(PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. november 7.

Problémák a zárthelyiben

- Előjeles műveletek egy jegyű számokkal
- Sarrus-szabály alkalmazása 2x2-es mátrixokra
- Kifejtési tétel
- Radián nem ismerete
- Skaláris szorzat vs. vektoriális szorzat
- Algebrai ösztön hiánya
- Tizedes törtek használata
- Gyök alatti műveletek nem ismerete

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek I

- Algebrai tört fogalma és alkalmazása. Lineráris törtfüggvények ábrázolása, jellemzése.
- **Abszolútt értéket tartalmazó egyenletek megoldása.**
- Másodfokú egyenleteknél a gyökök és együtthatók összefüggései. Másodfokú egyenletrendszer megoldása.
- Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között.
- **Négyzetgyök alatt csak olyan elsőfokú polinomok, amelyek főegyütthatója 1, azaz $\sqrt{ax+b} = cx + d$ helyett a $\sqrt{x+c} = ax + b$ megoldása elegendő. (Eddig az ax+b alakú elsőfokú polinomok négyzetgyökét is vizsgálták.)**
- A függvény transzformációk közül az $f(cx)$ ábrázolása.
- Magasságtétel, befogótétel a derékszögű háromszögben.
- **Szög ívmértéke.**
- Logarimusfüggvény, logaritmus azonosságai, logaritmusos egyenletek.

(Érettségiből) kimaradó anyagrészek II

- **Függvény inverze.**
- **Az egyenes egyenletének normálvektoros és irányvektoros alakja, kör és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátageometriában.**
- **Két vektor skaláris szorzata.**
- A valós számok halmazán értelmezett triginometrikus függvények értelmezése, ábrázolása és trigonometrikus egyenletek megoldása.

Mátrix transzponáltja

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T = (\alpha_{ji})_{m\times n}$. Ez az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti. Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözés a transzponálás.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

- Példák transzponálásra.

Műveletek mátrixokkal I

- Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m\times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m\times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{m\times n}$ mátrixot értjük.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \alpha_{m2} + \beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal II

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \cdots & \lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Azaz, a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden elemének megszorzását jelenti.

- Példák mátrixok összeadására és skalárral való szorzására.

Műveletek mátrixokkal III

- Definíció: Legyen $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ és $B=(\beta_{ij})_{n\times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A\cdot B=(\gamma_{ij})_{m\times k}$ mátrixot értjük, ahol
$$\gamma_{ij}=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{il}\beta_{lj}.$$
Azaz:
$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{i1}&\alpha_{i2}&\cdots&\alpha_{in}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\quad B_{n\times k}=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\cdots&\beta_{1j}&\cdots&\beta_{1k}\\ \beta_{21}&\beta_{22}&\cdots&\beta_{2j}&\cdots&\beta_{2k}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_{n1}&\beta_{n2}&\cdots&\beta_{nj}&\cdots&\beta_{nk}\end{pmatrix}$$
$$A\cdot B_{m\times k}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n1}&\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{11}\beta_{1k}+\alpha_{12}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{1n}\beta_{nk}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n1}&\alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{21}\beta_{1k}+\alpha_{22}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{2n}\beta_{nk}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}\beta_{11}+\alpha_{m2}\beta_{21}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n1}&\alpha_{m1}\beta_{12}+\alpha_{m2}\beta_{22}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{n2}&\cdots&\alpha_{m1}\beta_{1k}+\alpha_{m2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{mn}\beta_{nk}\end{pmatrix}$$
- Példák mátrixok szorzására.

Műveletek mátrixokkal IV

- Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Négyzetes mátrix esetén tehát értelmezhető a hatványozás:
$$A^1 = A \quad \text{és} \quad A^m = AA^{m-1}$$
ahol $(m \geq 2)$ és $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Definíció szerint legyen $A^0 = E_m$.
- Példák mátrixok hatványozására.
- Állítás: A mátrixhatványozás azonosságai:
$$\begin{aligned} A^m A^k &= A^{m+k} \\ (A^m)^k &= A^{mk}, \end{aligned}$$
ahol $m, k \in \mathbb{N}$.
Bizonyítás: A mátrixszorzás definíciója alapján triviális.

Mátrix inverze I

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
  Bizonyítás: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ és $E_n = (\beta_{ij})_{n\times n}$ két mátrix, ahol $\beta_{ij} = 1$, ha $i = j$, különben nulla. Az A és E_n mátrixok szorzata a $A \cdot E_n = (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj})_{n\times n}$ mátrix. Ez pedig pontosan az $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ mátrix, mert b_{ij} definiciója miatt lenulláza az összeg minden olyan tagját, ami nem α_{ij}.

Mátrix inverze II

- Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.
- Állítás: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.

Mátrix inverze III

- Az inverz mátrix kiszámítható elemi átalakítással
  - Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  - Egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
  - Sorok cseréje.

  Ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze.

  Szinguláris mátrix esetén az átalakítás nem végezhető el.

- Példák mátrix inverzének kiszámítására elemi eljárással.

Mátrix inverze IV

- Az inverz mátrix kiszámítása algebrai aldeterminánssal
  - Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix.
  - Minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij} -t, majd az a kapott mátrixot transzponálva és elosztva $\det(A)$-val, megkapjuk az A mátrix inverzét:
    $$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}.$$

  (Az A mátrix α_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsa.)

- Példák mátrix inverzének kiszámítására algebrai aldeterminánssal.

Mátrix inverze V

- Állítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$.
  1. Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  2. $(AB)^T = B^T A^T$
  3. A invertálható, akkor A^T is és $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
- Ellenőrizzük ezeket az állításokat néhány példával!

Mátrix rangja I

- Definíció: Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ vektorok. Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangja alatt az $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\rho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.
- Állítás: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ vektorrendszer rangját:
  1. Egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  2. Egy vektor λ-szorosának hozzáadása egy másik vektorhoz.
  3. Olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként.
  4. Vektorok sorrendjének felcserélése.
- Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.
- A mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Mátrix rangja II

- A mátrix rangját úgy határozzuk meg, hogy ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. Oszlopcsere is megengedett. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$, ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$, ahol $(1 \leq i \leq min\{m, n\})$.) A 0 sorok és oszlopok kihúzhatóak. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.

- Példák mátrixok rangjának meghatározására.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!