(KEMNA0302) Alkalmazott lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. március 27.

Diagonizálás I

- Definíció: (Hasonlóság). Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
- Tétel: (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok). Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor
  1. $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$,
  2. $dim(\mathbb{N}(\mathbf{A})) = dim(\mathbb{N}(\mathbf{B}))$,
  3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
  4. $trace(\mathbf{A}) = trace(\mathbf{B})$.
- Definíció: (Kvadratikus alak). Valós kvadratikus alaknak (vagy kvadratikus formának) nevezzük azt az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \to \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ függvényt, ahol $\mathbf{A}$ valós szimmetrikus mátrix. A komplex kvadratius alakon a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \to \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ függvényt értjük, ahol $\mathbf{A}$ komplex négyzetes mátrix.

Diagonizálás II

- Főtengelytétel, főtengelytramszformáció, kvadratikus alakok és mátrixok definitsége, definitség meghatározása sajátértékekből, pozitív (szemi)definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás, definitség és főminortok kapcsolata, szélsőérték... Szorgalmi feladat: Wettl-jegyzet.

Diagonizálás III

- Tétel: (Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok). Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.
- Lineális transzformáció sajátértéke és a sajátaltere - elmaradt.
- Definíció: (Diagonalizálhatóság). Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.
- Tétel: (Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele). Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!