Név / Name: ______________________ Neptun kód / code: ______________________

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra 5. zárthelyi dolgozat / Elementary Linear Algebra, Test 5

1. Adottak a következő vektorok: $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 4)$ és $\mathbf{c} = (4, 1, 3)$. Határozza meg a következő összefüggéseket / Calculate the following expressions:
   a.) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c}$
   b.) $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$
   c.) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d.) Mennyi az **a** és **b** vektorok által közbezárt szög? / What is the angle of Vectors **a** and **b**?
   e.) Egy síkban vannak-e az **a**, **b**, **c** vektorok? / Are Vectors **a**, **b**, and **c** in the same plane?
   f.) Adjon meg egy vektort, mely merőleges az **b** vektorra. / Determine a perpendicular vector to Vector **b**.

   (10 po(i)nt)

2. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! / Calculate the deteminant of the following matrixes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (10 po(i)nt)

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert! / Solve the following system of linear equations:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (10 po(i)nt)

4. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (6, 4, -1)$, a $\mathbf{b} = (2, 1, 6)$ és a $\mathbf{c} = (1, 0, 4)$ vektorok? / Are independent linear Vectors $\mathbf{a} = (6, 4, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 6)$, and $\mathbf{c} = (1, 0, 4)$? (10 po(i)nt)

5. Lineáris altér-e az $\mathbb{R}^4$-on az $L = \{(x_1, x_2, 2x_1, 3x_2)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$? / Is a linear subspace on $\mathbb{R}^4$ the $U = \{(x_1, x_2, 2x_1, 3x_2)\,|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ set? (10 po(i)nt)

6. Adja meg az $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ vektort az $(1, 2, 5)$; $(3, 7, 8)$; $(2, 5, 2)$ bázisban. / Give the Vector $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ in the $(1, 2, 5)$; $(3, 7, 8)$; $(2, 5, 2)$ basis. (10 po(i)nt)

7. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Végezze el az alábbiak közül az elvégezhető műveleteket! / Calculate the following terms if possible:
   (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; $\mathbf{B} + \mathbf{C}$; $\mathbf{C} + \mathbf{D}$; $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$;(b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$ (c) $\mathbf{A}^T$; $\mathbf{D}^T$; $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$; (d) $\rho(\mathbf{A})$; $\rho(\mathbf{D})$; (e) $\mathbf{A}^{-1}$ (g) $\mathbf{D}^{-1}$ (10 po(i)nt)

8. Oldja meg az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

   Solve the $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ matrix equation above.

9. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és egy-egy, a sajátértékhez tartozó sajátvektort! / Calculate the eigenvalues of Matrix $\mathbf{A}$ and give an eigenvector for each eigenvalues:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(10 po(i)nt)

10. Az alábbi leképezés lineáris? Adja meg a leképezés mátrixát is, ha létezik! / Is this transformation a linear transformation? Give the matrix of the linear transformation if it exists.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right)$$

(10 po(i)nt)

A fenti feladatsor két részre oszlik. Az (1)-(5) feladatok megoldásával a első zárthelyit lehet javítani, illetve pótolni. A (6)-(10) feladatokkal pedig a másodikat. A zárthelyik osztályzása: 0-20 pont: elégtelen (1), 21-27 pont: elégséges (2), 28-35 pont: közepes (3), 36-42 pont: jó (4) és 43-50 pont: jeles (5). Mindkét témából zárthelyiből legalább elégségest (2) kell elérni a gyakorlati jegyhez. Ha mindkét zárthelyi legalább közepes (3), akkor megajánlott vizsgajegyet kapnak. A megajánlott jegyet nem szerzőknek, vagy a jegyet nem elfogadóknak vizsgáznia kell a kiírt időpo(i)ntokban.

You can improve the results of the first mid-term test by solving exercises (1)-(5). If you want to replace your second mid-term exam you must solace exercises (6)-(10). Grades: 0-20 points: Fail 81), 21-27 points: Pass (2), 28-35 points: Satisfactory (3), 36-42 points: Good (4) és 43-50 points: Excellent (5). You must pass both mid-term tests to get a grade for the practice. If you get at least an Average (3) grade for both mid-term tests I will offer you an exam grade based on the test results. If neither exam grade was offered nor you wish for a better grade you must pass a written exam.

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. január 6. / January 6, 2025