



(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2025. április 10.

Ütemterv I

- ▶ **Már csak néhány óránk lesz: 2025. április 10, 17 és május 8.**
- ▶ Alterek összege és direkt összege. Faktortér.
- ▶ Képtér. Magtér. Dimenziótétel.
- ▶ Belsőszorzat terek. Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás.
- ▶ Hasonló mátrixok. Sajátértékek alkalmazásai. ~~Lineáris algebra alkalmazásai a geometriában, kriptográfiában és gráfelméletben (kitekintés)~~

Diagonizálás I

- ▶ Definíció: (Hasonlóság). Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix hasonló a \mathbf{B} mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható \mathbf{C} mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
- ▶ Tétel: (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok). Ha \mathbf{A} és \mathbf{B} hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor
 1. $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$,
 2. $\dim(\mathbb{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathbb{N}(\mathbf{B}))$,
 3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
 4. $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{B})$.

Bizonyítás:

1. ~~$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) \leq \rho(\mathbf{B})$ és $\rho(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}) \leq \rho(\mathbf{A})$. Innen $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$.~~
2. ~~$\dim(\mathbb{N}(\mathbf{A})) = n - \rho(\mathbf{A}) = n - \rho(\mathbf{B}) = \dim(\mathbb{N}(\mathbf{B}))$.~~
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.

Diagonizálás II

4. $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \text{trace}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}) = \text{trace}(\mathbf{B})$, és itt kihasználjuk, hogy két mátrix szorzatának nyoma nem változik, ha a tényezők sorrendjét felcseréljük.

- Definíció: (Kvadratikus alak). Valós kvadratikus alaknak (vagy kvadratikus formának) nevezzük azt az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ függvényt, ahol \mathbf{A} valós szimmetrikus mátrix. A komplex kvadratikus alakon a $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}; \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ függvényt értjük, ahol \mathbf{A} komplex négyzetes mátrix.

Diagonizálás III

- Tétel: (Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok). Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor \mathbf{A} és \mathbf{B} karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

Bizonyítás: A bizonyítás során fölteszük, hogy valamely invertálható \mathbf{C} mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Ekkor

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{C},$$

azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ is hasonlóak. Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$, azaz megegyeznek \mathbf{A} és \mathbf{B} karakterisztikus polinomjai is. Így megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ nullterének dimenziója megegyezik, amit korábban igazoltunk.

Diagonizálás IV

- ▶ Definíció: (Diagonalizálhatóság). Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható \mathbf{C} mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.
- ▶ Tétel: (Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele). Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan \mathbf{C} mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha \mathbf{A} -nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az \mathbf{A} sajátértékeiből, \mathbf{C} a sajátvektoraiból áll.
Bizonyítás: Ha \mathbf{A} hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan \mathbf{C} mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, akkor \mathbf{C} -vel balról szorozva a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

Diagonizálás V

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n].$$

A bal oldali mátrix i -edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A} \mathbf{x}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{A} \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, tehát \mathbf{x}_i a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel \mathbf{C} invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van \mathbf{A} -nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, úgy hogy a \mathbf{C} mátrix i -edik oszlopába kerülő \mathbf{x}_i vektorhoz tartozó λ_i sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix i -edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}_i$, ezért $\mathbf{\Lambda}$ hasonló \mathbf{A} -hoz.

Diagonizálás VI

- ▶ A $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ alakba, amit az \mathbf{A} mátrix sajátfelbontásának nevezünk.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!