Név / Name: ____________________ Neptun kód / code: ____________________

(MATNA1902) Alkalmazott lineáris algebra 3. zárthelyi dolgozat
(ENKEMNA0302) Applied Linear Algebra Test 3

1. Adottak a következő vektorok és mátrixok / We have the following vectors and matrixes:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Számolja ki a következő dyadikus és Kronecker szorzatokat / Calculate the following dyadic and Kronecker products: (a) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$; (b) $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$. (10 pont)

2. Adott az $\mathbf{a}\,(1,1,1)$ vektor.
   (a) Írja fel a forgatási mátrixokat, amivel az $(0,0,1)$ irányba lehet forgatni az $\mathbf{a}$ vektort! / Give the rotational matrixes to rotate this vector to the direction of the $(0,0,1)$ vector.
   (b) Adja meg azt a $\mathbf{S}$ eltolási mátrixot, amivel az $\mathbf{a}$ vektort el lehet tolni a $(1,-1,0)$ irányba! / Determine the $\mathbf{S}$ transformation matrix that shifts this $\mathbf{a}$ vector to the $(1,-1,0)$ direction.

   (10 pont)

3. Adottak a következő mátrixok / We have the following matrixes:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Végezze el a következő műveleteket! / Calculate the following expressions: (a) $\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$; $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2$; (b) $|\mathbf{D}_1|$; $|\mathbf{S}|$; $|\mathbf{P}|$; (c) $\mathbf{D}_1^{-1}$; $\mathbf{D}_2^{-1}$; (d) $\mathbf{D}_1^2$; $\mathbf{D}_2^2$; (e) $\mathbf{D}_1^3$; $\mathbf{D}_2^3$. Csak ellenőrzésre használják a Sarrus-szabályt és az adjungálást. Használják az adott mátrixokról tanultakat. / Use the Sarrus rule and adjudication for check only. Use the learned features of these matrixes. (10 pont)

4. Adott a következő mátrix / We have the following matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bontsa fel ezt a mátrixokat egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére! / Divide this matrix into a sum of symmetric and skew-symmetric matrixes. (10 pont)

5. Adottak a következő blokk mátrixok / We have the following block matrixes:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Végezze el a következő műveleteket, ha lehetséges! / Calculate the following expressions, if it is possible: (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $2 \cdot \mathbf{A}$; $3 \cdot \mathbf{B}$; (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. A műveleteket a blokokkal végezze, a rendes mátrix szorzást csak ellenőrzésre használja! / Calculate with the block. Use the normal matrix operations only for checking. (10 pont)

6. Mátrixok / Matrices
   a.) Adja meg az alábbi mátrixok nyomát! / What is the trace of the matrices below?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \ \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

   b.) Melyik mátrix (szemi)ortogonális? Melyik mátrix önadjungált (Hermitikus), melyik unitér? / Which matrix is (semi)orthogonal? Which matrix is Hermitian or unitary?
   c.) Számolja ki az ortogonális és az unitér mátrixok inverzét! / Calculate the inverse of the orthogonal and unitary matrices.
   d.) Mi az $(1,1,0)$ és $(0,i,i)$ pontok távolsága? / What is the distance between the points $(1,1,0)$ and $(0,i,i)$? (20 pont)

7. LU-felbontás / LU decomposition
   a.) Adja meg az alábbi mátrix LU-felbontását! / What is the LU decomposition of the matrix below?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   b.) Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert az **A** mátrix LU-felbontását használva! / Solve the following system of linear equations using LU decomposition.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   c.) Számítsa ki az **A** mátrix az inverzét LU felbontással! / Calculate the inverse of matrix **A** using LU decomposition. (20 pont)

8. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a saját altereket, majd diagonizálja a mátrixot! / Calculate the eigenvalues and eigenspaces. Diagonalize the matrices.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(10 pont)

A fenti feladatsor két részre oszlik. Az (1)-(5) feladatok megoldásával a első zárthelyit lehet javítani, illetve pótolni. A (6)-(10) feladatokkal pedig a másodikat. A zárthelyik osztályzása: 0-20 pont: elégtelen (1), 21-27 pont: elégséges (2), 28-35 pont: közepes (3), 36-42 pont: jó (4) és 43-50 pont: jeles (5). Mindkét témából zárthelyiből legalább elégségest (2) kell elérni a gyakorlati jegyhez.

You can improve the results of the first mid-term test by solving exercises (1)-(5). If you want to replace your second mid-term exam you must solace exercises (6)-(10). Grades: 0-20 points: Fail 81), 21-27 points: Pass (2), 28-35 points: Satisfactory (3), 36-42 points: Good (4) és 43-50 points: Excellent (5). You must pass both mid-term tests to get a grade for the practice.

Facskó Gábor / Gabor FACSKO
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2025. május 15. / May 15, 2025