

1. Képtér és magtér

Magtér és injektivitás.

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A *magtere* $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$. Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért $A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Ha A injektív, akkor $\text{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \text{Ker}(A)$, akkor $A(v) = 0 = A(0)$, így az injektivitás miatt $v = 0$.

Képtér és szürjektivitás.

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A *képtere* $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.

Azaz $\text{Im}(A)$ az A *értékkészlete*, azon $w \in W$ vektorokból áll, melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.

$A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \text{Im}(A)$. Tehát $\text{Im}(A)$ altér.

Szürjektív akkor és csak akkor, ha értékkészlete az egész W .

A dimenziótétel.

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$ ($A \in \text{Hom}(V, W)$, $\dim(V)$ véges).

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\text{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$. Elég tehát belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\text{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \text{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re.

Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$.

Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$.

Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \text{Ker}(A)$, és így felírható $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban is. Bázisban v felírása *egyértelmű*, ezért $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. \square

A dimenziótétel következménye.

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

$\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$. Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$. Ezért A injektív is. Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$. Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is.

Végtelen dimenzióban *nem igaz!* **Példa:**

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = f'(x)$ (derivált). Szürjektív, de nem injektív.

2. Az invertálhatóság jellemzései

Leképezés determinánsa.

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.

Ekkor A *determinánsa* $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, *de melyik bázisban? MINDEGY!*

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S) = \det([A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}})$,

hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprocai.

A $\det(A)$ jelentése: *hányszorosára növeli A a térfogatot.*

Pontos tárgyalás *előjeles mértékek* segítségével: lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.

$\det(A)$ pozitív, ha A *irányítástartó*, negatív, ha A *irányításváltó*.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése.

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami **lineáris**).
- (2) A -nak van balinverze.
- (3) A -nak van jobbinverze.
- (4) A nem **bal oldali nullosztó** (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem **jobb oldali nullosztó** (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
- (7) A szürjektív (azaz $\text{Im}(A) = V$).
- (8) A bijektív.
- (9) $\det(A) \neq 0$.

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

(1) \implies (2), (3) triviális, (6), (7) \implies (8) volt már.

Az invertálhatóság jellemzései: megjegyzések.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (ezt beláttuk az előző félévben). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez **ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes**. Ezért (2) \implies (4). Hasonlóan (3) \implies (5) (HF).

Tehát elég belátni, hogy (4) \implies (6) és (5) \implies (7), mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó.

Állítás

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\text{Ker}(A)$ nem csak a nullvektorból áll. Legyen $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$ és b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re. Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j -re, mert $v \in \text{Ker}(A)$. Azaz AC egy bázis minden elemét nullába viszi, így minden vektort nullába visz, tehát $AC = 0$. \square

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó.

Állítás

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\text{Im}(A)$ nem az egész V . Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re. Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m) = 0$. Így $DA(w) = 0$ minden $w \in V$ -re, mert $v = A(w) \in \text{Im}(A)$. \square

Mátrix invertálhatóságának jellemzései.

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Az $M \in T^n \times n$ -es mátrixra ekvivalens:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem bal oldali nullosztó (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).
- (5) M nem jobb oldali nullosztó (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).
- (9) $\det(M) \neq 0$.

Itt C és D is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Bizonyítás

A mátrixok és a lineáris transzformációk közötti kölcsönösen egyértelmű, művelettartó megfeleltetésből következik.

Bal- és jobbinverz.

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B), ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$. Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$. Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. \square

Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$. Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk. A mostani számolásmentes bizonyítás mélyén a *dimenziótétel* van. Ez az absztrakt módszerek erejét demonstrálja.