Név: ____________________ Neptun kód: ____________________

(ONFIZ1-0401) Elemi lineáris algebra 2. zárthelyi dolgozat

1. Adottak a következő mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbiak közül az elvégezhető műveleteket!

(a)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 & 1+3 \\ 2+2 & 4+2 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}}}$$

(b) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$: A műveletet nem lehet elvégezni, mert a megszorzandó mátrix oszlopainak számának meg kell egyeznie a másik mátrix sorainak számával.

(c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{F}$: A műveletet nem lehet elvégezni, mert a megszorzandó mátrix oszlopainak számának meg kell egyeznie a másik mátrix sorainak számával.

(d)

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 1+4 & 2+2 \\ 2+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}}$$

(e) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$: A műveletet nem lehet elvégezni, mert a megszorzandó mátrix oszlopainak számának meg kell egyeznie a másik mátrix sorainak számával.

(f) $\mathbf{A}^{-1}$: Számítsuk ki a mátrix determinánsát Sarrus-szabállyal, hiszen egy 3×3-as mátrixról van szó. Ha zérus, akkor a mátrix szinguláris, azaz nem invertálható:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 - 0 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 3 + 2 - 12 - 1 = -8 \neq 0$$

Tehát a mátrix invertálható. Számítsuk ki az egyes elemek aldeterminánsainak az értékét!

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \ \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \ \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \ \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Írjuk ki az értékeket, alkalmazzuk a sakktábla szabályt az elemek előjelére, transponáljuk a mátrixot, majd osszuk le a determinánssal és írjuk fel az intertált mátrixot!

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \mathbf{A}^{-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}}$$

(g) $\mathbf{C}^{-1}$: Nem lehet invertálni, mert nem négyzetes mátrix.

(10 pont)

2. Írja fel az $\mathbf{a} = (5,1,2,4)^T$ vektort az

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

bázisban.

Voltaképpen a következő egyenletet kell megoldani:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\2\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\\4\end{pmatrix},$$

ahol $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$. (10 pont)

3. Oldja meg az alábbi mátrixegyenleteket!

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\\3&1&1\end{pmatrix}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&3\\3&3&1\end{pmatrix}\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&5&4\\5&4&0\\4&0&1\end{pmatrix}$$

a.) $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}-3\mathbf{B}=\mathbf{C}$

b.) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}=2\mathbf{X}^{-1}$

(10 pont)

4. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és egy-egy, a sajátértékhez tartozó sajátvektort!

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$$

(10 pont)

5. Az alábbi leképezések közül melyik lineáris? Adja meg a leképezés mátrixát is!

a.)

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\-x_1+x_2\\x_3+7x_2\\-x_3\end{pmatrix}\left(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\right)$$

b.)

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}x_1\\-3x_1x_2\\5x_2\\-x_1\end{pmatrix}\left(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\right)$$

(10 pont)

0-20 pont: elégtelen (1), 21-27 pont: elégséges (2), 28-35 pont: közepes (3), 36-42 pont: jó (4) és 43-50 pont: jeles (5). Mindkét zárthelyiből legalább elégségest (2) kell elérni a gyakorlati jegyhez. Ha mindkét zárthelyi legalább közepes (3), akkor megajánlott vizsgajegyet kapnak. Ha nem tudtak zárthelyit írni, nem sikerül a zárthelyi, vagy javítani kívánnak, akkor a vizsgaidőszak első hetében írandó pótzárthelyi dolgozaton vehetnek részt. A megajánlott jegyet nem szerzőknek, vagy a jegyet nem elfogadóknak vizsgáznia kell egy később megállapított időpontban.

Facskó Gábor
facskog@gamma.ttk.pte.hu

Pécs, 2024. november 5.