МГТУ имени Н.Э. Баумана
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы оптимизации

Методы доверительной области

Завьялов Роман Александрович
zavialov@bmstu.ru

2023 г.

Методы доверительной области

Теоретические основы

В рамках стратегии доверительной области информация, известная о целевой функции $f(x)$, используется для её аппроксимации с помощью некоторой функции $m_k(x)$, поведение которой рядом с точкой x_k схоже (совпадает) с целевой функцией. После аппроксимации, поиск минимума ведут уже для функции $m_k(x)$:

$$\min_p m_k(x_k + p),$$

Где $m_k(x)$, как правило, находят в виде:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p$$

где $f_k, \nabla f_k$ – значения целевой функции и градиента целевой функции в точке x_k соответственно, B_k – гессиан (или некоторое приближение гессиана) целевой функции в точке x_k .

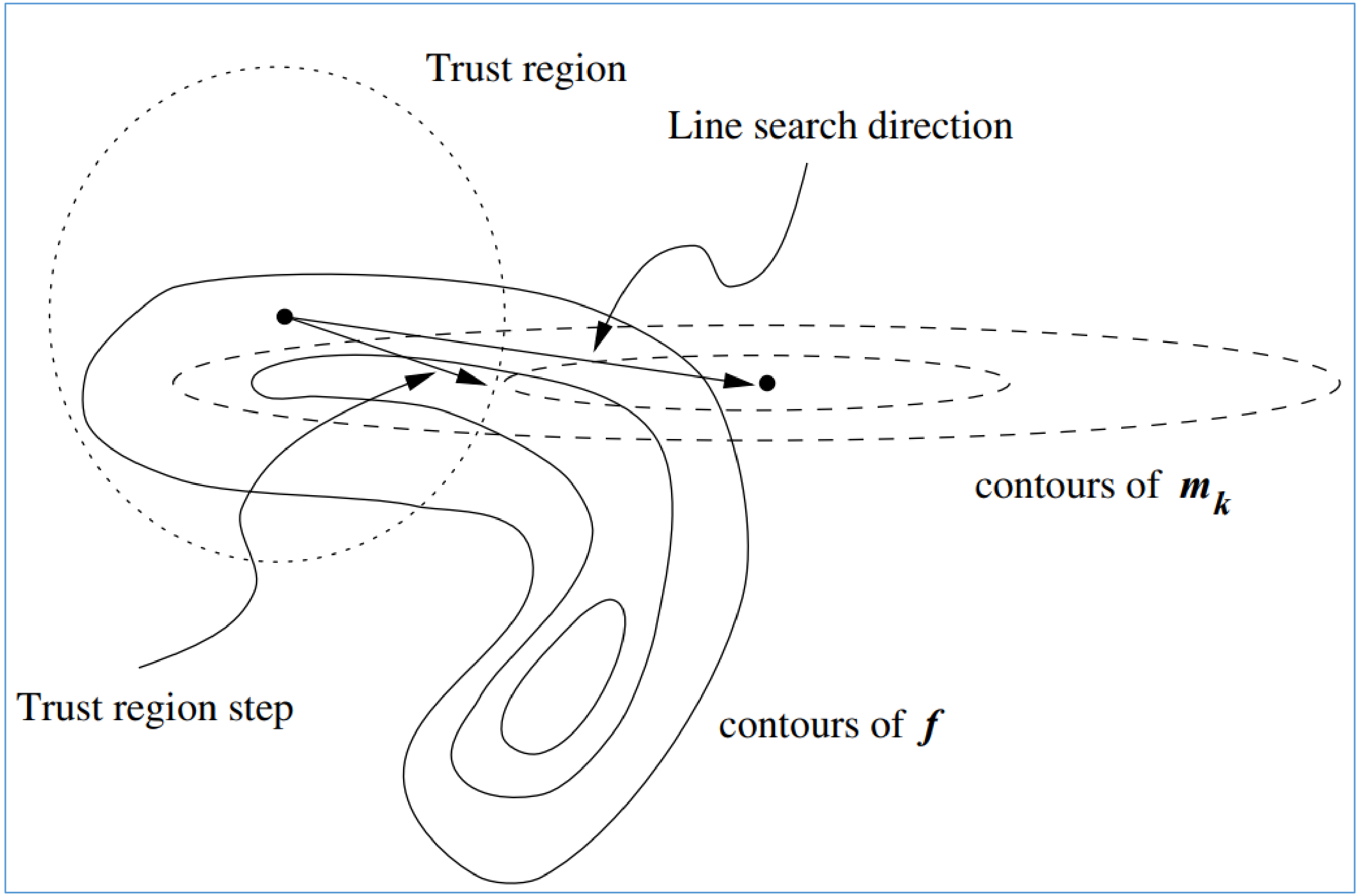
Однако функция $m_k(x)$ аппроксимирует целевую функцию достаточно точно лишь в некоторой окрестности точки x_k. По этой причине поиск минимума аппроксимированной функции ведут в некоторой доверительной области точки x_k. Как правило, доверительную область определяю как $\|p\|_2 \le \Delta$, где $\Delta > 0$ – радиус доверительной области.

Методы доверительной области и методы линейного поиска

Сходство и различие. Пример

Итерация метода линейного поиска предполагает нахождение направления и длины шага квадратичной аппроксимации $m_k(x)$ целевой функции $f(x)$. При этом, минимум аппроксимирующей функции далек от действительного минимума целевой функции, и итерация не приводит к существенному прогрессу.

Итерация метода доверительной области приводит к минимуму квадратичной аппроксимации целевой функции в пределах области, ограниченной окружностью радиуса Δ_k (обозначена мелким штрихом). В данном случае приближение к минимуму, найденное за итерацию, обеспечивает больший прогресс.



Методы доверительной области и методы линейного поиска

Сходство и различие

И методы линейного поиска, и методы доверительной области используют аппроксимацию целевой функции квадратичной моделью. Однако цели применения модели различны:

- Методы линейного поиска используют аппроксимацию целевой функции для поиска направления оптимизации. После выбора направления следует поиск длины шага оптимизации.
- Методы доверительной области, напротив, предполагают использование аппроксимации исключительно в ограниченной области вокруг текущего положения (начальной точки итерации), в пределах которой квадратичная модель адекватна целевой функции. Направление и длина шага оптимизации определяют единовременно. Радиус доверительной области обновляют каждую итерацию.

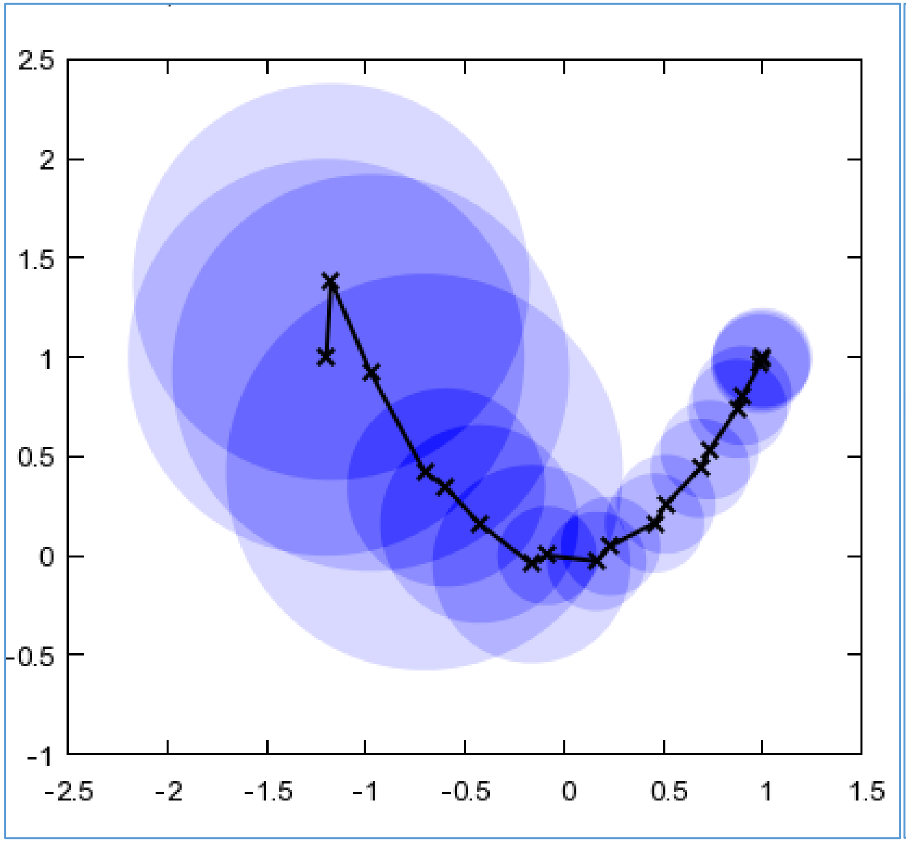
Успешность и эффективность поиска методом доверительной области зависит от выбора радиуса доверительной области. При выборе важно найти баланс:

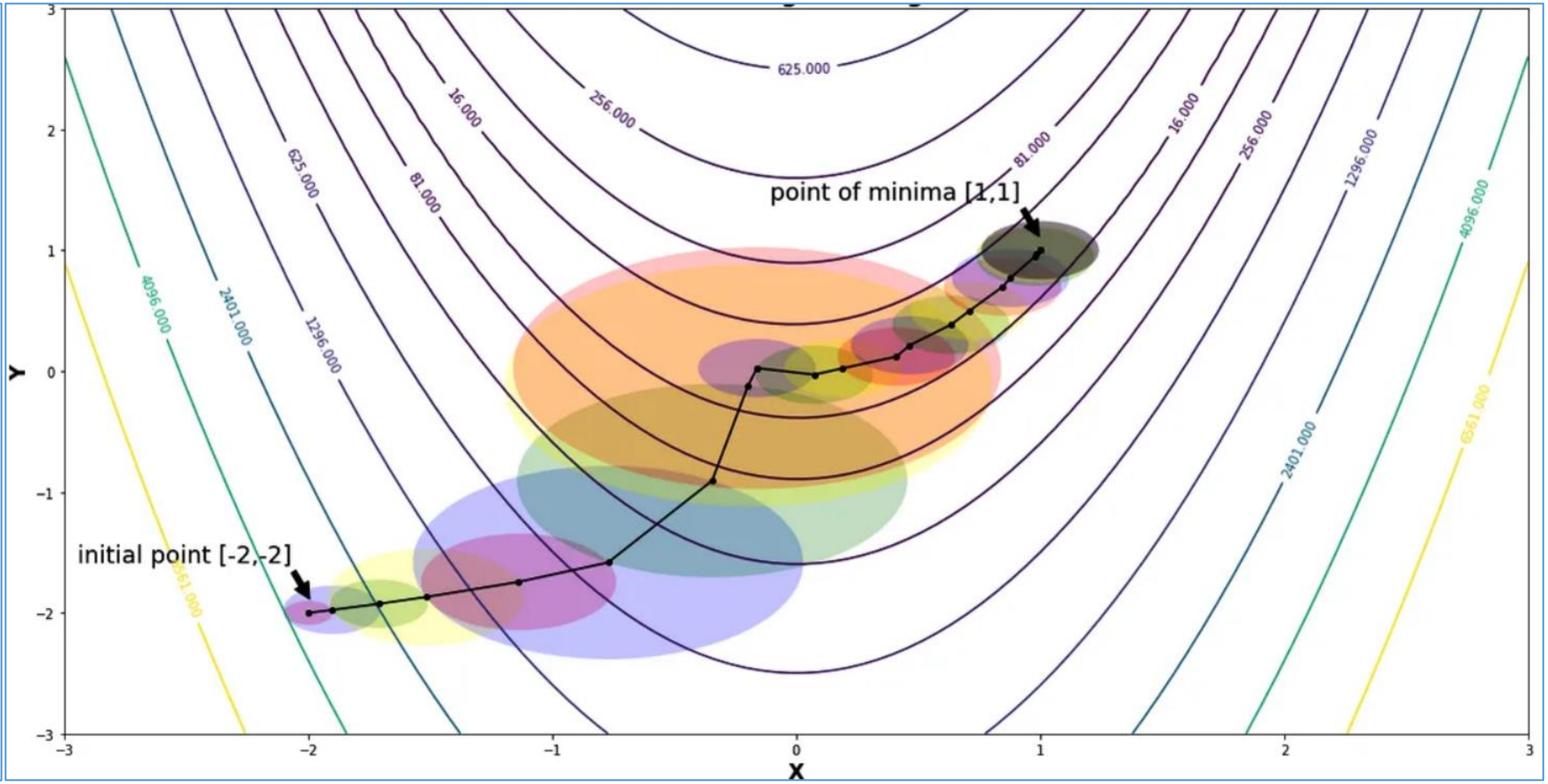
- если доверительная область велика, минимум аппроксимирующей функции может оказаться далеко от действительного минимума целевой функции в области;
- если доверительная область мала, итерация не приведёт к существенному приближению к минимуму целевой функции.

Методы доверительной области

Особенности выбора доверительной области

Выбор доверительной области на текущей итерации опирается на результат выполнения предыдущей. Если квадратичная аппроксимация достаточно точно соответствует целевой функции и позволяет совершать эффективные шаги оптимизации, границы доверительной области расширяют. Если, напротив, предпринятый шаг был неэффективным, границы доверительной области сужают.

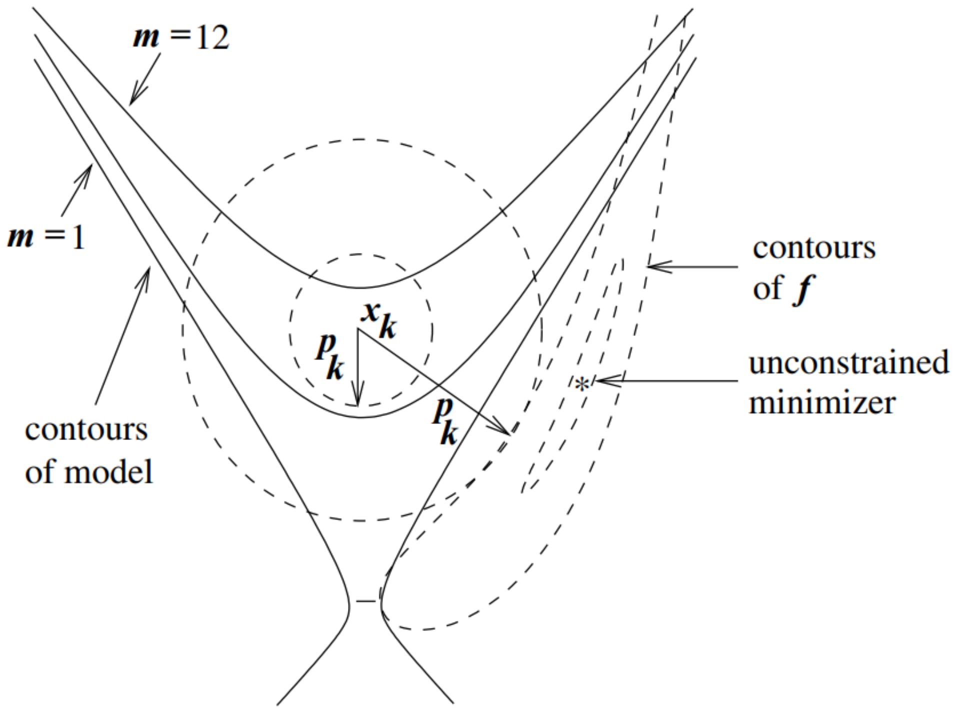




Алгоритм оптимизации методами Доверительной области

Trust Region Algorithm

Идея подхода: *находим приближение к минимуму целевой функции, учитывая изменение (уменьшение) значения как целевой функции* $f(x)$, *так её аппроксимации* $m^i(x)$.



Подготовительный этап:

Зададим начальное приближение x^0 *и точность расчета* ε: $|\nabla f(x^i)| < \varepsilon$. *Определим значение градиента* $\nabla f(x^0)$ и гессиана $H(x^0)$ целевой функции в точке x^0. *Зададим начальный* Δ^0 *и максимальный* $\bar{\Delta}$ *радиус доверительной области, а также константу* $\eta \in [0; 0.25)$.

Шаг 1:

Определим первый шаг p^i *с помощью метода Dogleg или точки Коши.*

Вычислим коэффициент ρ^i:

$$\rho^i = \frac{f(x^i) - f(x^i + p^i)}{m^i(0) - m^i(p^i)}$$

Определим радиус доверительной области Δ^{i+1} *для следующей итерации:*

если $\rho^i < \frac{1}{4}$, *то* $\Delta^{i+1} = \frac{1}{4}|p^i|$

иначе:

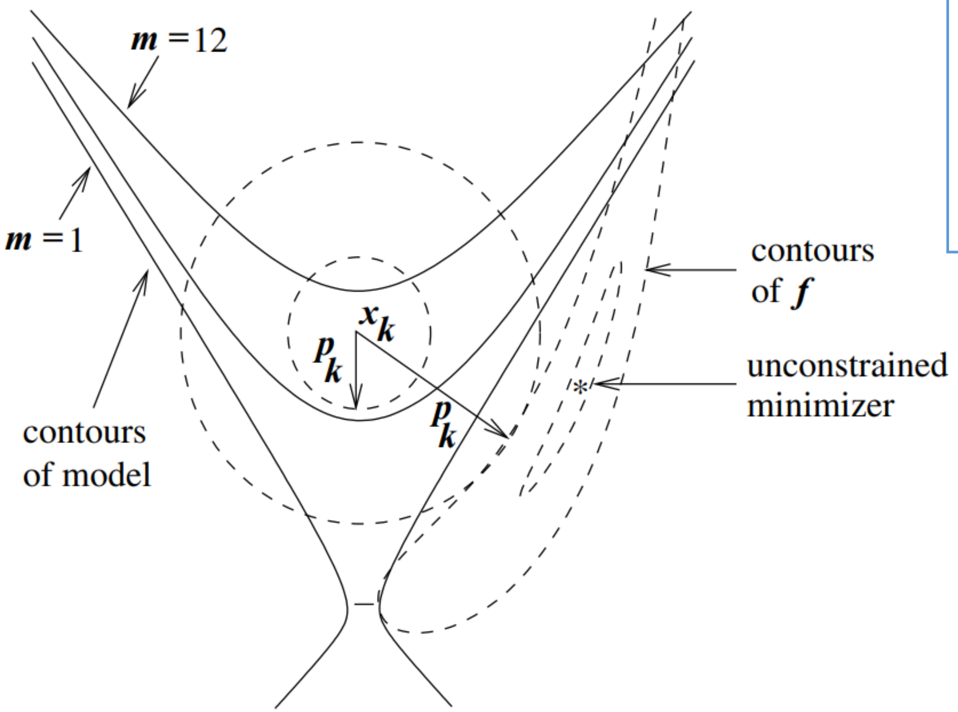
если $\rho^i > \frac{3}{4}$ *и* $|p^i| = \Delta^i$, *то* $\Delta^{i+1} = \min(2\Delta^i, \bar{\Delta})$

иначе $\Delta^{i+1} = \Delta^i$

Алгоритм оптимизации методами Доверительной области

Trust Region Algorithm

Идея подхода: *находим приближение к минимуму целевой функции, учитывая изменение (уменьшение) значения как целевой функции* $f(x)$*, так её аппроксимации* $m^i(x)$*.*



Шаг 1 (продолжение)

Определим приближение к точке минимума x^{i+1}*:*

если $\rho^i > \eta$*, то*

$$x^{i+1} = x^i + p^i$$

иначе:

$$x^{i+1} = x^i$$

Шаг 2:

Проверим выполнение условия останова:

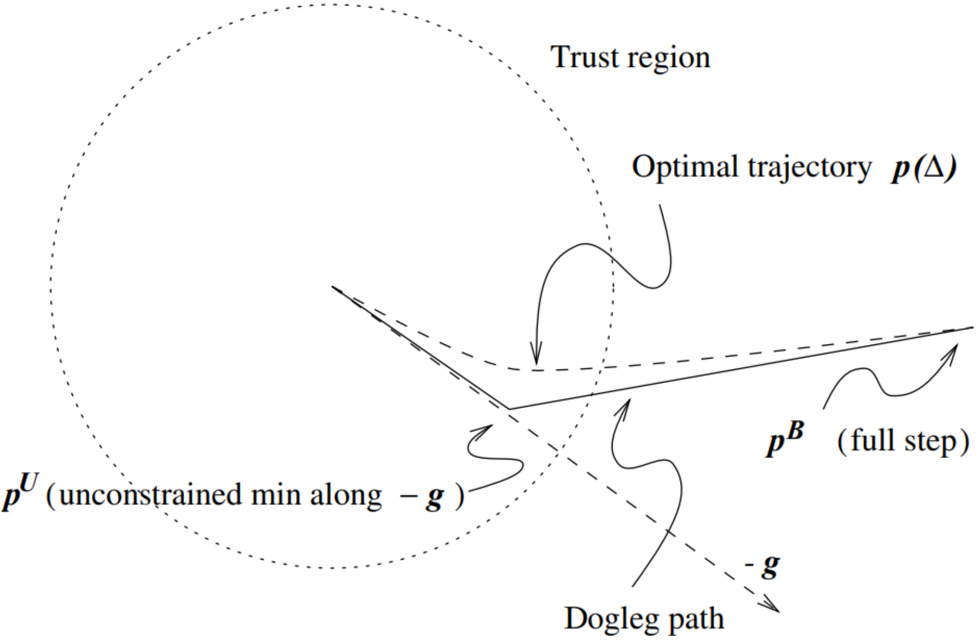
Если $\left|\nabla f\left(x^{i+1}\right)\right| \geq \varepsilon$*, то* $i = i + 1$ *и возвращаемся к шагу 1.*

Иначе – завершаем поиск со значением $x^* = x^{i+1}$*.*

Метод Dogleg

Dogleg Method

Идея подхода: *находим шаг оптимизации как совокупность двух прямых, аппроксимирующих оптимальную траекторию.*



Подготовительный этап:

Зададим начальное приближение x^0 *и начальный радиус доверительной области* Δ^0 *. Определим значение градиента* $g = \nabla f(x^0)$ и гессиана $H(x^0)$ целевой функции в точке x^0.

Шаг 1:

Определим шаг p^U:

$$p^U = -\frac{g^T g}{g^T H g} g$$

Определим шаг p^B:

$$p^B = -H(x^i)^{-1} g$$

Определим значение ρ^i*, решив уравнение:*

$$\left|\left(p^U\right)^2 + (\tau - 1)\left(p^B - p^U\right)\right| = \Delta_k^2$$

Определим итоговый шаг оптимизации:

$$p(\tau) = \begin{cases} \tau p^U & 0 \le \tau \le 1 \\ p^U + (\tau - 1)\left(p^B - p^U\right), & 1 \le \tau \le 2 \end{cases}$$

Шаг 2

Со значением $p = p(\tau)$ *возвращаемся к алгоритму Trust Region.*