

A Compton-effektus vizsgálata

Csanád Máté

2023. március 10.

1. A Thomson-szórás

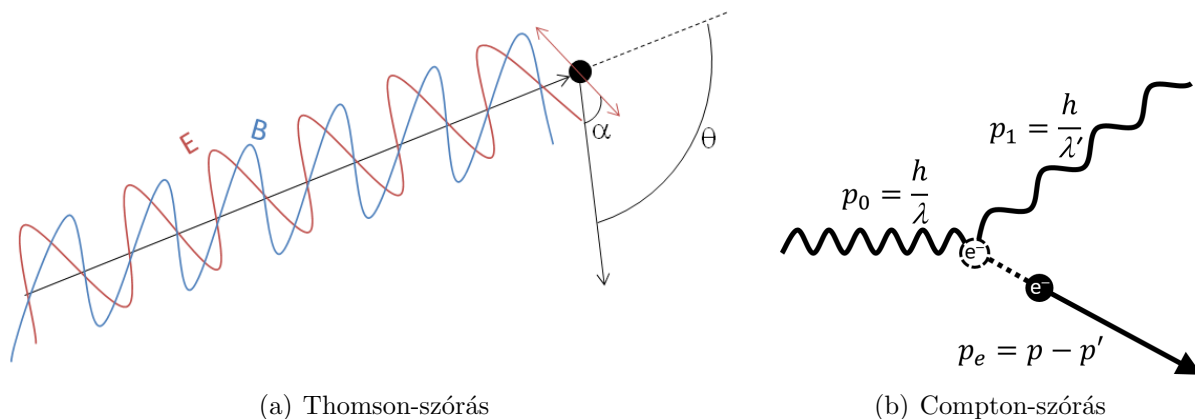
Az elektromágneses sugárzás atomokra gyakorolt hatása a XX. század elején intenzíven kutatott terület volt, elég csak az atomi színeképekre, a fotovoltaiikus vagy a fotoelektromos hatásra gondolni. A klasszikus kép szerint az elektromágneses sugárzás időben és térben periodikusan váltakozó irányú elektromos és mágneses tér. Ez hatással van az atomokban lévő töltésekre, gyorsíthatja azokat, amelyek viszont ezen gyorsulás hatására sugározhatnak – ezt nevezzük Thomson-szórásnak.

Klasszikusan a bejövő és a kimenő hullám frekvenciája azonos, hiszen gerjesztett rezgésről van szó, ahol a gerjesztés és a rezgés (amely a szórt sugárzást létrehozza) frekvenciája megegyezik. Ha elég nagy az intenzitás, a töltés visszalökődhet, és a Doppler-effektus módosítja a frekvenciát, de elég kis intenzitásnál ez a hatás elhanyagolható.

A klasszikus elektrodinamika szerinti képben a bejövő elektromágneses hullám hatására a töltés gyorsul (lásd az 1(a). ábrát), és dipólsugárzást bocsát ki, melynek intenzitása $\sin^2 \alpha$ szerint változik, ahol α a gyorsulás és a sugárzás vizsgált iránya által bezárt szög. A gyorsulás irányát az elektromos térerősség iránya, azaz a polarizáció határozza meg, az eltérülés szögével kifejezve pedig $(1 + \cos^2 \theta)^2$ -tel arányos, azaz 90 fokra szimmetrikus eloszlást kapunk.

2. A Compton-effektus

Compton 1922-ben figyelte meg röntgensugarak szóródását paraffinon. Azt látta, hogy a szórt sugárzásban nagyobb hullámhosszú komponensek jelennek meg. Ahogy fent említettük, a klasszikus képben ez elképzelhetetlen. Pontosabban ezt a hullámhossz-változást nagy



1. ábra. Az elektromágneses sugárzás szórása klasszikusan illetve kvantumosan.

intenzitásnál okozhatná a Doppler-effektus (a visszalökődő szórócentrumról kiinduló sugárzás frekvenciájának megfigyelő szerinti módosulása), a megfigyelés szerint azonban alacsony intenzitásnál is megjelenik egyfajta frekvencia- vagy hullámhossz-módosulás, amelyet a klasszikus kép nem tud megmagyarázni. A szóródás során mért eloszlás is különbözik a várakozásoktól (a Thomson-szórásra vonatkozó formulától), nem 90 fokra szimmetrikus. Mindezt a kvantumelmélettel lehet csak megmagyarázni, az elektromágneses sugárzást fotonokkal értelmezve, és foton-elektron ütközéseket leírva.

A Compton-effektus során az elektromágneses sugárzás tehát kvantáltnak, részecskékből állónak tekintendő. A sugárzás kvantuma, a foton, rugalmasan szóródik szabad (pontosabban a sugárzás energiájához képest gyengén kötött) elektronokon.

A szóródás során az elektromágneses sugárzás részecskéjének (a fotonnak) energiája a meg-lökött elektronnak átadott energiával csökken, és így a foton hullámhossza megnövekszik, mivel a kvantummechanika szerint a foton energiája arányos a frekvenciájával, $E = h\nu$, és fordítot-tan arányos a hullámhosszal, $E = hc/\lambda$.

Ahogy fent láttuk, ez a fény klasszikus hullámelméletével nem magyarázható, ugyanis a klasszikus hullámoknak szóródásuk során nem változik a frekvenciája (ahogy a hang magassága sem függ attól, hogy a keletkezése után min szóródott). Ezért a Compton-effektus felismerése a kvantumelmélet egyik fontos bizonyítéka lett.

A foton energiaváltozásának kiszámításához felírjuk a négyes- illetve hármassimpulzus, se-besség, illetve tömeg és energia közötti összefüggéseket. Elsőként a hármass- és négyessebesség kapcsolatát, illetve a γ -faktort ($|\mathbf{v}| < c$ esetén) :

$$u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (1)$$

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2 \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (3)$$

Majd írjuk fel az energia, a hármassimpulzus, a négyessimpulzus és a sebesség kapcsolatát m tömegű részecskékre:

$$E = mc^2\gamma \quad (4)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma \quad (5)$$

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = mu^\mu \quad (6)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2 \quad (7)$$

$$E^2 = m^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2 \quad (8)$$

míg nulla tömegű részecskék esetén az alábbi összefüggések érvényesek:

$$|\mathbf{v}| = c \quad (9)$$

$$E = |\mathbf{p}|c \quad (10)$$

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad (11)$$

$$p^\mu p_\mu = 0 \quad (12)$$

A Compton-szórásra, mint rugalmas ütközésre, a fentiek alapján felírhatók a relativisztikus energia- és impulzusmegmaradás egyenletei (lásd az 1(b). ábrát):

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_1, \quad (13)$$

$$m_e c^2 + E_0 = E_e + E_1, \quad (14)$$

ahol az elektron kezdetben csak a nyugalmi tömegének megfelelő energiával rendelkezik. Az energiamegmaradásból (lásd a 14. egyenletet) pedig, mivel fotonokra $E = |\mathbf{p}|c$, a

$$m_e c^2 + \mathbf{p}_0 c = \sqrt{\mathbf{p}_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \mathbf{p}_1 c \quad (15)$$

egyenletet kapjuk, ahol \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_0 a foton (hármass)impulzusa az ütközés előtt illetve után, \mathbf{p}_e az elektron impulzusa az ütközés után, m_e az elektron nyugalmi tömege, c a fénysebesség. Mostantól a normál betűvel írt p mennyiségekkel a megfelelő hármassimpulzus-vektorok abszolút értékét jelöljük. Az impulzusmegmaradásból (lásd a 13. egyenletet) pedig

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1, \text{ azaz} \quad (16)$$

$$p_e^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta. \quad (17)$$

Itt θ a foton szórási szögét jelenti. Az energiamegmaradásból (lásd a 15. egyenletet) rendezés, négyzetre emelés és c^2 -tel való osztás után adódik:

$$p_e^2 = p_0^2 + p_1^2 + 2p_0 m_e c - 2p_0 p_1 - 2p_1 m_e c. \quad (18)$$

Ezt az előbbivel összevetve és kifejezve a szórt foton impulzusát, a

$$p_1 = \frac{p_0}{1 + \frac{p_0}{m_e c}(1 - \cos \theta)} \quad (19)$$

összefüggésre jutunk. Ezt átírhatjuk az energia megváltozására, bevezetve a foton energiájára vonatkozó $pc = h\nu$ összefüggést (itt h a Planck állandó és ν a frekvencia):

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{h\nu_1}{h\nu_0} = \frac{1}{1 + \xi(1 - \cos \theta)} = P, \quad (20)$$

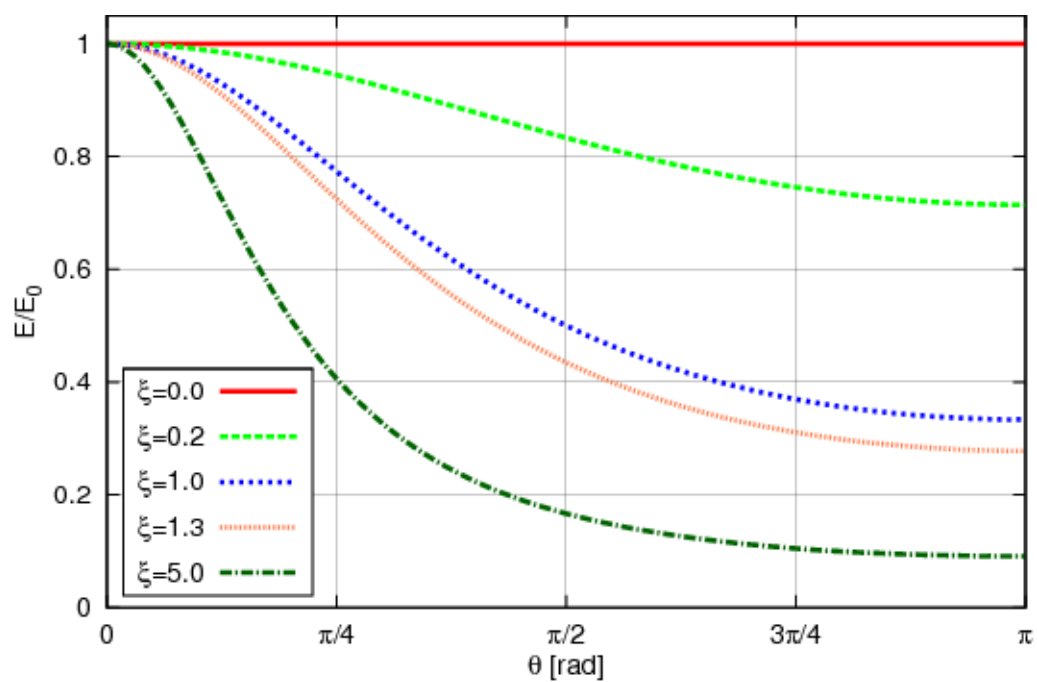
ahol $\xi = \frac{p_0}{m_e c} = \frac{h\nu_0}{m_e c^2}$, és bevezettük a P mennyiséget, amely a szóródott és az eredeti foton energiájának aránya. Ez a P mennyiség a θ -tól és ν_0 -tól függ. E folyamatnál tehát – a tapasztalattal megegyezően – a szóródás szögének függvényében a szórt foton energiája csökken, azaz a hullámhossza nő. A hullámhosszmódosulás a fentiek alapján $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}$, ahol $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,4 \text{ pm}$ a Compton-hullámhossz.

A 2. ábrán a szórt és a bejövő fotonok energiájának arányát mutatjuk be a szórási szög függvényében, különböző bejövő foton-energiákra. A 20. egyenlet alapján látható, hogy kis foton-energiák esetén ($\xi \ll 1$) a bejövő és a szórt foton energiája majdnem megegyezik, azaz $E_1 \approx E_0$ (persze az egész gondolat csak szabad elektronokra érvényes, tehát olyan energiákra, ahol az elektron már szabadnak tekinthető). Ezzel szemben extrém relativisztikus esetben ($\xi \gg 1$) elég nagy szögekre a szórt foton energiája független a bejövő foton energiájától:

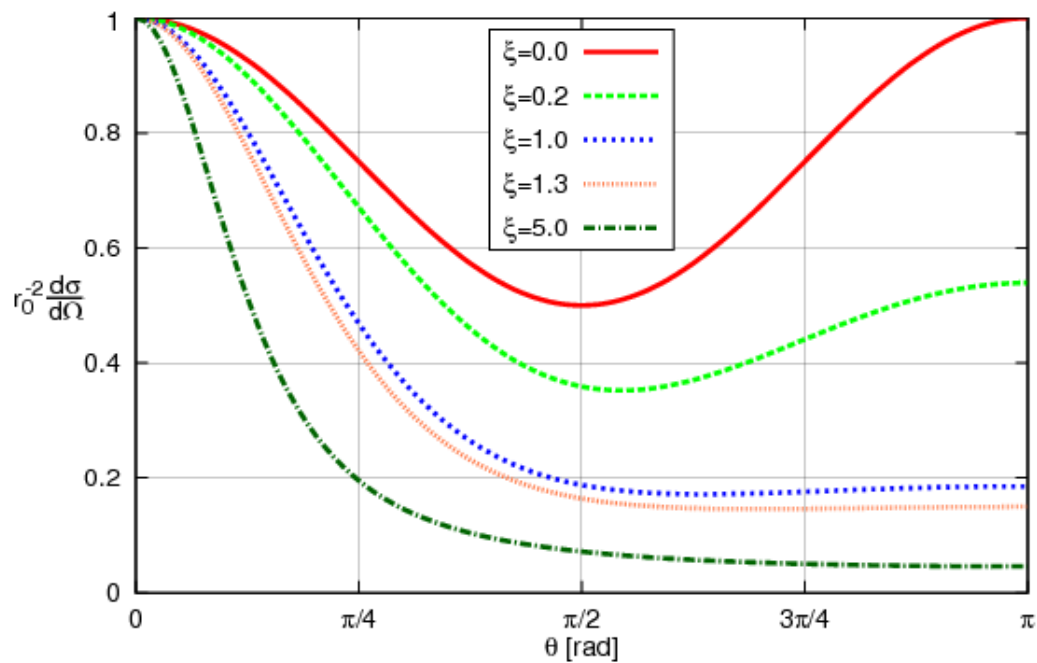
$$E_1 = \frac{m_e c^2}{1 - \cos \theta}, \quad (21)$$

azaz 90 fok esetén 511 keV, visszaszóródás (180 fok) esetén 255 keV.

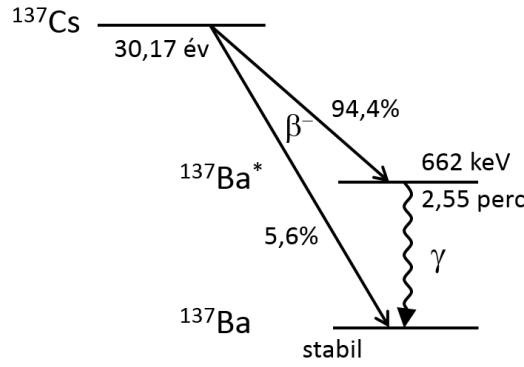
Az eddigi összefüggésekből könnyen megkapható a meglökött elektron energiája és a bejövő fotonhoz képest mért ϕ szórási szöge a szóródott foton θ szögének függvényében. A nagy energiájú fotonok szóródására Compton és mások (így a magyar Bay Zoltán és Szepesi Zoltán) ellenőrző méréseket végeztek koincidencia berendezések segítségével. Megállapították, hogy a meglökött elektronok és a szórt fotonok energiája a szórási szög függvényében a fenti modellel teljes összhangban van, valamint hogy a szórási folyamat 10^{-11} másodpercnél rövidebb idő alatt lezajlik.



2. ábra. A Compton-szórt foton energiájának szögfüggése.



3. ábra. A Compton-szórás hatáskeresztmetszetének szögfüggése.



4. ábra. A ^{137}Cs bomlási sémája [3].

3. A Compton-szórás szögeloszlása

A szórt fotonok szögeloszlását (azaz, hogy egy adott energiájú foton milyen valószínűséggel szóródik egy adott θ szögbe) O. Klein és Y. Nishina határozták meg elméleti úton [1, 2]. Eszerint egy foton θ szög körüli $d\Omega$ térszögbe való szórására vonatkozó hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \frac{1}{(1 + \xi(1 - \cos \theta))^2} \left[1 + \frac{\xi^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)(1 + \xi(1 - \cos \theta))} \right] \quad (22)$$

ahol $r_0 = \frac{ke^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15}$ m, a klasszikus elektronsugár, és $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, ha a transzverz (a bejövő impulzusra merőleges) síkbeli forgatásra szimmetrikus a folyamat. Ha felhasználjuk a korábban bevezetett $P = (1 + \xi(1 - \cos \theta))^{-1}$ arányt, akkor lényegesen egyszerűbb kifejezést kapunk:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (P - P^2 \sin^2 \theta + P^3). \quad (23)$$

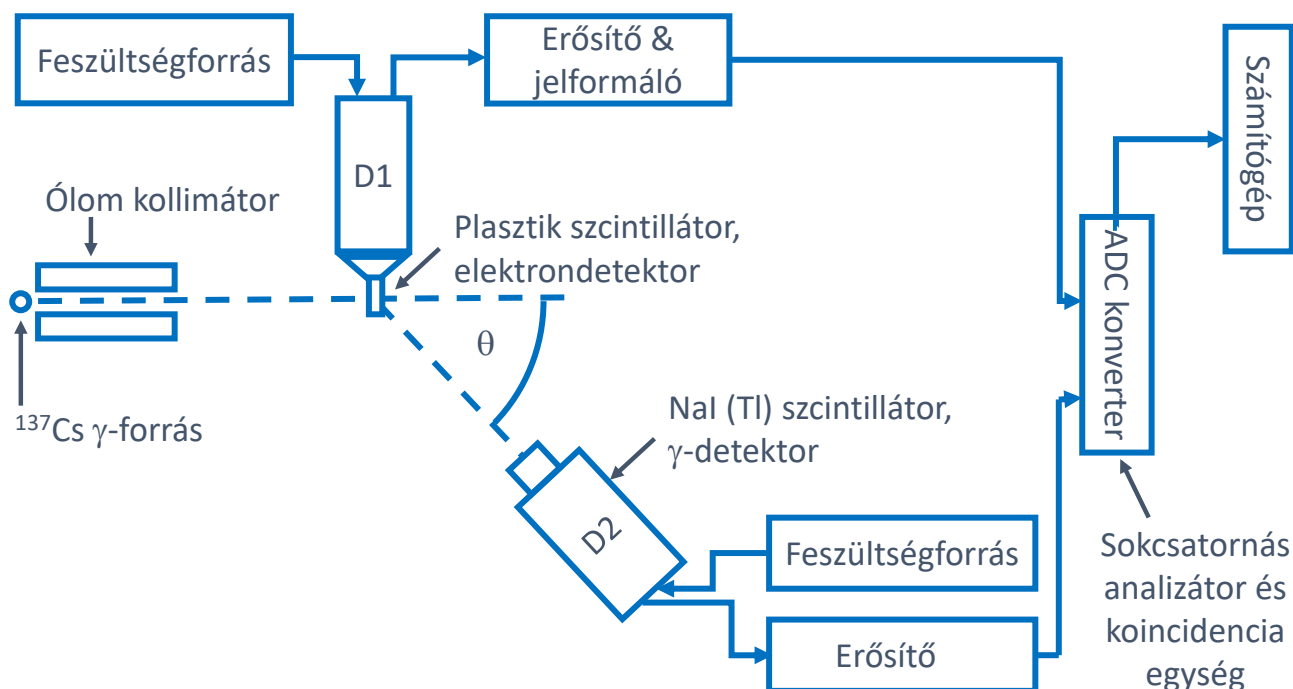
A 3. ábrán az $\frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}$ mennyiséget ábrázoltuk néhány ξ érték esetén. Ahogy a 23. egyenletből látható, $\xi \rightarrow 0$, azaz $P \rightarrow 1$ esetén a hatáskeresztmetszet a $(2 - \sin^2 \theta)$, azaz az $(1 + \cos^2 \theta)$ tényezővel arányos, azaz visszakapjuk a klasszikus Thomson-formulát. Nagy ξ értékek esetén kis szögekre még nincs nagyon nagy eltérés az előre- és a visszaszórás között, nagy szögeknél azonban egyre kisebb eséllyel tapasztalunk visszaszórást (azaz $\theta > \pi$ szögben érkező részecskéket).

Már $\xi \approx 0,2$ (kemény röntgensugarak) esetén is jelentősek az eltérések a Thomson-képlettől, amelyet a 3. ábrán a folytonos piros vonal jelöl.

4. A mérőberendezések

A laboratóriumi gyakorlat során ^{137}Cs izotópot használunk forrásként, melynek aktivitása 1963. július elsején 486,55 MBq volt. A ^{137}Cs izotóp 30,17 év (pontosabban $11018,3 \pm 9,5$ nap) felezési idővel negatív béta-bomlással gerjesztett állapotú ^{137}Ba atommagba bomlik, amelynek a felezési ideje 2,55 perc, és $94,36\% \pm 0,20\%$ valószínűséggel $(661,659 \pm 0,003)$ keV energiájú gamma fotonokat bocsát ki [3]. Ezeknek a gamma-részecskéknél a Compton-szóródását fogjuk vizsgálni. A Cs forrás mai aktivitását az $A(t) = A(0) \cdot 2^{-t/T}$ összefüggésből számíthatjuk ki, ahol T a felezési idő. Ez az $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t} = N(0) \cdot 2^{-t/T}$ összefüggésből adódik.

A sugárforrás nagyon közelről káros hatásokat fejthet ki, ezért ne érjünk hozzá, csak csipesszel fogjuk meg, mérés közben pedig mindig legyen köztünk és a sugárforrás között vastag



5. ábra. A mérőberendezés logikai vázlata.

ólomárnyékolás (a gamma-sugárzást az ólom leárnyékolja), az ALARA elv szerint: a sugárterhelést tartjuk a minimális, ésszerűen elérhető értéken.

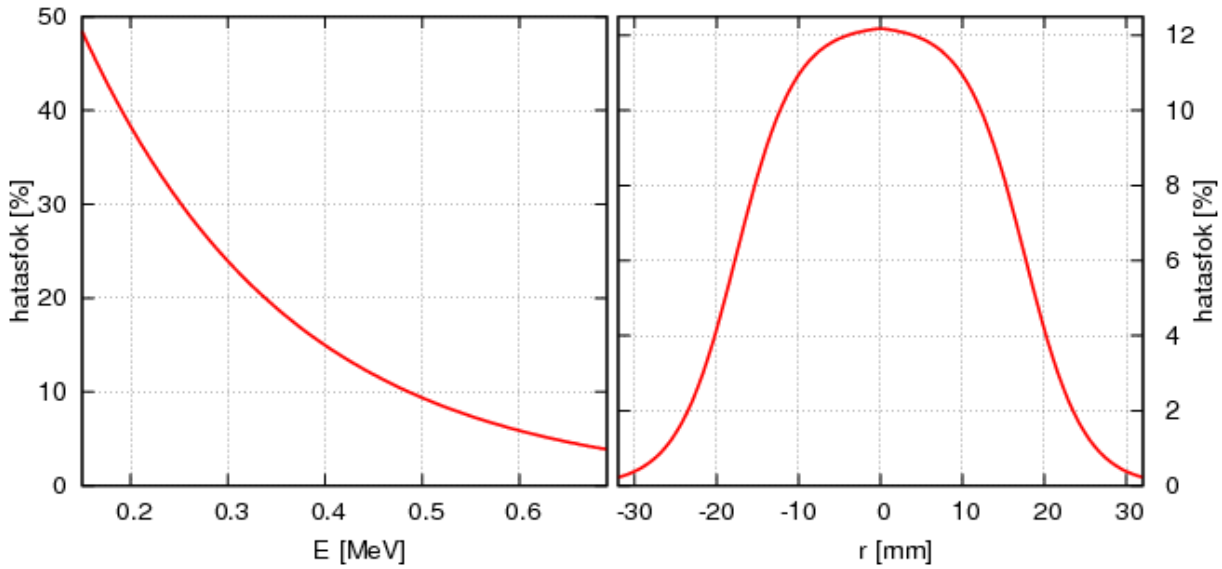
A Compton-effektus vizsgálatánál a szórt fotonok energiájának szögfüggésére vonatkozó képletet (1(b). egyenlet) fogjuk ellenőrizni, illetve megvizsgáljuk, hogy a hatáskeresztmetszet szögfüggése leírható-e a Klein-Nishina formula (3. egyenlet) segítségével. Miután koincidenca módszerrel mérünk (azaz csak olyan eseményeket veszünk figyelembe, ahol elektront és fotont is detektáltunk), a meglökött elektron és a szórt foton kibocsátásának egyidejűségét is ellenőrizzük kb. 10^{-6} s pontossággal. A mérőberendezést az 5. ábra mutatja vázlatosan.

Itt a ^{137}Ba izotóp 662 keV energiájú gamma fotonjait egy ólom kollimátor irányítja a szórócentrumra. A szórást plastik szcintillátoron történik, így a szóró anyag egyúttal a meglökött elektronok detektálására is szolgál. E detektor jelei erősítés után megfelelően formálva szolgáltatják az analóg-digitál konverter kapujeleit. A θ szögben elhelyezett gamma detektor (NaI(Tl) szcintillátor) jelei erősítés után egy PC-vezérelt sokcsatornás analízator rendszerbe jutnak.

A mérés során elegendő 128 csatornában mérve felvenni a gamma spektrumokat, különböző szögekre állítva a gamma detektort. Ezután a teljes energiás gamma csúcsok helyéből megállapítható a szórt sugárzás energiája. Az egyes fotocsúcsok területéből és a mérés idejéből pedig a szórt intenzitás szögfüggése, azaz a szögeloszlás határozható meg. Ehhez fel kell használnunk a NaI(Tl) fotocsúcs hatásfokának energiafüggését, melyet a 6. ábrán láthatunk. Ezt a következő képlet írja le, ahol E a mért foton energiáját jelöli:

$$\eta = 0,98e^{-E/(0,21 \text{ MeV})} + E/(20 \text{ MeV}) \quad (24)$$

A hatásfok-görbén a fotoeffektus hatásfokának csökkenése az energia növekedésével jól láthatóan érezteti a hatását. A mérés során általában erre, a detektor felületére átlagolt hatásfokra lesz szükségünk, kivéve azt az esetet, amikor a detektort a direkt nyaláb útjába tesszük (0 fok-ban). Ekkor a kollimátor geometriájától függően nem biztos, hogy a teljes detektorfelületet éri a fotonnyaláb. Ekkor a nyaláb méretének megfelelően kell a hatásfokot figyelembe venni. A



6. ábra. A NaI(Tl) fotocsúcs-hatásfoka a teljes detektorfelületre átlagolva, az energia függvényében (bal oldalon); illetve 662 keV-re a detektor középpontjától való távolság függvényében (jobb oldalon). A vízszintes vonal az átlagot jelöli.

detektor hatásfokának pozíciófüggése a

$$\eta = \frac{0,123}{1 + e^{(|r|-17,6\text{mm})/3,6\text{mm}}} \quad (25)$$

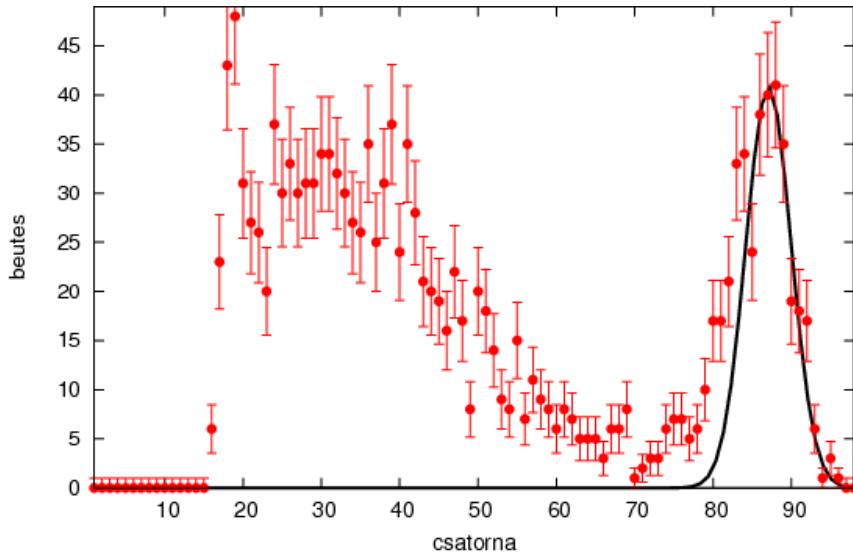
összefüggés alapján számolható ekkor (lásd 6. ábra).

5. A szórt sugárzás energiájának mérése

A beérkező fotonok energiájuktól függő nagyságú feszültséget generálnak a detektorban (ez a szcintillációs detektor és a hozzá kapcsolt fotoelektron-sokszorozó működésének lényege). Ezt a jelet digitalizáljuk, azaz osztjuk be valamelyik mérési csatornába. A mérésünk során egy hisztogrammot kapunk, amelynek vízszintes tengelyén a csatornaszám lesz, a függőlegesen pedig az adott csatornába beérkező beütések száma (lásd 7. ábra).

A koincidenzával végzett mérések során a detektor elhelyezkedésének szögétől függő helyen megjelenik egy csúcs, az adott szögbe szórt Compton-fotonok energiájának megfelelően. A csúcstól balra pedig a Compton-élt láthatjuk, előtte a Compton-spektrumot. Utóbbi a detektorban Compton-effektussal szóródó, majd megszökő fotonok által leadott energia eloszlása, előbbi pedig annak (180 fokos szóródás esetén megfigyelhető) maximumának felel meg.

A csatornaszámoknak energiát kell megfeleltetnünk, ezt nevezzük kalibrációnak. Erre az ad lehetőséget, hogy a szórás nélkül beérkező fotonok energiája ismert, 662 keV. Ezeket úgy észlelhetjük, hogy a detektort 0 fokban helyezzük el, azaz a forrással szemben. Mivel azonban a kalibrációnk affin lineáris is lehet, azaz $E = a \cdot x + b$ alakú (ahol x a csatornaszám), még egy fix pontra van szükségünk. Ezt az ólom K_α vonala biztosítja számunkra, ennek energiája ugyanis ismert, 75 keV (ld. Moseley-törvény). A K_α átmenet során egy külső, 2p pályán lévő elektron bekerül az 1s pályára, és ezt az átmeneti energiát a koincidenca kikapcsolása esetén a gamma-fotonok és az ólom kölcsönhatása révén kiválóan észlelhetjük. A spektrumban ekkor további csúcsokat is láthatunk, például a 180-ban visszaszórt, majd detektált fotonok csúcsát, ezek energiája azonban a Compton-formula alapján nagyobb, mint 75 keV.



7. ábra. Egy koincidenzával végzett tipikus mérés eredménye. A Compton-szórt fotonok a 90. csatorna környékén jelennek meg, előtte pedig a Compton-élt és a Compton-spektrumot láthatjuk. A legelső beütesek nem az első csatornában vannak, mivel ezeket nem vesszük figyelembe, az itt megjelenő túlságosan nagy zaj miatt. A Compton-csúcsra Gauss-görbét illesztettünk, hogy pontosan meghatározzuk a helyét. Az illesztésből érdemes kihagyni a csúcs bal szélét, ez ugyanis még a Compton-élből is tartalmazhat beüteseket. További lehetőség, hogy a Gauss-görbe „alatt” egy (lineáris vagy exponenciálisan csökkenő) háttérrel is illesztünk, esetleg az úgynevezett „Crystal Ball” függvényt is használhatjuk.

A fenti két pontra illesztett kalibráció tehát úgy zajlik, hogy először is az adott csúcsokra Gauss-görbét illesztünk, és ezek közepe jelenti majd a csúcsához tartozó csatornaszámot. Ezek után megoldjuk a

$$E_1 = a \cdot x_1 + b, \quad E_2 = a \cdot x_2 + b \quad (26)$$

egyenleteket:

$$a = \frac{E_1 - E_2}{x_1 - x_2}, \quad b = \frac{E_2 x_1 - E_1 x_2}{x_1 - x_2}. \quad (27)$$

Mivel a mért x_1 és x_2 csatornaszámoknak lesz egyfajta bizonytalansága (a Gauss-illesztésből), ezért ezek a hibaterjedéssel az a és b paraméterekben is mérési bizonytalanságot jelentenek majd. A későbbiekben (Gauss-illesztésekkel) mért x csatornaszámokból számolt $E = a \cdot x + b$ energiáknak a mérési bizonytalanságához tehát az a és a b bizonytalansága is hozzájárul.

Az így elvégzett kalibrációban azonban problémát jelenthet, hogy mindkét csúcsot kikapcsolt koincidenzia-áramkör mellett mértük, míg a későbbiekben használandó energia-értékeket a koincidenzával együtt. Ezért egy másik kalibrációs lehetőséget is megadunk. Ennek során a (továbbra is a csúcsra elvégzett Gauss-illesztéssel) mért csatornaszámok függvényében ábrázoljuk az adott szöghöz tartozó elméleti energiát. Ezen adatokra egyenest illesztünk, és ezen egyenes paraméterei lesznek a kalibrációs értékeink. Fontos, hogy az a és b kalibrációs paramétereknek ekkor is lesz Δa és Δb hibája, amelyet a későbbiekben használnunk kell.

6. A hatáskeresztmetszet mérése

A hatáskeresztmetszet definíciója a következő:

$$\frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} = N_{\text{céltárgy}} j \sigma \quad (28)$$

ahol $\Delta N_{\text{szórt}}$ a Δt idő alatt szóródott részecskék száma, $N_{\text{céltárgy}}$ a céltárgyban lévő szórócentrumok (elektronok) száma, j a bejövő fotonfluxus, σ pedig a teljes hatáskeresztmetszet. Ezt átírva differenciális hatáskeresztmetszetre, és beírva a nyaláb és a minta keresztmetszetének közös részét (A), a minta vastagságát (dx) és a céltárgyban a szórócentrumok számsűrűségét (n), a következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} = j A dx n \Delta \Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (29)$$

ahol a detektorunk által lefedett térszög $\Delta \Omega$. A jA szorzat a forrásból a céltárgyra irányuló (azon áthaladó vagy szóródó) fotonok száma másodpercenként. A szórócentrumok éppen a céltárgy szabad elektronjai. Ennél az energiánál lényegében az összes elektron szabadnak tekinthető, azaz az elektronok számsűrűségét kell felhasználnunk:

$$n = \frac{\rho N_A Z}{M}, \quad (30)$$

ahol ρ a céltárgy tömegsűrűsége (ez a konkrét kísérletben $1,03 \text{ g/cm}^3$), Z a rendszáma, M a móltömege és N_A az Avogadro-szám. A műanyag céltárgy (plasztik szcintillátor) egyfajta hosszú szénláncnak tekinthető, amely CH_2 blokkokból áll, azaz $Z = 8$ és $M = 14 \text{ g/mol}$. Egy lényeges dolgot kell még figyelembe venni: a detektor hatásfokát. Ha ΔN részecskét észlelünk, és a hatásfok η , akkor valójában $\Delta N/\eta$ volt a részecskeszám. A fentiek alapján a differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta N_{\text{szórt}} M}{j A dx \rho N_A Z \Delta \Omega \eta \Delta t} = \frac{K}{\eta} \cdot \frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} \quad (31)$$

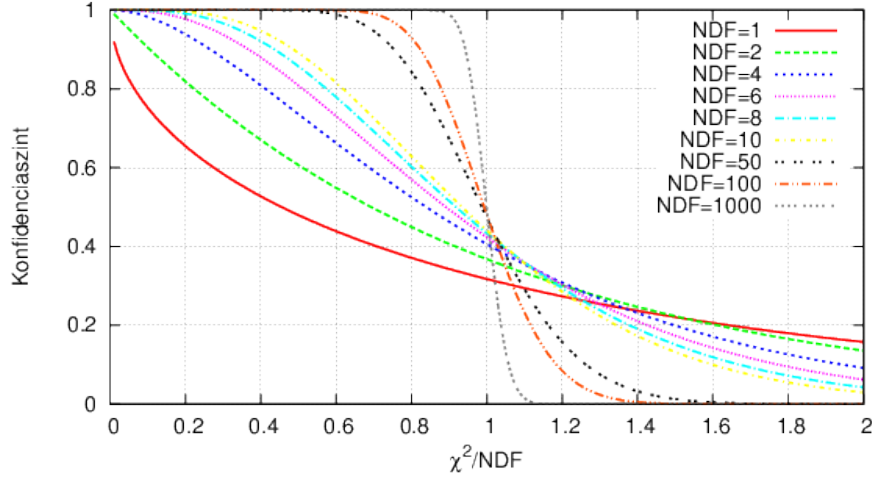
ahol a $K = M/(j A dx \rho N_A Z \Delta \Omega)$ értéke nem függ a konkrét méréstől, azaz előre globálisan kiszámolható (a hatásfok is csak az energiafüggése miatt nem állandó az egyes szögekben). Így tehát az adott idő alatt szóródott fotonok számának mérésével a differenciális hatáskeresztmetszetet mérhetjük, és ellenőrizhetjük a Klein-Nishina formulát. A 23. egyenletből tehát

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} = \frac{r_0^2}{2K} (P - P^2 \sin^2 \theta + P^3), \quad (32)$$

ahol a bal oldali értékeket mérjük (illetve a hatásfokot megadtuk), míg a jobb oldal az elméleti értékeket tartalmazza. Így ezek direktben összehasonlíthatóak.

7. Az eredmények értelmezése

Az eredmények értelmezéséhez elengedhetetlen a hibáik pontos becslése. A mérés statisztikus hibája abból származik, hogy véges beütésszámokat mérünk. A Poisson-eloszlás tulajdonságai miatt az egy csatornába történt beütések számának hibája (sok beütés esetén) jó közelítéssel az érték gyöke, $\Delta n = \sqrt{n}$. Tehát ha a beütésszám egy intervallumon (a mérés eredményeként létrejövő hisztogram egy csatornájában) 100 felett van, akkor lesz a hibája 10%-nál kisebb. Ez a hiba pontról pontra független, azaz nincs összefüggés az egyes pontok hibájának előjele és nagysága (azaz hogy a „valódi” értéknél kisebbet vagy nagyobbat mértünk-e, és mennyivel)



8. ábra. A konfidenciaszint függése a χ^2/NDF változótól, különféle NDF értékekre. Látható, hogy nagy NDF-ekre a $\chi^2 = \text{NDF}$ érték a vízválasztó.

között. Ezeket felhasználva kiszámíthatjuk az elméleti görbe „valószínűségét”, vagyis hogy az a mérési pontokkal mennyire konzisztens. Ehhez az adatok és az elméleti görbe χ^2 távolságát a következőképpen definiáljuk:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{\Delta y_i^2} \quad (33)$$

ahol x_i a mérési pontok helye (esetünkben a θ szög értékei), y_i a mérési eredmény (energia illetve hatáskeresztmetszet), Δy_i a mérési eredmények bizonytalansága, és f az ismert elméleti függvény (amelyet az x_i helyen veszünk – ez jó esetben hibán belül visszaadja a mért y_i értéket). A kapott χ^2 valószínűség-sűrűségét ekkor a χ^2 és a szabadsági fokok N száma (a mérési pontok száma mínusz az illesztett függvény paramétereinek száma) figyelembe vételével kaphatjuk meg, feltéve, hogy a hibák függetlenek, és eloszlásuk egyenként Gauss-eloszlású:

$$P(\chi^2) = \frac{1}{2^{N/2} \Gamma(N/2)} (\chi^2)^{N/2-1} e^{-\chi^2/2} \quad (34)$$

ahol $N/2 \in \mathbb{Z}$ esetén $\Gamma(N/2) = (N/2 - 1)!$, egyébként az általános Γ függvény használandó. Mivel χ^2 várható értéke N , szokásos definiálni a relatív χ^2 -et: $\chi_r^2 = \chi^2/N$. Ugyancsak szokásos az illesztés jóságát a konkrétan mért χ_M^2 érték valószínűségével jellemezni, amelyet (adott N esetén) a

$$\tilde{P}(\chi_M^2) = 1 - \int_0^{\chi_M^2} P(\chi^2) d\chi^2 \quad (35)$$

menyiséggel definiálunk. Ha az illesztett függvény és az adatok eltérése nagy, akkor ez a szám kicsi lesz. Ezt az értéket hívjuk az illesztés konfidenciaszintjének. A konfidenciaszint a χ^2 értéke és a szabadsági fokok N száma határozza meg (ennyi dimenziós Gauss integrált kell kiszámolni). A 8. ábrán látható, hogy hogyan függ a konfidenciaszint a χ^2 és az N értékétől (az ábrán NDF-fel jelölve). Igen nagy N esetén lényegében a $\chi^2 < N$ értékek elfogadhatóak csak, tehát ilyenkor a χ^2/N érték vizsgálata elegendő lehet.

A fentiekén kívül az eredményeknek lehet szisztematikus, pontról pontra összefüggő hibája is. Ilyen például a mérési berendezések hatásfokának becsléséből vagy a kalibrációból származó

hiba, hiszen ha például a hatásfokot alulbecsültük, akkor minden mért pontot felfelé mozdítottunk el. Jelen mérésnél a fő ismert szisztematikus hibaforrás a kalibrációból adódik, amellyel a csatornaszámból az energiát számítjuk. A szisztematikus hibákat (δy_i) úgy vehetjük figyelembe, hogy a χ^2 értékét módosítjuk:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f(x_i) - y_i + \alpha \delta y_i)^2}{\Delta y_i^2} \quad (36)$$

ahol α egy szám, amelyet -1 és $+1$ között változtathatunk. Úgy is felfoghatjuk ezt, hogy az illesztett függvényt módosítjuk egy intervallumonként meghatározott konstans eltolással, amelynek a együtthatója egy új paraméter. Ekkor természetesen a valószínűség kiszámításánál figyelembe kell venni azt is, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor az csökkenti a végső eredmény valószínűségét.

A hibákra különösen nagy figyelmet kell fordítanunk, hiszen egy mérés csak akkor cáfol vagy erősít meg egy elméletet, ha a mérési eredmény és az elméleti számítás különbsége többszöröse a mérési (vagy elméleti) hibáknak. Hiszen annak a valószínűsége, hogy egy mérési pont a valóstól legalább egy hibaegységnyi eltér, 32% körül van, és csak a mérés és az elmélet legalább három (vagy néha öt) hibaegységnyi eltérését tekintik általánosan felfedezés (cáfolat) értékűnek (egy mérési pont esetén).

8. Mérési feladatok

A jegyzőkönyvben minden alábbi feladatot el kell végezni, a mérés rövid leírása után. A mérésleírás részeinek beillesztése nem szükséges, de az ott leírtakat a számításokhoz fel lehet használni.

1. Becsüljük meg a forrás aktivitását a korábbi időpontban adott aktivitás és a T felezési idő alapján ($A = A_0 2^{-t/T}$). A sugárzás energiáját ill. teljesítményét ebből ki tudjuk számolni, hiszen minden bomlásnál egy 662 keV energiájú foton keletkezik. Ebből pedig az általunk elnyelhető dózissra ([Gy=J/kg]) adható felső becslés: ez a sugárzás energiája osztva az azt elnyelő szövetek tömegével (nem biztos, hogy a szövet a teljes energiát elnyeli). Gammasugárzás esetén ez megegyezik az effektív dózissal, amit Sievert egységekben mérünk ([Sv=J/kg]). Az átlagos éves sugárterhelés 2 mSv körül van. A fentiek alapján számítsuk ki, hogy a sugárforrás miatt a mérés ideje alatt kapható dózis a napi átlagos terhelésünkhöz viszonyítva mekkora! Első esetben úgy számoljunk, hogy a teljes sugárzást elnyeltük (ez nyilván csak akkor lehetséges, ha a forrás fizikailag a szervezeten belül van), másodszor pedig úgy, hogy 1 méterre vagyunk a forrástól (az elnyelő test keresztmetszetét vegyük $0,5 \text{ m}^2$ -nek). A valóságban az ólom-árnyékolás miatt ennél sok nagyságrenddel kisebb dózist kapunk természetesen. Becsüljük meg ennek mértékét, figyelembe véve, hogy 662 keV energián a fotonoknak kb. $1/e$ része jut át egy 6 mm vastag ólomfólián, a nálunk használt árnyékolás pedig kb. 6 cm vastag.
2. Mérjük meg az elrendezés összes fontos, hatáskeresztmetszet számításához szükséges geometriai méretét (kollimátor, céltárgy és gamma-detektor méretei, távolságai egymástól)! Készítsünk vázlatos rajzot! Számítsuk ki, hogy a fotonok által „megvilágított” folt mekkora átmérőjű a céltárgyon, illetve a gamma-detektoron! A megadott aktivitást felhasználva számítsuk ki, és mérjük is meg, hogy hány foton érkezik másodpercenként a céltárgyra, illetve a detektorba $\theta = 0$ szögben (figyelembe véve a detektor átlagos hatásfokát ezen a területen)! Hasonlítsuk össze a számított és a mért értéket! A továbbiakban a mért értékkel dolgozzunk.

3. A 30-120 fokos szögtartományban legalább 8-10 szögben mérjük meg a szórt fotonok spektrumát, a csúcs maximumában legalább 30-40 beütést megvárva (ez kb 10-15 perc lesz mérésenként). Ezt a mérést az elektrondetektorral koincidenzában végezzük el. A csúcsokra illesszünk Gauss-görbét, és határozzuk meg a csúcs helyének szögfüggését. Erre egyenest illesztve készítsünk kalibrációt, majd ennek segítségével ábrázoljuk a szórt fotonok energiájának szögfüggését.
4. Az előző pontban készített grafikon alapján vizsgáljuk meg a Compton-szórás szög-energia összefüggésének teljesülését (ábrázoljuk a mért és a számított foton-energiát a szög függvényében, mérési hibákkal, számítsunk χ^2 -et és konfidenciaszintet), és elemezzük a statisztikus és szisztematikus hibaforrásokat, és hatásukat a mérési eredményre!
5. A csúcsokra elvégzett Gauss-illesztésből számítsuk ki a csúcshoz tartozó beütésszámot (a Gauss-függvény integráljából). Ebből számítsuk ki az adott szöghöz tartozó differenciális hatáskeresztmetszetet (lásd 6. fejezet) és hasonlítsuk össze a mért $d\sigma/d\Omega$ értékeket a Klein–Nishina-formula (23. egyenlet) által megadott függvényalakokkal! Ezt valójában úgy csináljuk, hogy hagyjuk szabadon a $\frac{r_0^2}{2K}$ állandót, tehát a 32. egyenletnek megfelelő módon leírt Klein–Nishina-formulát illesszük a $\frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\eta \Delta t}$ módon számolt adatpontokra. Mekkora a K értéke, a χ^2 és a konfidenciaszint? A mérésünk megerősíti a Klein–Nishina-formulát?
6. Értelmezzük az előző pontban illesztéssel kapott K konstans! Vegyük a ξ értéket, céltárgy-vastagságot, stb. ismertnek, de a formulában szereplő r_0 klasszikus elektronsugarat ismeretlen paraméternek. A mérési eredményekből, valamint az első feladatban lemért foton-fluxusból határozzuk meg a klasszikus elektronsugarat, és hasonlítsuk össze az irodalmi értékkel! Becsüljük meg az r_0 mérési hibáját is. Számítsuk ki azt is, hogy a fotonoknak összesen hány százaléka szenved Compton-szórást a céltárgyon (tekintet nélkül a szórási szögre, tehát a teljes hatáskeresztmetszettel számoljunk).

9. Ellenőrző kérdések

1. Milyen anyagok vagy részecskék közötti kölcsönhatást ír le a Compton-effektus?
2. Hogy rajzolható le a Compton-szórás egy egyszerű diagramon (a részecskék, impulzusok feltüntetésével)?
3. Mi az összefüggés a foton energiája és hullámhossza között?
4. Mi az összefüggés egy relativisztikus részecske energiája és négyesimpulzusa között?
5. Hogyan függ össze a hármásimpulzus és a sebesség?
6. Lehet-e a négyessebesség valamelyik komponense nagyobb, mint a fénysebesség, és ha igen, melyik?
7. Hogyan függ a Compton-szóródott részecske energiája a szórás szögétől (formulával kifejezve, illetve grafikonon felrajzolva)?
8. Milyen általános fizikai összefüggések felírása (és a következmények levonása) elégséges a Compton-effektusban tapasztalt hullámhossz-változás kvantitatív magyarázatához?
9. Melyik alapvető fizikai elmélet bizonyítékaul szolgált a Compton-effektus és miért?
10. Mit tud a Compton-szórást szenvedő fotonok szögeloszlásáról?

11. Mit jelent a hatáskeresztmetszet?
12. Milyen sugárforrást használunk a Compton mérésnél, ez milyen részecskéket sugároz ki?
13. Milyen a ^{137}Cs bomlási sémája?
14. Hogyan változik egy forrás aktivitása az idővel?
15. Nagyságrendileg mennyi a természetes háttérsugárzásból származó éves sugárterhelés?
16. A Compton-effektus során használt sugárzás ellen milyen anyaggal lehet védekezni, és hogyan?
17. Egy 3 mm átmérőjű, 10 cm hosszú kollimátor egyik végén elhelyezünk egy 100 MBq aktivitású gamma-forrást. Egy másodperc alatt hány fotont észlelhetünk a kollimátor túlsó végén?
18. Mi az a plasztik szcintillátor, és mire használjuk?
19. Hol használunk a mérésben NaI szcintillátort?
20. Mi az az analóg-digitál konverter?
21. Milyen mennyiségek közötti összefüggéseket ellenőrizzük a mérés során?
22. Miért fontos egy mérés hibájának ismerete?
23. Ha a mérésünk eredménye az, hogy 400 eseményt észleltünk egy adott feltétellel (mondjuk 400 fotont egy adott energia-intervallumban), akkor ennek az eredménynek hány százalék a statisztikus hibája?
24. Egy mérési eredmény mennyire kell, hogy eltérjen egy elméleti számítás eredményétől ahhoz, hogy kizárja azt?
25. Mi az a χ^2 -próba?

Hivatkozások

- [1] W. Heitler: *A sugárzás kvantumelmélete*, Akadémiai Kiadó, (1959), 210- 222 oldal.
- [2] V.B. Bereszteckij, E. Lifsic, L.P. Pitajeszki: *Relativisztikus kvantumelmélet*, Tankönyvkiadó, (1979), 431-437 oldal, (Landau-Lifsic, Elméleti Fizika sorozat, IV. kötet).
- [3] M.-M. Bé, V. Chisté et al.: *Table of Radionuclides, 3. kötet* (2016), 91-98. oldal, (Monographie BIPM-5, Bureau International des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, F-92310 Sèvres, France), ISBN 92-822-2218-7, http://www.bipm.org/utils/common/pdf/monographieRI/Monographie_BIPM-5_Tables_Vol3.pdf