Questo documento ha lo scopo di introdurre alcuni modelli che costituiscono la base della teoria macroeconomica prevalente.
Si intende in modo particolare mettere il lettore nelle condizioni di poter calcolare, sia analiticamente che computazionalmente le soluzioni dei modelli dinamici presentati. L'obiettivo, dunque è quello di far capire, per ogni modello, quali siano gli elementi che costituiscono la soluzione e come essa possa essere praticamente ottenuta.
È doveroso avvertire il lettore che la comprensione di quanto qui esposto non deve essere considerata come un punto di arrivo, ma come un punto di partenza. Questa esposizione, infatti difetta largamente nel trattare gli aspetti teorici che danno un'ampia visione delle problematiche da gestire in questo tipo di modellistica (come ad esempio quelle relative all'esistenza, unicità e stabilità della soluzione). La scelta di una via pratica è motivata dal fatto che un'esposizione teorica potrebbe disorientare chi per la prima volta si accosta agli argomenti trattati qualora il fine ultimo dell'analisi non sia stato ben compreso.
La speranza è che il materiale esposto riesca a ``far toccare con mano'' il fine ultimo dell'analisi. Si è ceracato dunque di riportare il più possibile i passaggi analitici e i listati relativi alle soluzioni numeriche. Tale cura non è riservata a risultati e tecniche che sono illustrate in altre fonti bibliografiche rinviando il lettore a queste ultime.
Gli strumenti necessari per affrontare questo percorso sono sostanzialmente due. Dal punto di vista matematico, il lettore deve conoscere gli strumenti che sono comunemente oggetto di corsi di analisi matematica di base (con particolare riferimento alla derivazione di funzioni di più variabili). Dal punto di vista computazionale sarebbe opportuno che il lettore abbia delle nozioni introduttive del linguaggio utilizzato dal software R. Il codice riportato può infatti essere utilizzato in R. L'attenzione nello stendere il codice è stata quella di evitare di inserire degli accorgimenti che, seppur utili, avrebbero comportato un notevole aumento del numero di righe, rendendo difficile la comprensione degli algoritmi a chi affronta queste metodologie per la prima volta.

Chapter 1

Il problema dinamico di Robinson Crusoe

L'obiettivo di questa parte è quello di ottenere un'equazione dinamica che possa essere utilizzata per analizzare un problema economico e di mettere in evidenza che gli aspetti di interesse sono tre: la determinazione dello stato stazionario, lo studio qualitativo e la soluzione analitica del modello.

1.1 Il modello

Si immagini un singolo soggetto che coltiva un appezzamento di terra. Indichiamo con k la quantità di semi che pianta. Il raccolto y è una funzione crescente della quantità di sementi:

$$y = f(k).$$

Una volta ottenuto il raccolto, il soggetto decide di consumarne una quantità c e di accantonare la parte restante $y - c$ per la semina del periodo successivo.
Chiediamoci ora qual è la variazione della quantità di sementi ($\dot{k}$). Essa sarà pari alla nuova quantità di semi $(y - c)$ diminuita della quantità di semi di partenza (k):

$$\dot{k} = y - c - k = f(k) - c - k$$

Il problema, dal punto di vista economico è quello di trovare come evolverà la situazione per quanto riguarda le variabili endogene. In questo semplice modello, si tratta di trovare il cammino futuro di k. La dinamica

della produzione y si ricava poi inserendo quella di k nella funzione di produzione $f()$.
Non è sempre possibile ottenere la soluzione analitica per il cammino di k. Un obiettivo meno ambizioso è quello di dare una soluzione qualitativa. Uno ancora meno ambizioso è quello di vedere se esiste uno stato stazionario. Iniziamo dal più semplice.

1.2 Stato stazionario

In questo caso basta imporre $\dot{k} = 0$ ovvero risolvere l'equazione

$$f(k) - c - k = 0.$$

Per trovare una soluzione, occorre adottare una forma funzionale per la funzione di produzione ed adottare una funzione per il consumo. Se ad esempio poniamo $y = k^\alpha$ si ha:

$$k^\alpha - c - k = 0 \tag{1.1}$$

L'individuazione della funzione del consumo è un argomento molto studiato in macroeconomia che riprenderemo in seguito.
A livello didattico potremmo trattare la c come un parametro del modello, caso che analizzeremo nel paragrafo successivo, oppure assumere che il soggetto consumi una percentuale del suo reddito, come faremo qui di seguito.
Assumiamo dunque che

$$c = \gamma y = \gamma k^\alpha.$$

Con questa assunzione, la 1.1 diventa:

$$\dot{k} = k^\alpha - \gamma k^\alpha - k. \tag{1.2}$$

La condizione di stazionarietà è dunque:

$$s k^\alpha - k = 0$$

dove $s = 1 - \gamma$. Ora è possibile determinare esplicitamente lo stato stazionario:

$$k/k^\alpha = s \Rightarrow k^{1-\alpha} = s \Rightarrow k^* = s^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

1.3 Soluzione qualitativa

La soluzione qualitativa dipende dalla funzione del consumo. Continuiamo per il momento con il caso del consumo proporzionale al reddito, per poi tornare, a fini didaddici, al caso di consumo come parametro.

1.3.1 $c = \gamma y$

Riprendiamo dunque l'equazione ([eq:c_gy]). Al fine di analizzarla qualitativamente è importante determinare il segno di $\dot{k}$ che può essere dedotto dalla sua equazione:

$$\dot{k} = (1-\gamma)k^\alpha - k.$$

Si procede tracciando graficamente le funzioni rappresentate dai due addendi del lato destro. Tracciamo dunque nello stesso grafico sia la funzione $y = sk^\alpha$ e la funzione $y = k$. Le due funzioni dipendono da k, per cui, avremo questa variabile nell'asse delle ascisse. La funzione $y = k$ è dunque la retta che esce dall'origine e ha inclinazione di 45 gradi. $y = sk^\alpha$ parte dall'origine degli assi e la sua forma dipende dal parametro α. In particolare, è convessa verso il basso se $\alpha < 1$, ovvero nel caso di interesse.
Si noti che il punto di incontro delle due funzioni rappresenta lo stato stazionario calcolato in precedenza (k^*).
Per $0 \leq \alpha \leq 1$, quando $k < k^*$ si ha $sf(k) > k$, questo significa che $\dot{k} > 0$ ovvero che k tende ad aumentare. Al contrario se $k > k^*$, k diminuisce. In conclusione k converge a k^*.
La nostra conclusione qualitativa è dunque la seguente:
quando $0 \leq \alpha \leq 1$, il sistema converge alla soluzione di stato stazionario.

1.3.2 c come parametro

Ritorniamo ora al caso in cui c è un parametro (si veda Intriligator, 2002 p. 404). Possiamo scrivere

$$\dot{k} = (k^\alpha - k) - c.$$

Come in precedenza, partiamo dalla forma di $k^\alpha - k$ quando $0 < \alpha < 1$. Per c sufficientemente basso, imponendo la stazionarietà, si individuano due valori $k_l(c) < k_h(c)$ tali che
$\dot{k} > 0$ se $k_l < k < k_h$ e $\dot{k} < 0$ per gli altri valori.
Ne segue che k_h è stabile mentre k_l è instabile.
Conviene analizzare i casi estremi. Per $c = 0$ si ha che $k_l = 0$ ma questo punto non è stabile e prima o poi si finirà in k_h. L'altro caso estremo si ha quando il livello di c è tale che $k_l = k_h$. Indicheremo questo punto con k_{gr} dove gr sta per *golden rule* in quanto il consumo è il massimo possibile. La cosa da notare è che se si parte da un livello di capitale più alto di k_{gr}, si converge a questo livello, ovvero k_{gr} è attrattivo, mentre se ci si sposta minimamente a sinistra, k_{gr} è repulsivo. Un punto con le caratteristiche appena descritte prende il nome di punto di sella. Per il momento ci fermiamo alla constatazione dell'esistenza di simili punti. Entreremo nei dettagli di questo tipo di stati stazionari quando verrà esposto il modello di Ramsey.
L'analisi quantitativa di questa versione del modello ci ha segnalato che:

ci possono essere diversi punti di stato stazionario, essi posso essere stabili, instabili o di sella.

1.4 Soluzione quantitativa

Ritorniamo ora al caso in cui $c = \gamma y$. La soluzione quantitativa si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - k \tag{1.3}$$

L'equazione non è lineare, ma è possibile ricondurla ad una lineare (si veda Chiang, 1984 pag. 500).
Poniamo $z = k^{1-\alpha}$. Facendo la derivata di quest'ultima rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}.$$

Sostituendovi la ([eq:crusoe_c=gammay]) abbiamo

$$\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha}(sk^{\alpha} - k) = (1-\alpha)s - (1-\alpha)k^{1-\alpha} = (1-\alpha)s - (1-\alpha)z \tag{1.4}$$

La soluzione di questa equazione è data dalla somma di due componenti: la soluzione dell'equazione omogenea associata z_g e la soluzione particolare z_p :

$$z = z_g + z_p$$

L'equazione omogenea è

$$\dot{z} = -(1-\alpha)z$$

essa può essere scritta come

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha) \Rightarrow \frac{d\ln|z|}{dt} = -(1-\alpha)$$

Integrando in t

$$\int \frac{d\ln|z|}{dt}dt = \int -(1-\alpha)dt$$

Ora non è difficile risolvere gli integrali

$$\ln|z| + c_1 = -(1-\alpha)t + c_2$$

si noti che z ha lo stesso segno di k e che è logico richiedere la non negatività per questa variabile. Questo ci consente di togliere il valore assoluto. Se facciamo l'esponenziale in ambo i lati e poniamo $c = c_2 - c_1$ otteniamo

$$z_g = e^{-(1-\alpha)t}e^{c}$$

Per z_p proviamo la soluzione stazionaria che si ottiene risolvendo

$$(1-\alpha)s - (1-\alpha)z = 0$$

da cui otteniamo

$$z_p = s$$

Occorre verificare che questa sia effettivamente una soluzione della ([eq:crusoe_c=gammayz]). Sostituendo s al posto di z nella ([eq:crusoe_c=gammayz]) si ha $\dot{z} = 0$. Derivando ora z_p rispetto al tempo si ha

$$\dot{z_p} = 0$$

giungiamo dunque allo stesso risultato. Abbiamo dunque verificato che la z_p è una soluzione particolare della ([eq:crusoe_c=gammayz]).
La soluzione cercata è pertanto

$$z = z_g + z_p = e^{-(1-\alpha)t}e^c + s$$

Abbiamo ancora la costante arbitraria c che possiamo determinare utilizzando le condizioni iniziali ovvero imponendo che in $t = 0$ si abbia $z = z_0$

$$z_0 = e^{-(1-\alpha)0}e^c + s = e^c + s$$

da cui si ottiene

$$e^c = z_0 - s$$

Sostituendo si ha

$$z = [z_0 - s]e^{-(1-\alpha)t} + s$$

Per ottenere la soluzione in termini di k basta risostituire la definizione di z

$$k^{1-\alpha} = [k_0^{1-\alpha} - s]e^{-(1-\alpha)t} + s$$

da cui elevando ambo i membri alla $\frac{1}{1-\alpha}$ si ottiene

$$k = \left([k_0^{1-\alpha} - s]e^{-(1-\alpha)t} + s\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ora possiamo notare che per $\alpha < 1$, si ha $\lim_{t\to\infty} e^{-(1-\alpha)t} = 0$, ovvero k converge a $k^* = s^{\frac{1}{1-\alpha}}$

1.5 Input durevole

La caratteristica del modello precedente è che abbiamo un input che ha un ammortamento pari a 1.
Un modello più generale prevede un parametro in più per il tasso di ammortamento δ.

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \delta k \tag{1.5}$$

ripercorrendo l'analisi fatta precedentemente, si ottiene

$$\dot{z} = (1-\alpha)s - \delta(1-\alpha)z; \qquad z_g = e^{-\delta(1-\alpha)t}e^{c}; \qquad z_p = \frac{s}{\delta}$$

e la soluzione è

$$k = \left(\left[k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta}\right]e^{-\delta(1-\alpha)t} + \frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Il comportamento qualitativo è lo stesso del caso precedente, ma lo stato stazionario è ora

$$k^{*} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Il codice seguente calcola e visualizza la soluzione per un valore iniziale di k pari a 20 e per i seguenti valori dei parametri: $s = 0.2$, $\delta = 0.01$ e $\alpha = 0.3$.

```
s<-0.2
delta<-0.01
alpha<-0.3
k_0<-20
t<-seq(0,20,by=0.1)
k=((k_0^(1-alpha)-s/delta)*exp(-(1-alpha)*t)+s/delta)^(1/(1-alpha))
plot(t,k,type="l")
```

Il codice seguente seguente aggiunge alcune linee al precedente per calcolare e visualizzare le soluzioni per diversi valori iniziali di k.

```
#file crusoe_solution.R
s<-0.2
delta<-0.01
alpha<-0.3
k_0<-20
t<-seq(0,20,by=0.1)
k=((k_0^(1-alpha)-s/delta)*exp(-(1-alpha)*t)+s/delta)^(1/(1-alpha))
plot(t,k,type="l",ylim=c(10,120))
deltak_0<-10
for(z in 1:10){
k_0<-k_0+deltak_0
k=((k_0^(1-alpha)-s/delta)*exp(-(1-alpha)*t)+s/delta)^(1/(1-alpha))
lines(t,k)
}
```

La figura 1 mostra il grafico ottenuto dal codice.

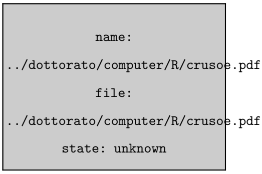

Figure 1.1 soluzioni per alcuni valori iniziali di k.

Esercizio verificare cosa accade per $\alpha \geq 1$.

Intriligator (2002), *Mathematical optimization and economic theory*

1 M.D. Intriligator, *Mathematical optimization and economic theory*, SIAM, 2002.

2 A.C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (third ed.), McGraw-Hill, 1984.