(MATNA1902) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD

tudományos főmunkatárs

facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.

`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 20.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A két teszt alapján gyakorlati jegyet kapnak
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát lehet tenni, ha megszerezték az érvényes gyakorlati jegyet
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

FREUD R. 2004: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.
P. D. LAX. 2008: Lineáris algebra és alkalmazásai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
GYÉMÁNT I., GÖRBE T. F. 2011, Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon Jegyzettár, Szeged.

Négyzetes mátrixok determinánsa I

- Determináns kiszámítása kifejtési tétel szerint. Sakktábla szabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Az A mátrixot az első sor szerint fejtjük ki, azaz végigmegyünk az első sor oszlopain, kitöröljük az adott sort és oszlopot, ezzel egy 2×2-es aldeterminánst hozva létre. Az eredeti deteminánst felírjuk az adott helyen lévő elem és az aldeterminánsuk szorzatainak összegeként, a sakktábla szabályból vett előjellel:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}$$

Négyzetes mátrixok determinánsa II

- Kis mátrixokat a Sarrus szabállyal számolunk ki. 2×2-es mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

Azaz, átlósan a bal felső sarokból a jobb alsóba szorozzuk a számokat, majd kivonjuk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba húzott átló menti számokat.

3×3-as mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{11}$$

Négyzetes mátrixok determinánsa III

- Állítás: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \mathbf{e}_3 =$
  $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
  Bizonyítás: N/A
- Állítás: A vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- A fenti determináns megadja az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

Négyzetes mátrixok determinánsa IV

- A determináns néhány elemi tulajdonsága:
  - Ha az A mátrixban két sort (illetve oszlopot) egymással felcserélünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $det\,(A) = -det\,(A)$.
  - Ha a mátrixnak két sora (ill. oszlopa) megegyezik, akkor a determinánsa 0.
  - Ha az A mátrix egy sorának (ill. oszlopának) minden elemét megszorozzuk az α számmal, akkor a kapott mátrix determinánsa $\alpha \cdot det\,(A)$.
  - Legyen A, B, C három olyan mátrix, melyek csak az i-edik sorban (ill. oszlopban) különböznek egymástól a következőképpen: $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$. Ekkor $det\,(C) = det\,(A) + det\,(B)$.
  - (Az előzőekből következik, hogy) ha az A mátrix valamely sorához (ill. oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (ill. oszlopának) konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Ezeket a tulajdonságokat a determináns kiszámításához fogjuk használni.

Négyzetes mátrixok determinánsa V

- Állítás: (Kifejtési tétel) Legyen a D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát. Ezt az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsának nevezzük. Az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa a következő szám:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Tétel: (i-edik sor szerinti kifejtés): Tetszőleges $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

Négyzetes mátrixok determinánsa VI

Tétel: (j-edik oszlop szerinti kifejtés): Tetszőleges $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ mátrixot felső háromszög alakúnak vagy felső trianguláris mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$-re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek 0-val egyenlőek.)
- Állítás: A felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.
- A Gauss-elimináció célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.
  1. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$. (Sorcsere esetén a determináns előjele megváltozik)
  2. Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.
  3. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására II

4. A második sor alkalmas konstansszorosát a $3, 4, \ldots, n$. sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{n2} = 0$ legyen.

Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

- Tekinsük a következő determinánst és számítsuk ki az értékét kifejtési tétellel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \times (0 + 12 + 18 - 0 + 6 - 36) + 2 \times (0 - 4 + 12 - 0 + 4 - 12) = 0 + 2 \times 0 = 0$$

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására III

- És most Gauss eliminációval:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{5}{3}\times 4 & -1-\frac{5}{3}\times 0 \end{vmatrix} \to$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Mátrix inverze I

- Definíció: Az n-ed rendű egységmátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Állítás: Bármely $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ esetén teljesül: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$, azaz E_n egységelem az $n \times n$-es négyzetes mátrixok körében a mátrixszorzásra nézve.
- Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (négyzetes) mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy $AB = BA = E_n$. Az A mátrix inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.
- Állítás: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $\det(A) \neq 0$.

Mátrix inverze II

- $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $\det(A) \neq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixot szingulárisnak nevezzük, ha $\det(A) = 0$.
- Az inverz mátrix kiszámítható elemi átalakítással
  - Sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
  - Egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
  - Sorok cseréje.

  Ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze.

  Szinguláris mátrix esetén az átalakítás nem végezhető el.

Mátrix inverze III

- Az inverz mátrix kiszámítása algebrai aldeterminánssal
  - Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix.
  - Minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij} -t, majd az a kapott mátrixot transzponálva és elosztva $\det(A)$-val, megkapjuk az A mátrix inverzét:
$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}.$$

(Az A mátrix α_{ij} eleméhez tartozó algebrai aldeterminánsa: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, ahol D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsa.)

Mátrix inverze IV

- Állítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
  1. Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  2. $(AB)^T = B^T A^T$
  3. A invertálható, akkor A^T is és $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!