

涉密论文 ☐ 公开论文 ☐

# 浙 江 大 学

## 本科生毕业论文



题目	基于 UWB 的多无人机 相对定位
姓名与学号	
指导教师	
年级与专业	
所在学院	
递交日期	



## 摘要

本工作提出了可证的基于超宽带 (Ultra-Wideband, UWB) 的多机器人相对定位算法。它无需提供初值和距离测量以外的信息, 即可求出机器人之间基于最大后验估计的近似最优相对位姿, 并给出最大后验估计的最优值的下界。为了实现这一目标, 使用了一种独特的构建相对定位问题的方法, 无损地消去了距离约束, 将这一问题转化至 **Oblique** 流形上求解, 之后通过半正定松弛得到对偶问题。在分析对偶问题与原问题之间的关系之后, 本文设计了两种高效求解对偶问题的方法: 黎曼阶梯法与黎曼电梯法。在数值实验中, 本文模拟了集群机器人部署的真实情况, 对比了这两种求解框架与求解连续黎曼流形优化问题的最佳方法 (截断牛顿-黎曼信赖域法), 分析了其优势。我们的算法能够在线运行, 并且在数值实验中展现出对噪声鲁棒的特性。

**关键词:** 黎曼优化; 相对定位; 可证的感知; 传感器网络定位



## Abstract

This work designs the certifiable optimization algorithm for solving UWB based multi-robot relative localization problem. The algorithm doesn't need an initial value for optimization or any information other than range measurements, and it still recovers very close solution to the global optimum of the maximum-a-posterior estimation of relative positions and poses between robots. To achieve this, a special formulation of the relative state estimation problem is used, which moves the problem to Oblique manifold and make it easy to eliminate explicit distance constraints in the original problem. Semidefinite relaxation is then performed and the dual problem is built. Based on the analysis of dual problem, two efficient algorithm of solving the high-dimension dual problem is proposed: the riemannian staircase algorithm and the riemannian elevator algorithm. In numerical experiments, we built simulation that is close to real world circumstances, and compared with the state-of-the-art algorithm for continuous riemannian manifold optimization algorithm (truncated-Newton Riemannian trust region method). Our algorithm is efficient enough to be deployed for online state estimation on real robot platforms, and showed robustness when measurements are corrupted by noise.

**Key words:** Riemannian optimization; relative localization; certifiable perception; sensor network localization



## 目录

1	绪论 .....	1
1.1	研究背景与研究现状 .....	1
1.2	研究内容与贡献 .....	4
2	问题构建 .....	5
2.1	记号 .....	5
2.2	基于距离测量的相对定位问题 .....	6
3	可证的全局优化 .....	11
3.1	对问题 3 的松弛 .....	11
3.2	求解半正定规划 .....	14
4	算法：黎曼电梯与黎曼阶梯 .....	17
4.1	黎曼阶梯 .....	17
4.2	黎曼电梯 .....	19
4.3	恢复原问题的解 .....	21
4.4	完整的算法 .....	23
5	数值实验 .....	25
5.1	实验背景 .....	25
5.2	全连接图的二维 Square 和三维 Cube 实验 .....	25
5.3	多机器人集群定位实验 .....	29
5.4	对实物实验的讨论 .....	31
6	总结与展望 .....	33
6.1	总结 .....	33
6.2	对未来工作的展望 .....	34
	参考文献 .....	35
	附录 .....	39
A	实验数据 .....	39





# 1 绪论

## 1.1 研究背景与研究现状

### 1.1.1 多机自主相对定位

近年来,多机器人系统在许多场景中受到了许多关注,如编队飞行<sup>[1]</sup>,探索<sup>[2]</sup>,搜救等任务。为了协同执行任务,我们希望能够在一个共同的坐标系下描述机器人集群中的每一个机器人的位置。多机器人自主相对定位问题,即在同构或异构的机器人集群中,使用机载传感器,确定每一个机器人在一个全局坐标系下的位置和姿态的问题。然而,在野外的环境中,如溶洞、室内等无法获取全局定位的场景下,这一问题会变得更加复杂。在预先设定好的相对姿态下启动集群,并在一直在最优值附近估计每一个机器人的相对位姿是一种可行的方法<sup>[3]</sup>,但很显然这种方法在复杂环境下是十分脆弱的。

多机器人自主相对定位系统的特性与其采用的传感器密切相关,一般都通过在比较轻量的单机定位系统中增加传感器来构成多机相对定位系统。大致可以分为以下两类:第一类,不借助机器人之间的主动观测。这一类系统通过传递机器人的共视特征,如视觉描述子<sup>[4]</sup>、语义信息<sup>[5]</sup>等,通过在地图中的重定位,完成机器人之间的回环 (Inter-robot loop closure),进而实现相对定位。其搭载的传感器和单机同时定位与建图问题 (SLAM Problem) 非常类似。因为需要与地图作匹配,这一类方法的计算消耗往往比较大,同时需要占据大量的通讯带宽,而且很难在原理上确保其鲁棒性。第二类,需要机器人之间的主动观测。此类系统往往通过获得其他机器人相对位置的一些信息,如距离<sup>[6][7]</sup>、视角 (Bearing)<sup>[8][9]</sup>,直接解算或者融合里程计的测量之后间接解算机器人的相对位姿。这些额外的测量可以让我们发挥发挥分布式感知的优势,改善单机定位在复杂环境中的漂移,提高整体定位的稳定性和准确性。

系统运行的场景是我们选择传感器的重要考量。在复杂场景下,如树林、山洞中,光照条件无法保障,且机器人易被其他障碍物遮挡;当集群的规模扩大

时,通信、计算、观测的开销都会显著增加;在协同执行任务时,集群中机器人的距离比较小,相对定位的鲁棒性和可验证性 (Certifiability) 也非常重要。近年来,超宽带设备 (Ultra-Wideband, UWB)<sup>[10]</sup>越来越受到关注。超宽带设备低功耗、高带宽、高精确度的特性,使其容易搭载在各种机器人平台上执行测距与通信的任务。为了实现可扩展 (Scalable), 在各种复杂环境下稳定工作的目标,使用超宽带设备获得机器人之间的距离测量,配合现有的各种单机定位系统来完成相对定位,是一个比较好的解决方案。

近些年也出现了一些基于超宽带设备测距的相对定位的分析与设计。Jiang<sup>[6]</sup>通过融合一段时间里程计与 Pairwise 的距离测量,分析了有多少组距离测量可以计算出相对坐标转换,并将原问题松弛,构建半正定规划问题进行求解;Nguyen<sup>[7]</sup>扩展了 Jiang<sup>[6]</sup>的结论,并分析了这个问题的 Fisher 信息。这些工作的局限性在于,它们都需要将机器人里程计的测量作为真值,且需要机器人产生比较大的机动才能完成初始化。因为里程计自身的漂移问题,这一类方法的精度也比较有限(相对坐标转换的位置误差:  $\sim 0.5m$ )<sup>[7]</sup>。还有一些研究,在一个机器人上安装多个 UWB 设备得到多组距离测量,将相对定位问题转化为欧几里得距离矩阵填充问题 (Euclidean Distance Graph Completion Problem, 以下简称 EDM 填充问题)<sup>[11]</sup>,直接解算机器人的相对位姿<sup>[12]</sup>。<sup>[13]</sup>分析了此类方法在观测相对位姿时的可观性。然而,<sup>[12][13]</sup>在求解 EDM 填充问题时,均在给定的较好初值下使用了局部求解的方法。因为这一问题的高度非凸性,传感器噪声会大大降低求解的鲁棒性;加上机器人自主相对定位往往缺乏初值的特征,这也会限制其方法的应用范围。

### 1.1.2 可证明的最优机器人感知

近二十年来,半正定规划的研究飞速发展。作为一个能够在多项式时间内求解的问题,半正定规划的建模能力不断得到新的认识<sup>[14]</sup>。许多不同领域的研究者发现利用半正定松弛,可以将问题松弛为凸问题<sup>[15][16][17]</sup>,并且松弛后对偶问题的最优值与原问题的最优值 (Duality Gap) 在实际问题中差别很小;同时,求解松弛后的凸问题,也可以为原问题的解提供下界。

随着计算机算力的提高, 基于优化的机器人感知的后端成为主流<sup>[18]</sup>。VINS-Mono<sup>[19]</sup>和 ORB-SLAM<sup>[20]</sup>的后端均使用了非线性最小二乘来构建问题, 并直接使用非线性求解器进行局部求解。这种方法是有一定缺陷的, 如在视觉里程计中, 如果两帧图片之间的视觉描述子匹配有很多错误 (Mismatch), 直接使用非线性规划就有掉入局部极小值的风险, 产生完全错误的位姿转换, 而这种错误的发生无法预知或者在算法中进行判断, 这一缺陷导致视觉里程计在缺乏特征点的环境中需要重新设计。半正定松弛为解决这一问题提供了思路。通过巧妙设计松弛, 我们可以设计对噪声和错误 (outlier) 鲁棒的算法, 并且通过求解对偶问题, 即可通过判断原问题的一个局部最优值与全局最优值的上界, 判断求解失败的情况。

Carlone 在其工作中通过拉格朗日对偶性来验证位姿图优化 (Pose Graph Optimization, PGO) 的最优性<sup>[21]</sup>。通过发掘 PGO 的强对偶性,<sup>[16]</sup>和<sup>[22]</sup>能够在一定的噪声下得到位姿图的最优值。

在欧几里得距离矩阵填充问题 (EDM Completion Problem) 中, 研究者也提出了一些半正定松弛的方法。Biswas<sup>[23]</sup>率先使用半正定松弛求解 EDM 填充问题 (原文中表述为传感器网络定位问题, 二者等价)。通过将等号约束松弛为正定约束, 原问题被转化成凸问题。在其续作<sup>[24]</sup>中, 作者分析了在噪声对于半正定松弛后的 Duality Gap 的影响。<sup>[25]</sup>中提出了比<sup>[23]</sup><sup>[24]</sup>中的更紧的松弛方法: Edge-based SDP 和 Node-based SDP, 使用这两种松弛方法处理后的问题能够高效地分布式求解。但是<sup>[23]</sup><sup>[24]</sup><sup>[25]</sup>中所构建的问题形式在空间中的节点之间有距离约束时, 一般通过惩罚项的方式处理约束, 难以保证约束能够严格地满足, 这对求解在上一节提到的在同一个机器人上安装多个 UWB tag 的方法不利。T. Halsted 首次提出将 EDM 填充问题转化到 Oblique 流行上, 并通过求解对偶问题确定了半正定松弛问题的解的秩, 从而加速求解<sup>[26]</sup>。

## 1.2 研究内容与贡献

本文提出了一种只依靠 UWB 的距离测量求解机器人的自主相对定位问题的可证明的全局最优算法 (Certifiably Correct Global Optimal)。在机器人集群中, 每一个机器人装配多个 UWB Tag, 此算法能够在没有初值的情况下, 只依靠距离测量, 计算出机器人的相对位姿 (或位置, 与一个机器人上装配多少个 UWB Tag 有关), 并给出解的最优性指标。具体而言, 本文的贡献有:

- 将相对位姿估计转化为有约束 EDM 填充问题, 并提出了一种将距离约束无损地写入问题的构造方法。(第三部分)
- 借助 Boumal 的研究<sup>[27]</sup>和强对偶互补定理, 设计了两种能够显著降低松弛后的半正定规划的维度的求解方法 ( $O(m) \rightarrow O(\sqrt{m})$ )。(第四部分)
- 能够验证求解的结果是否为最优解; 如果不是最优解, 可以给出它与最优解之间距离的上界。(第四部分)
- 多种情形下的仿真实验。(第五部分)

## 2 问题构建

### 2.1 记号

#### 2.1.1 代数

小写  $x$  表示  $d$  维向量, 大写  $X$  表示矩阵,  $[X]_{ij}$  表示矩阵的第  $i$  行第  $j$  列元素。对于矩阵  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{diag}(X)$  表示其对角线上的元素依次排列构成的向量,  $\text{Diag}(x)$  表示以  $x$  向量为对角线元素的矩阵。显然  $\text{diag}(\text{Diag}(x)) = x$ 。  $\text{tr}(X)$  表示矩阵的迹,  $\text{tr}(X) = \sum_i X_{ii}$ 。

$\|x\|_k$  表示向量的  $k$  范数。特别地,  $\|x\| = \|x\|_2$ 。  $\|X\|_F$  表示矩阵的 Frobenius 范数。  $\|x\|_W^2 = x^T W x$ , 表示向量范数的加权和。  $\|X\|_W^2 = \text{tr}(X^T W X)$ 。

下面我们讨论本文中单位向量排列而成的矩阵所处的空间。  $d$  维单位向量构成的集合是一个单位球:  $\mathcal{S}^{d-1} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y^T y = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ 。为了方便起见, 我们使用记号:

$$(\mathcal{S}^{d-1})^n = \{Y \in \mathbb{R}^{n \times d} \mid y_i^T y_i = 1, i = 1, \dots, n\} \quad (2-1)$$

其中  $y_i$  表示  $Y$  中的第  $i$  行。此矩阵所在的空间也被称为 **Oblique 流形**。

$SO(d)$  表示特殊正交群:

$$R \in SO(d) \Leftrightarrow \begin{cases} RR^T = R^T R = I \\ \det(R) = 1 \end{cases}$$

$SO(d)$  是一个李群, 其李代数记为  $so(d)$ 。

$A \succeq 0$  表示矩阵  $A$  正半定,  $A^\dagger$  表示矩阵  $A$  的 Moore-Penrose 伪逆。

#### 2.1.2 图论

对于集合  $S$ ,  $|S|$  表示其基数 (cardinality), 即集合  $S$  中元素的个数。

图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  由  $n$  个顶点  $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$  和  $m$  条边  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  组成。图的关联矩阵  $C(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 其中  $-[C]_{ki} = [C]_{kj} = 1$ 。

在本文讨论的问题中，图定义在  $d$  维欧式空间中，节点是欧式空间中的点，边代表节点之间的连接，其权重表示节点之间的欧式距离。

下面我们介绍极小刚性的定义<sup>[28]</sup>。设图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  是  $d$  维欧式空间中的图。令  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  表示图中点的位置， $y_1, y_2, \dots, y_m$  表示图中的边，表示其所连接的节点之间的欧氏距离。我们令：

$$X \triangleq [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T \in \mathbb{R}^{dn} \quad (2-2)$$

我们用同样的方式定义  $Y \in \mathbb{R}^m$ 。我们可以将  $Y$  写成  $X$  的函数  $Y = f(X)$ ，并假设点的位置可以被时间参数化为  $X(t)$ 。那么  $Y$  对时间求导，可得：

$$\frac{dY(x(t))}{dt} = \frac{dY}{dX} \frac{dX}{dt} \triangleq A\dot{X}(t) \quad (2-3)$$

极小刚性 (Infinitesimally Rigid) 关注的是  $\dot{Y} = 0$  的解，也即  $A\dot{X}(t) = 0$  的解。如果一个图是极小刚性的，当且仅当  $A\dot{x}(t) = 0$  的非零解仅有以下两种情况：

$$\dot{x}_i = \omega \times x_i; \omega \in se(d), i = 1, \dots, n \quad (2-4)$$

or

$$\dot{x}_i = c; c \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n \quad (2-5)$$

(2-4) 对应整体的任意旋转，(2-5) 对应整体的任意平移。 $\dot{X}(t)$  的轨迹不存在其他解能够使图中边的长度保持不变。

## 2.2 基于距离测量的相对定位问题

首先对 UWB 的测量模型做定义。假设  $a, b$  为两个 UWB 标签， $p_a, p_b$  代表其在  $\mathbb{R}^n$  中的位置， $\tilde{d}_{ab}$  为其测得的距离：

$$\tilde{d}_{ab} = \|p_a - p_b\|_2 + \epsilon, \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2-6)$$

其中  $\sigma$  表示高斯分布的标准差。在实际中，UWB 测距往往不是零偏的，这一偏差可以在实际的系统中设计方法估计<sup>[29]</sup>。这不是本文考虑的重点。事实上，这

一模型对于许多其他测距传感器，如超声测距等，也能够适用。下文将 UWB 标签简称传感器。

本文为了尽可能地考虑一般性的问题，提高算法的泛用性，我们将场景设定为在空间中自主运行，无外部定位系统，无相对位姿先验的多机器人集群。集群中的机器人之间只能通过 UWB 获得与其他 UWB 标签的相对距离测量，这些距离测量最终被中心式送到一个机器人中进行求解（分布式算法是后续需要考虑的工作）。

考虑如下的多机相对定位问题。一个有若干机器人的集群，其活动空间 (Configuration Space) 为  $d$  维（一般情况下， $d$  为 2 或 3），每一个机器人上装备了多个 UWB 标签，这些标签可以测得与其附近的其他 UWB 标签的距离。在一个固定的世界坐标系下描述这些机器人的位姿。在实际中，不妨将“世界坐标系”固连在任意一个机器人上，因为我们的估计问题中不包含速度项。

暂时使用一个无向图来表述这一问题。图  $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ，其中  $\mathcal{V}$  表示机器人， $\mathcal{E}$  表示机器人之间存在的连接，在本问题中为距离测量。同一个机器人上安装了多个 UWB 标签，将同一个机器人上的标签编号，其集合记为  $\mathcal{B}$ 。每一个标签相对于安装的机器人的机体坐标系的位置为  $a^k, k \in \mathcal{B}$ 。距离测量  $d \in \mathbb{R}$ ，存在于每一对有连接的机器人的上的每一对 UWB 标签之间。根据以上定义，机器人在世界坐标系下的位置的最大后验估计为<sup>[13][30]</sup>：

**问题 1**（机器人位置的最大后验估计）

$$\min_{\{(R_i, t_i)\}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}, u,v \in \mathcal{B}} \frac{1}{(\sigma_{ij}^{uv})^2} (\|R_i a_i^u + t_i - R_j a_j^v - t_j\|_2 - \tilde{d}_{ij}^{uv})^2 \quad (2-7)$$

其中， $R_i, R_j \in SO(d)$ 。

直接求解这一问题需要处理对于机器人位姿的约束 ( $SO(3)$ )，这是比较困难的。本文有更好的处理约束的方法。对上面的问题进行重构：

**问题 2**（距离约束下的传感器网络定位问题）

$$\min_{p_i, p_j} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}, u, v \in \mathcal{B}} \frac{1}{(\sigma_{ij}^{uv})^2} (\|p_i^u - p_j^v\|_2 - d_{ij}^{uv})^2 \quad (2-8)$$

$$s.t. \|p_i^u - p_i^v\| = d_i^{uv} \quad (2-9)$$

其中,  $p_i, p_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_i^{uv}$  表示在同一个机器人上距离已知（且不变）的约束。

问题 2 将问题 1 中“在同一个机器人上的测距传感器之间的距离已知”这一条件转化成了对传感器位置的距离约束,从而将原问题中机器人的位姿在  $SO(n)$  中这一约束消除。我们需要保证图是极小刚性的<sup>[28]</sup>,也就是说,尽管问题 2 不存在唯一的能够极小化目标函数的可行解,但是这些可行解之间存在等价关系,即可以通过旋转和平移相互转化。在实际中,我们只需要将世界坐标系固定在一个机器人的机体坐标系上,将求出的解与这个坐标系中的点对齐即可<sup>[13]</sup>。有关传感器网络定位以及有距离约束时的传感器网络定位问题可观性的讨论并不是本文的重点,可以参考 Shalaby 讨论相对位置估计的论文中<sup>[13]</sup>的定理 1。在本工作关注的问题是如何在求解的层面,确保能够**可证地求解出**这一组等价的最优（或近似最优）解。

问题 1 与问题 2 的等价性是显而易见的,其证明是 Wu 的工作中<sup>[30]</sup>中类似问题的一个子问题。

下一步我们重构问题 2,得到问题 3。为了简化问题 3 的表述,令  $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_2)$ , 其中  $\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2$  分别代表每一个传感器在空间中的位置,和存在距离测量的传感器的集合。 $\mathcal{C}$  表示相互相互之间存在约束的传感器的集合。

**问题 3**<sup>[26]</sup>（使用单位方向向量表示的有约束传感器网络定位问题）

$$\min_{x_i, x_j \in \mathcal{G}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \frac{1}{(\sigma_{ij}^{uv})^2} \|x_i - x_j - \tilde{d}_{ij} y_{ij}\|_2^2 \quad (2-10)$$

$$s.t. \|x_s - x_t\| = d_{st}, y_{ij}^T y_{ij} = 1 \quad (2-11)$$

通过引入单位方向向量,问题决策变量的维度上升了,但是我们成功将问题



2 写成了一个二次约束二次规划问题 (QCQP) 问题。这种构造问题的方法有两个显著的优点：

- 这种构造方法可以在后续将问题松弛成凸问题时，产生更紧的松弛。
- 大大简化对约束的处理。

下面一部分我们展示如何完成问题 3 的可证的全局优化。



### 3 可证的全局优化

这一部分展示如何利用这种构造方法的优势，将问题 3 转化为无约束问题，并将问题松弛。

#### 3.1 对问题 3 的松弛

我们将问题 3 中的优化目标写成更紧凑的矩阵乘法的形式。设  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{E}_2| = m$ , 则有:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n \times d}, Y \in (\mathcal{S}^{d-1})^m} \|C_0 X - \tilde{D}_0 Y_0\|_W^2 \quad (3-1)$$

其中,  $W = \text{Diag}(1/\sigma^2)$ ,  $C_0$  是  $\mathcal{G}_2$  的关联矩阵 (incidence matrix),  $D_0 = \text{Diag}(d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}_2$ .  $X = [\dots, x_i, \dots]^T, i \in \mathcal{V}$ ;  $Y_0 = [\dots, y_{ij}^T, \dots]^T, (i, j) \in \mathcal{E}_2$ . 下面我们着手将问题 3 转化为无约束问题。

在问题 3 的  $Y$  中添加决策变量  $y_{st} \in \mathbb{R}^n$ , 代表约束中距离所对应的单位方向向量。那么约束  $\|x_s - x_t\| = \tilde{d}_{st}$  可以表达为:

$$x_s - x_t = \tilde{d}_{ts} y_{ts} \quad (3-2)$$

令  $x_i - x_j = \tilde{d}_{ji} y_{ji}$  (一条测量),  $x_i - x_k = d_{ki} y_{ki}$  (约束)。将约束中  $x_i$  用  $x_k$  表示出来, 并代入测量中, 可得  $x_k - x_j = \tilde{d}_{ji} y_{ji} - d_{ki} y_{ki}$ 。可见问题的形式与问题 3 中求和的每一项非常接近, 只需扩展 (3-1) 中  $D_0$  和  $Y_0$  的维度, 即可用相同的形式无损地将约束代入 (2-5) 中。

令  $\mathcal{G}_3 = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_3)$  表示约束形成的图,  $\mathcal{V}_3$  表示传感器的位置,  $\mathcal{E}_3$  表示传感器间的距离约束。因为约束和测量不重合 (重合的测量可以被舍弃), 故  $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 = \emptyset$ 。再令  $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ 。令  $|\mathcal{E}_4| = m$ 。将 (3-2) 代入 (3-1) 中, 得:

**问题 4** (无显性约束的传感器网络定位问题)

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n \times d}, Y \in (\mathcal{S}^{d-1})^m} \|CX - \tilde{D}Y\|_W^2 \quad (3-3)$$

其中,  $X$  与 (3-1) 中一致,  $Y = [..., y_{ij}^T], (i, j) \in \mathcal{E}_4$ ,  $W = \text{Diag}(1/\sigma^2)$ ,  $C$  是  $\mathcal{G}_4$  的 Incidence 矩阵,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .  $D \in \mathbb{R}^{m_0 \times m}$ , 通过扩展  $D_0$  的列得到, 扩展的结果与约束有关。

下面我们松弛问题 4。可以观察到, 问题 4 中,  $Y$  在 Oblique 流形上为唯一的约束。我们利用加权最小二乘的闭式解用变量  $Y$  消去  $X$ 。在一个固定  $Y^*$  下,  $X$  有闭式表达:

$$X^* = (C^T W C)^\dagger C^T W \tilde{D} Y^*. \quad (3-4)$$

利用  $X^*$  的闭式表达, 从 (3-4) 中消去  $X$ , 可得:

**问题 5** (仅包含方向向量的传感器网络定位问题)

$$\min_{Y \in (\mathcal{S}^{d-1})^m} \text{tr}(Q Y Y^T) \quad (3-5)$$

其中,  $Q = D^T (W - W C (C^T W C)^\dagger C^T W)$ 。

下面我们分析  $Q$  的性质。

**推论 1** 如果  $\mathcal{G}_4$  是连通图, 且  $W \succ 0$ , 那么  $Q \succeq 0, \text{rank}(Q) = m - n + 1$ 。

证明:

令:

$$M = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T W C & C^T W D \\ D^T W C & D^T W D \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

可以看到,  $Q$  是  $M$  右下角元素的舒尔补。  $D$  由  $D_0$  扩展而来,  $\text{rank}(D) = \text{rank}(D^T W D) = m$ 。  $\text{rank}(C) = n - 1$  ( $C$  是图的邻接矩阵), 且  $C^T W D$  与  $D^T W D$  的行线性相关。因此  $\text{rank}(M) = m$ , 且  $\text{rank}(C^T W C) = n - 1$ 。根据舒尔补的性质<sup>[31]</sup>,  $\text{rank}(Q) = \text{rank}(M) - \text{rank}(C^T W C) = m - n + 1$ 。  $\square$

现在我们已经准备好松弛问题 4 了。

**问题 5**（有约束的传感器网络定位问题的松弛）

$$\min_{Y_r \in (S^{r-1})^m} \text{tr}(QY_rY_r^T) \quad (3-7)$$

可以看到，我们将  $Y$  从  $m \times d$  维 Oblique 流形上松弛到  $m \times r$  维。也就是，我们扩展了方向向量的维度。显然，问题 4 是问题 3 的松弛版本，因为  $Y$  的定义域被拓展，而问题的形式没有发生变化。在问题 5 中，可以令  $Z = YY^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ，并对  $Z$  添加约束： $Z \succeq 0, \text{diag}(Z) = 1, \text{rank}(Z) = r$ 。接下来我们展示问题 4 的半正定松弛，并揭示问题 4 中  $Y$  所在的 Oblique 流形的维度与问题 5 之间的联系。

**问题 6**（等价半正定规划）

$$\min_Z \text{tr}(QZ) \quad (3-8)$$

$$s.t. \text{diag}(Z) = 1, Z \succeq 0 \quad (3-9)$$

可见，问题 6 将问题 5 中的秩约束移除，从而进一步松弛了问题。同时我们也可以得到一个结论，即对于  $d \leq r \leq m$ ，问题 5 对问题 4 的松弛程度处于问题 4 与问题 6 之间。问题 6 的优势在于：其一，这是一个凸问题，可以保证在多项式时间内求解出全局最优值（如使用内点法）；其二，这一最优值可以作为问题 4 最优值的一个下界；问题 6 的劣势在于：其一，我们会担心问题 6 与问题 4 的“间隙”过大（将  $Z$  的秩可能扩大到了问题 5 中的  $Z$  的秩的平方量级，从而得到维度很高的  $Y$ ），即将求解问题 6 得到的极值点投影到低维空间后，与问题 4 的全局最优值的“距离”比较远，以及问题 6 给出的下界太松；其二，问题 6 的维度太高，在实际运行中很难做到实时计算。下面我们分析问题 6，并得到在传感器网络定位这一问题背景下，问题 6 具备的一些性质，从而认识到问题 6 对我们求解原问题的重要意义。

**定理 1**（低秩解的存在性）问题 6 对问题 5 的松弛是紧的（即，问题 6 的最

优值等于问题 5 的最优值), 如果:

$$r \geq \lfloor \frac{-1 + \sqrt{8m+1}}{2} \rfloor$$

其中  $\lfloor \dots \rfloor$  表示对括号中的值取下整。这是基于欧式距离测量的几何图的低秩特性<sup>[32]</sup>, 由 Barvinok 证明。这一结论能够为我们选择  $Z$  的秩提供参考标准, 即  $\text{rank}(Z)$  大于等于某一定值时, 问题 5 可以等价地转化为凸问题; 同时, 根据 Boumal 等人的研究<sup>[33]</sup>, 问题 6 可以高效地通过 Bourer-Monterio 分解<sup>[34]</sup>分解降低问题的维度求解。 $Z$  的低秩特性不仅说明问题 6 实际上是比较紧的, 而且可以帮助我们设计高效的求解算法, 是一个非常重要的性质。

### 3.2 求解半正定规划

问题 6 的拉格朗日函数可以表达如下:

$$\mathcal{L}(Z, \Lambda) = \text{tr}(QZ) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - e_i^T Z e_i) \quad (3-10)$$

$$= \text{tr}(Q) + \text{tr}(QZ) + \text{tr}(\Lambda(I - Z)) \quad (3-11)$$

$$= \text{tr}((Q - \Lambda)Z + \Lambda) \quad (3-12)$$

其中,  $Z$  与问题 6 中定义一致,  $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ 。根据 (3-12), 问题 6 的对偶问题为:

$$\max_{\Lambda} \inf_x \mathcal{L}(Z, \Lambda)$$

当  $Q - \Lambda \not\geq 0$  时,  $\mathcal{L}(Z, \Lambda)$  没有下界; 因此将问题 6 的对偶问题写为:

**问题 7** (问题 6 的对偶问题)

$$p_{dual}^* = \max_{\Lambda \in \text{Diag}(\mathbb{R}^m)} \text{tr}(\Lambda) \quad (3-13)$$

$$s.t. R = Q - \Lambda \quad (3-14)$$

$$R \succeq 0 \quad (3-15)$$

易知,  $p_{dual}^* \leq p_{sdp}^* \leq p_r^*$ 。前一个不等式是否取等号由半正定规划或其对偶问题是否存在严格可行解有关 (Strict Feasible), 对这一问题的论述可以参考 Vandenberghe 的半正定规划综述 (定理 1)<sup>[14]</sup>。显然问题 6 和问题 7 是一定存在严格可行解的, 因此问题 6 与问题 7 满足强对偶性; 后一个不等式是否取等号由传感器网络的噪声和  $r$  决定。下面这个定理揭示了求解问题 7 可以帮助我们推断问题 6 的解的秩 (也就是松弛的“程度”):

**定理 2** (问题 6 解的秩) 令  $Z^*$  和  $\Lambda^*$  分别是问题 6 的最优解,  $R^* = Q - \Lambda^*$ , 则:

$$R^* Z^* = 0 \quad (3-16)$$

也就是说, 组成  $R^*$  与  $Z^*$  的向量是正交的。定理 2 可以通过<sup>[32]</sup>中的定理 1 以及 (33) 式得到, 是半正定规划的互补松弛定理的推论。根据定理 2, 我们还可以得到  $rank(Z^*) + rank(R^*) \leq m$ 。因此, 如果得到了问题 6 的最优解  $\Lambda^*$ , 就可以令  $r = m - rank(R^*)$ , 一定可以得到  $p_{sdp}^* = p_r^*$ 。

结合定理 1 和定理 2, 我们可以得出如下结论:

如果

$$r \leq \min\left(\left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{(8m+1)}}{2} \right\rfloor, m - rank(R^*)\right) \quad (3-17)$$

那么

$$p_{dual}^* = p_{sdp}^* = p_r^* \quad (3-18)$$

在实践中,  $m - rank(R^*)$  往往提供了更紧的界。可见, 求解对偶问题有助于我们进一步缩小能使强对偶定理成立的  $rank(Z)$ 。





## 4 算法：黎曼电梯与黎曼阶梯

在上一部分，我们导出了有约束的传感器网络优化问题的无约束形式（问题 4），得到了它的两个松弛（问题 5，问题 6），并得出了半正定松弛的对偶问题（问题 7）。求解满足强对偶性的问题 6 一方面能够在没有求解问题 4 时就给出其最优值的下界（这保证了解的可证明性与安全性），另一方面能够在不提供初值的情况下（问题 6 是凸的），产生一个非常接近问题 4 的全局最优值的解（实际上，在没有噪声时，问题 4 的解等于问题 5、6 的解）。但直接求解问题 6 是困难的，因此我们在上一部分分析了问题 6 的最优解的秩，以期能更深刻地理解这一问题。这一部分我们将从两个角度，设计不同的算法，利用  $Z$  的低秩特性，高效地求解问题 6。两者的差别在于如何搜索一个满足强对偶条件的  $Z$  的秩。

### 4.1 黎曼阶梯

#### 4.1.1 算法与证明

黎曼阶梯 (Riemannian Staircase) 算法由 N. Boumal<sup>[27]</sup>提出，用来解决决策变量有对角单位块 (Identity Block Diagonal) 约束的低秩半正定规划问题，并在 SE-Sync<sup>[16]</sup>应用到位姿图优化中。在这里我们陈述针对传感器网络定位的黎曼阶梯算法。

这一算法并不直接求解问题 6，而是在  $r$  上迭代求解不同的  $r$  对应的问题 5，从低到高遍历搜索不同的秩。可以注意到，问题 5 是一个非线性规划问题，因此为了消除为何黎曼阶梯能够求解一个非线性规划问题并得到全局最优解，并且能直接计算出问题 6 的全局最优解的质疑，我们提出如下定理：

**定理 4** (问题 5 全局最优性的充分条件) 如果  $Y^* \in (\mathcal{S}^r)^m$  是问题 5 一个 (列) 秩亏的二阶稳定点 (即，问题 5 在这一点处的梯度为 0，且 Hess 矩阵正半定)，那么  $Y^*$  就是问题 5 的全局最优解，且  $Z^* = Y^* Y^{*T}$  问题 6 的全局最优解。

定理 4 是 Boumal 对 BM 分解求解低秩半正定规划的最优性证明<sup>[33]</sup>中推论 8 的一个特例 (Part 4, example 2)。这一定理证明了黎曼阶梯算法可以使用高效的

---

**算法 4.1** 黎曼阶梯

---

**Input:** An initial point  $Y \in (\mathcal{S}^{r-1})^m$ ,  $r \geq d$ ; data matrix  $Q$

**Output:** Rank  $r^*$  where strong duality holds, optimal  $Y^*$  of problem 5 where  $r = r^*$  and of problem 6 where  $Z^* = Y^*Y^{*T}$ .

```

1:  $r_{bound} = \lfloor \frac{-1 + \sqrt{(8m+1)}}{2} \rfloor$ 
2: for all  $r = r_0, \dots, r_{bound}$  do
3:   Starting at  $Y$ , apply Riemannian optimization method to identify a second-order
   critical point  $Y^* \in (\mathcal{S}_0^r)^m$  of Problem 5
4:   if  $rank(Y^*) < r$  then
5:     return  $[r, Y^*]$ 
6:   else
7:      $Y \leftarrow (Y^* \quad 0_{m \times 1})$ 
8:   end if
9: end for

```

---

非线性规划，通过对  $r$  的遍历搜索，确定使得问题 5 与问题 6 等价的  $r$ ，同时得到问题 6 的最优解。

值得注意的是，因为我们在 Oblique 流形上优化  $Y$ ，前面所表述的梯度和 Hess 矩阵都需要投影到流形在当前点下的正切空间中。这是流形优化的标准流程，这里我们请读者查阅资料<sup>[35]</sup>了解细节。

### 4.1.2 实现细节

黎曼阶梯是高效的。在实际问题中，往往升高一次或两次  $Y$  的列数（也即一阶或两阶  $Z$  的秩），就可以计算出问题的解。需要提升的阶数与问题的噪声大小有关，建立噪声大小与  $Z$  的秩的关系是一件困难的事情，也是未来的工作之一。

在实现中，我们使用黎曼信赖域 (Riemann Trust-region) 法<sup>[36]</sup>，使用它可以避免在求解时显式地判断二阶最优性。我们使用 Manopt<sup>[37]</sup>完成对问题 5 的非线

性优化。

黎曼阶梯算法中比较脆弱的一步是对  $Y$  的秩的判断。我们希望尽可能求得一个高精度的非线性优化解，并合理地设置判断  $Y$  的秩的误差容限。一个可行的方法是，计算出一个二阶极值点之后，计算其对应的拉格朗日对偶矩阵  $\Lambda$ ，并判断  $\Lambda$  的最小特征值是否小于误差容限（当  $Y$  满秩时，根据互补松弛定理， $\Lambda$  的最小奇异向量为  $0$ ；误差容限一般设置为  $10^{-3}$  左右）。

同时我们还应当注意到，在算法中扩展  $Y$  的列之后，在下一次黎曼优化开始前，我们需要将这个解从鞍点 (saddle point) 拉出（因为鞍点的梯度满足中止条件，所以如果仍然从鞍点开始优化，那么优化将在一次迭代后终止）。可以参考 SE-Sync 中的方法，即利用在判断  $Y^*$  的秩时，计算出的最小特征值对应的特征向量，以其作为线搜索的方向，搜索到一个能使函数值下降的  $Y'$ ，以这个点作为下一次迭代的起点。当然我们也可以通过在扩展  $Y$  时，给扩展的列一个随机值，但这样会使下一次迭代的收敛速度减慢。

## 4.2 黎曼电梯

### 4.2.1 算法与证明

黎曼电梯的表述首次出现在 Halsted 的研究中<sup>[26]</sup>，通过求解对偶问题得到问题 6 中  $Z$  秩的上界，然后利用互补松弛定理缩减搜索空间，求解一个与黎曼阶梯中迭代求解的子问题规模接近的问题即可得到问题 6 的全局最优值。本文与这一工作中的不同点在于，我们要求解一个有约束的传感器网络定位问题，这会破坏无约束情况下 Halsted 的工作对  $Q$  的分解和对分解的结果中一个矩阵负半定性质的分析，从而使  $Z$  秩的上界的估计发生变化。对  $Z$  秩的分析已经在第三部分中完成，下面我们分析如何利用这一分析降低问题的维度。

**推论 5** (问题 5 的最优性条件) 令  $r \geq m - \text{rank}(R^*)$ ，其中  $R^* = Q - \Lambda^*$  ( $\Lambda^*$  是问题 7 的最优解)。那么  $Y_r$  能够最小化问题 5，当且仅当  $Y_r \in (\mathcal{S}^{r-1})^m \cap \text{null}(R^*)$ 。

证明：

$\Leftarrow$ ：

---

**算法 4.2** 黎曼电梯

---

**Input:** data matrix  $Q$

**Output:** Rank  $r^*$  where strong duality holds, optimal  $Y^*$  of problem 5 where  $r = r^*$  and of problem 6 where  $Z^* = Y^*Y^{*T}$ .

- 1:  $\Lambda^* \leftarrow \operatorname{argmax}_{\Lambda \in \operatorname{Diag}(\mathbb{R}^m)} \operatorname{tr}(\Lambda) \text{ s.t. } Q - \Lambda \succeq 0$  {Solve Problem 6}
  - 2:  $p_{SDP}^* \leftarrow \operatorname{tr}(Q) + \operatorname{tr}(\Lambda^*)$  {Lower bound of Problem 4}
  - 3:  $R^* \leftarrow Q - \Lambda^*$
  - 4:  $r^* \leftarrow \min(\lfloor \frac{-1 + \sqrt{(8m+1)}}{2} \rfloor, m - \operatorname{rank}(R^*))$
  - 5:  $V \leftarrow$  vectors corresponding to  $\#r$  smallest eigenvalues {find any basis of  $\operatorname{null}(R^*)$ }
  - 6:  $\bar{Z} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\bar{Z}} \|\operatorname{diag}(V \bar{Z} V^T - \mathbf{1})\|_2^2, \text{ s.t. } \bar{Z} \succeq 0$  {(Solve dimension reduced Problem 5)}
  - 7:  $Y_r^* \leftarrow V \operatorname{chol}(\bar{Z})^T$  {Cholesky Factorization}
  - 8: **return**  $r^*, Y_r^*$
- 

根据互补松弛定理和定理 2 的推论, 当  $r \geq m - \operatorname{rank}(R^*)$  时, 问题 6 满足强对偶性, 且问题 5 与问题 6 等价, 因此  $Y_r^* \in \operatorname{null}(R^*)$ 。  $Y_r^*$  处于 Oblique 流形上是问题的约束。

$\Rightarrow$ : (反证法)

假设  $Y_r \in (\mathcal{S}^{r-1})^m \cap \operatorname{null}(R^*)$  且  $\operatorname{tr}(QY_rY_r^T) \neq \operatorname{tr}(QY_r^*Y_r^{*T})$ 。

由  $R^* = Q - \Lambda^*$ , 有:

$$\operatorname{tr}((R^* + \Lambda^*)Y_rY_r^T) \neq \operatorname{tr}((R^* + \Lambda^*)Y_r^*Y_r^{*T}) \quad (4-1)$$

因为  $Y_rY_r^* \in (\mathcal{S}^{r-1})^m \cap \operatorname{null}(R^*)$ , 有:

$$R^*Y_r = R^*Y_r^* = 0 \quad (4-2)$$

又因为  $Y_r, Y_r^* \in (\mathcal{S}^{r-1})^m$ , 故:

$$\operatorname{tr}(\Lambda^*Y_rY_r^T) = \operatorname{tr}(\Lambda^*Y_r^*Y_r^{*T}) = \operatorname{tr}(\Lambda^*) \quad (4-3)$$

因此，我们可以将 (4-1) 简化为

$$\text{tr}(\Lambda^*) \neq \text{tr}(\Lambda^*) \quad (4-4)$$

得出矛盾。  $\square$

令  $V \in \mathbb{R}^{m \times r}$  表示  $\text{null}(R^*)$  的一组基。由推论 5 可知，求解问题 6 等价于找到一个  $Z$  满足： $\bar{Z} \succeq 0, Z = V\bar{Z}V^T, \text{Diag}(Z) = \mathbf{1}$ 。也即，求解：(问题 6 的低维等价形式)

$$p_{sdp}^* = \min_{Z \in \mathbb{R}^{r \times r}} \|\text{diag}(V\bar{Z}V^T - \mathbf{1})\|_2^2 \quad (4-5)$$

$$s.t. Z \succeq 0 \quad (4-6)$$

#### 4.2.2 实现细节

问题 6 和问题 5 都是半正定规划问题，我们使用 MOSEK<sup>[38]</sup> 求解。与黎曼阶梯算法中类似，算法中最脆弱的部分来自于如何判断  $R^*$  的秩。我们一方面要求在求解问题 6 时，提高求解的精度，另一方面特别地设计对  $R^*$  秩的判断。在实际中可以观察到，最紧  $r^*$  的估计往往是由  $m - \text{rank}(R^*)$  提供的。Cholesky 分解会产生正半定的上三角矩阵，这在某些意义上是对这一欠定问题的正则化。在后续完整的算法中，我们会进一步处理黎曼电梯算法输出的  $Y_r^*$ ，因为最优值在低维 Oblique 流形上的投影不一定是问题 4 的最优值。

#### 4.3 恢复原问题的解

在求解对偶问题得到原问题的下界与一个高维的  $Y_r^* \in (\mathcal{S}^{r-1})^n$  后，我们还需要恢复问题 4 的解 (Rounding)。在这一部分推导一个恢复原问题解的框架。

我们首先应当将  $Y_r^*$  从  $(\mathcal{S}^{r-1})^n$  投影到其子空间  $(\mathcal{S}^{d-1})^n$ ， $d$  是问题 4 中  $y_i$  所处的维度。令  $Z_d = Y_d Y_d^T, Z_r = Y_r Y_r^T$ ，实际上我们寻找的是使  $\|Z_d - Z_r\|_F$  最小的  $Y_d$ ，这样做能够使投影得到的  $Y_d$  代入问题 5 中后的目标函数值尽可能接近满

足强对偶性的问题 5 的解。不妨对  $Y_r$  做 Thin-奇异值分解, 得:

$$Y_r = U_r S_r V_r^T \quad (4-7)$$

其中,  $U_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ;  $S_r, V_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 。调换奇异值和对应得向量的位置, 使  $\text{diag}(S_r)$  降序排列, 并取其中最大的  $d$  个奇异值和其对应的  $U$  中的向量:  $S_d = \text{Diag}(\text{diag}(S_r)[1 : d])$  和  $U_d = U_r[1 : d]$ 。令  $Y_r = U_d S_d$ , 这样我们就找到了最小化  $\|Z_d - Z_r\|_F$  的  $Y_d \in (\mathcal{S}^{d-1})^n$ 。

证明:

$$Z_d = Y_r Y_r^T \quad (4-8)$$

$$= U_r S_r V_r^T (U_r S_r V_r^T)^T \quad (4-9)$$

$$= U_r S_r S_r U_r^T \quad (4-10)$$

$$(4-11)$$

同理,  $Z_d = U_d S_d S_d U_d^T$ 。分别用零和零向量填充  $U_d$  的列和  $S_d$  的对角线, 得到  $U'_d$  和  $S'_d$ , 直至与  $U_r, S_r$  达到相同的维度。令  $A = Z_d - Z_r$ , 则:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \quad (4-12)$$

$$= \sqrt{\text{tr}((U_r - U'_d)^T S_r^4 (U_r - U'_d))} \quad (4-13)$$

其中,  $S_r^4$  代表  $S_r$  连乘四次。因为  $U_r$  中的列向量为单位正交向量, 且  $S_r$  为对角矩阵, 故上式计算结果等于

$$\sqrt{\text{diag}(S_r)_{[d+1:r]}^4} \quad (4-14)$$

因为  $\text{diag}(S_r)$  为降序排列, 故这是在  $(\mathcal{S}^{d-1})^n$  中极小化  $A$  的结果。□

在无噪声的情况下, 经上述方法得到的  $Y_d$  是问题 4 的解。这是因为在无噪声时, 问题 4 的最优目标函数值为 0, 而矩阵  $Q$  是正定的, 因此问题 5、6、7 的最优的最优目标函数均为 0, 对偶间隙为 0。在有噪声的情况下, 存在对偶间隙, 因此我们可以在最后一步局部优化的方法找到其附近的局部极小值。在大量实

验中, 我们发现最后一步局部优化需要的迭代很少, 在实际问题中常见的噪声水平下,  $Y_r$  与  $Y_r^*$  非常接近。我们应当可以构建在确定的噪声分布下,  $Y_d$  处在问题 4 的全局最优的收敛域的概率, 并推断  $Y_d^*$  与 Ground Truth 距离的期望, 这一问题留作未来的研究。

## 4.4 完整的算法

---

**算法 4.3** 可证明的有约束传感器网络定位

---

**Input:** Incidence matrix  $C$ , constraint incorporated measurement matrix  $D$ , weight matrix  $W$

**Output:** Estimate  $X^*$ , unit directions  $Y^*$ , cost  $p_{MLE}^*$ , lower bound  $p_{sdp}^*$

- 1:  $Q \leftarrow D^T(W - WC(C^TWC)^\dagger C^T)W$
  - 2:  $Y_r^*, r, p_{sdp}^* \leftarrow \text{Solve problem 6}$       {Using Riemmanian Staircase or Elevator}
  - 3:  $Y_0 \leftarrow Proj_d(Y_r^*)$       {Project to lower dimensional Oblique Manifold}
  - 4:  $Y^* \leftarrow \underset{Y \in (\mathcal{S}^{d-1})^m}{\operatorname{argmin}_Y} tr(QYY^T), s.t. Y \in (\mathcal{S}^{d-1})^m$       {Refine: Locally minimize problem 4}
  - 5:  $p_{MLE}^* = tr(QY^*Y^{*T})$
  - 6:  $X^* \leftarrow (C^TWC)^\dagger C^TWDY$
  - 7: **return**  $X^*, Y^*, p_{MLE}^*, p_{sdp}^*$
- 

下面我们展示求解有约束传感器定位的完整算法。这一算法不仅能够没有任何初值的情况下给出一个近似最优解, 还能给出与全局最优解的距离的上界。这一信息可以评判本次求解的质量, 并估计传感器测量的噪声。更高层次的模块可以根据这个与最优解距离的估计, 决定是否接受优化的结果。

这一算法完全使用距离测量, 无需融合其他传感器的数据, 可以作为集群机器人运行时初始化过程中的一步, 并且在相对小规模的情况下 (机器人数量小于  $10^2$ , 测量小于  $10^3$  条) 时, 可以以 1Hz 到 10Hz 的频率在线运行。





## 5 数值实验

### 5.1 实验背景

本文的实验均在英特尔酷睿 i7-12700KF 处理器，16GB RAM 上完成。我们在 MATLAB R2023a 实现黎曼阶梯和黎曼电梯算法，使用 CVX<sup>[39][40]</sup>，一个声明与求解凸优化问题的软件包，调用 MOSEK<sup>[38]</sup>求解半正定规划问题；对于 Oblique 流形上的优化问题，使用 Manopt<sup>[37]</sup>求解。

我们制作了两类数据集。第一类在空间中生成一个刚性的图。第二类模拟在每个机器人上安装两个 UWB 标签（也可以是其他测量设备）后的相对定位问题，每个机器人可以与其邻近的若干机器人通信（邻近指，在欧氏距离中最近的  $n$  个机器人，与队形有关，一般情况下  $n < 20$ ），输出与其存在通信的每一对标签之间测量的结果。

我们对比了黎曼信赖域法<sup>[41]</sup>，黎曼阶梯（算法4.1）和黎曼电梯（算法4.2）

### 5.2 全连接图的二维 Square 和三维 Cube 实验

为了获得对问题特征和算法特征的直观认识，我们首先来看一个简单的例子。我们在 2 维空间中摆放一些传感器，将其全连接（即任意一对点之间均存在加入高斯噪声的测量），然后随机选取 3 组点，将这几组点之间的测量替换为真值，作为约束。分别对以上三种情况进行实验。真值的 Loss 不为零，是因为这

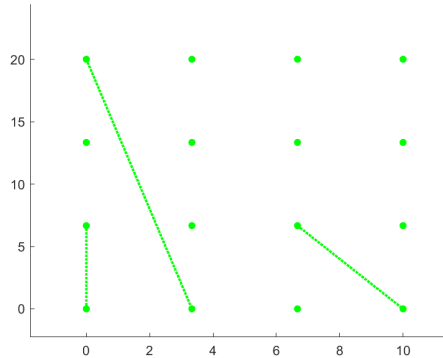


图 5.1 真值, loss=28.507

里加入了一定的噪声，真值所对应的位置分布不再能够完全符合测量。

首先使用黎曼信赖域法直接求解问题 5，其结果与初值有关。我们每次一迭代开始前，给每一个初始的方向向量  $Y_0$  随机赋值： $Y_0$  的两个坐标均在区间  $[-0.5, 0.5]$  中均匀采样，然后将  $Y_0$  单位化。因为我们随机采样的区间关于 0 对称，且数值上比较小，故得到的每一个初值近似于在单位圆上均匀采样。迭代多次，这里展示 4 个结果：

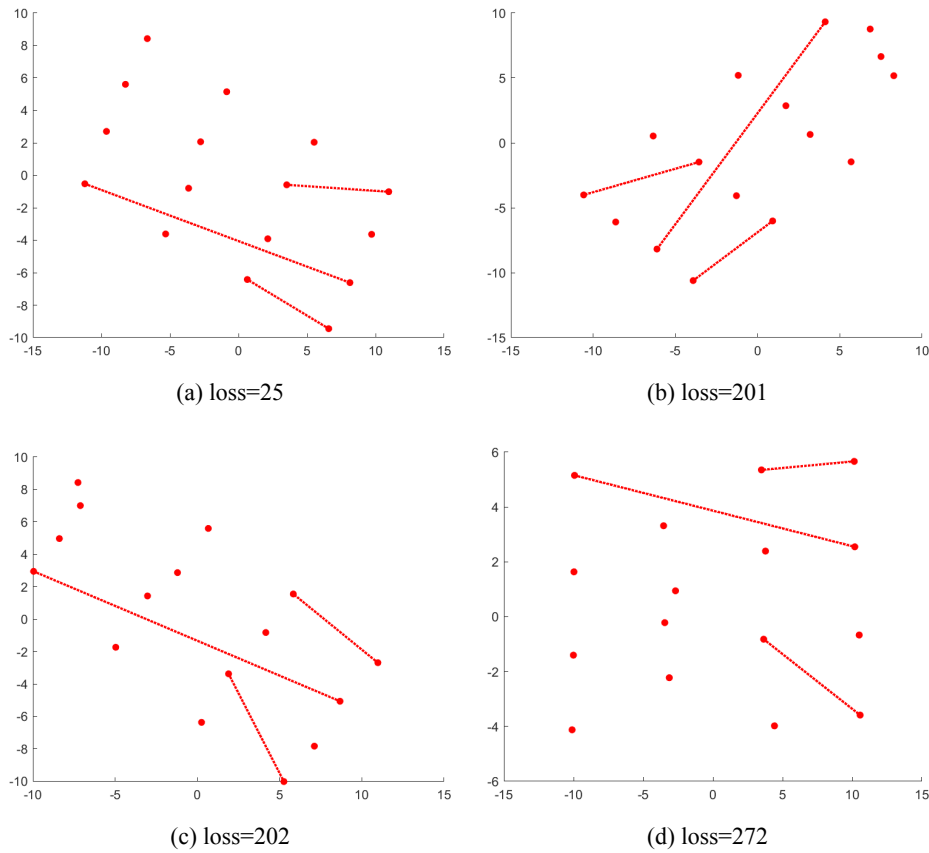


图 5.2 RTR 法在不同初始值下求解的结果

$\text{loss}$  是本次迭代对应的问题 5 的目标函数值  $\text{tr}(QYY^T)$ 。从以上结果可以发现，黎曼信赖域法与初始化的质量有很大的关联。4 个结果中，只有结果 1 的目标函数值接近真值（甚至小于真值，通过与后面全局优化的算法对比，可知这一次迭代恰好收敛到了全局最优值附近），可以被视为成功的优化（得到的结果是刚性的，整体旋转和平移就可以达到和真值类似的视觉效果），其余三个都终止

于误差很大的局部极小值，且无法判断这个解的质量。

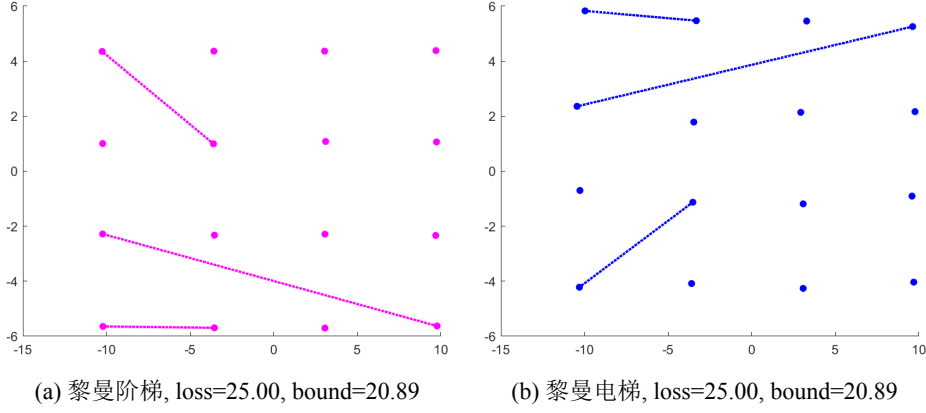


图 5.3 使用黎曼阶梯与黎曼电梯求解的结果

**bound** 指通过求解（或者等价地求解，如黎曼阶梯）半正定松弛（问题 6）得到的目标函数的下界。黎曼阶梯和黎曼电梯是全局优化方法，无需初值即可工作，而且可以给出最优解的下界。虽然得到的整个传感器网络的姿态与真值不完全相同，但是通过整体平移和旋转可以达到与真值非常接近的结果。

为了进一步说明我们方法的优越性，并对比其性能，我们在三维空间中进行不同噪声下的实验。实验中，所有的传感器在  $10 \times 10 \times 10$  的正方体中。每一对传感器之间均存在测量，为了简化对算法的验证，本组实验不添加约束。噪声服从高斯分布  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ，直接添加到每一条传感器之间的测量上。这一实验中有 27 个传感器，351 条测量。计算结果如表 5.1 所示。

表 5.1 中，时间的单位为秒。这个表中有几点值得注意。首先，我们可以观察到，在所有的情况下，黎曼阶梯和黎曼电梯算法都可以计算出比用真值对应的目标函数值更低的结果，这说明我们的算法比真值更接近最大后验估计。这也是意料之中的现象，因为此算法求解出的是全局最优值；其次，我们可以观察到，求解对偶问题能够提供一个非常紧的最优值下界；最后，我们可以发现，黎曼阶梯算法和黎曼电梯算法的求解时间基本处于同一量级，且可以在这一规模下以大于 1 Hz 的频率运行。

根据以上简单的实验，我们可以得出以下结论：

表 5.1 不同噪声下算法 1 与算法 2 的比较

$\sigma$	GT-Cost	Alg2-cost	Alg2-bound	Alg2-Time	Alg1-cost	Alg1-bound	Alg1-time
0	0	0	0	1.48	0	0	0.08
0.33	39.127	33.783	26.575	1.296	33.783	26.574	1.035
0.67	124.677	101.945	91.276	1.195	101.945	91.275	0.601
1	385.863	334.219	300.938	0.865	334.219	300.936	0.657
1.33	620.72	541.661	438.657	0.86	541.661	438.656	0.623
1.67	873.96	735.923	644.259	0.852	735.923	644.258	0.386
2	1168.482	1007.899	898.865	0.877	1007.899	898.864	0.542
2.33	1683.014	1395.296	1247.997	0.867	1395.296	1247.997	0.419
2.67	2688.136	2168.317	1958.103	0.956	2168.317	1958.103	0.552
3	2833.977	2494.421	2187.775	0.894	2494.421	2187.775	0.425

- 黎曼阶梯和黎曼电梯在给定测量数据之后，有确定性的表现，而且可以在一定噪声水平下得到与全局最优解非常接近的结果。
- 黎曼阶梯与黎曼电梯的表现非常接近，但是黎曼阶梯算法的空间复杂度和在较小噪声下的表现要更优。
- 计算对偶问题得出的下界与优化的结果非常接近，说明黎曼阶梯和黎曼电梯的半正定松弛是非常紧的。

上面的结果中还有两个值得注意的问题。第一，在理论中，当噪声增加后，黎曼阶梯迭代的次数应当会增加（因为需要进一步松弛方能满足强对偶条件），但是实际中可以发现其运行的时间几乎没有变化，而其计算的精度仍然非常高，这说明在如上所示的噪声条件下，黎曼阶梯算法中对  $Y$  松弛的阶数没有差别。第二，可以看到使用黎曼电梯算法求解无噪声时的传感器网络定位问题时，求出的下界略大于 0。这一点可以通过提高求解问题 6 的求解器的精度来降低这一数值，但是在无噪声时，问题 6 最优值附近的梯度非常小，提高精度会大大降低求

解的效率。我们可以观察到在加入噪声后,即使问题 6 的求解精度设定的不是很高,但计算出的下界与黎曼阶梯的结果相近,故我们不妨保留这一结果。

实验中,黎曼信赖域法在上面的实验背景下实际上有非常大的概率(约 90%)能够求出和算法 4.1 和算法 4.2 接近的结果。这是因为这一实验中传感器网络是全连接的。冗余的连接改变了问题的结构,使局部收敛的非线性规划能够常常计算出很好的结果。实际上,作者观察到,黎曼信赖域法对节点之间的连接总量比较敏感。我们可以去除一些连接,并仍然维持图的刚性,但是在删去这些连接之后,但是黎曼信赖域法的失败率就会显著增加,而全局最优的算法仍然能有效收敛。同时,在 Cube 实验中,当节点的数量比较少时,黎曼信赖域法效果往往比较差(回顾图 5.2,失败率 >50%);当节点数量大于 20 个时,其成功率会提高。需要注意的是,Cube 实验中传感器的连接情况并不符合实际应用中的场景,如对于 UWB 测距技术而言,当网络中的标签数量增加后,网络的频率会降低<sup>[42][43]</sup>。当一个节点连接的标签数量达到 50 时,其通信频率会低于(大于)1Hz,因此想要通过增加连接数量来直接使用黎曼信赖域法求解是不切实际的。下一部分更贴近实际的仿真实验可以证明黎曼信赖域法的局限性和本文中算法的优越性。

### 5.3 多机器人集群定位实验

有约束的多机定位的常见应用场景是,在一个机器人上安装多个 UWB 标签,每一个机器人的测距标签只与其邻近的机器人上的标签连接。此部分的实验即在这一背景下展开。

我们假设每个机器人上安装了两个 UWB 标签,这两个标签之间的距离已知;机器人排布成一定的形状,每一个机器人**与其欧氏距离最近**的一些机器人之间存在测量(与集群的队形和机器人在其中的位置有关,连接数从 5 个到 30 个不等)。

在二维中我们设计了六边形,长方形队形;三维中设计了金字塔形和正方体形队形<sup>[30]</sup>。此实验中对噪声的控制与上一实验略有不同,对每一条测量上添加的噪声,设这条测量的模长为  $l$ ,其噪声  $noise \sim \mathcal{N}(0, \sigma \times l)$ 。UWB 标签在机体

上的距离均设定为 0.7m。在每一个噪声下，我们对噪声的分布随机采样，进行 10 次实验。为了获得更有实际意义的测量指标，我们不使用目标函数值来直接评价结果，而是将求解器输出归一化之后<sup>[44]</sup>，求归一化的标签位置与真值的均方误差 (RMSE)。这样做相当于评价真值所构成的传感器网络整体的“形状”与求解器求出的“形状”之间的差距。因为我们假设传感器的位置是极小刚性的，且在实际应用中我们也需要将结果以一定的方式对齐到预设的坐标系中，所以这一指标是合理的。在表中，队形之后的括号中前一个数字代表机器人的数量（乘 2 可得标签的数量），第二个数字代表网络中传感器之间连接的数量。

表 5.2 求解二维形状的均方误差比较

$\sigma$	长方形 (18, 292)			六边形 (37, 600)		
	elevator	staircase	rtr	elevator	staircase	rtr
0.1	0.0199	0.0199	1.3660	0.0214	0.0214	2.6402
0.2	0.0465	0.0465	2.4225	0.0449	0.0449	2.6940
0.3	0.0689	0.0689	0.9451	0.0635	0.0635	3.1149

表 5.3 求解三维形状的均方误差比较

$\sigma$	金字塔形 (10, 180)			长方体形 (27, 632)		
	elevator	staircase	rtr	elevator	staircase	rtr
0.1	0.0267	0.0267	0.2397	0.0226	0.0226	1.3183
0.2	0.0472	0.0472	0.2494	0.0434	0.0434	1.605
0.3	0.0739	0.0739	0.2372	0.0724	0.0724	1.2123

从实验中可以发现，黎曼阶梯和黎曼电梯能够在所有的情况下得到均方误差很小的结果（推测非常接近问题 4 的最优值），均在厘米级；而黎曼信赖域法的均方误差比较大，说明多次重复实验中，收敛于局部极值的情况常常发生。这验证了我们在 5.2 中全连接的 Cube 实验中观察到的现象，即当约束比较少时（传感器网络仍然是刚性的），黎曼信赖域法的失败概率会显著增加。我们还需强调，

在标准差为 0.3 的情况下，此时噪声的均方根已经接近基线的 1/2，但我们的算法仍然能够恢复出均方误差很小的结果，这说明半正定松弛在传感器网络定位的实际中是很紧的，非常适用于为传感器网络在完全没有初值信息时，提供一个对初始相对位姿的估计。

为了说明本文所提出的算法的鲁棒性，我们测试了 RTR 算法在相同的问题下的成功率（通过对比黎曼电梯或黎曼阶梯算法求出的原问题最优目标函数的下界与 RTR 算法收敛时的目标函数判断是否成功），其结果请参考附录。RTR 算法的表现，说明了有约束传感器网络定位问题很强的非凸性，并印证了 5.2 节中在较小规模的测试下观察到的现象。

根据以上结果，我们可以得出如下结论：

- 黎曼阶梯与黎曼电梯的求解质量相同，符合理论分析，说明我们的实现中对于零空间的处理有比较好的稳定性。
- 黎曼阶梯和黎曼电梯在集群定位的场景中能够求得非常接近真值的解，在求解质量上显著优于局部优化的方法（黎曼信赖域）。
- 这两种松弛在实际场景中的对偶间隙非常小，其得出的最优值的下界有实用意义。

为了能够直观地看到求解的结果，将 2D 和 3D 的实验中取出一组，将其结果展示在附录中。

## 5.4 对实物实验的讨论

本文没有进行实物实验，在此根据上面的结果简单讨论实物实验的可行性。为了能移植到实物平台，本算法需要考虑如下的问题：

- 算法的可用性：实际中，如果在无人机上部署，标签之间的相对距离约 250mm，而标签噪声的标准差约 100mm，且近似高斯分布。在前文的实验中，我们在噪声的标准差为 0.3 倍相对距离的情况下进行了实验（在这一

实验条件下, 噪声的标准差甚至达到了与同一个机器人上标签相对距离相同的程度), 本文的算法仍然求出了精度比较高的结果。我们的算法应当能够在实物平台的噪声水平下正常工作。

- **UWB 测量的有偏特性:** 实际上, UWB 测得的距离并非是无偏的, 其偏差往往可以到达 0.05m 左右。因为本文的测量模型没有估计 UWB 的测量的偏差, 因此直接使用精度可能会受到影响。可以考虑将本算法输出的标签位置与里程计输出的位姿做松耦合提高精度, 也可以考虑使用卡尔曼滤波融合里程计的输出, 直接估计 UWB 测量的偏差。
- **分布式特性:** 在大规模自主集群上进行实验, 使用中心式的求解方法势必会严重影响集群的可扩展性。一个简单的想法是, 每个机器人可以仅求解与其附近的机器人的相对位姿, 在需要求得某两个不相邻的机器人相对位姿时, 进行一定的转换<sup>[45]</sup>。进一步地, 通过可分布式的优化框架, 直接在优化层完成分布式求解也是一种可行的方案, 但这样就需要对算法的重新设计。这些是未来的工作。



## 6 总结与展望

### 6.1 总结

为了解决基于距离测量的多机相对定位的常用算法对初值敏感,且无法验证安全性的不足,本工作聚焦于设计一个可证的求解器,即无需初值、并且可以给出结果与最优值距离的估计的求解器。通过半正定松弛,我们构建并分析了原问题的对偶问题;但松弛后的问题维度很高,无法在机载电脑上求解,故设计了两种高效的算法求解这一问题。算法4.1使用了黎曼优化领域在低秩优化 (low-rank optimization) 中的一些结论,巧妙地搜索满足强对偶定理所需的对 Oblique 流形维度的扩展量  $r$ ,在保证求解最优性的前提下,使用 BM 分解降低了问题的维度;算法4.2通过求解对偶问题直接估计松弛的程度 ( $Y$  的秩),利用强对偶定理缩减了半正定松弛的搜索空间。黎曼阶梯与黎曼电梯算法均可以在机器人集群数量比较小时在机载电脑上以高于 1Hz 的频率运行。二者的时间复杂度在同一阶,但是实际中因为算法4.2需要求解一个维度很高的矩阵的零空间,故可能会产生一定的误差和不稳定性,这是未来工作需要分析并提升的方面。

这一工作解决了之前集群机器人中需要提前确定相对位姿<sup>[3]</sup>,或者需要里程计作为真值来估计相对位姿的问题<sup>[7]</sup>,并且能够保证感知的安全性(可证的感知)。它可以作为集群机器人系统提供良好的初值,并在后续的运行中以可以接受的频率持续地提供可证的相对定位信息。

本作工作中的不足有四个方面。其一是在算法的实现中进行一些可能会产生不稳定性的运算时(如,求矩阵的零空间),对被操作的矩阵或变量的特性分析不足,未专门设计计算它的数值方法;其二是没有理论分析问题 7 与问题 4 的对偶间隙与噪声的关系;其三是没有在实物平台上部署和测试;其四是考虑算法能否分布式运行。

## 6.2 对未来工作的展望

这一算法虽然能够高效地运行，但与在实物上部署仍有一定距离。在实物部署前，作者认为应当关注以下问题。第一，传感器网络应当根据某种规则，选择保持观测刚性所需的最少的连接。这样可以最大限度发挥算法的优势，加速求解，并提高通讯的频率。第二，应当考虑算法的可并行特性，如考虑使用 **Block Coordinate Descent**<sup>[46]</sup>法，在每个机器人上只求解整体拓扑的一个刚性的子结构，之后将这些结构合并。这样做可以将频率提高到 10Hz 甚至 100Hz，满足实时性的要求。

在理论分析方面，作者认为以下方面亟待解决。第一，在数值实验中，可以观察到某些队形在相同的噪声下，求解的质量更高。这一现象可以从信息论的角度，使用扰动分析进一步认识，如利用 **Fisher Information**, **Cramer-Rao Lower Bound** 等工具，并指导我们设计对观测最优的队形。第二，对有约束传感器网络定位问题作半正定松弛后，在不同噪声下的对偶间隙仍然需要进一步分析。这一算法在数值实验中，即使在比较大的噪声下，对偶间隙从结果上来看仍然很小，因此有希望能够推导出噪声与对偶间隙的关系。类似的工作可以参考 **AS Banderia** 对于 **Angular Sync** 问题半正定松弛在有限的噪声下的最优性的分析<sup>[47]</sup>。

## 参考文献

- [1] QUAN L, YIN L, ZHANG T, et al. Formation Flight in Dense Environments[J]. arXiv preprint arXiv:2210.04048, 2022.
- [2] GAO Y, WANG Y, ZHONG X, et al. Meeting-merging-mission: A multi-robot coordinate framework for large-scale communication-limited exploration[C]//2022 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2022: 13700-13707.
- [3] ZHOU X, WEN X, WANG Z, et al. Swarm of micro flying robots in the wild[J]. Science Robotics, 2022, 7(66): eabm5954.
- [4] XU H, ZHANG Y, ZHOU B, et al. Omni-Swarm: A Decentralized Omnidirectional Visual-Inertial-UWB State Estimation System for Aerial Swarms[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2022, 38(6): 3374-3394.
- [5] CHANG Y, TIAN Y, HOW J P, et al. Kimera-multi: a system for distributed multi-robot metric-semantic simultaneous localization and mapping[C]//2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2021: 11210-11218.
- [6] JIANG B, ANDERSON B D, HMAM H. 3-D relative localization of mobile systems using distance-only measurements via semidefinite optimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 56(3): 1903-1916.
- [7] NGUYEN T H, XIE L. Relative transformation estimation based on fusion of odometry and UWB ranging data[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2023.
- [8] XUN Z, HUANG J, LI Z, et al. Crepes: Cooperative relative pose estimation towards real-world multi-robot systems[J]. arXiv preprint arXiv:2302.01036, 2023.
- [9] WANG Y, WEN X, YIN L, et al. Certifiably optimal mutual localization with anonymous bearing measurements[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(4): 9374-9381.
- [10] YANG L, GIANNAKIS G B. Ultra-wideband communications: an idea whose time has come [J]. IEEE signal processing magazine, 2004, 21(6): 26-54.
- [11] DOKMANIC I, PARHIZKAR R, RANIERI J, et al. Euclidean distance matrices: essential theory, algorithms, and applications[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(6): 12-30.
- [12] FISHBERG A, HOW J P. Multi-Agent relative pose estimation with UWB and constrained communications[C]//2022 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2022: 778-785.
- [13] SHALABY M, COSSETTE C C, FORBES J R, et al. Relative position estimation in multi-agent systems using attitude-coupled range measurements[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(3): 4955-4961.
- [14] VANDENBERGHE L, BOYD S. Semidefinite programming[J]. SIAM review, 1996, 38(1): 49-95.
- [15] GOEMANS M X, WILLIAMSON D P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming[J]. Journal of the ACM (JACM), 1995, 42(6): 1115-1145.
- [16] ROSEN D M, CARLONE L, BANDEIRA A S, et al. SE-Sync: A certifiably correct algorithm for synchronization over the special Euclidean group[J]. The International Journal of Robotics Research, 2019, 38(2-3): 95-125.
- [17] YANG H, CARLONE L. A quaternion-based certifiably optimal solution to the Wahba problem with outliers[C]//Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2019: 1665-1674.
- [18] CADENA C, CARLONE L, CARRILLO H, et al. Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: Toward the robust-perception age[J]. IEEE Transactions on robotics, 2016, 32(6): 1309-1332.
- [19] QIN T, LI P, SHEN S. Vins-mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2018, 34(4): 1004-1020.

- [20] MUR-ARTAL R, MONTIEL J M M, TARDOS J D. ORB-SLAM: a versatile and accurate monocular SLAM system[J]. IEEE transactions on robotics, 2015, 31(5): 1147-1163.
- [21] CARLONE L, CALAFIORE G C, TOMMOLILLO C, et al. Planar pose graph optimization: Duality, optimal solutions, and verification[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2016, 32(3): 545-565.
- [22] BRIALES J, GONZALEZ-JIMENEZ J. Cartan-sync: Fast and global SE (d)-synchronization [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2(4): 2127-2134.
- [23] BISWAS P, YE Y. Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization [C]//Proceedings of the 3rd international symposium on Information processing in sensor networks. 2004: 46-54.
- [24] BISWAS P, LIANG T C, TOH K C, et al. Semidefinite programming approaches for sensor network localization with noisy distance measurements[J]. IEEE transactions on automation science and engineering, 2006, 3(4): 360-371.
- [25] WANG Z, ZHENG S, BOYD S, et al. Further relaxations of the SDP approach to sensor network localization[J]. Tech. Rep., 2006.
- [26] HALSTED T, SCHWAGER M. The Riemannian Elevator for certifiable distance-based localization[J]. Preprint, 2022.
- [27] BOUMAL N. A Riemannian low-rank method for optimization over semidefinite matrices with block-diagonal constraints[J]. arXiv preprint arXiv:1506.00575, 2015.
- [28] ASIMOW L, ROTH B. The rigidity of graphs, II[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 68(1): 171-190.
- [29] CANO J, PAGÈS G, CHAUMETTE E, et al. Clock and power-induced bias correction for UWB time-of-flight measurements[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 2431-2438.
- [30] WU T, GAO F. Distributed Optimization in Sensor Network for Scalable Multi-Robot Relative State Estimation[J]. arXiv preprint arXiv:2303.01242, 2023.
- [31] HORN R A, ZHANG F. Basic properties of the Schur complement[J]. The Schur Complement and Its Applications, 2005: 17-46.
- [32] BARVINOK A I. Problems of distance geometry and convex properties of quadratic maps [J]. Discrete & Computational Geometry, 1995, 13: 189-202.
- [33] BOUMAL N, VORONINSKI V, BANDEIRA A. The non-convex Burer-Monteiro approach works on smooth semidefinite programs[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2016, 29.
- [34] BURER S, MONTEIRO R D. A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization[J]. Mathematical Programming, 2003, 95(2): 329-357.
- [35] ABSIL P A, MAHONY R, SEPULCHRE R. Optimization algorithms on matrix manifolds [M]. Princeton University Press, 2008.
- [36] NASH S G. A survey of truncated-Newton methods[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2000, 124(1-2): 45-59.
- [37] BOUMAL N, MISHRA B, ABSIL P A, et al. Manopt, a Matlab Toolbox for Optimization on Manifolds[J/OL]. Journal of Machine Learning Research, 2014, 15(42): 1455-1459. [http s://www.manopt.org](http://www.manopt.org).
- [38] APS M. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.1.[A/OL]. 2019. <http://docs.mosek.com/9.1/toolbox/index.html>.
- [39] GRANT M, BOYD S. Graph implementations for nonsmooth convex programs[G]// BLONDEL V, BOYD S, KIMURA H. Lecture Notes in Control and Information Sciences: Recent Advances in Learning and Control. Springer-Verlag Limited, 2008: 95-110.
- [40] GRANT M, BOYD S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1[Z]. <http://cvxr.com/cvx>. 2014.
- [41] ABSIL P A, BAKER C G, GALLIVAN K A. Trust-region methods on Riemannian manifolds [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2007, 7: 303-330.

- [42] Nooploop. Nooploop Linktrack Datasheet V2.2[A/OL]. 2021. [https://ftp.nooploop.com/software/products/uwb/doc/LinkTrack\\_Datasheet\\_V2.2\\_zh.pdf](https://ftp.nooploop.com/software/products/uwb/doc/LinkTrack_Datasheet_V2.2_zh.pdf).
- [43] Decawave. Decawave DW1000 Datasheet Rev 2.22[A/OL]. 2017. <https://www.qorvo.com/products/d/da007946>.
- [44] SORKINE-HORNUNG O, RABINOVICH M. Least-squares rigid motion using svd[J]. Computing, 2017, 1(1): 1-5.
- [45] LIU Y, WANG Y, WANG J, et al. Distributed 3D relative localization of UAVs[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2020, 69(10): 11756-11770.
- [46] TSENG P. Convergence of a block coordinate descent method for nondifferentiable minimization[J]. Journal of optimization theory and applications, 2001, 109(3): 475.
- [47] BANDEIRA A S, BOUMAL N, SINGER A. Tightness of the maximum likelihood semidefinite relaxation for angular synchronization[J]. Mathematical Programming, 2017, 163: 145-167.



## 附录

### A 实验数据

#### A.1 多机器人相对定位仿真的一组结果的可视化

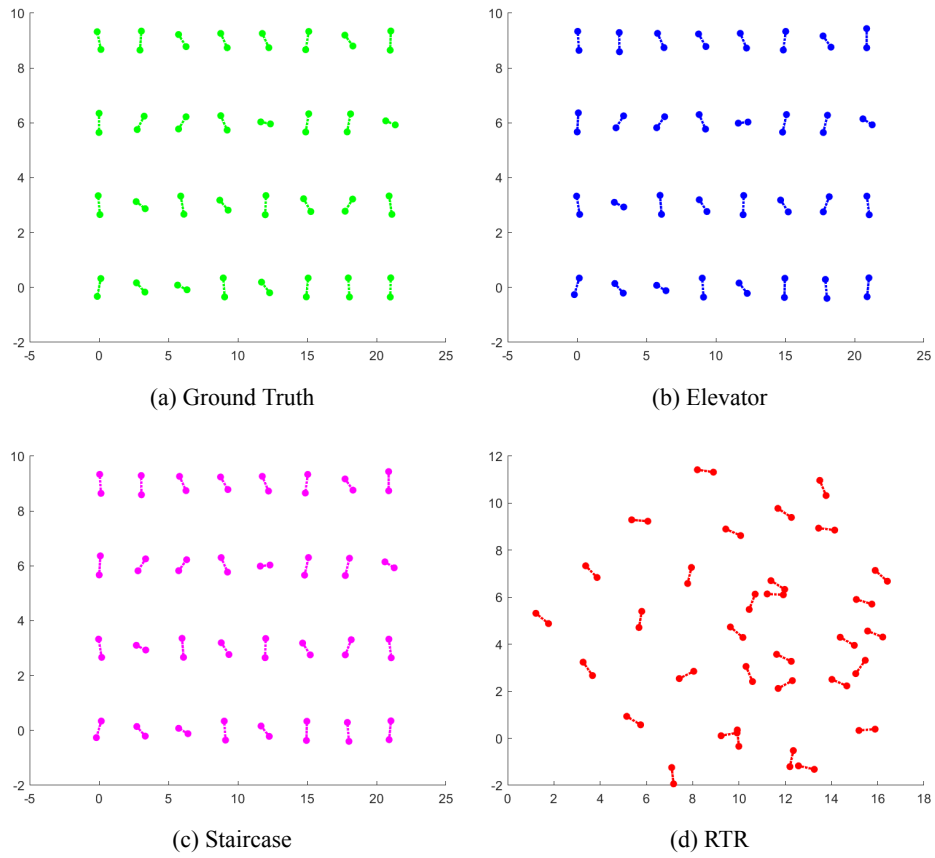


图 A.1 长方形-2d

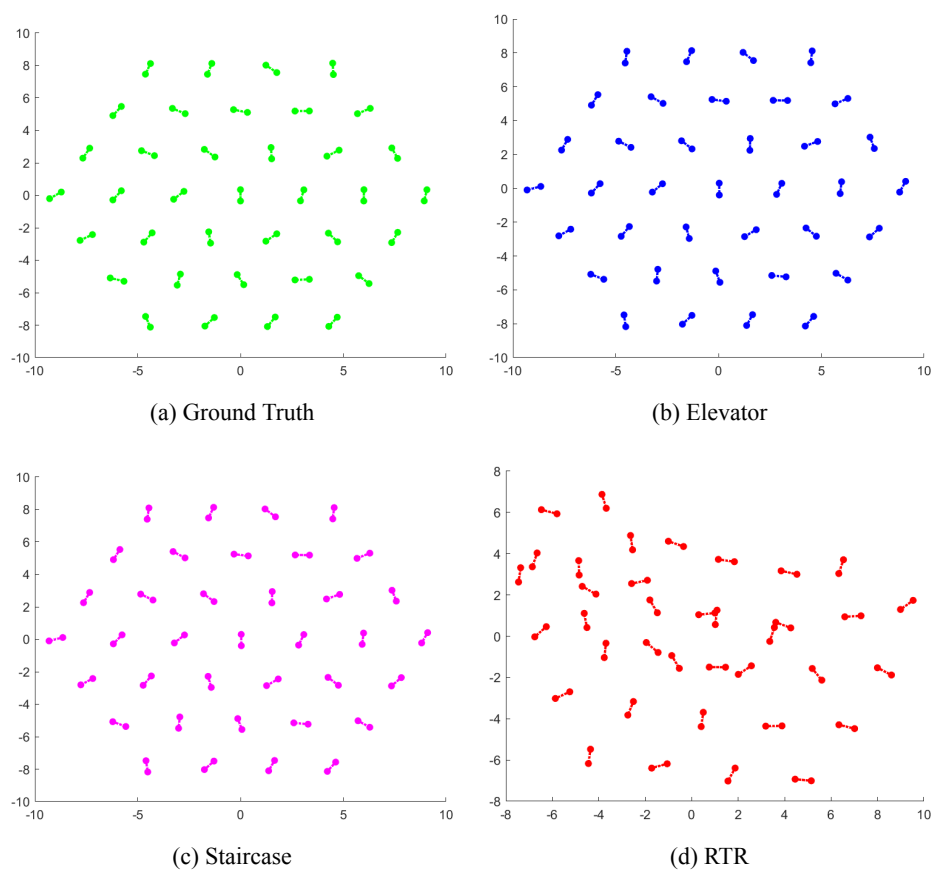


图 A.2 六边形-2d



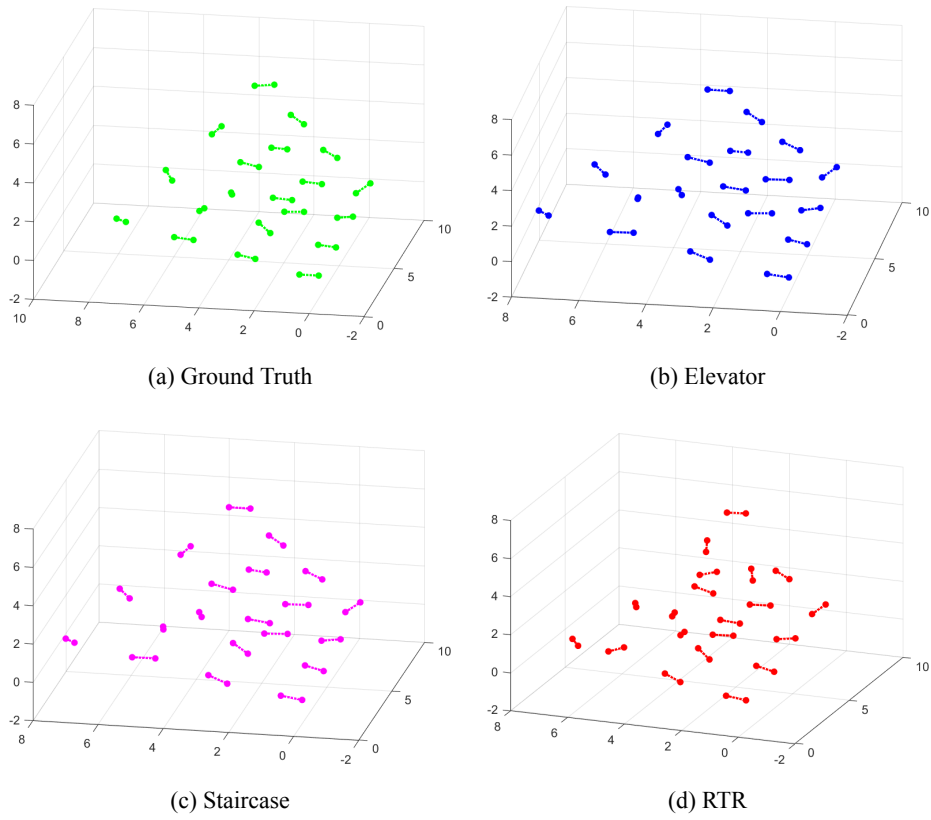
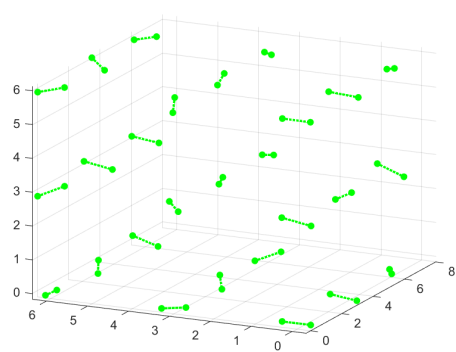
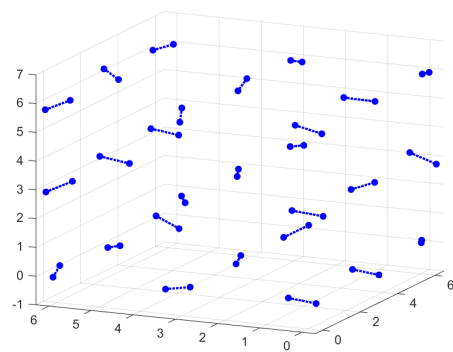


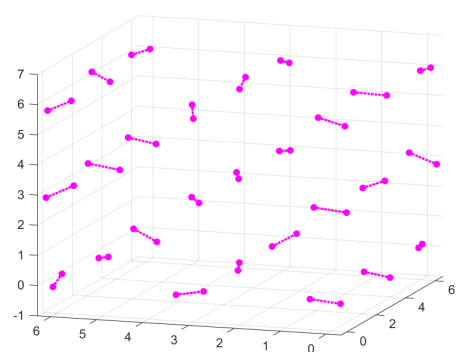
图 A.3 金字塔形-3d



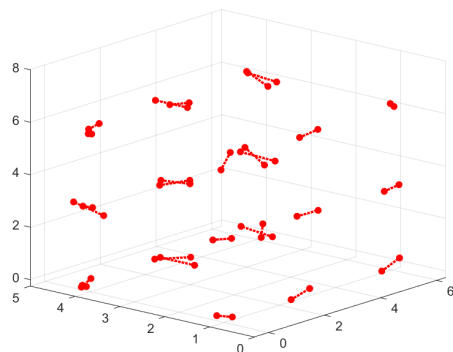
(a) Ground Truth



(b) Elevator



(c) Staircase



(d) RTR

图 A.4 正方体形-3d

## A.2 黎曼信赖域法的成功率

这一部分展示了黎曼信赖域法在 5.3 节中的实验背景下成功率。如果黎曼信赖域法收敛后目标函数值与算法 4.1 或算法 4.2 中提供的最优目标函数值的下界的相对误差在 50% 以内，这次求解视为成功。每一个噪声-队形下，我们重复 100 次。表中，队形后面的括号中，第一个数字表示机器人的数量，第二个数字表示测量的数量。

表 A.1 RTR 法在不同队形下的均方误差与成功率（2 维）

$\sigma$	长方形 (18, 292)		六边形 (37, 600)	
	RMSE	Succes Rate	RMSE	Succes Rate
0.1	1.3483	0.25	2.8823	0
0.2	1.5677	0.32	2.8796	0.01
0.3	1.3577	0.33	2.9906	0

表 A.2 RTR 法在不同队形下的均方误差与成功率（3 维）

$\sigma$	金字塔形 (10, 180)		立方体形 (27, 632)	
	RMSE	Succes Rate	RMSE	Succes Rate
0.1	0.2875	0.41	1.59751	0.01
0.2	0.2442	0.54	1.43709	0.13
0.3	0.3237	0.41	1.48647	0.14

