különböző megadott helyen fölvett értékét, és megadtunk N lineárisan független függvényt. A függvények olyan lineáris kombinációjának együtthatóit keressük, amely lineáris kombináció a megadott helyeken megegyezik f-fel. A

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki,

Diszkrét Fourier-transzformált VI

a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó $2k\pi/N\,(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ pontok. A $(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ leképezés inverzét fogjuk diszkrét Fourier-transzformáltnak nevezni. Ennek mátrixa $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az $\mathbf{F}_N$ jelölést használjuk. E megközelítésből az f függvény teljesen elhagyható, hisz egy szám-N-eshez hozzárendelünk egy másikat!

- Definíció: (Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)). Az $F_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N\mathbf{x}$ leképezést diszkrét Fourier-transzformációnak nevezzük.
- A diszkrét Fourier-transzformáció tehát az $\mathbf{F}_N = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés.

Diszkrét Fourier-transzformált VII

- A leképezést kifejtve koordinátánként:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn}, \quad \left(\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}\right).$$

- Az F_N transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$F_N : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Diszkrét Fourier-transzformált VIII

- A továbbiakban a transzformálandó vektor dimenzióját nagy N jelöli, a képvektort a transzformálandó vektor nagybetűs változata jelöli, azaz $\mathbf{x}$ képe $\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$ képe $\mathbf{Y}$, stb., a vektorok koordinátái 0-tól $N-1$-ig indexeltek.
- Néhány mátrix értéke:

$$\mathbf{F}_1 = (1)\,, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

Diszkrét Fourier-transzformált IX

$$\mathbf{F}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Diszkrét Fourier-transzformált X

- Tétel: (A DFT tulajdonságai). Tekintsük a diszkrét F_N Fourier-transzformációt, és legyen az $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ vektor képe $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_{N-1})$. Ekkor:
  1. Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan
  $$F_N(c, c, \ldots, c) = (Nc, 0, \ldots, 0)\,, \;\; F_N(c, 0, \ldots, 0) = (c, c, \ldots, c)\,.$$
  ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.
  2. Ha $\mathbf{x}$ valós vektor, akkor $X_{N-k} = \overline{X_k}$.
  3. Az F_N transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:
  $$\mathbf{x} = F_N^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\epsilon}\mathbf{X}, \;\; x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \epsilon^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N}kn}.$$

Bizonyítás: Wettl jegyzet.

Diszkrét Fourier-transzformált XI

- (DFT kiszámítása) Határozzuk meg az $\mathbf{x} = (1, i, i, 2)$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltját!
  N=4, így:

$$\mathbf{X} = F_4\mathbf{x} = \mathbf{F}_4\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 2+i \\ -1 \\ -3i \end{pmatrix}$$

- (Periodikus összetevők szűrése) Műszaki alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy periodikus függvénnyel leírható jelhez magasabb frekvenciájú zaj adódik, amit utólag ki szeretnénk "szűrni". Ez egy DFT-IDFT párral könnyen elvégezhető.

Diszkrét Fourier-transzformált XII

- A szűrés általános modellje három lépésből áll:
  1. DFT
  2. "szűrés"
  3. IDFT

  A "szűrés" egy transzformáció, amely $\mathbf{X}$ vektort a $\hat{\mathbf{X}}$ képezi.
- Pl.: Magas frekvenciájú összetevők szűrése: Wettl jegyzet.
- (Gyors Fourier-transzformáció) A diszkrét Fourier-transzformált kiszámításához, azaz az n-edrendű Fourier-mátrixszal való szorzás kiszámításához n^2 szorzás elvégzésére van szükség. Bármely olyan algoritmust, mely e transzformáció eredményét $O(n \log n)$, azaz konstansszor $n \log n$ lépésben elvégzi, gyors Fourier-transzformációnak nevezzük.

Diszkrét Fourier-transzformált XIII

- Tétel: (Gyors Fourier-transzformáció). Létezik olyan algoritmus, mely egy N-dimenziós vektor diszkrét Fourier-transzformáltját legföljebb $O\left(N\log_2 N\right)$ aritmetikai művelet elvégzésével kiszámolja.
  Bizonyítás: Wettl jegyzet.
- Vektorok konvolúciója:

$$(f * g)(n) = \sum_{k\in D} f(k)\, g(n-k)\,.$$

- Vektorok konvolúciója igen sok helyen felmerül: a polinomok szorzásától kezdve az olyan transzformációkig, ahol egy koordinátát szomszédainak egy rögzített lineáris kombinációjával kell helyettesíteni. A gyors Fourier-transzformációval hatékonyan számolható, mert a konvolúció a Fourier-térben szorzássá alakul.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!