(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 10.

Komplex és véges test feletti terek I

- Komplex vektorok és terek, komplex vektorok skaláris szorzata
- Definíció: (Komplex mátrix adjungáltja). Az A komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^H$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$.
- Definíció: (Komplex vektorok skaláris szorzata). A $\mathbb{C}^n$ -beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n$$

komplex skalárt értjük. Ennek mátrixszorzatos alakja $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^H \mathbf{w}$.

Komplex és véges test feletti terek II

- Tétel: (Az adjungált tulajdonságai). Legyenek **A** és **B** komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor
  1. $\left(\mathbf{A}^H\right)^H = \mathbf{A}$,
  2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$,
  3. $(c\mathbf{A})^H = c\mathbf{A}^H$,
  4. $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.
- Az adjungált tulajdonságaiból azonnal következik:
- Tétel: (A komplex skaláris szorzás tulajdonságai). Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor
  1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$,
  2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
  3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{c}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
  4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

  Bizonyítás: Wettl-jegyzet.

Komplex és véges test feletti terek III

- Komplex mátrixok kitüntetett alterei: Wettl-jegyzet
- Önadjungált mátrixok: Ahogy a transzponált fogalmának a – komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, ugyanúgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Szimmetrikus mátrix az, amelyik megegyezik saját transzponáltjával, önadjungált az, amelyik megegyezik saját adjungáltjával.
- Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.
- Az önadjungált mátrixokat Hermite-féle mátrixnak is nevezik.
- Önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak, mert csak azok egyeznek meg saját konjugáltjukkal.
- Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, hisz a valós számok megegyeznek saját konjugáltjukkal.

Komplex és véges test feletti terek IV

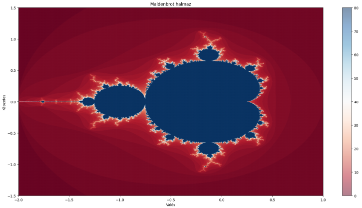
- Mivel a nem valós komplex számok nem egyeznek meg saját konjugáltjukkal, ezért a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak, ha minden elemük valós.
- Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben: A komplex skaláris szorzás segítségével definiálható a komplex vektorok távolsága és merőlegessége.
- A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor hossza, vagy abszolút értéke $|\mathbf{u}| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, két vektor távolsága megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Két vektort merőlegesnek tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.
- <u>Tétel:</u> (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség) Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorokra
$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}| \, .$$
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

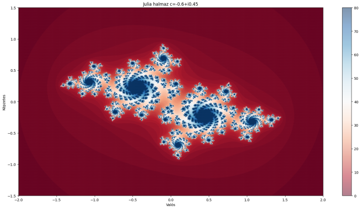
Komplex és véges test feletti terek V

- Az ortogonális mátrixok komplex analógjai az unitér mátrixok.
- Definíció: (Unitér mátrix). Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{E}$.
- Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:
  1. $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{E}$,
  2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$,
  3. $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
  4. $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
  5. $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
  6. $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Gyakorlás

- A komplex számok gyönyörűek:





- LU-felbontás gyakorlása

Vége

Köszönöm a figyelmüket!