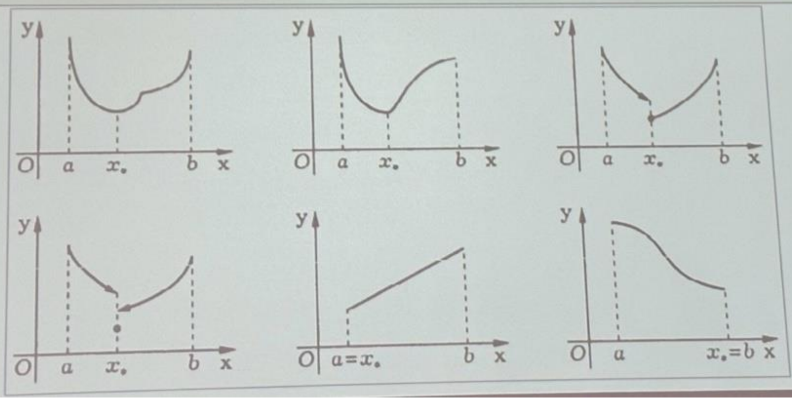
1

Унимодальные функции

Рассмотрим методы линейного поиска на примере задач одномерной минимизации

В задачах одномерной оптимизации выделен важный класс унимодальных функций, которые на отрезке достигают минимального значения, и притом в единственной точке. Функцию $f(x)$ называют ***унимодальной*** *на отрезке $[a,b]$, если существует такая точка x^*, что функция на отрезке $[a,x^*]$ убывает, а на отрезке $[x^*,b]$ возрастает.*
Унимодальная функция может иметь счетное множество точек разрыва первого рода.



2

Унимодальные функции

Критерии унимодальности

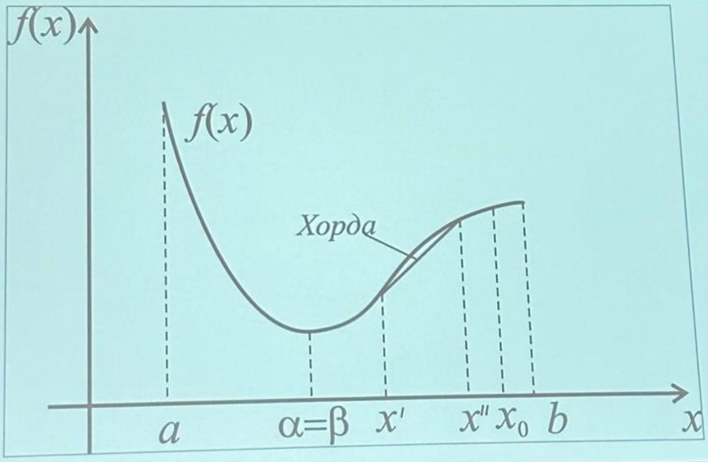
Рассмотрим критерии унимодальности функции на отрезке

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x)$ унимодальная на $[a,b]$.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$, то $f(x)$ унимодальная на $[a,b]$.*

3 **Унимодальные функции**

Важно отметить связь между выпуклостью и унимодальностью функций. Всякая выпуклая непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ является и унимодальной на этом отрезке. Обратное – в общем случае – неверно, например:



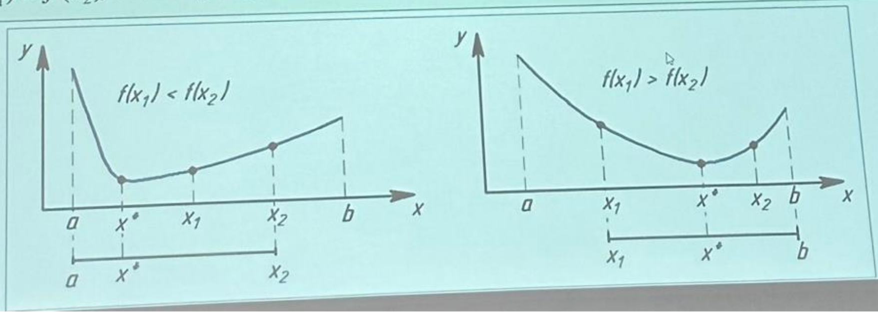
4 **Методы последовательного поиска**

Методы последовательного поиска опираются только на значения целевой функции и не требуют информации о её производных.

Методы последовательного поиска предполагают построение последовательности точек, сходящихся к искомой точке минимума целевой функции. Но в рамках задач одномерной оптимизации применяют более эффективный подход с построением последовательности вложенных отрезков (интервалов неопределенности), каждый из которых содержит точку минимума целевой функции.

Основой построения последовательности вложенных отрезков является следующая теорема:

Пусть функция $f(x)$, унимодальная на отрезке $[a,b]$, достигает минимума в точке $x^* \in [a,b]$, а точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, причем $x_1 < x_2$.
Тогда если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$, а если $f(x_1) \ge f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$.

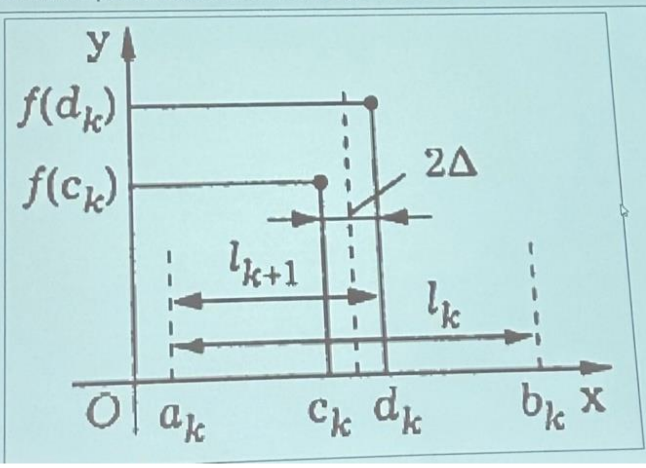


5

Метод дихотомии

Располагаем внутренние точки отрезка $[a,b]$ так, чтобы они были максимально близки к его середине.

Задание: *пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.*

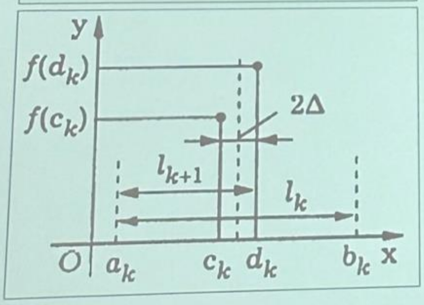


6

Метод дихотомии

Алгоритм

Задание: *пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.*



Подготовительный этап:

Зададим $\Delta \in (0, 2\varepsilon)$, $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Шаг 1:

Определим внутренние точки c_0, d_0:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0 - \Delta}{2}, \quad d_0 = \frac{a_0 + b_0 + \Delta}{2}$$

Вычислим $f(c_0), f(d_0)$.

Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$. Для этого сравним значения целевой функции во внутренних точках $f(c_0)$ и $f(d_0)$:

Если $f(c_0) \le f(d_0)$, то $a_1 = a_0$, $b_1 = d_0$

Если $f(c_0) \ge f(d_0)$, то $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

Шаг 2:

Сравним длину получившегося отрезка с погрешностью поиска:

$$|b_1 - a_1| \le \varepsilon$$

Шаг 3:

Определим точку минимума целевой функции:

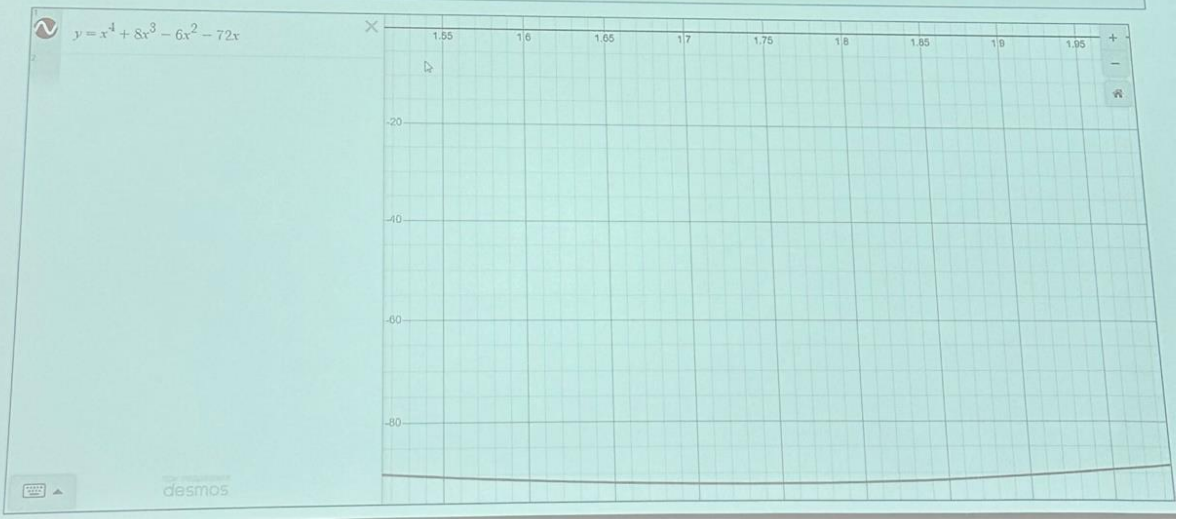
$$x^* = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

7

Метод дихотомии

Пример

Задание: *с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *на отрезке* $[1.5,2]$. *Погрешность поиска точки минимума* $\varepsilon=0.05$.



8

Метод дихотомии

Пример

Задание: *с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *на отрезке* $[1.5,2]$. *Погрешность поиска точки минимума* $\varepsilon=0.05$.

1) Проверим, является ли целевая функция унимодальной на заданном отрезке $[1.5,2]$:

$$f''(x)=12x^2+48x-12$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2+48x-12=0$$

$$\begin{matrix} x_1=-2-\sqrt{5} \\ x_2=-2+\sqrt{5} \end{matrix} \Rightarrow f'(x)>0 \ \ \textit{при} \ \ x\in[1.5,2] \Rightarrow$$ функция унимодальная на заданном отрезке.

2) Зададим $\Delta\in(0,2\varepsilon),\ a_0=a,\ b_0=b$:

$$\Delta=0.02, a_0=1.5, b_0=2$$

Заметим, что итеративный процесс будет завершен по достижении:

$$|b_i-a_i|\le 0.05$$

9

Метод дихотомии

Пример

Задание: с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ на отрезке $[1.5,2]$. Погрешность поиска точки минимума $\varepsilon=0.05$.

3) Составим итерационную таблицу:

i	a_i	b_i	$\varepsilon=b_i-a_i$	c_i	d_i	$f(c_i)$	$f(d_i)$	Примечания
0	1.5	2.0	0.5	1.74	1.76	-92.135	-92.096	$f(c_0)\le f(d_0)\Rightarrow b_1=d_0$
1	1.5	1.76	0.26	1.62	1.64	-91.486	-91.696	$f(c_1)\ge f(d_1)\Rightarrow a_2=c_1$
2	1.62	1.76	0.14	1.68	1.7	-91.995	-92.084	$f(c_2)\ge f(d_2)\Rightarrow a_3=c_2$
3	1.68	1.76	0.08	1.71	1.73	-92.113	-92.138	$f(c_3)\ge f(d_3)\Rightarrow a_4=c_3$
4	1.71	1.76	0.05	-	-	-	-	$\lvert b_4-a_4\rvert=0.05=\varepsilon$

4) Определим точку минимума и минимум целевой функции:

$$x^*=\frac{1.71+1.76}{2}\approx 1.735\ ,\quad f\left(x^*\right)=-92.14$$

11

Метод золотого сечения

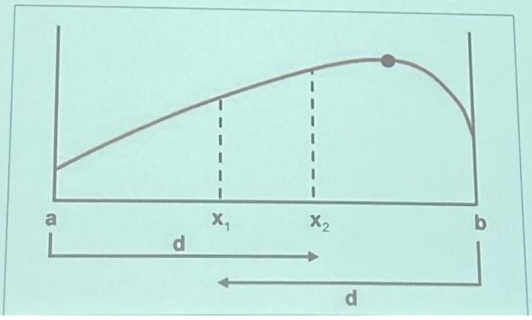
Golden-section search

Выбираем внутренние точки отрезка $[a,b]$ так, чтобы одну из них использовать и на следующем – уже сокращенном – отрезке.

***Золотое сечение отрезка** – это деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.*

В рамках метода золотого сечения выбор внутренних точек отрезка должен удовлетворять следующему условию:

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a}=\frac{b-a}{x_2-a}=\frac{x_2-a}{b-x_2}.\ \text{Тогда}\ \frac{b-x_1}{b-a}=\frac{x_2-a}{b-a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034$$



12

Метод золотого сечения

Golden-section search

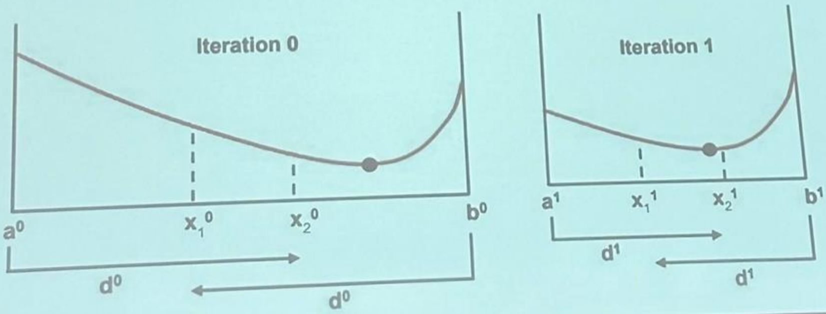
Исходя из соотношения

$$\frac{b-x_1}{b-a} = \frac{x_2-a}{b-a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$$

определим положение внутренних точек x_1, x_2 *отрезка* $[a,b]$:

$$x_1 = b - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) \qquad x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$$

При таком расположении внутренних точек, одна из них будет использована повторно на следующей итерации:

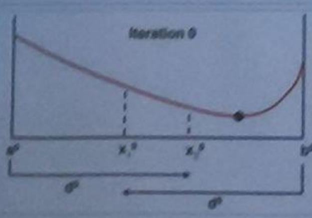


13

Метод золотого сечения

Алгоритм

Задание: пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$



Подготовительный этап:

Зададим $a_0 = a,\ b_0 = b$. *Определим внутренние точки* $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$:

$$x_1^{(0)} = b - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a),\ x_2^{(0)} = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$$

Вычислим $f(x_1^{(0)}), f(x_2^{(0)})$.

Шаг 1:

Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$ *и внутренние точки* $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$.

Для этого сравним значения целевой функции во внутренних точках $f(x_1^{(0)})$ *и* $f(x_2^{(0)})$:

Если $f(x_1^{(0)}) \le f(x_2^{(0)})$, *то* $a_1 = a_0,\ b_1 = x_2^{(0)},\ x_2^{(1)} = x_1^{(0)},\ x_1^{(1)} = a_1 + b_1 - x_1^{(0)}$

Если $f(x_1^{(0)}) > f(x_2^{(0)})$, *то* $a_1 = x_1^{(0)},\ b_1 = b_0,\ x_1^{(1)} = x_2^{(0)},\ x_2^{(1)} = a_1 + b_1 - x_2^{(0)}$

Вычислим недостающее значение $f(x_1^{(1)})$ *или* $f(x_2^{(1)})$.

Шаг 2:

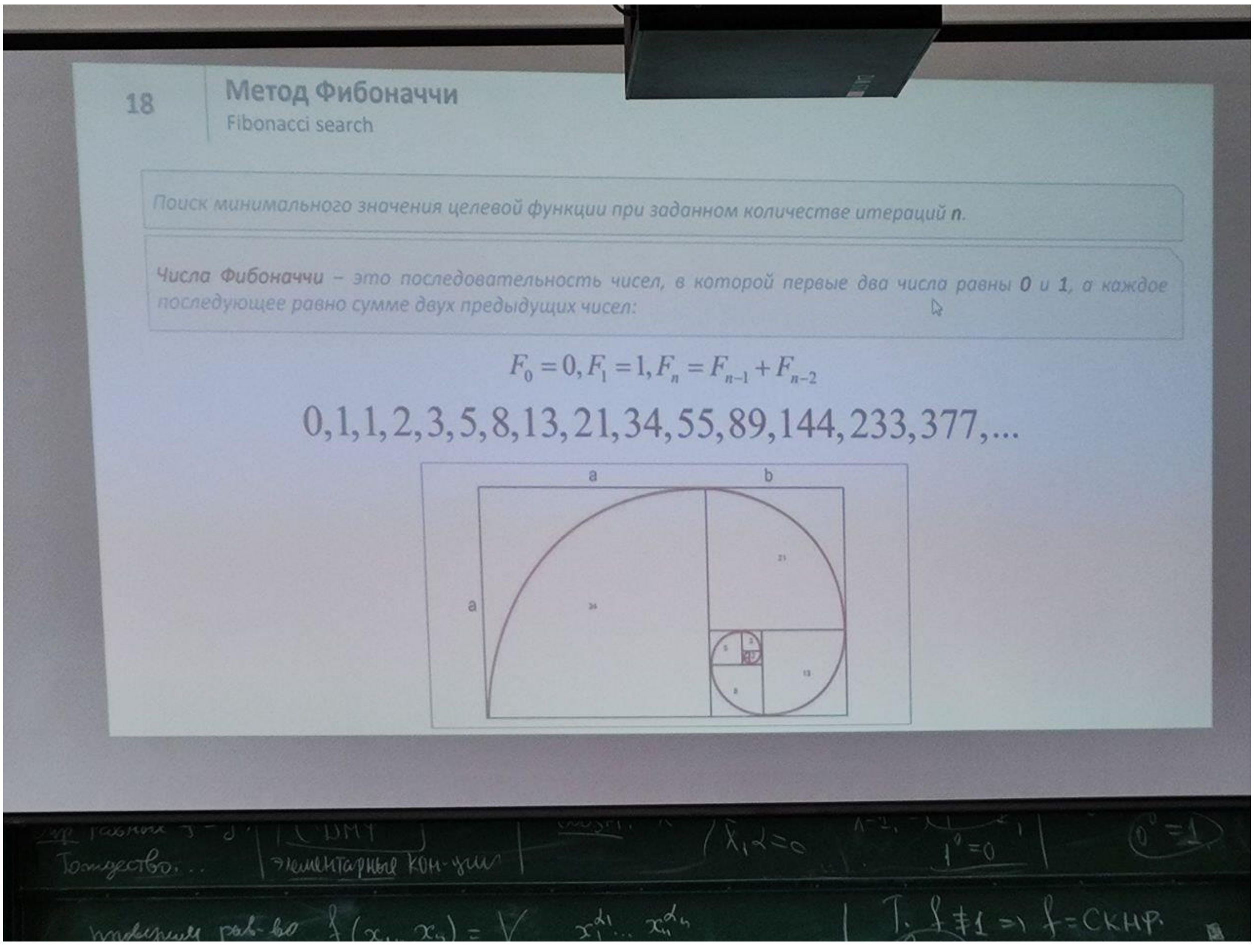
Сравним длину получившегося отрезка с погрешностью поиска:

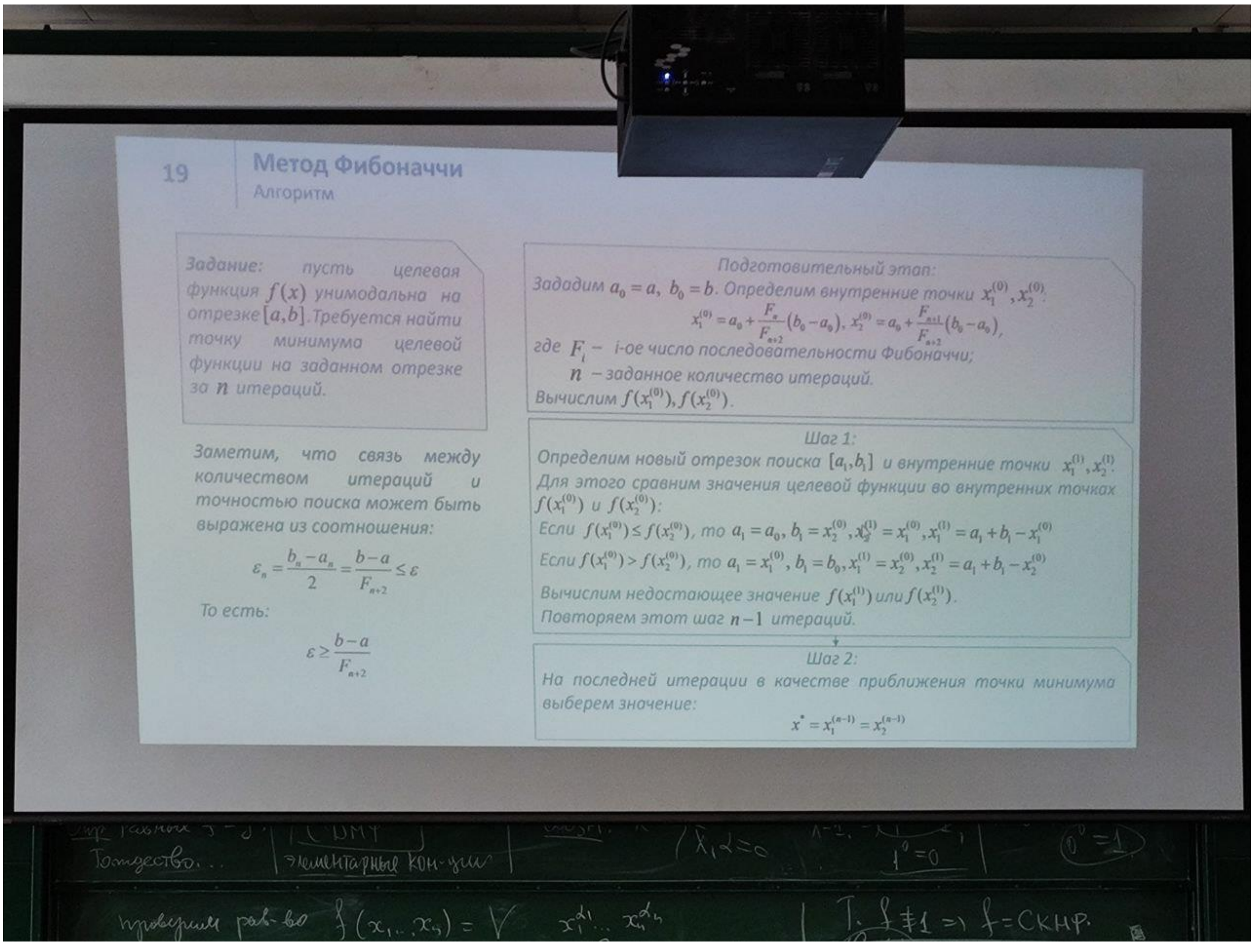
$$|b_1 - a_1| \le \varepsilon$$

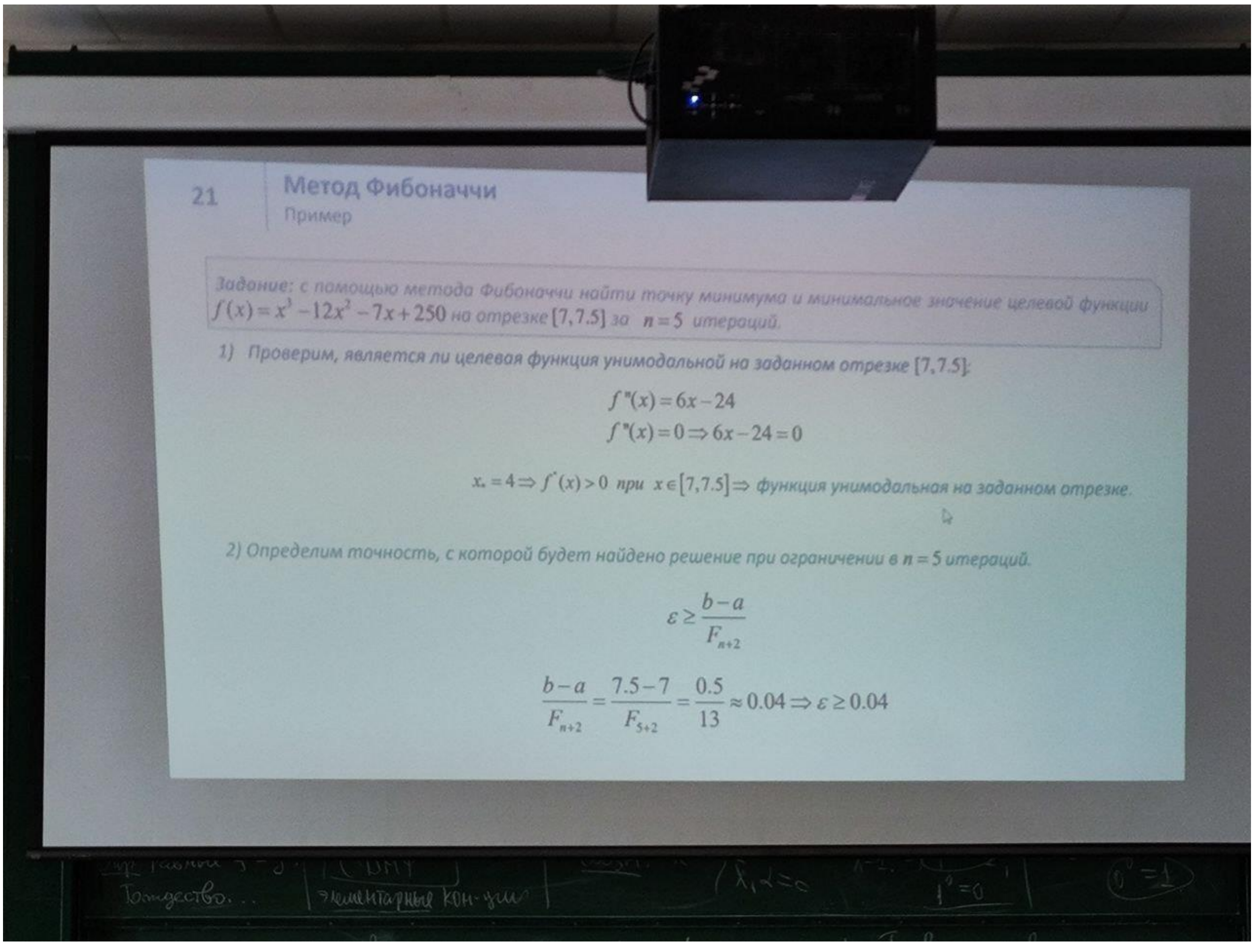
Шаг 3:

Определим точку минимума целевой функции:

$$x^* = \frac{a_1 + b_1}{2}$$


18
Метод Фибоначчи
Fibonacci search
Поиск минимального значения целевой функции при заданном количестве итераций **n**.
Числа Фибоначчи – это последовательность чисел, в которой первые два числа равны **0** и **1**, а каждое последующее равно сумме двух предыдущих чисел:
$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...$
a
b
a


19
Метод Фибоначчи
Алгоритм
Задание: пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке за n итераций.
Заметим, что связь между количеством итераций и точностью поиска может быть выражена из соотношения:
$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{F_{n+2}} \le \varepsilon$
То есть:
$\varepsilon \ge \frac{b-a}{F_{n+2}}$
Подготовительный этап:
Зададим $a_0 = a,\ b_0 = b$. Определим внутренние точки $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$:
$x_1^{(0)} = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),\ x_2^{(0)} = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$
где F_i – i-ое число последовательности Фибоначчи;
n – заданное количество итераций.
Вычислим $f(x_1^{(0)}), f(x_2^{(0)})$.
Шаг 1:
Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$ и внутренние точки $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$.
Для этого сравним значения целевой функции во внутренних точках $f(x_1^{(0)})$ и $f(x_2^{(0)})$:
Если $f(x_1^{(0)}) \le f(x_2^{(0)})$, то $a_1 = a_0, b_1 = x_2^{(0)}, x_2^{(1)} = x_1^{(0)}, x_1^{(1)} = a_1 + b_1 - x_1^{(0)}$
Если $f(x_1^{(0)}) > f(x_2^{(0)})$, то $a_1 = x_1^{(0)}, b_1 = b_0, x_1^{(1)} = x_2^{(0)}, x_2^{(1)} = a_1 + b_1 - x_2^{(0)}$
Вычислим недостающее значение $f(x_1^{(1)})$ или $f(x_2^{(1)})$.
Повторяем этот шаг $n-1$ итераций.
Шаг 2:
На последней итерации в качестве приближения точки минимума выберем значение:
$x^* = x_1^{(n-1)} = x_2^{(n-1)}$


21
Метод Фибоначчи
Пример
Задание: с помощью метода Фибоначчи найти точку минимума и минимальное значение целевой функции $f(x)=x^3-12x^2-7x+250$ на отрезке $[7, 7.5]$ за $n=5$ итераций.
1) Проверим, является ли целевая функция унимодальной на заданном отрезке $[7, 7.5]$:
$f''(x)=6x-24$
$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-24=0$
$x_* = 4 \Rightarrow f''(x)>0$ при $x \in [7, 7.5] \Rightarrow$ функция унимодальная на заданном отрезке.
2) Определим точность, с которой будет найдено решение при ограничении в $n=5$ итераций.
$\varepsilon \geq \frac{b-a}{F_{n+2}}$
$\frac{b-a}{F_{n+2}} = \frac{7.5-7}{F_{5+2}} = \frac{0.5}{13} \approx 0.04 \Rightarrow \varepsilon \geq 0.04$
Тождество...
элементарные кон-ции