



(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra

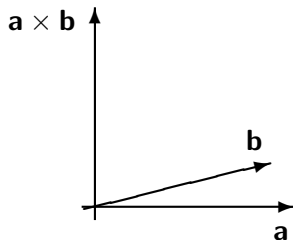
Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
<https://facsko.ttk.pte.hu>

2024. szeptember 19.

Vektoriális szorzat I

- Definíció: Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nemnulla vektorokból álló vektorrendszert jobbrendszernek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180° -nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)



- Definíció: Az \mathbf{a} és \mathbf{b} nemnulla térbeli vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokra, továbbá a $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ jobbrendszert alkot.
Legyen továbbá $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, ahol $(\mathbf{a} \in V^3)$.

Vektoriális szorzat II

► A vektoriális szorzat tulajdonságai

1. Állítás: A vektoriális szorzás antiszimmetrikus, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$.
2. Állítás: A vektoriális szorzás homogén, azaz $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Állítás: A vektoriális szorzás disszociatív, azaz $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3)$.

- Definíció: Az \mathbf{a} és \mathbf{b} nemnulla vektorokat párhuzamosaknak nevezzük, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Jele: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Vektoriális szorzat III

- ▶ Bármely vektor önmagával vett vektoriális szorzata a zérusvektorral egyenlő, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{a} \in V^3$ -re. esetén.
- ▶ Ezen felül $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, vagy \mathbf{a} és \mathbf{b} közül legalább az egyik nullvektor.
- ▶ Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

- ▶ Komponensekkel $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$.
- ▶ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ egyenlő az \mathbf{a} és \mathbf{b} által meghatározott paralelogramma területével, mivel $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja és $|\mathbf{b}| |\sin \theta|$ a magassága, ahol $\theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle$.

Vegyes szorzat

- ▶ Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ vektorok vegyes szorzata:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

- ▶ Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszer alkot, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ megegyezik az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával. Ellenkező esetben a térfogat (-1) -szeresét kapjuk.
- ▶ Könnyen igazolható, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Operátorok I

- ▶ Definíció: Operátornak a lineáris vektor-vektor függvényeket nevezzük.
- ▶ Definíció: Az operátorok reprezentációt nevezzük mátrixnak. Azaz, legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ estén, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $M_{m \times n}$.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!