(MATNA1901) Lineáris algebra

Dr. Facskó Gábor, PhD
tudományos főmunkatárs
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 7624 Pécs, Ifjúság útja 6.
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Űrfizikai és Űrtechnikai Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
`https://facsko.ttk.pte.hu`

2025. március 20.

Vektortér I

- Definíció: A $V \neq \emptyset$ halmazt vektortérnek nevezzük $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy $+$-al jelölt művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \mathbf{b}+\mathbf{a}, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b} \in V) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \text{ahol}\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V) \\
\exists \mathbf{0} \in V \text{úgy, hogy} \quad \mathbf{a}+\mathbf{0} &= \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in V \quad \text{esetén} \\
\forall \mathbf{a} \in V \exists\,(-\mathbf{a}) \in V : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

Vektortér II

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\mathbf{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda\mathbf{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\,\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\
(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \mathrm{ahol}\,(\mathbf{a} \in V\ \mathrm{és}\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\
\forall\mathbf{a} \in V\mathrm{-re}1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert V^2 és V^3 halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, a valós szám-n-esek halmaza, illetve a legfeljebb n-edfokú polinomok $R_n[x]$ halmaza is.

Vektortér III

- Definíció: A V vektortér L nem üres részhalmazát lineáris altérnek nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel.
- Tétel: A V vektortér L nem üres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad &\text{esetén} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \in L \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in L \quad &\text{esetén} \quad \lambda \mathbf{a} \in L. \end{aligned}$$

- Definíció: Legyen $H \neq \emptyset$ részhalmaza a V vektortérnek. A H által generált altér az a legszűkebb altere V-nek, mely tartalmazza H-t. (Azaz bármely H-t tartalmazó altérnek részhalmaza.) Jele: $\mathcal{L}(H)$.
- Mindig létezik H-t tartalmazó legszűkebb altér: tekintsük a H-t tartalmazó összes alterek metszetét.

Vektortér IV

- Definíció: A H halmaz generátorrendszere a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.
- Definíció: A V vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.
- Megjegyzés: A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált V vektortérnek, ha a V halmaz minden eleme felírható a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.
- Definíció: A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük.
- Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.
- Definíció: A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. Jele: $dim(V)$.

Vektortér V

- Definíció: Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázis V -ben és $\mathbf{a} \in V$. Ekkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat, amelyekre $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, az $\mathbf{a}$ vektor $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.
- Definíció: Legyen $\mathbf{v} \in V^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vagy $\mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Az $I = \{\alpha \mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origón átmenő) egyenesnek nevezzük.
- Definíció: Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. Ekkor az $L = \{\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmazt (egy origóra illeszkedő) síknak nevezzük.
- Az $L = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmaz éppen az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ által generált lineáris altér. Amennyiben $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ lineárisan függetlenek, az L halmaz egy m-dimenziós lineáris altér. Ekkor a $K = \{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m + \mathbf{v} : \alpha_1, \dots, \alpha_m, \in \mathbb{R}\}$ halmazt egy m-dimenziós affin altérnek nevezzük. Minden affin altér előáll $K = L + \mathbf{v}$ alakban, ahol L egy lineáris altér és $\mathbf{v} \in V$.

Vektortér VI

- Az $\mathbf{n}\,(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P\,(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete: $n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.
- Definíció: Halmazok (Minkowski-)összege: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
- Állítás: Alterek összege és metszete: $L_1 + L_2$ és $L_1 \bigcap L_2$ is altér.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$ direkt összeget alkot, ha $L_1 \bigcap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Lineáris transzformációk I

- Definíció: Legyenek V_1 és V_2 lineáris vektorterek. A $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \text{additív} : \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \\ \text{és homogén} : \varphi(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda\varphi(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: (Mátrixreprezentáció) A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ úgy, hogy $\varphi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Definíció: Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.
- Definíció: Lineáris formának nevezzük az $f : V \to \mathbb{R}$ alakú lineáris leképezéseket.

Lineáris transzformációk II

- Definíció: Azt mondjuk, hogy az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés bilineáris forma, ha mindkét változójában lineáris, azaz

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{z}) + L(\mathbf{y},\mathbf{z}) \\ L(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ L(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= L(\mathbf{x},\mathbf{y}) + L(\mathbf{x},\mathbf{z}) \\ L(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) &= \lambda L(\mathbf{x},\mathbf{y}), \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Tétel: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés akkor és csak akkor bilineáris forma, ha (egy adott bázisra vonatkozóan) egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ számok, hogy $L(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i y_k$.

Lineáris transzformációk III

- Tekintsük most $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisát, az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektorrendszert. Látható, hogy ekkor $\alpha_{ik} = L(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$. Az $A = (\alpha_{ik})_{n\times n}$ mátrixot az L bilineáris forma (kanonikus bázisra vonatkozó) mátrixának nevezzük.
- Definíció: Az L bilineáris forma szimmetrikus, ha $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- Definíció: Legyen L egy szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren. Ekkor a $Q(x) = L(x, x)$ függvényt kvadratikus formának nevezzük.
- Definíció: Azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus forma pozitív definit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) > 0$.

  Megjegyzés: Q pozitív szemidefinit, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ és $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, hogy $Q(\mathbf{y}) = 0$. A negatív definit és negatív szemidefinit fogalmak hasonlóan vezethetők be.

Lineáris transzformációk IV

- Definíció: Az olyan szimmetrikus bilineáris formát, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit, belső szorzatnak nevezzük.
  Pl. a $\mathbb{R}^3$ térben a skaláris szorzat egy belső szorzat.
- A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha az bijektív is.
- Belátható, hogy két vektortér akkor és csak akkor izomorf egymással, ha dimenziójuk megegyezik:

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

Vége

Köszönöm a figyelmüket!