

(MATNA1901) Lineáris algebra vizsga

1. Adja meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? (10 pont)
2. Határozza meg a determináns fogalmát! Adja meg legalább az egyik definíciót, majd indokolja meg, miért azt választotta! (10 pont)
3. Adja meg az $|\mathbf{A}|$ determináns értékét, illetve fejezze ki egymással a $|\mathbf{B}|$ és a $|\mathbf{C}|$ determinánsok értékét anélkül, hogy kiszámolná azok numerikus értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Mikor mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek? (10 pont)
5. Mikor mondjuk, hogy egy V halmaz vektortér? (10 pont)
6. Definiálja egy $n \times n$ -es mátrix inverzét, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$. (10 pont)
7. Mit értünk a mátrix rangján? (10 pont)
8. Mit értünk egy mátrix sajátértékén, sajátvektorán és sajátalterén? (10 pont)
9. Mit értünk hasonlóság alatt? Mi a mátrix diagonális alakja? Mi a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele? (10 pont)
10. Adja meg a következő lineáris transzformációk sajátértékét, sajátalterét és diagonális alakját: a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre, a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre, a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül olyan szöggel, amely nem egész számú többszöröse 180° -nak, a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra, valamint a tér vektorainak tükrözése egy síkra. (10 pont)

A vizsga osztályozása: 0–40 pont: elégtelen (1), 41–55 pont: elégséges (2), 56–70 pont: közepes (3), 71–85 pont: jó (4), 86–100 pont: jeles (5).

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. május 21.