1

Введение. Понятия и термины оптимизации

- **Оптимизация** (лат. optimus – наилучший) – процесс нахождения наилучшего (из множества возможных альтернатив) решения задачи при заданных требованиях и ограничениях.
- **Множество альтернатив** – множество возможных (допустимых) решений технической задачи.
- **Критерий оптимальности** – количественная оценка свойства объекта (системы), определяющего цель оптимизации.
- **Задача оптимизации** – определение альтернативы, для которой критерий оптимальности дает наибольшую (наименьшую) количественную оценку

2

Постановка задачи оптимизации

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ – вектор параметров оптимизации

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ – множество допустимых решений

$f(\boldsymbol{x})$ – целевая функция

$c(\boldsymbol{x})$ – вектор ограничений, заданный для переменных $\boldsymbol{x}$

Тогда задачу оптимизации запишем следующим образом:

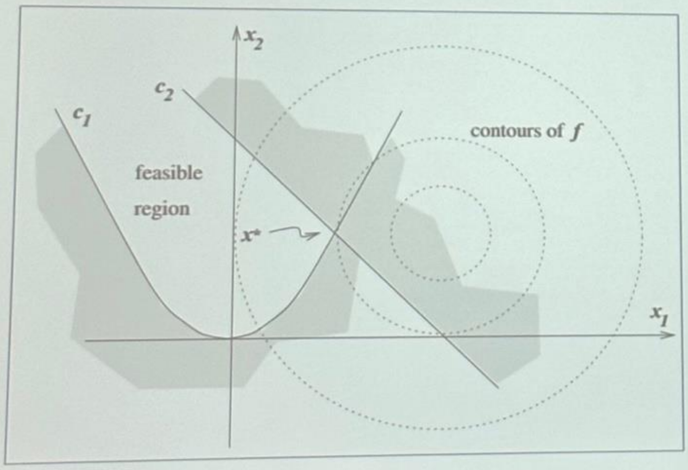
$$\min_{x \in \Omega} f(\boldsymbol{x}), \begin{cases} c_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i \in M \\ c_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ j \in N \end{cases}$$

3

Пример

Постановка задачи оптимизации

*Графическое решение задачи оптимизации для целевой функции f(**x**) в заданных ограничениях c(**x**). На графике изображен контуры окружности – целевой функции, область допустимых решений (feasible region) и оптимальное решение x**



$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \underbrace{(x_1-2)^2+(x_2-1)^2}_{f(\boldsymbol{x})},$$

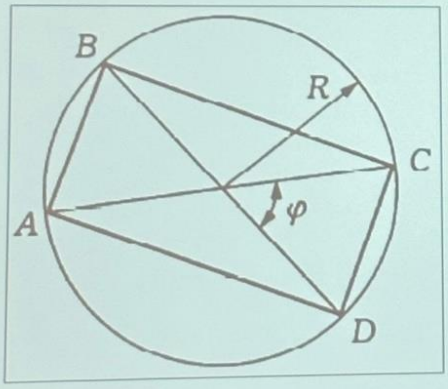
$$\left.\begin{cases} x_1^2 - x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}\right] c_j(\boldsymbol{x}),\ j\in\{1,2\}$$

4

Пример

Постановка задачи оптимизации

Геометрическая задача оптимизации – определение сторон прямоугольника x_1 и x_2, вписанного в окружность заданного радиуса R и имеющего при этом наибольшую площадь S



$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{S(\boldsymbol{x})},$$

$$\left.\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4R^2,\ R - const \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}\right] \begin{matrix} c_i(\boldsymbol{x}), i\in\{1\} \\ c_j(\boldsymbol{x}), j\in\{1,2\} \end{matrix}$$

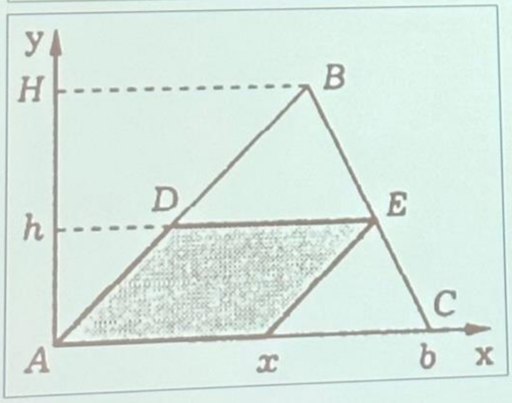
5

Пример

Задача Евклида

Среди всех параллелограммов, вписанных в заданный треугольник ABC с высотой H и основанием b, найти тот, который имеет наибольшую площадь

В качестве параметров оптимизации возьмем длину стороны параллелограмма x, лежащей на прямой AC, и высоту параллелограмма h. Тогда задача оптимизации имеет вид:



$$\max_{h,x\in\mathbb{R}^n} h\cdot x,$$

$$\begin{cases} \dfrac{H-h}{H}=\dfrac{x}{b}, \; H,b-const \\ h\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

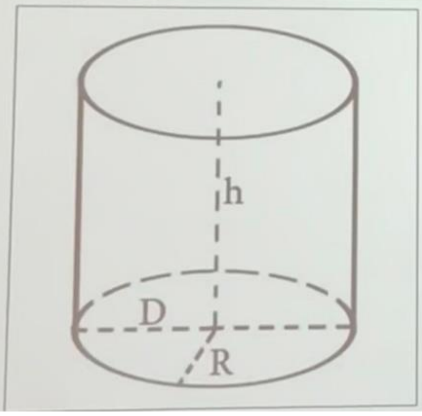
6

Пример

Задача оптимального проектирования

Пусть требуется спроектировать бак горючего в виде прямого кругового цилиндра заданного объема V, на изготовление которого будет затрачено наименьшее количество листовой стали

В качестве параметров оптимизации возьмем радиус R и высоту h цилиндра. Тогда подлежащая оптимизации площадь полной поверхности цилиндра определена как $S=2\pi R(h+R)$, а задача оптимизации имеет вид:



$$\min_{h,x\in\mathbb{R}^n} 2\pi R(h+R),$$

$$\begin{cases} \pi R^2 h = V, \quad V-const \\ R>0 \\ h>0 \end{cases}$$

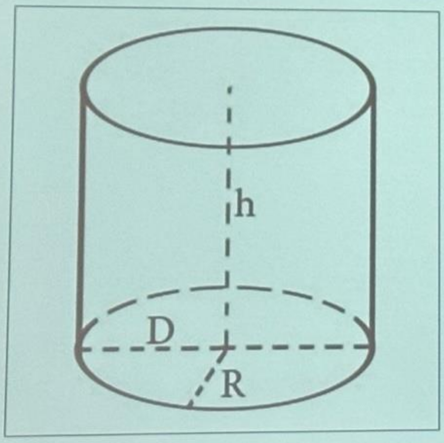
7

Пример

Задача оптимального проектирования

$$\min_{h,x\in\mathbb{R}^n} 2\pi R(h+R),$$
$$\pi R^2 h = V,\ R>0,\ h>0$$

Выразим высоту h через радиус R, чтобы исключить из целевой функции площади S вторую переменную, и найдем минимум целевой функции



1. $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$
2. $S(R) = 2\dfrac{V}{R} + 2\pi R^2$
3. $S'(R_*) = -2\dfrac{V}{R_*^{\,2}} + 2\pi R_* = 0$
4. $R_* = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$
5. $H = \dfrac{V}{\pi R_*^{\,2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = 2R_*$

8

Классы задач оптимизации

$$\min_{x\in\Omega} f(\boldsymbol{x}),\ \begin{cases} c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i\in M \\ c_j(\boldsymbol{x}) \ge 0,\ j\in N \end{cases}$$

- По наличию ограничений: условная (constrained optimization)
  безусловная (unconstrained optimization)
- По виду целевой функции и ограничений: линейная (linear optimization) – линейное программирование
  нелинейная (nonlinear) – нелинейное программирование
  выпуклая (convex optimization)
- По типу параметров оптимизации: непрерывная (continuous optimization)
  дискретная (discrete) – целочисленное программирование

9

Классы задач оптимизации

$$\min_{x\in\Omega} f(\boldsymbol{x}), \begin{cases} c_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i \in M \\ c_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ j \in N \end{cases}$$

- **По виду искомого решения:** глобальная (global optimization)
  локальная (local optimization)

- **По типу исследуемой модели:** детерминированная (stochastic optimization)
  стохастическая (deterministic optimization)

10

Понятие выпуклости множества и функции

Множество $S \in \mathbb{R}^n$ *является выпуклым, если все точки отрезка, образуемого любыми двумя точками данного множества, также принадлежат множеству:*

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in S \quad при \, \forall x, y \in S, \, \alpha \in [0,1]$$

Функция $f(x)$ *является выпуклой, если область её определения* $S \in \mathbb{R}^n$ *– выпуклое множество, и для двух любых различных точек* $(x, f(x))$ *и* $(y, f(y))$ *из области определения график функции лежит ниже прямой, соединяющей эти точки:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \; при \, \forall x, y \in S, \, \alpha \in [0,1]$$

Выпуклость целевой функции гарантирует схождение алгоритмов оптимизации на глобальном минимуме.

Минимизация выпуклых функций – задача выпуклого программирования, распространенная в оценке и обработке сигналов, разработке автоматических систем управления, в финансах и статистике.

Пример

Выпуклая функция

Выпуклая функция $f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 6)^2 + 0.04(x_2 - 4.5)^4$