Név / Name: `Dr. FACSKÓ Gábor István` Neptun kód / code: `BQQQFY`

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra vizsga / Elementary Linear Algebra exam

1. Mi az a vektor? Mikor egyenlő két vektor? Készítsen ábrákat! / What is a vector? When are two vectors equal? Draw images. (10 pont)
   (a) A vektor mennyiségek irányfüggő mennyiségek. Például: a súly (**F**), a sebesség (**v**), a helyzet (**r**), a gyorsulás/lassulás (**a**), a forgás, a körsebesség (ω).

   Vectors are quantities with direction. For example: weight (**F**), velocity (**v**), position (**r**), acceleration/deceleration (**a**), rotation, rotational speed (ω).

   (b) A vektor egy véges hosszúságú irányított szakasz az A pontból a B pontba: $\vec{AB}$. A kezdőpontja az A pont, a vég pontja pedig a B pont.

   Limited length line segments from Point A to Point B: $\vec{AB}$. The start point is Point A, and the end is Point B.

   (c) Két vektor akkor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymásra transzformálhatók. Vagy másképpen, ha két vektor hossza, iránya és irányultsága megegyezik.

   Two vectors are equal if you can transform the first vector to the second vector using parallel shift/translation displacement. Or, if the lengths and directions of the vectors are the same.

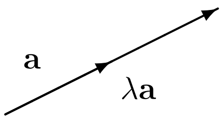
2. Mi értünk **a** vektor szorzatán egy skalárral? Mit értünk **a** és **b** vektor skaláris szorzatán? Készítsen ábrákat! / What is the product of **a** vector and λ scalar? What is the scalar product of **a** and **b** vectors? Draw images. (10 po(i)nt)
   (a) Vektor skalárral való szorzása. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ahol a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, akkor

   $$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$

   Multiplication of vectors with a scalar. If $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, where a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, then

   $$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)\,.$$

   (b) Grafikusan:



Az **a** *vektort egy λ skalárral úgy szorozzuk meg, hogy az eredeti vektor végpontjából egy vele azonos irányú, de λ-szoros hosszúságú vektort rajzolunk. To multiply an* **a** *vector by a λ number, you should draw a vector from the starting point of* **a** *vector in the direction of* **a** *that has λ length of the* **a** *vector.*

   (c) Két vektor skaláris szorzata (más néven belső szorzata):

   $$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

   ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.
   The scalar (or inner) multiplication of two vectors is

   $$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

   where $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$ és $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.

(d) Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

The scalar multiplication of $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectors is

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

3. Írja fel az $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és a $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenletét a térben! / What is the equation of a plane with $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normal vector and $P(x_0, y_0, z_0)$ point? (10 pont)
   Az $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete: $n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.
   If $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\nexists\lambda \in \mathbb{R}$, so $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Then the $L = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ set a plane (crossing the origo).

4. Definiálja az egymással γ szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatát! / Define the vectorial product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ vectors with γ angle. (10 pont)
   (a) Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
   The vectorial product of non-zero Vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is that $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vector, which length is $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$, where $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle$. The Vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is perpendicular to Vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, furthermore $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ consist of a right-handed system.
   (b) Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3$.
   The vectorial product with components is $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3$.

5. Határozza meg az operátor fogalmát! Mit értünk egy operátor reprezentációja alatt? / What is the operator? What is meant by the representation of an operator? (10 pont)
   (a) Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
   Operators are the linear vector-vector functions.
   (b) Az operátorok reprezentációját nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.
   The representation of operators is the matrixes. See $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ and $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, where $m, n \in \mathbb{N}^+$. The

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

   table is called $m \times n$ type matrix. The set of the $m \times n$ type matrixes is $M_{m \times n}$.

6. Definálja a determináns fogalmát! / What is the determinant? (10 pont)
   (a) Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az A mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(A) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)}\, \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát. Jelölése:

$$\det(A), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |A|.$$

If Matrix A is type $n \times n$, where $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$ (Square Matrix), then the determinant of Matrix A is the following number:

$$det(A) = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \cdot \alpha_{2i_2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{ni_n},$$

where the summary is for al the permutations of $1, 2, \ldots, n$ numbers, and $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ means the number of inversions in the permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$:

$$\det(A), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \quad |A|.$$

7. Adja meg az $|\mathbf{A}|$ determináns értékét, illetve fejezze ki egymással a $|\mathbf{B}|$ és a $|\mathbf{C}|$ determinánsok értékeit anélkül, hogy kiszámolná az értékeiket. / Give the value of the determinant $|\mathbf{A}|$; furthermore, express the relation between the determinants $|\mathbf{B}|$ and $|\mathbf{C}|$ without calculating their values.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(10 pont)

Az A mátrixnak két oszlopa megegyezik, így a determinánsa 0. A B mátrixban két oszlopot egymással felcseréltünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $det(C) = -det(B)$.
Two rows columns) of A matrix are the same, therefore its determinant is zero. You change the order of two columns, then the determinant of the new matrix will be the opposite of the determinant of the original matrix: $det(C) = -det(B)$.

8. Mi a vektortér generátor rendszere? / What is the generator system of a vector space? (10 pont)
Legyen $H \neq \emptyset$ részhalmaza a V vektortérnek. A H által generált altér az a legszűkebb altere V-nek, mely tartalmazza H-t. (Azaz bármely H-t tartalmazó altérnek részhalmaza.) Jele: $\mathcal{L}(H)$. A H halmaz generátorrendszere a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.
$H \neq \emptyset$ is subset of the V vector space. The subspace generated by H is the minimal size of such a subset of V that contains H. (Or it is a subset of all subspace containing H.) Sign: $\mathcal{L}(H)$. Set H is a generator system of V vector space if $\mathcal{L}(H) = V$.

9. Mi az a lineáris transzformáció? / What is a linear mapping? (10 pont)
Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.
Let V be a vector space. A mapping $\varphi : V \to V$ is called a linear transformation. The set of all linear transformations on V is denoted by $\mathcal{T}_V$.

10. Mit értünk egy lineáris leképezés sajátvektorán és sajátértékén? / What is the eigenvalue and eigenvector of a linear map? (10 pont)
Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
Let V be a vector space over $\mathbb{R}$. Let $\varphi : V \to V$ be a linear mapping. If for a nonzero vector $\mathbf{a} \in V$ and a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, the equation $\varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ holds, we say that $\mathbf{a}$ is an eigenvector of φ, and λ is the eigenvalue of φ corresponding to $\mathbf{a}$.

A vizsga osztályzása: 0-40 pont: elégtelen (1), 41-55 pont: elégséges (2), 56-70 pont: közepes (3), 71-85 pont: jó (4) és 86-100 pont: jeles (5).

Grades: 0-40 points: Fail (1), 41-55 points: Pass (2), 56-70 points: Satisfactory (3), 71-85 points: Good (4), and 86-100 points: Excellent (5).

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. január 6. / January 6, 2025