# (PTIB0301) Elemi lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
*facskog@gamma.ttk.pte.hu*

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2024. október 10.

# Folyó ügyek

- Jövő héten írunk zárthelyi dolgozatot a gyakorlatokon.
- Töltöttem fel gyakorló feladatokat a saját csoportjaimnak.

# Cramèr szabály I

- Ha az $n$ egyenletből álló $n$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ($\det(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|}, \left(k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+\right)$$

ahol

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \beta_1 & \alpha_{1,k+11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,k-1} & \beta_2 & \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{m,k-1} & \beta_n & \alpha_{m,k+1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

azaz a k-adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

# Cramèr szabály II

- Igaz továbbá, hogy ha $\det(A) = 0$, de $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\Delta_k \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ám $\det(A) = \Delta_k = 0\,(k = 1, 2, \ldots., n)$ esetén lehet végtelen sok vagy 0 megoldás.

# Cramèr szabály III

- Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a Cramèr szabállyal:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 - x_3 &= 6 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Van megoldás, mert $\det(\mathbf{A}) = -3 - 6 - 6 - 27 + 4 - 1 = -39 \neq 0$.

# Cramèr szabály IV

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 - 10 + 3 - 45 - 2 - 6 = -78$$

Tehát

$$x_1 = \frac{D_1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-78}{-39} = \underline{\underline{2}}.$$

Hasonlóképpen:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 18 - 30 - 9 - 12 - 5 = -39$$

# Cramèr szabály V

Így

$$x_2 = \frac{D_2}{\det\left(\mathbf{A}\right)} = \frac{-39}{-39} = \underline{\underline{1}}.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 6 + 12 + 54 + 20 + 1 = 78$$

Tehát

$$x_3 = \frac{D_3}{\det\left(\mathbf{A}\right)} = \frac{78}{-39} = \underline{\underline{-2}}.$$

# Vektortér I

- Definíció: A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy $+$-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\in V) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V) \\
\exists \mathbf{0}\in V \text{úgy, hogy}\quad \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a}\quad \forall \mathbf{a}\in V \quad \text{esetén} \\
\forall \mathbf{a}\in V \exists\,(-\mathbf{a})\in V : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

# Vektortér II

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda \mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu \mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\
(\lambda+\mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V \ \mathrm{és}\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\forall \mathbf{a} \in V - \mathrm{re} 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert $V^2$ és $V^3$ halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, a valós szám-n-esek halmaza, illetve a legfeljebb n-edfokú polinomok $R_n[x]$ halmaza is.

# Vektortér III

- Kérdés: Mi az a szorzat? És mi az a polinom?
- Definíció: $A$ és $B$ halmazok Descartes-féle szorzatának azt a halmazt nevezzük, amely azon rendezett párok halmaza, ahol az pár első tag az $A$ halmaz, a második tagja pedig a $B$ halmaz eleme és a szorzat minden lehetséges párt tartalmaz. Vagyis

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

- Például Descartes-szorzattal alkothatóak két tagú személynevek:

  $\{$Kovács, Szabó, Horváth$\}$ $\times$ $\{$János, Anna$\}$ $=$ $\{$Kovács János, Kovács Anna, Szabó János, Szabó Anna, Horváth János, Horváth Anna$\}$.
- Ez általánosítható $3, 4, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$ tagú szorzatokra is, ahol $n \geq 2$.

# Vektortér IV

- Definíció: A polinom egy olyan kifejezés, melyben csak számok és változók nemnegatív egész kitevőjű hatványainak szorzatai, illetve ilyenek összegei szerepelnek. Például:

$$\begin{aligned} p(x,y,z,u) &= 5x^4y^6 - 3xz^3 + 11y^{15}u^7 \\ q(x) &= 2x^2 + 6x + 9 \\ r(x,y) &= x^3 + 3x^2y + 3x^2y + y^3 \end{aligned}$$

Másképpen:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, n \in \mathbb{N}^+.$$

# Vektortér V

Itt $x$ a polinom változója, $n$ a polinom foka. Vannak többváltozós polinomok is, ezekben több változó szerepel. Egy többváltozós polinom foka az a legnagyobb szám, amit az egyes tagok tényezőinek kitevőinek összeadásával kapunk. Minden kitevőnek nemnegatív egész számnak kell lennie.

# Vektortér VI

- Definíció: A $V$ vektortér $L$ nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha $L$ maga is vektortér a $V$-beli műveletekkel.
- Tétel: A $V$ vektortér $L$ nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad &\text{esetén} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} \in L \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in L \quad &\text{esetén} \quad \lambda \mathbf{a} \in L. \end{aligned}$$

- Definíció: Legyen $H \neq \emptyset$ részhalmaza a $V$ vektortérnek. A $H$ által generált altér az a legszűkebb altere $V$-nek, mely tartalmazza $H$-t. (Azaz bármely $H$-t tartalmazó altérnek részhalmaza.) Jele: $\mathcal{L}(H)$.
- Mindig létezik $H$-t tartalmazó legszűkebb altér: tekintsük a $H$-t tartalmazó összes alterek metszetét.

# Vektortér VII

- Definíció: A $H$ halmaz generátorrendszere a $V$ vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.
- Definíció: A $V$ vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.
- Megjegyzés: A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált $V$ vektortérnek, ha a $V$ halmaz minden eleme felírható a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.
- Definíció: A $V$ vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a $V$ vektortér egy bázisának nevezzük.
- Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.
- Definíció: A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Jele: $dim(V)$.

# Vektortér VIII

- Definíció: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $V$ -ben és $\mathbf{a} \in V$. Ekkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat, amelyekre $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{b}_n$, az $\mathbf{a}$ vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.
- Definíció: Legyen $\mathbf{v} \in V^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vagy $\mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Az $I = \{\alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origón átmenő) egyenesnek nevezzük.
- Definíció: Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\nexists\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Ekkor az $L = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origóra illeszkedő) síknak nevezzük.
- Az $L = \{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmaz éppen az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ által generált lineáris altér. Amennyiben $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ lineárisan függetlenek, az $L$ halmaz egy $m$-dimenziós lineáris altér. Ekkor a $K = \{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{u}_m + \mathbf{v} : \alpha_1, \dots, \alpha_m, \in \mathbb{R}\}$ halmazt egy $m$-dimenziós affin altérnek nevezzük. Minden affin altér előáll $K = L + \mathbf{v}$ alakban, ahol $L$ egy lineáris altér és $\mathbf{v} \in V$.

# Vektortér IX

- Az $\mathbf{n}\,(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P\,(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete: $n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.
- Definíció: Halmazok (Minkowski-)összege: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
- Állítás: Alterek összege és metszete: $L_1 + L_2$ és $L_1 \bigcap L_2$ is altér.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$ direkt összeget alkot, ha $L_1 \bigcap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.

# Vége

Köszönöm a figyelmüket!