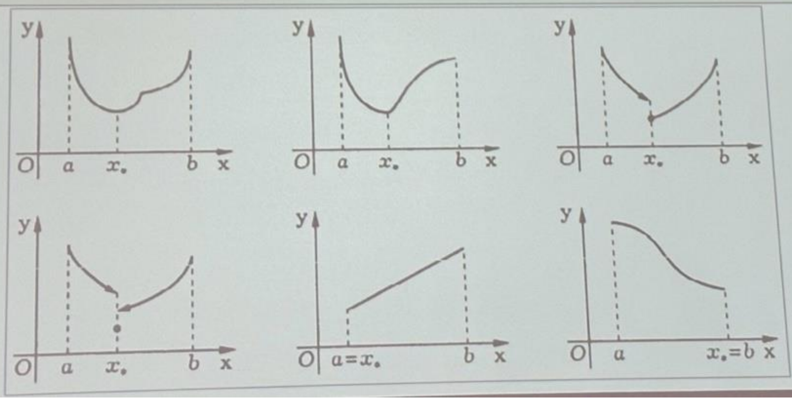
1

Унимодальные функции

Рассмотрим методы линейного поиска на примере задач одномерной минимизации

В задачах одномерной оптимизации выделен важный класс унимодальных функций, которые на отрезке достигают минимального значения, и притом в единственной точке. Функцию $f(x)$ называют ***унимодальной*** *на отрезке $[a,b]$, если существует такая точка x^*, что функция на отрезке $[a,x^*]$ убывает, а на отрезке $[x^*,b]$ возрастает.*
Унимодальная функция может иметь счетное множество точек разрыва первого рода.



2

Унимодальные функции

Критерии унимодальности

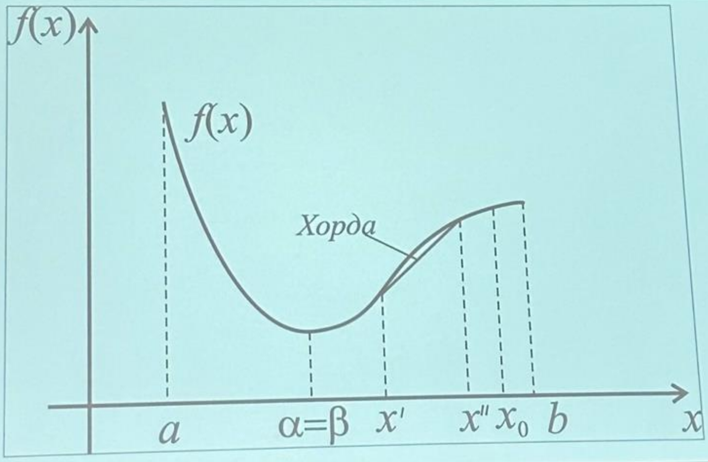
Рассмотрим критерии унимодальности функции на отрезке

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x)$ унимодальная на $[a,b]$.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$, то $f(x)$ унимодальная на $[a,b]$.*

3 Унимодальные функции

Важно отметить связь между выпуклостью и унимодальностью функций. Всякая выпуклая непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ является и унимодальной на этом отрезке. Обратное – в общем случае – неверно, например:



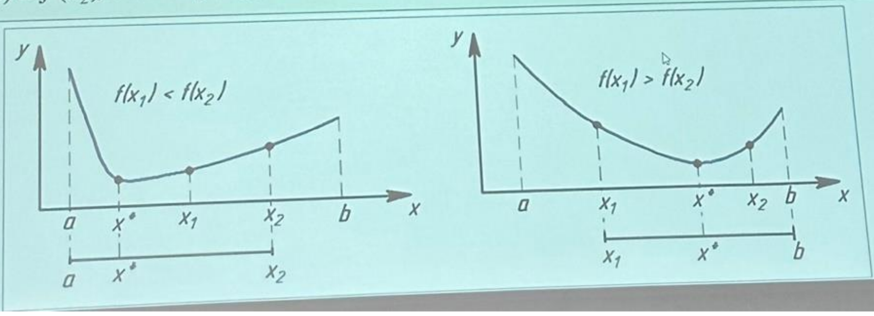
4 Методы последовательного поиска

Методы последовательного поиска опираются только на значения целевой функции и не требуют информации о её производных.

Методы последовательного поиска предполагают построение последовательности точек, сходящихся к искомой точке минимума целевой функции. Но в рамках задач одномерной оптимизации применяют более эффективный подход с построением последовательности вложенных отрезков (интервалов неопределенности), каждый из которых содержит точку минимума целевой функции.

Основой построения последовательности вложенных отрезков является следующая теорема:

Пусть функция $f(x)$, унимодальная на отрезке $[a,b]$, достигает минимума в точке $x^* \in [a,b]$, а точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, причем $x_1 < x_2$.
Тогда если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$, а если $f(x_1) \ge f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$.

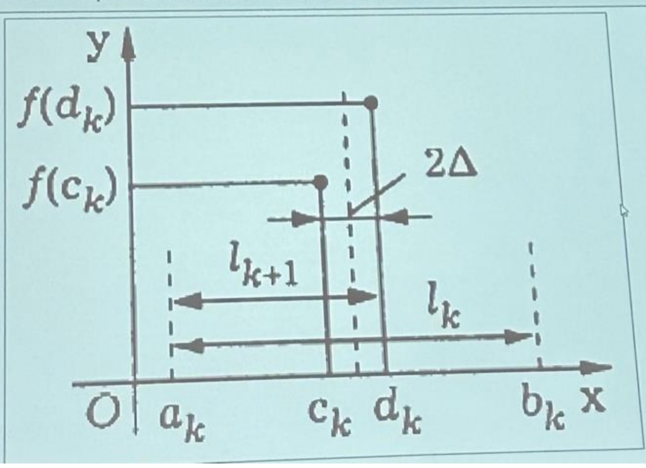


5

Метод дихотомии

Располагаем внутренние точки отрезка $[a,b]$ так, чтобы они были максимально близки к его середине.

Задание: *пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.*

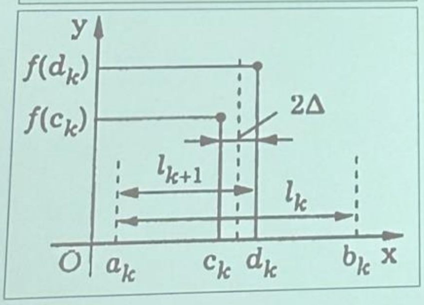


6

Метод дихотомии

Алгоритм

Задание: *пусть целевая функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$. Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.*



Подготовительный этап:

Зададим $\Delta \in (0, 2\varepsilon)$, $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Шаг 1:

Определим внутренние точки c_0, d_0:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0 - \Delta}{2}, \quad d_0 = \frac{a_0 + b_0 + \Delta}{2}$$

Вычислим $f(c_0), f(d_0)$.

Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$. *Для этого сравним значения целевой функции во внутренних точках* $f(c_0)$ *и* $f(d_0)$:

Если $f(c_0) \le f(d_0)$, *то* $a_1 = a_0,\ b_1 = d_0$

Если $f(c_0) \ge f(d_0)$, *то* $a_1 = c_0,\ b_1 = b_0$

Шаг 2:

Сравним длину получившегося отрезка с погрешностью поиска:

$$|b_1 - a_1| \le \varepsilon$$

Шаг 3:

Определим точку минимума целевой функции:

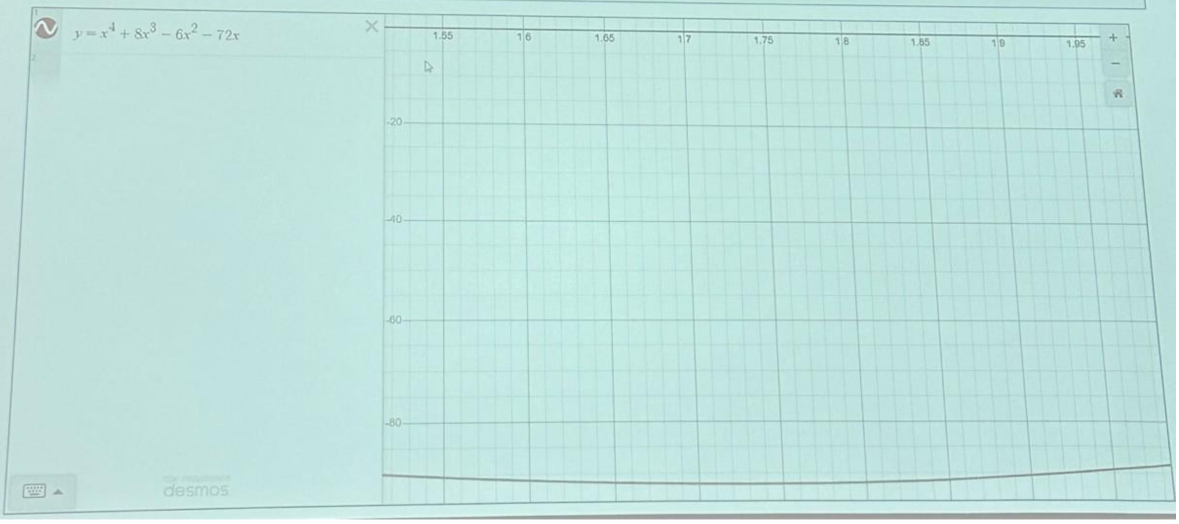
$$x^* = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

7

Метод дихотомии

Пример

Задание: *с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *на отрезке* $[1.5,2]$. *Погрешность поиска точки минимума* $\varepsilon=0.05$.



8

Метод дихотомии

Пример

Задание: *с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *на отрезке* $[1.5,2]$. *Погрешность поиска точки минимума* $\varepsilon=0.05$.

1) *Проверим, является ли целевая функция унимодальной на заданном отрезке* $[1.5,2]$:

$$f''(x)=12x^2+48x-12$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2+48x-12=0$$

$$\begin{matrix} x_1=-2-\sqrt{5} \\ x_2=-2+\sqrt{5} \end{matrix} \Rightarrow f'(x)>0 \text{ при } x\in[1.5,2] \Rightarrow$$ функция унимодальная на заданном отрезке.

2) *Зададим* $\Delta\in(0,2\varepsilon)$, $a_0=a$, $b_0=b$:

$$\Delta=0.02, a_0=1.5, b_0=2$$

Заметим, что итеративный процесс будет завершен по достижении:

$$|b_i-a_i|\le 0.05$$

Метод дихотомии

Пример

Задание: *с помощью метода дихотомии найти точку минимума и минимальное значение целевой функции* $f(x)=x^4+8x^3-6x^2-72x$ *на отрезке* $[1.5,2]$. *Погрешность поиска точки минимума* $\varepsilon=0.05$.

3) Составим итерационную таблицу:

i	a_i	b_i	$\varepsilon=b_i-a_i$	c_i	d_i	$f(c_i)$	$f(d_i)$	Примечания
0	1.5	2.0	0.5	1.74	1.76	-92.135	-92.096	$f(c_0)\le f(d_0)\Rightarrow b_1=d_0$
1	1.5	1.76	0.26	1.62	1.64	-91.486	-91.696	$f(c_1)\ge f(d_1)\Rightarrow a_2=c_1$
2	1.62	1.76	0.14	1.68	1.7	-91.995	-92.084	$f(c_2)\ge f(d_2)\Rightarrow a_3=c_2$
3	1.68	1.76	0.08	1.71	1.73	-92.113	-92.138	$f(c_3)\ge f(d_3)\Rightarrow a_4=c_3$
4	1.71	1.76	0.05	-	-	-	-	$\lvert b_4-a_4\rvert=0.05=\varepsilon$

4) Определим точку минимума и минимум целевой функции:

$$x^*=\frac{1.71+1.76}{2}\approx 1.735\ ,\quad f\left(x^*\right)=-92.14$$

Метод золотого сечения

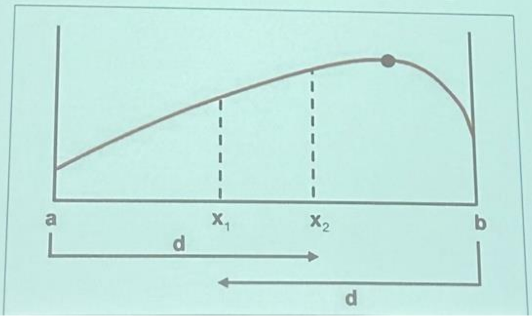
Golden-section search

Выбираем внутренние точки отрезка $[a,b]$ *так, чтобы одну из них использовать и на следующем – уже сокращенном – отрезке.*

Золотое сечение отрезка *– это деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.*

В рамках метода золотого сечения выбор внутренних точек отрезка должен удовлетворять следующему условию:

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a}=\frac{b-a}{x_2-a}=\frac{x_2-a}{b-x_2}.\ \text{Тогда}\ \frac{b-x_1}{b-a}=\frac{x_2-a}{b-a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034$$



12

Метод золотого сечения

Golden-section search

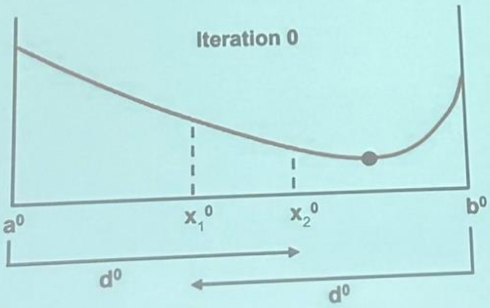
Исходя из соотношения

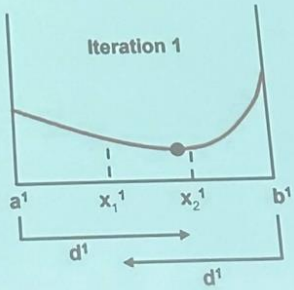
$$\frac{b-x_1}{b-a}=\frac{x_2-a}{b-a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034$$

определим положение внутренних точек x_1, x_2 *отрезка* $[a,b]$:

$$x_1=b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) \qquad x_2=a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$$

При таком расположении внутренних точек, одна из них будет использована повторно на следующей итерации:



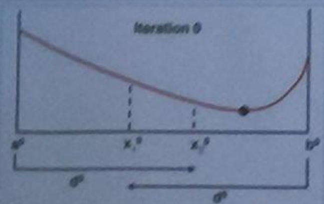


13

Метод золотого сечения

Алгоритм

Задание: *пусть целевая функция* $f(x)$ *унимодальна на отрезке* $[a,b]$. *Требуется найти точку минимума целевой функции на заданном отрезке с абсолютной погрешностью* $\varepsilon > 0$



Подготовительный этап:

Зададим $a_0=a,\ b_0=b$. *Определим внутренние точки* $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$:

$$x_1^{(0)}=b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a),\ x_2^{(0)}=a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$$

Вычислим $f(x_1^{(0)}), f(x_2^{(0)})$.

Шаг 1:

Определим новый отрезок поиска $[a_1,b_1]$ *и внутренние точки* $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$. *Для этого сравним значения целевой функции во внутренних точках* $f(x_1^{(0)})$ *и* $f(x_2^{(0)})$.

Если $f(x_1^{(0)})\le f(x_2^{(0)})$, *то* $a_1=a_0,\ b_1=x_2^{(0)},\ x_2^{(1)}=x_1^{(0)},\ x_1^{(1)}=a_1+b_1-x_1^{(0)}$

Если $f(x_1^{(0)})> f(x_2^{(0)})$, *то* $a_1=x_1^{(0)},\ b_1=b_0,\ x_1^{(1)}=x_2^{(0)},\ x_2^{(1)}=a_1+b_1-x_2^{(0)}$

Вычислим недостающее значение $f(x_1^{(1)})$ *или* $f(x_2^{(1)})$.

Шаг 2:

Сравним длину получившегося отрезка с погрешностью поиска:

$$|b_1-a_1|\le\varepsilon$$

Шаг 3:

Определим точку минимума целевой функции:

$$x^*=\frac{a_1+b_1}{2}$$