(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. február 19.

Követelmények

- Két tesztet írunk majd a gyakorlatok feladataiból. Mindent lehet használni közben
- Mindkét tesztet legalább 41 %-ra meg kell írni, különben javító zh-t kell írni
- A vizsgaidőszakban írásbeli vizsgát kell tenni
- Osztályzás: elégtelen (1): 0-40 %, elégséges (2): 41-55 %, közepes (3): 56-70 %, jó (4): 71-85 %, jeles (5): 86-100 %.
- 1. zh: 2025. március 13, 2. zh: 2025. május 8, pótzh: 2025. május 15

Bibliography

Gyémánt Iván, Görbe Tamás Ferenc: Lineáris algebra fizikusoknak, Polygon 2011.
Bártfai Pál: Az n-dimenziós tér lineáris geometriája. Typotex Kiadó 2014.
Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe. Typotex Kiadó 2009.
Martin Cockett, Graham Doggett: Maths for Chemists. 2nd Ed., RSC Publishing 2012.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press 2018. https://vmls-book.stanford.edu/
Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban: Applied Linear Algebra, 2nd Ed., Springer International Publishing AG 2018.
Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 5th Ed., Wellesley-Cambridge Press 2016. https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/

Négyzetes mátrixok determinánsa I

- Definíció: Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.

  vagy

  Az A véges halmaz permutációja az A elemeinek egy meghatározott átrendezése vagy sorbarendezése.

  Pl.: kártyakeverés, futóverseny eredményei.
- Definició: Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy $(i_1, i_2 \ldots, i_n)$ permutációját. Azt mondjuk, hogy i_j és i_k elemek inverzióban vannak, ha $j < k$ és $i_j > i_k$, vagyis a két elem nem követi egymást monoton növekvő sorrendben.
- Egy permutációban lévő inverziók száma ezen inverziók összessége.

Négyzetes mátrixok determinánsa II

- <u>Definíció:</u> Legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, ..., m\}$ és $j \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén, ahol $n, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ és $n > 1$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

  számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.
- A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük.
- Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex (i), a második az oszlopindex (j).
- A mátrix i-edik sorát A_i-vel , j-edik oszlopát pedig A_j-vel jelöljük.

Négyzetes mátrixok determinánsa III

- <u>Definíció:</u> Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú, ahol $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}$ (vagyis négyzetes), akkor az A mátrix determinánsa alatt a következő számot értjük:

$$det\,(A) = \sum_{\{i_1,i_2,\dots,i_n\}\in P_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)}\,\alpha_{1i_1}\cdot\alpha_{2i_2}\cdot\dots\cdot\alpha_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok összes permutációjára történik, és $I\,(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jelöli az $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permutációban lévő inverziók számát.
Jelölése:

$$\det\,(A)\,,\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix},\quad |A|\,.$$

Négyzetes mátrixok determinánsa IV

- Determináns kiszámítása kifejtési tétel szerint. Sakktábla szabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Az A mátrixot az első sor szerint fejtjük ki, azaz végigmegyünk az első sor oszlopain, kitöröljük az adott sort és oszlopot, ezzel egy 2×2-es aldeterminánst hozva létre. Az eredeti deteminánst felírjuk az adott helyen lévő elem és az aldeterminánsuk szorzatainak összegeként, a sakktábla szabályból vett előjellel:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31}$$

Négyzetes mátrixok determinánsa V

- Kis mátrixokat a Sarrus szabállyal számolunk ki. 2×2-es mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

Azaz, átlósan a bal felső sarokból a jobb alsóba szorozzuk a számokat, majd kivonjuk a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba húzott átló menti számokat.

3×3-as mátrixokra:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33}+\alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31}+\alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32}-\alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33}-\alpha_{23}\cdot\alpha_{32}\cdot\alpha_{11}$$

A fenti szabályokat a kifejtési tétel alkalmazásával lehet bizonyítani. (Az előző oldalon pont ezt kaptuk mindkét esetre.)

Négyzetes mátrixok determinánsa VI

- <u>Állítás:</u> $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \mathbf{e}_3 =$
  $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
  <u>Bizonyítás:</u> N/A
- <u>Állítás:</u> A vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- A fenti determináns megadja az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralepipedon térfogatát.

Négyzetes mátrixok determinánsa VII

- A determináns néhány elemi tulajdonsága:
  - Ha az A mátrixban két sort (illetve oszlopot) egymással felcserélünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának ellentettjével: $det\,(A) = -det\,(A)$.
  - Ha a mátrixnak két sora (ill. oszlopa) megegyezik, akkor a determinánsa 0.
  - Ha az A mátrix egy sorának (ill. oszlopának) minden elemét megszorozzuk az α számmal, akkor a kapott mátrix determinánsa $\alpha \cdot det\,(A)$.
  - Legyen A, B, C három olyan mátrix, melyek csak az i-edik sorban (ill. oszlopban) különböznek egymástól a következőképpen: $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$. Ekkor $det\,(C) = det\,(A) + det\,(B)$.
  - (Az előzőekből következik, hogy) ha az A mátrix valamely sorához (ill. oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (ill. oszlopának) konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Ezeket a tulajdonságokat a determináns kiszámításához fogjuk használni.

Négyzetes mátrixok determinánsa VIII

- Állítás: (Kifejtési tétel) Legyen a D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát. Ezt az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsának nevezzük. Az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa a következő szám:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Tétel: (i-edik sor szerinti kifejtés): Tetszőleges $i \in \{1, 2, ; n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

Négyzetes mátrixok determinánsa IX

<u>Tétel:</u> (j-edik oszlop szerinti kifejtés): Tetszőleges $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására I

- Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ mátrixot felső háromszög alakúnak vagy felső trianguláris mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$-re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek 0-val egyenlőek.)
- Állítás: A felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.
  Bizonyítás: A 2×2 és 3×3-as mátrixokra a Sarrus szabály alapján triviális. Hasonlóképpen a kifejtési tétel alapján minden főátlón kívüli szorzat nulla lesz.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására II

- A Gauss-elimináció célja, hogy a mátrixot, melynek determinánsát keressük, egy olyan felső trianguláris mátrixszá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.
  1. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$. (Sorcsere esetén a determináns előjele megváltozik)
  2. Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{32}, \ldots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.
  3. Ha szükséges, akkor sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.
  4. A második sor alkalmas konstansszorosát a $3, 4, \ldots, n$. sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{n2} = 0$ legyen.

  Az eljárást addig folytatjuk, míg a főátló alatti összes elemet kinullázzuk.

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására III

- Tekinsük a következő determinánst és számítsuk ki az értékét kifejtési tétellel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \times (0 + 12 + 18 - 0 + 6 - 36) + 2 \times (0 - 4 + 12 - 0 + 4 - 12) = 0 + 2 \times 0 = 0$$

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására IV

- És most Gauss eliminációval:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{5}{3}\times 4 & -1-\frac{5}{3}\times 0 \end{vmatrix} \to$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!