

Előjeles műveletel egyjegyű számokkal:

$$+2 + 2 = 0$$

$$-2 + (-2) = -4$$

$$-2 - 2 = -4$$

$$-2 - (-2) = -2 + 2 = 0$$

$$\frac{-2}{-2} = 1$$

$$\frac{+2}{-2} = -1$$

$$-1 \cdot 1 = -1$$

$$-1 \cdot (-1) = 1$$

$$\frac{-2}{2} = -1$$

Azonos előjelek esetén az eredmény pozitív.
Különböző előjelek esetén, az eredmény negatív.

Sarrus szabály 2x2-es mátrixra:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = -1 - (-4) = -1 + 4 =$$

3

Kifejtési tétel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \left[0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1) \right] +$$

$$+ \left[1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - (2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1) \right] =$$

$$= - (5 - 4) + (5 - 4) = 4 - 4 = \underline{\underline{0}}$$

Radián

$$\sin(0) = 0$$
$$\cos(0) = 1$$



Az 1 radián (rad) az r ívhosszhoz tartozó szög, kb. 57 fok.

π (3.14) radián 180 fok

2π radián 360 fok

$\pi/2$ radián 90 fok

$\pi/4$ radián 45 fok

Vektorok skaláris szorzata

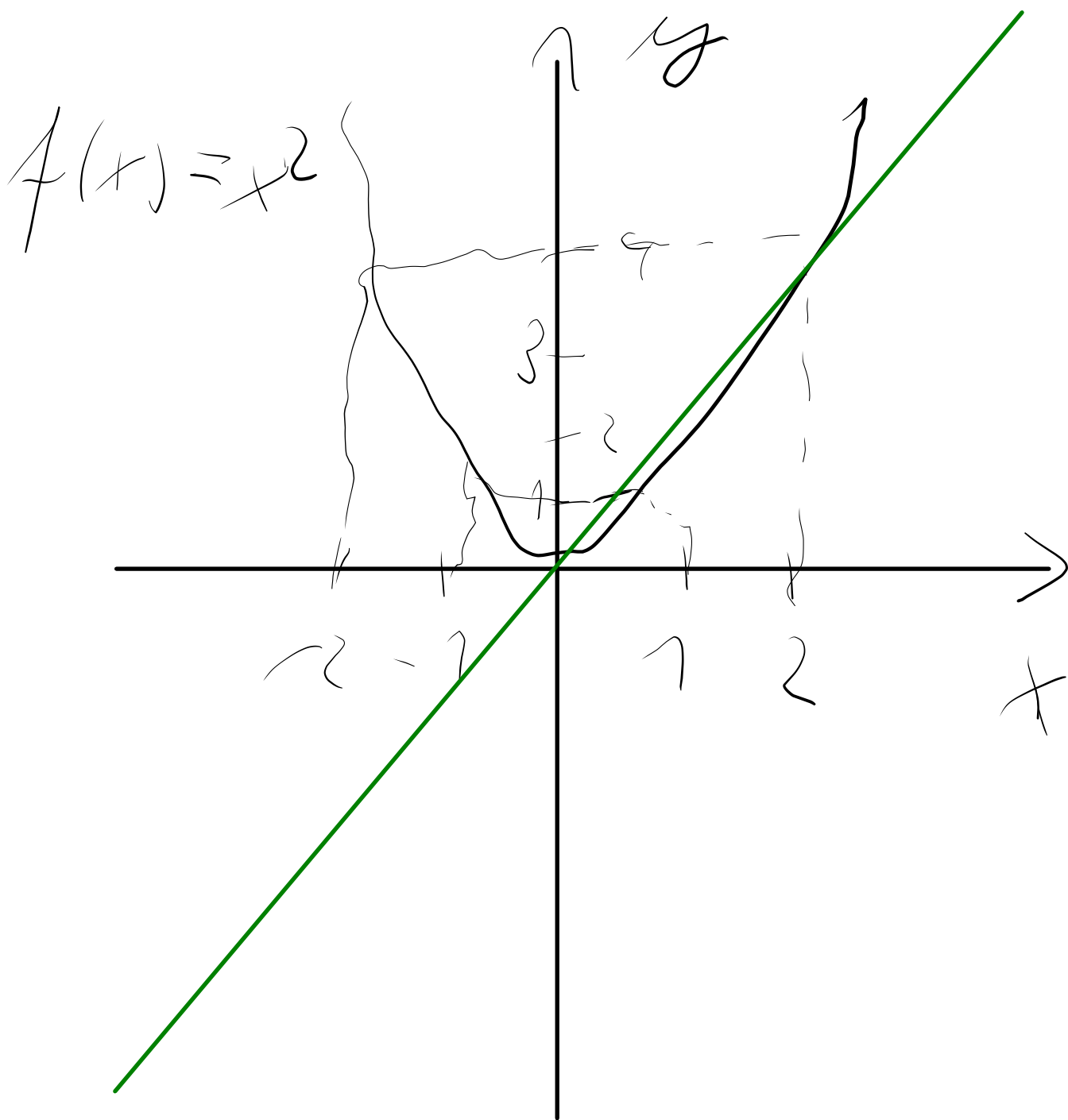
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = \underline{\underline{30}}$$

$$(1 \ 1 \ 0) \cdot (2 \ 3 \ 5) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = \underline{\underline{5}}$$

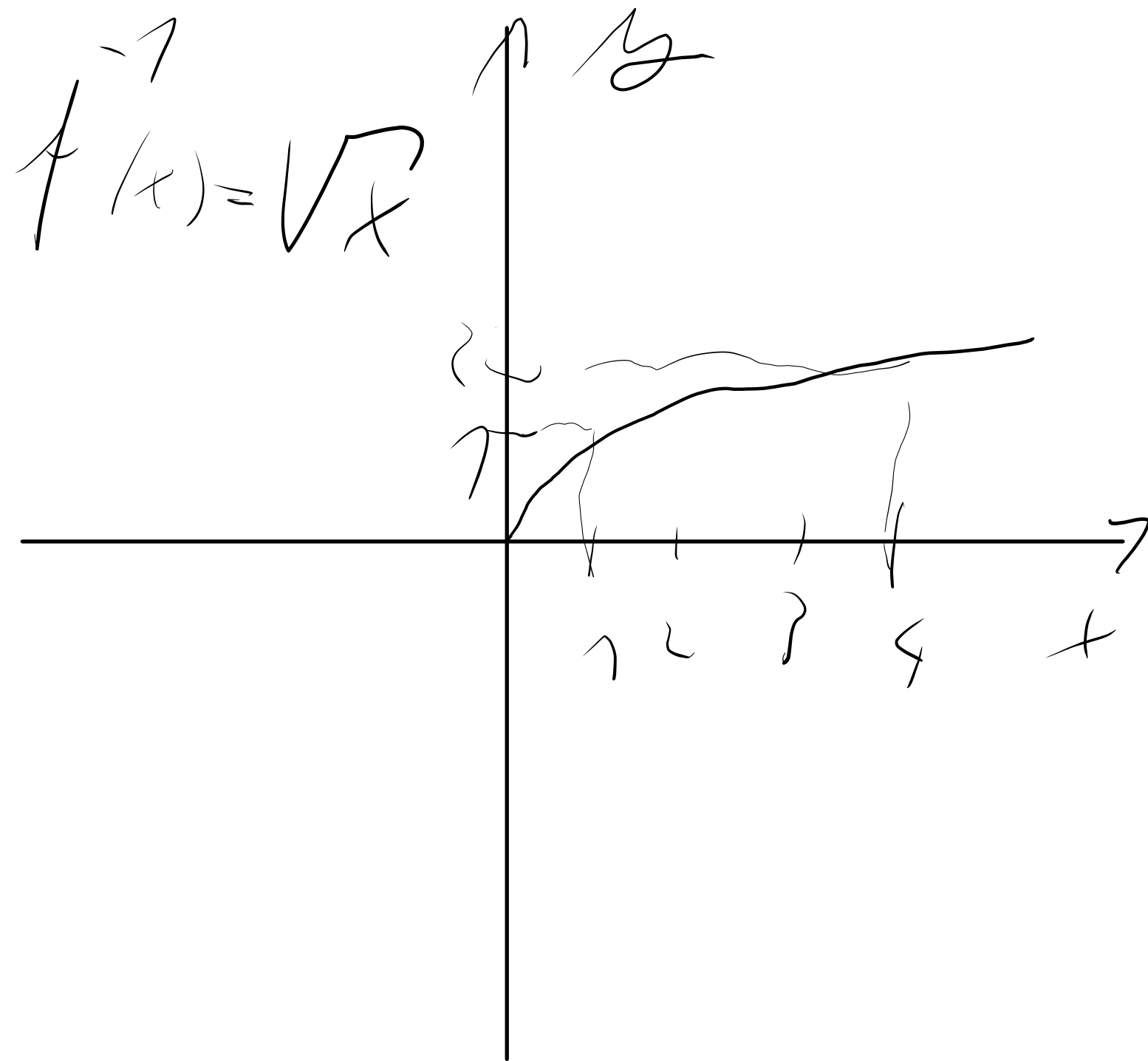
Vektorok vektoriális szorzata

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \\ -1 \cdot 0 - (-2) \cdot 1 \\ -2 \cdot (-3) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Függvény inverze



→



Adottak a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbi műveleteket,
amennyiben lehetséges:

(a) $A+B$, $B+C$, $C+D$, $2A-B$

(b) AB , AC , BC , BD

(c) A^T , D^T

(d) $\rho(A)$, $\rho(C)$

(e) A^{-1} , D^{-1}

(a) $A+B$ Nem lehet összeadni őket,
mert más a méretük.

$B+C$ Nem lehet összeadni őket,
mert más a méretük.

$C+D$ Nem lehet összeadni őket,
mert más a méretük.

$2A-B$ Nem lehet elvégezni a
műveleteket, mert más a méretük.

(b) AB Nem lehet elvégezni a műveletet, mert az A mátrix oszlopainak a száma és a B mátrix sorainak a száma különbözik.

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & 2 & 1 \\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-2} & \cancel{-5} \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot 7 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 7 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) + 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ -1 & -3 \\ 11 & 23 \end{pmatrix} \\
 \hline
 BC &= \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-2} & \cancel{-5} \\ \cancel{3} & \cancel{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 7 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}}}
 \end{aligned}$$

BD Nem lehet elvégezni a műveletet, mert az B mátrix oszlopainak a száma és a D mátrix sorainak a száma különbözik.

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $D^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\rho(A) = ?$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(III)} - 2\text{(I)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(III)} - \text{(II)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$

$\rho(C) = ?$ $\rho(C) = \underline{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2 \times \text{(I)} \\ 3 \times \text{(II)} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -6 & -15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)} + \text{(I)}} \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(III)} + \text{(II)}} \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ? \quad \det(A) = -1 \cdot 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -10 + 8 + 2 = 0$$

Az A mátrix determinánsa nulla, így nem invertálható.

A D mátrix nem invertálható, mert nem négyzetes mátrix.

Adja meg az X mátrix elemeit, ha

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \quad \underline{B}$$

$$\underline{X} \cdot \underline{A} = \underline{B} \quad / \cdot \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{B} \cdot \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{X} = \underline{B} \cdot \underline{A}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(II) - 2(I) \\ (III) - (I)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(I) + (II) \\ (III) + 2(I)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2 \cdot (III)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{(I) - (III) \\ (II) + 2(III)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \underline{B} \cdot \underline{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1*1+(-1)(-2)+3(-3) & 1*0+(-1)2+3*2 & 1*1+(-1)(-2)+3(-1) \\ 4*1+3(-2)+2(-3) & 4*0+3*2+2*2 & 4*1+3(-2)+2(-1) \\ 1*1+(-2)(-2)+5(-3) & 1*0+(-2)*2+5*2 & 1*1+(-2)(-2)+5(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -8 & 10 & -4 \\ -10 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Ellenőrzés

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & -3+2 & 3 \\ -4+10 & -4+5 & 4-2 \\ -5+6 & -5+3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = ?$$

$$\underline{A} \quad \underline{B} \quad / \quad \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{A}^{-1} \underline{A} X = \underline{A}^{-1} \underline{B}$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 4 & -6 \\ 1 & 3 & | & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(II)} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 4 & -6 \\ 2 & 6 & | & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{4(II) - (I)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 4 & -6 \\ 0 & 1 & | & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I) - (II) \cdot 5}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 6 & -10 \\ 0 & 1 & | & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(I)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 10 & -18 - 5 \\ -4 + 4 & 6 + 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & -46 + 40 \\ 1 & -23 + 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underline{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & -8 & 7 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}}_B$$

$$A \cdot X = B \quad / \quad A^{-1}?$$

$$\underbrace{A^{-1}}_C \cdot \underbrace{A}_D \cdot \underbrace{X}_E = \underbrace{A^{-1}}_F \cdot \underbrace{B}_G$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(II) - 2(I)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(I) \leftrightarrow (III) \\ 2/III}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(II) - (I)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(I) + (II) \\ (III) - (II)}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(I) - (III) \\ (II) - 4(III)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{6}(I) \\ -\frac{1}{3}(II)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -5/3 & 8/3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} B = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & -8 & 7 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 5+7-6 & 1-8+4 & 6+7-7 \\ -10-35+48 & -2+40-32 & -12-35+56 \\ -15-21+36 & -3+24-24 & -18-21+42 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
