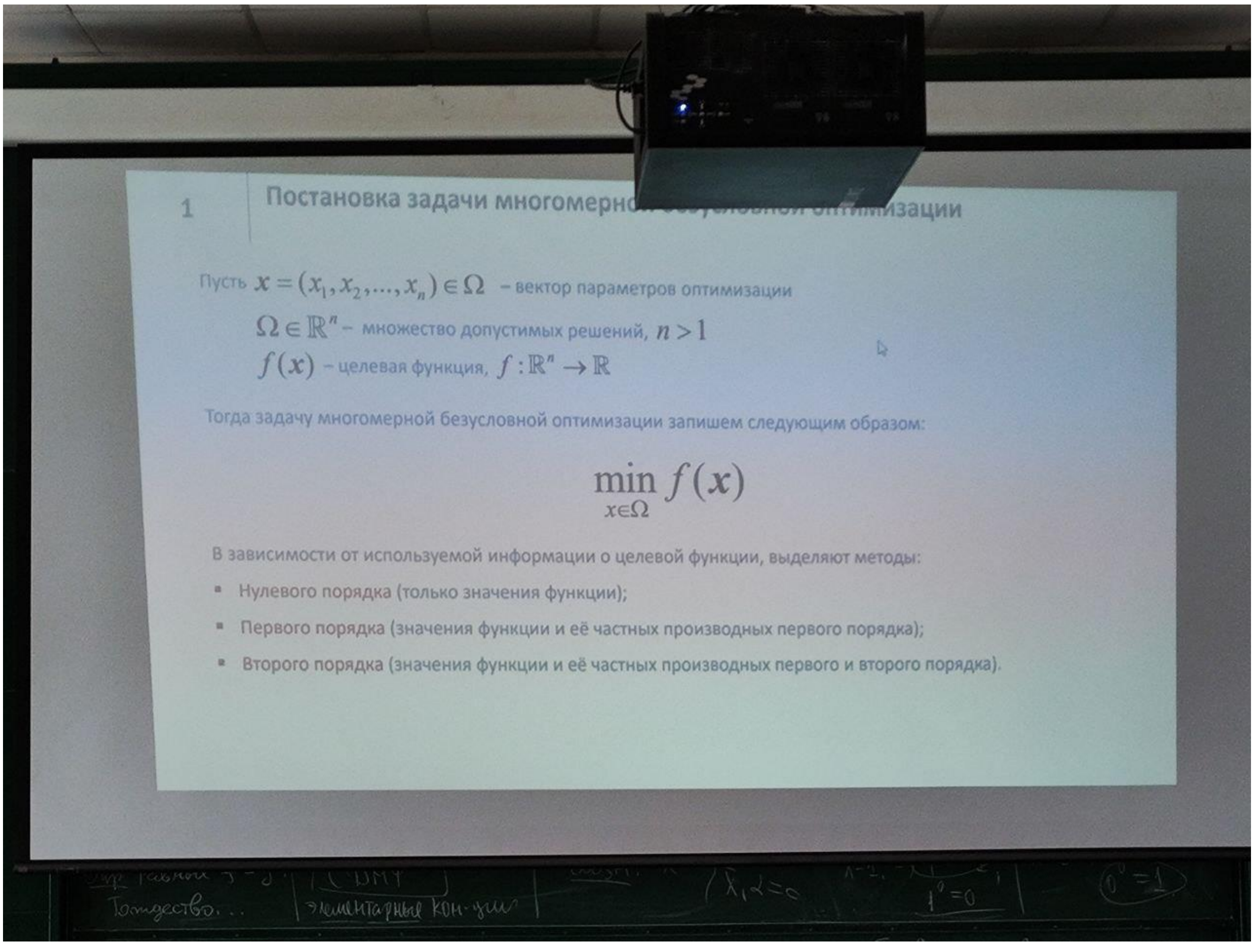
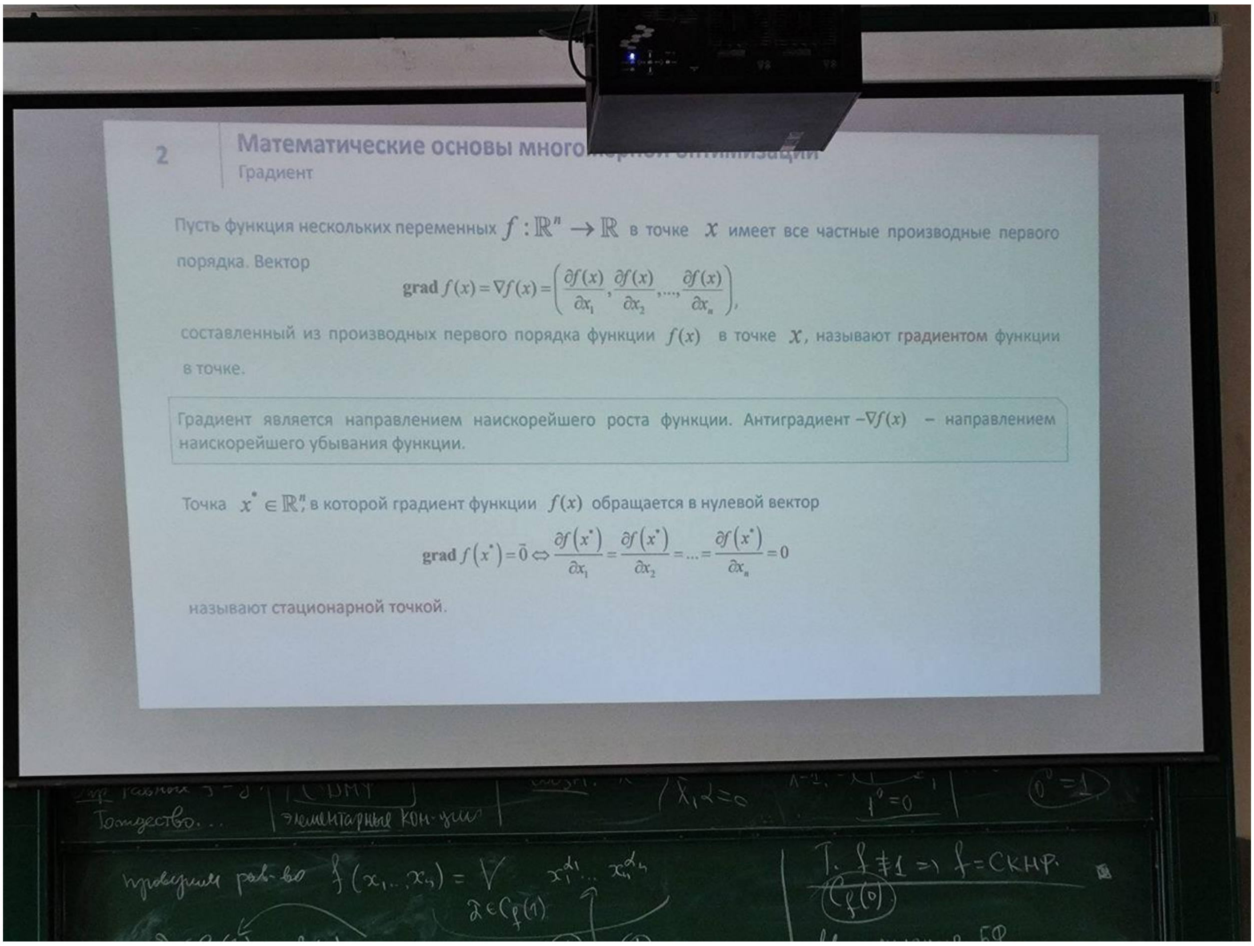
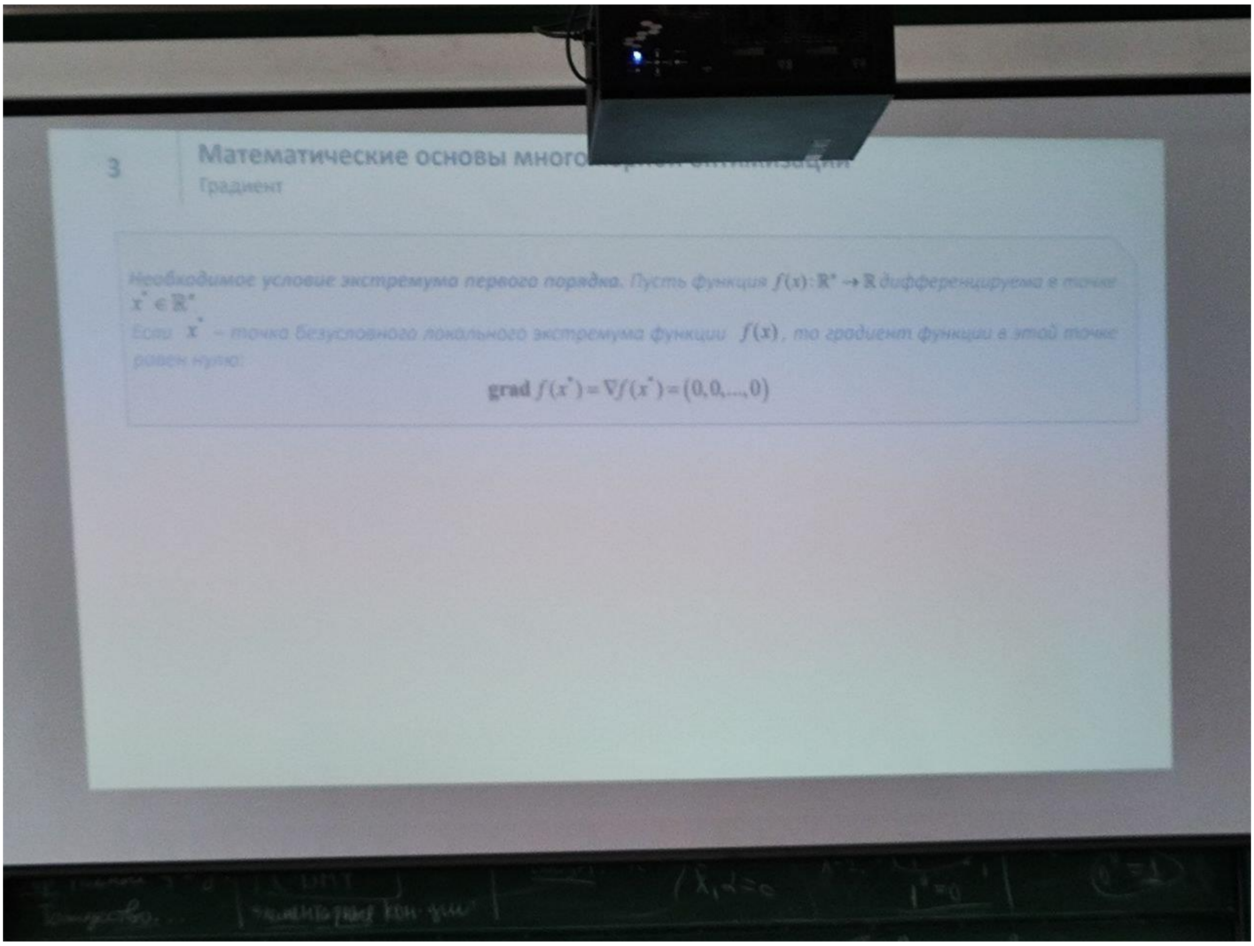
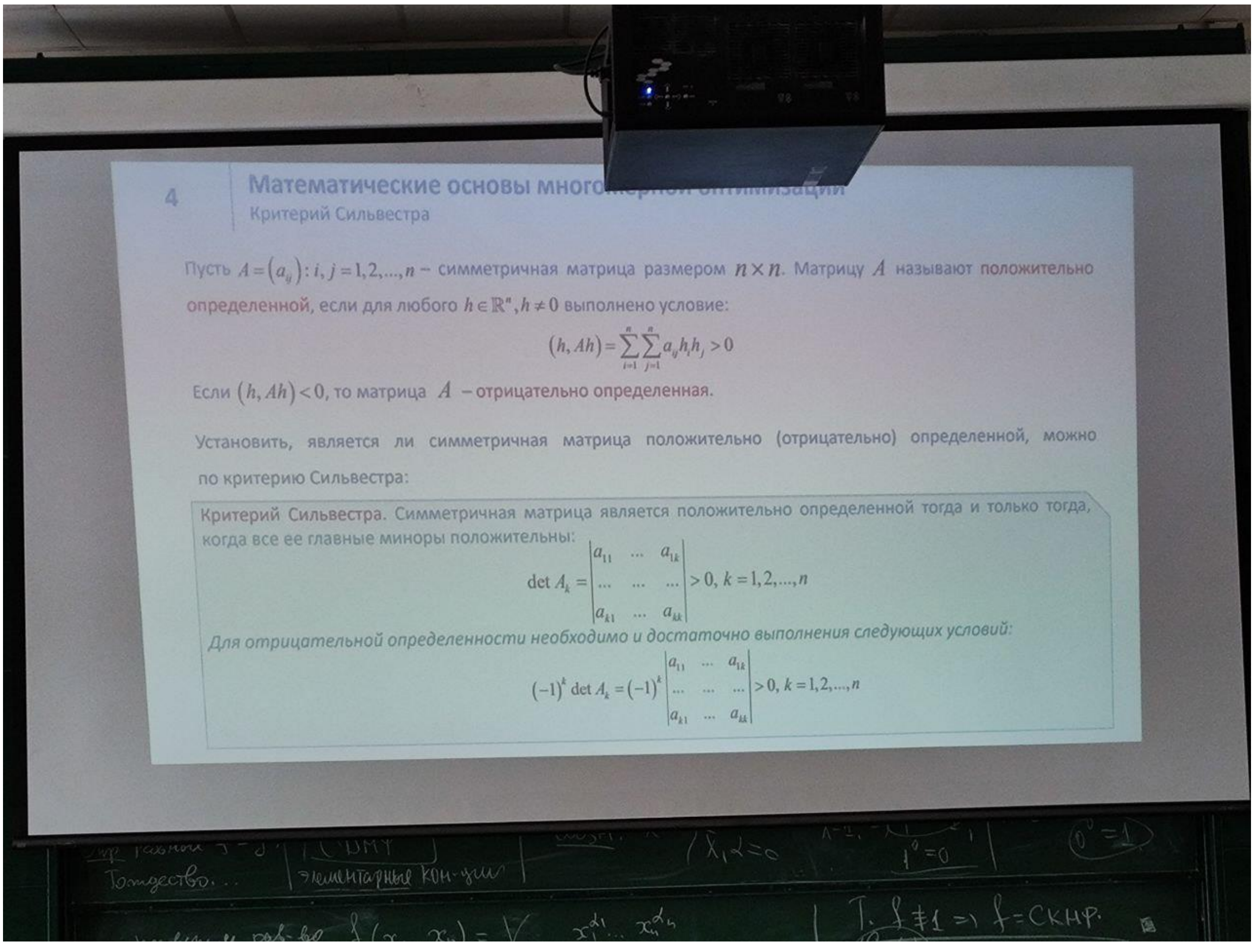


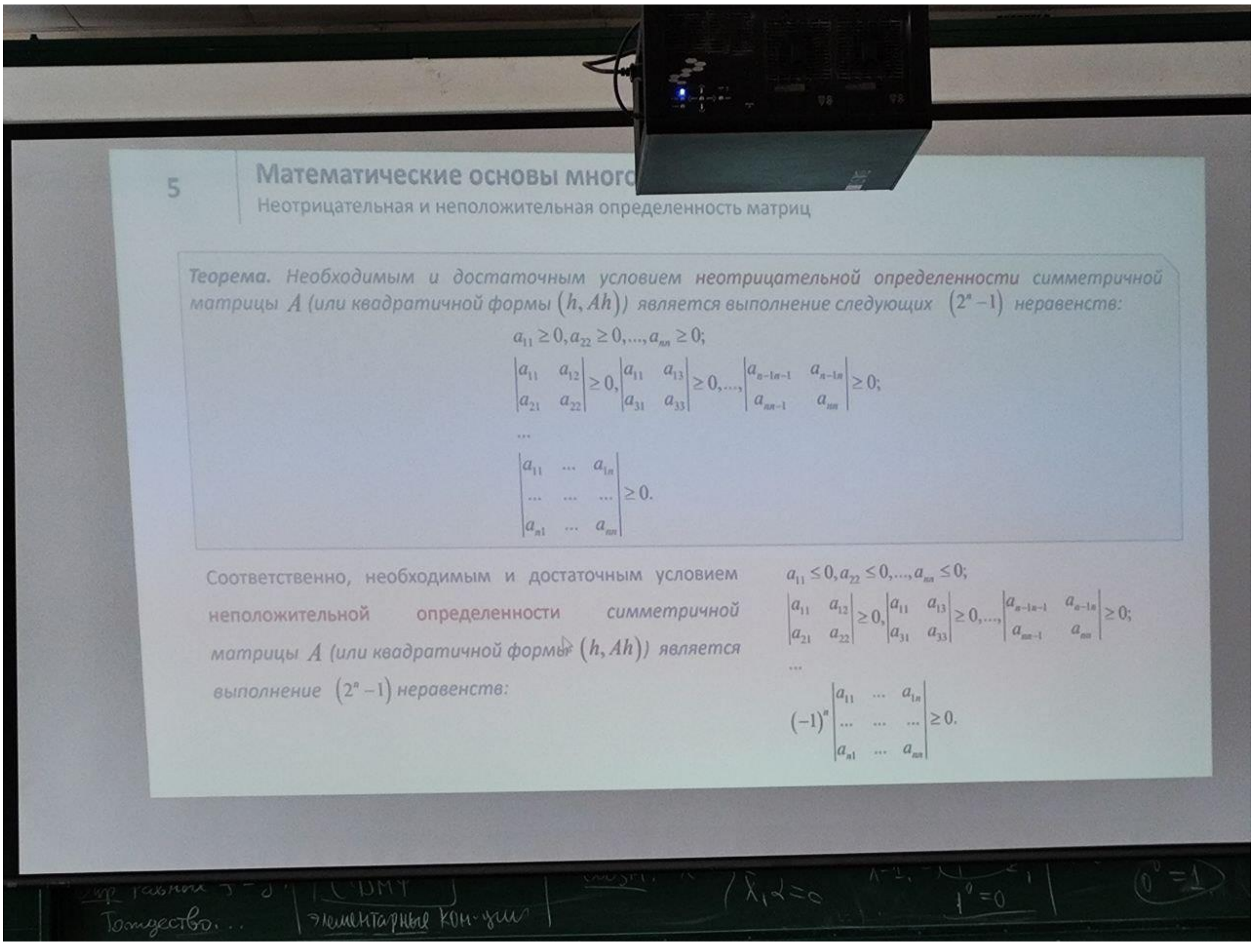
1
Постановка задачи многомерн
изации
Пусть $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega$ – вектор параметров оптимизации
$\Omega\in\mathbb{R}^n$ – множество допустимых решений, $n>1$
$f(x)$ – целевая функция, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
Тогда задачу многомерной безусловной оптимизации запишем следующим образом:
$\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$
В зависимости от используемой информации о целевой функции, выделяют методы:
Нулевого порядка (только значения функции);
Первого порядка (значения функции и её частных производных первого порядка);
Второго порядка (значения функции и её частных производных первого и второго порядка).

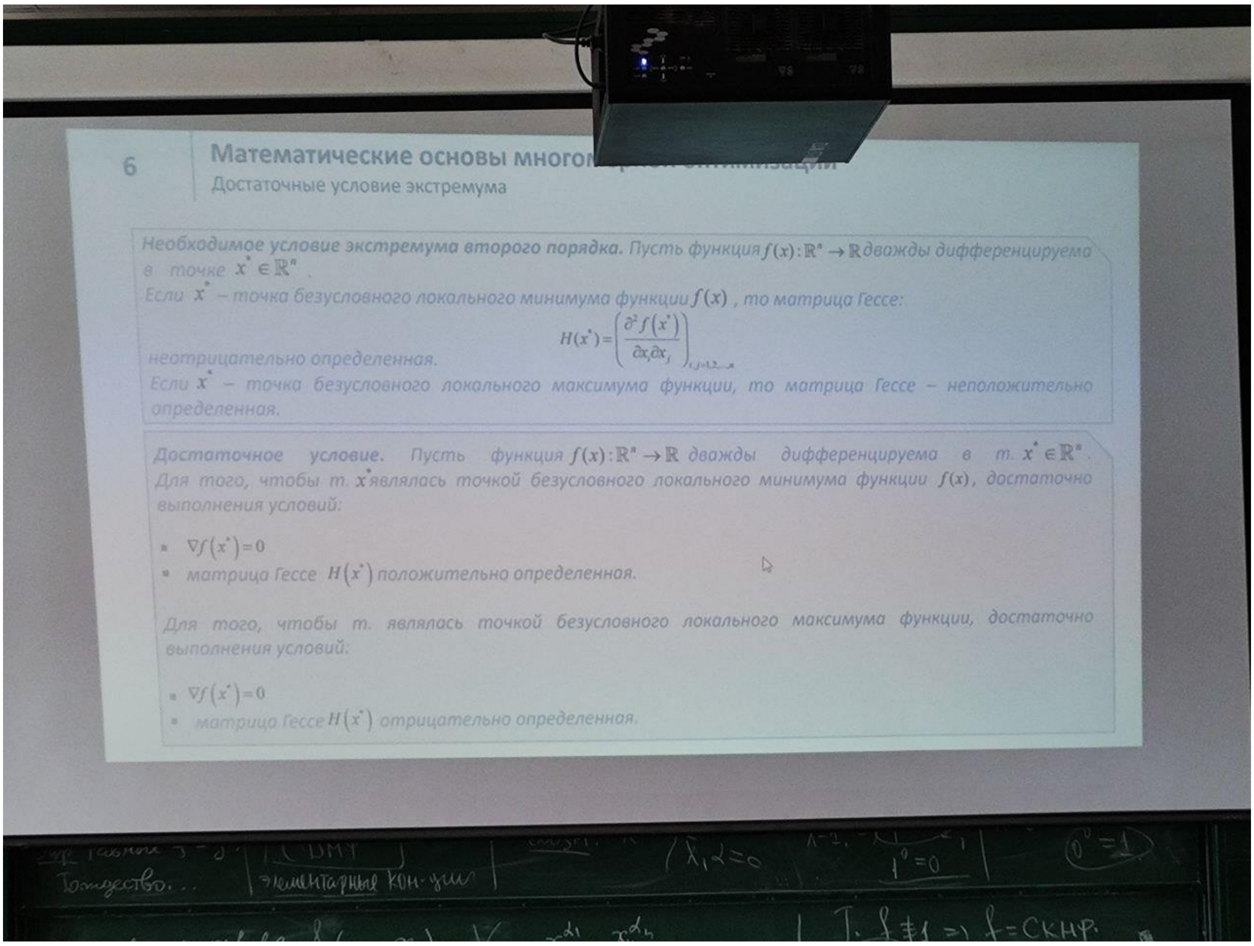


2
Математические основы много
Градиент
Пусть функция нескольких переменных $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в точке x имеет все частные производные первого порядка. Вектор
$\mathbf{grad}\, f(x)=\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right),$
составленный из производных первого порядка функции $f(x)$ в точке x, называют градиентом функции в точке.
Градиент является направлением наискорейшего роста функции. Антиградиент $-\nabla f(x)$ – направлением наискорейшего убывания функции.
Точка $x^*\in\mathbb{R}^n$, в которой градиент функции $f(x)$ обращается в нулевой вектор
$\mathbf{grad}\, f(x^*)=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}=\dots=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}=0$
называют стационарной точкой.


3
Математические основы много
Градиент
Необходимое условие экстремума первого порядка. Пусть функция $f(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Если x^* – точка безусловного локального экстремума функции $f(x)$, то градиент функции в этой точке равен нулю:
$\mathbf{grad}\, f(x^*) = \nabla f(x^*) = (0,0,\ldots,0)$


4
Математические основы много
Критерий Сильвестра
Пусть $A=(a_{ij}): i,j=1,2,\ldots,n$ – симметричная матрица размером $n\times n$. Матрицу A называют положительно определенной, если для любого $h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0$ выполнено условие:
$(h, Ah)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_i h_j > 0$
Если $(h, Ah)<0$, то матрица A – отрицательно определенная.
Установить, является ли симметричная матрица положительно (отрицательно) определенной, можно по критерию Сильвестра:
Критерий Сильвестра. Симметричная матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:
$\det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ k=1,2,\ldots,n$
Для отрицательной определенности необходимо и достаточно выполнения следующих условий:
$(-1)^k \det A_k = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ k=1,2,\ldots,n$


5
Математические основы много
Неотрицательная и неположительная определенность матриц
Теорема. Необходимым и достаточным условием неотрицательной определенности симметричной матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) является выполнение следующих $(2^n - 1)$ неравенств:
$a_{11} \ge 0, a_{22} \ge 0, \dots, a_{nn} \ge 0;$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ge 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \ge 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \ge 0;$
...
$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \ge 0.$
Соответственно, необходимым и достаточным условием неположительной определенности симметричной матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) является выполнение $(2^n - 1)$ неравенств:
$a_{11} \le 0, a_{22} \le 0, \dots, a_{nn} \le 0;$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ge 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \ge 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \ge 0;$
...
$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \ge 0.$
Тождество...
элементарные кон-ции
$0^0=1$


6
Математические основы много
Достаточные условие экстремума
Необходимое условие экстремума второго порядка. Пусть функция $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Если x^* – точка безусловного локального минимума функции $f(x)$, то матрица Гессе:
$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$
неотрицательно определенная.
Если x^* – точка безусловного локального максимума функции, то матрица Гессе – неположительно определенная.
Достаточное условие. Пусть функция $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в т. $x^* \in \mathbb{R}^n$. Для того, чтобы т. x^* являлась точкой безусловного локального минимума функции $f(x)$, достаточно выполнения условий:
$\nabla f(x^*) = 0$
матрица Гессе $H(x^*)$ положительно определенная.
Для того, чтобы т. являлась точкой безусловного локального максимума функции, достаточно выполнения условий:
$\nabla f(x^*) = 0$
матрица Гессе $H(x^*)$ отрицательно определенная.
Тождество...
элементарные кон-ции
$0^0=1$

7

Математические основы многомерной оптимизации

Необходимое и достаточное условие экстремума второго порядка

Пусть x^* *– стационарная точка функции* $f(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *причем функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *и все её вторые частые производные непрерывны в точке* x^*. *Тогда:*

- *если второй дифференциал* $d^2 f\left(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right) > 0$ *для* $\forall \Delta x_i$ *из окрестности точки* x^*, *то точка* x^* *– точка безусловного локального минимума функции* $f(x)$;
- *если второй дифференциал* $d^2 f\left(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right) < 0$ *для* $\forall \Delta x_i$ *из окрестности точки* x^*, *то точка* x^* *– точка безусловного локального максимума функции* $f(x)$;
- *если второй дифференциал* $d^2 f\left(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right)$ *– знакопеременная функция* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, *то есть принимает как положительные, так и отрицательные значения, то т.* x^* *не является точкой экстремума функции;*
- *если* $d^2 f\left(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right) \geq 0$ *или* $d^2 f\left(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\right) \leq 0$, *причем существуют такие наборы значений* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, *не равных одновременно нулю, для которых значение второго дифференциала обращается в нуль, то функция* $f(x)$ *в т.* x^* *может иметь экстремум, но может и не иметь. В этом случае требуется дополнительное исследование.*

8

Математические основы многомерной оптимизации

Алгоритм поиска безусловного экстремума

Рассмотрим алгоритм поиска безусловного экстремума функции нескольких переменных:

1. *Найти точки возможного экстремума функции* $f(x)$ *(критические):*
   - *точки, в которых* $\nabla f(x) = 0$ *– стационарные точки функции* $f(x)$;
   - *точки, в которых частные производные* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *не существуют.*
2. *Проверить выполнение достаточных условий экстремума.*
3. *Вычислить* $f_{extr}(x)$.

9 **Алгоритм поиска безусловного**

Пример

Задание: исследовать на экстремум функцию $f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2+\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}+x_1x_2+1$.

Решение.

1) Определим градиент и матрицу Гессе функции $f(x)$:

$$\nabla f(x)=\nabla f(x_1,x_2)=\left(2x_1x_2^2+x_1+x_2,2x_1^2x_2+x_1+x_2\right)$$

$$H(x)=H(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_2^2+1 & 4x_1x_2+1\\ 4x_1x_2+1 & 2x_1^2+1\end{pmatrix}$$

Найдем стационарные точки функции , в которых может быть экстремум:

$$\nabla f(x^*)=0\Rightarrow\begin{cases}2x_1x_2^2+x_1+x_2=0\\ 2x_1^2x_2+x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=0$$

Притом нет точек, в которых частные производные не существуют. Таким образом, функция имеет одну критическую точку $x^*=(0,0)$.

10 **Алгоритм поиска безусловного**

Пример

Задание: исследовать на экстремум функцию $f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2+\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}+x_1x_2+1$.

2) Матрица Гессе в критической точке $x^*=(0,0)$ имеет вид:

$$H(x^*)=H(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Определим главные миноры первого и второго порядка матрицы:

$$\det H_1(x^*)=1>0;$$

$$\det H_2(x^*)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

Следовательно, матрица неотрцательно определенная, требуется дополнительное исследование $f(x)$.

11

Алгоритм поиска безусловного экстремума

Пример

Задание: *исследовать на экстремум функцию* $f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2+\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}+x_1x_2+1$.

3) Исследуем значения функции $f(x)$:

$$f(x)=f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2+\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}+x_1x_2+1=(x_1x_2)^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+1,$$

то есть $f(x_1,x_2)>1$ *при* $x_1\neq 0, x_2\neq 0$.

Тогда $f(x_1,x_2)>f(0,0)$ $\forall x\neq(0,0)$ *и, следовательно, в точке* $x^*=(0,0)$ *функция имеет локальный минимум и принимает значение* $f_{\min}(0,0)=1$.