(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. november 21.

Folyó ügyek

- December 5-én írja a második zárthelyit a csoportom
- Egy korábbi zhpéldasor megtalálható a Teamsen és a Moodle-on. Tematika:
  - ~~Műveletek mátrixokkal~~
  - ~~Átírás másik bázisba~~
  - ~~Mátrixegyenletek megoldása~~
  - Sajátérték probléma
  - ~~Lineáris leképezések~~
- A gyakorlati példákkal még a mátrix egyeleteknél tartunk, illetve a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál mátrix invertálással
- Leadom az elméletet és példákat oldunk meg a következő előadáson is

Ismétlés - Lineáris transzformációk I

- Definíció: Legyenek V_1 és V_2 lineáris vektorterek. A $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \text{additív} : \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \\ \text{és homogén} : \varphi(\lambda \mathbf{a}) &= \lambda \varphi(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: (Mátrixreprezentáció) A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ úgy, hogy $\varphi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Definíció: Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.
- Definíció: Lineáris formának nevezzük az $f : V \to \mathbb{R}$ alakú lineáris leképezéseket.

Ismétlés - Lineáris transzformációk II

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés bilineáris forma, ha mindkét változójában lineáris, azaz

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{z}) + L(\mathbf{y},\mathbf{z}) \\
L(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
L(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{y}) + L(\mathbf{x},\mathbf{z}) \\
L(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}),
\end{aligned}
$$

  ahol $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés akkor és csak akkor bilineáris forma, ha (egy adott bázisra vonatkozóan) egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ számok, hogy $L(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i y_k$.

Ismétlés - Lineáris transzformációk III

- Tekintsük most $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektorrendszert. Látható, hogy ekkor $\alpha_{ik} = L(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$. Az $A = (\alpha_{ik})_{n \times n}$ mátrixot az L bilineáris forma (kanonikus bázisra vonatkozó) mátrixának nevezzük.
- Definíció: Az L bilineáris forma szimmetrikus, ha $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- Definíció: Legyen L egy szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren. Ekkor a $Q(x) = L(x, x)$ függvényt kvadratikus formának nevezzük.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus forma pozitív definit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) > 0$.
  Megjegyzés: Q pozitív szemidefinit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ és $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, hogy $Q(\mathbf{y}) = 0$. A negatív definit és negatív szemidefinit fogalmak hasonlóan vezethetők be.

Ismétlés - Lineáris transzformációk IV

- Definíció: Az olyan szimmetrikus bilineáris formát, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit, belső szorzatnak nevezzük.
  Pl. a $\mathbb{R}^3$ térben a skaláris szorzat egy belső szorzat.
- A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha az bijektív is.
- Belátható, hogy két vektortér akkor és csak akkor izomorf egymással, ha dimenziójuk megegyezik:

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció I

- Definíció: Egy E vektorteret Euklideszinek nevezünk, ha el van látva egy $\cdot$ belső szorzattal. (Ekkor természetesen norma is van: $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.)
- Definíció: Egy vektorrendszert ortogonálisnak nevezünk, ha a vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$.
- Definíció: Egy vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ahol $(i \neq j)$, $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, ahol $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
- Tétel: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ az E Euklideszi tér egy bázisa. Ekkor ± 1 szorzótól eltekintve egyértelműen létezik E-ben olyan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormált bázis, melyre
$$\mathcal{L}\left(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\right),$$
ahol $k = 1, 2, \ldots, n$.

Gram-Schmidt féle ortogonalizáció II

- Ortogonalizációs eljárás:
  1. $\mathbf{e}_1^{'} = \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1^{'}}{\left\|\mathbf{e}_1^{'}\right\|}$.
  2. Kiszámítjuk az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ vektorokat.
  3. Végül

$$\mathbf{e}_{k+1}^{'} = \mathbf{b}_{k+1} - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 - \cdots - (\mathbf{b}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k,$$

     továbbá

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{e}_{k+1}^{'}}{\left\|\mathbf{e}_{k+1}^{'}\right\|}.$$

Sajátérték, sajátvektor I

- Definíció: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
- Definíció: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Sajátérték, sajátvektor II

- <u>Definíció:</u> Legyen φ az $\mathbb{R}^n$ -en ható lineáris transzformáció és legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A mátrix karakterisztikus polinomját értjük.
- <u>Definíció:</u> A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció karakterisztikus gyökének nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.
- <u>Tétel:</u> A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!