(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2024. október 3.

Folyó ügyek

- Elnézést beteg lettem, nem szeretnék megfertőzni senkit, ezért online az előadás
- 2024. október 10-én sajnos foglalt a "Kavics" ezért a TTK E/331-es és (AND) E/333-as termében lesz az előadás. Az egyik teremben tartom az előadást (E/331), aki nem fér be, az kivetítőn élvezheti a másik teremben. Természetesen a Teamsen keresztül online is be lehet kapcsolódni.
- 2024. szeptember 27-én a Kutatók Éjszakáján a PTE Műszaki és Informatikai Karán (MIK) voltam a lányaimmal.
  - Lehetőségük van a PTE MIK tárgyak felvételére, újabb témák elsajátítására és még saját strandjuk is van
  - Szeretnék létrehozni egy űridőjárás előrejelző központot a PTE TTK-n, az Európai Űrügynökség (European Space Agency, ESA) támogatásával
  - Szeretnék építeni egy diákműholdat (PécsSat) és esetleg egy kicsit nagyobbat is

  Ez rengeteg szakdolgozati és Tudományos Diákköri (TDK, `https://www.ttk.pte.hu/hallgatok/tdk/`) téma lehetőséget biztosít majd

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrixot felső háromszög alakúnak vagy felső trianguláris mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$-re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek 0-val egyenlőek.)
- Állítás: A felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.

  Bizonyítás: A 2×2 és 3×3-as mátrixokra a Sarrus szabály alapján triviális. Hasonlóképpen a kifejtési tétel alapján minden főátlón kívüli szorzat nulla lesz.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására II

- A Gauss-elimináció célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.
  1. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$. (Sorcsere esetén a determináns előjele megváltozik)
  2. Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.
  3. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.
  4. A második sor alkalmas konstansszorosát a $3, 4, \ldots, n$. sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{n2} = 0$ legyen.

  Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására III

- Tekinsük a következő determinánst és számítsuk ki az értékét kifejtési tétellel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \times (0 + 12 + 18 - 0 + 6 - 36) + 2 \times (0 - 4 + 12 - 0 + 4 - 12) = 0 + 2 \times 0 = 0$$

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására IV

- És most Gauss eliminációval:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{5}{3}\times 4 & -1-\frac{5}{3}\times 0 \end{vmatrix} \to$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek I

- Definíció: Legyen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- Definíció: Egyenletek lineáris kombinációja alatt azok valamely valós együtthatókkal vett összegét értjük.
- Definíció: Legyenek $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ és $\beta_i \in \mathbb{R}$, ahol $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ és $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az alábbi egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezzük:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
\vdots \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m
\end{array}\right\}$$

Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek II

- Definíció: A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa (együtthatómátrixa) alatt a következőt értjük:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Gauss-féle eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására

- Definíció: Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az összes megoldásaik halmaza megegyezik.
- Tétel: Az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert egy vele ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:
  1. Egy egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$-val.
  2. Egy egyenlet λ-szorosának hozzáadása egy másik egyenlethez, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.
  3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja
  4. Egyenletek sorrendjének felcserélése
  5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt.

  A lineáris egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldása azt jelenti, hogy a fenti átalalkításokkal trapéz alakúra hozzuk azt. (Cél: $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén.)

Cramèr szabály I

- Ha az n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ($det\,(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|}, \left(k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+\right)$$

ahol

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \beta_n & \ldots & \alpha_{mn} & \end{pmatrix},$$

azaz a k-adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

Cramèr szabály II

- Igaz továbbá, hogy ha $det\,(A) = 0$, de $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\Delta_k \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ám $det\,(A) = \Delta_k = 0\,(k = 1, 2, \ldots., n)$ esetén lehet végtelen sok vagy 0 megoldás.

Lineáris függetlenség

- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V^3$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

  $$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

  ahol $(\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}^+)$ csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függőek. Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!