(MATNA1902) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
https://facsko.ttk.pte.hu

2025. április 3.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér I

- Definíció: Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett. Legyen $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés. Ha az $\mathbf{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(a) = \lambda\mathbf{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ sajátvektora φ-nek és λ az $\mathbf{a}$-hoz tartozó sajátértéke φ-nek.
- Definíció: Legyen $L_\lambda = \{\mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza. A L_λ alteret alkot, ezért a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.
- Definíció: (A sajátértékek meghatározása) Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$-e mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) = |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér II

- Definíció: Legyen φ az $\mathbb{R}^n$ -en ható lineáris transzformáció és legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A mátrix karakterisztikus polinomját értjük.
- Definíció: A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció karakterisztikus gyökének nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.
- Tétel: A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.
- Állítás: (A sajátvektorok alterei). Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ nullterével.
- Definíció: (Sajátaltér). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

Vége

Köszönöm a figyelmüket!