Ensembles , Nombres

Entiers naturels , Entiers relatifs , Rationnels , Réels

Les nombres sont classifiables par types. On dit qu'ils appartiennent à un ensemble. Nous allons donner un descriptif de ces ensembles et ce que font les 4 opérations usuelles.

entiers naturels

Les entiers naturels sont les nombres entiers positifs.
ex : 1 , 5 , 10 000 , 3 , 7 , 51 , etc.

L'ensemble des nombres entiers se note **N** (comme naturel).
On dit que x appartient à N et on note $x \in N$ si x est un entier positif ou nul.

les opérations

addition

L'addition ne pose aucun problème particulier.
ex : $4 + 3 = 7$

On peut remarquer que le nombre 0 est un ***élément neutre*** pour l'addition , il ne change pas un résultat
ex : $0 + X = X$

On peut aussi remarquer que l'opération est ***commutative*** , l'ordre dans les nombres ne change rien au résultat.
ex : $1 + 5 = 5 + 1 = 6$

multiplication

Il en est de même pour la multiplication.
ex : $4 * 3 = 12$

l'élément neutre pour la multiplication est 1.

La multiplication est aussi une opération commutative.

soustraction

La soustraction pose un petit problème. Il y a 2 cas :

1) Le nombre à soustraire est plus petit ou égal que le soustracteur , alors tout va bien.
   ex : $3 - 2 = 1$
2) Le soustracteur est plus grand , alors le résultat n'est plus un nombre appartenant à N
   ex : 2 - 3 = ***-1***
   Il faut créer un autre ensemble qui contienne les nombres négatifs.
   On dit que l'opération n'est plus une loi de composition interne , ou qu'elle n'est plus stable.

Cette notion de stabilité est importante pour les informaticiens. Les langages que nous utilisons sont typés et l'opération (ex. une soustraction) se fait sur un type donné. Si l'opération n'est pas stable pour le type considéré (ex. entier positif) alors on a une erreur qui est très difficile à détecter.

l'élément neutre pour la soustraction est 0.

division

Les 2 termes d'une division portent les noms de diviseur ou dénominateur pour le nombre qui divise l'autre, et divisé ou numérateur pour l'autre. On a l'habitude de représenter une division par le symbole barre de fraction avec le numérateur dessus et le dénominateur dessous.

$$\frac{numérateur}{déno\min ateur} \qquad \text{ou} \qquad \text{numérateur/dénominateur}$$

ex : $\frac{6}{2}$, 8/4

La division pose encore plus de problèmes que la soustraction. Il faut que le résultat soit dans N. En d'autres termes, que l'on puisse dire du résultat qu'il "tombe juste". Si ce n'est pas le cas alors le résultat appartient à un autre ensemble , l'ensemble des nombres rationnels.
Il faut en plus que le dénominateur soit absolument différent de 0.

La division d'un nombre , *quel qu'il soit* , par 0 est une erreur.

l'élément neutre pour la division est 1.

parité

On dit qu'un nombre est pair s'il est divisible par 2 sinon il est impair.
⌦ 0 est pair par définition.

entiers relatifs

Comme on l'a vu précédemment la soustraction ne donne pas toujours un résultat dans N. Il faut agrandir l'ensemble afin de pouvoir inclure les nombres négatifs. On appelle cet ensemble "les entiers relatifs" et on le symbolise par **Z**.
Cet ensemble permet au résultat d'être dans le même ensemble que les nombres de départ.
On a N inclu dans Z. C'est-à-dire que tous les éléments (nombres) de N sont aussi dans Z.

rationnels

L'ensemble des nombres rationnels permet de résoudre le cas de la division , il est noté **Q**. Q est un sur-ensemble de Z. Q contient tous les nombres entiers , relatifs , et ceux de la forme x/y où x & y sont éléments de Z

réels

L'ensemble des réels est un sur-ensemble de Q , il est noté **R**. Il contient , bien sûr Z , mais aussi tous les nombres qui ne peuvent pas se mettre sous la forme x/y par ex. π , $\sqrt{2}$, etc. (ce que l'on appelle les nombres transcendans).

On peut résumer la composition des ensembles et leurs relations par les formules suivantes :
$N \subset Z \subset Q \subset R$ ($\subset$ veut dire "est inclu dans")

Fonctions

Nous décrivons dans cette section quelques opérations utiles qui peuvent être apparentées à des fonctions.

modulo

La division entière d'un nombre a par un nombre b donne un quotient q et un reste r. Ce reste est aussi appelé résidu de a modulo b.

$a = b.q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$

Cette opération induit que l'on travaille sur N.

On note *mod* le modulo sous une forme abrégée.

ex :	15 mod 6 = 3	Il y a 2 fois 6 dans 15 et il reste 3.
	243 mod 7 = 5	Il y a 34 fois 7 dans 243 et il reste 5
	6 mod 3 = 0	Il y a 2 fois 3 dans 6 et il reste 0
	2 mod 3 = 2	Il y a 0 fois 3 dans 2 et il reste 2

nombres premiers

Un nombre premier x est $\in$ N , qui n'est divisible que par 1 et lui-même , et par aucun autre nombre compris entre 1 et $\sqrt{x}$ (crible d'Eratosthène).

ex :	2 est premier	$2/2 = 1$
	3 est premier	$3/2 = 1{,}5 \notin$ N , $3/3 = 1$
	4 n'est pas premier	$4/2 = 2$ donc 4 est divisible par 2
	5 est premier	$5/2 = 2{,}5 \notin$ N , $5/3 = 1{,}66 \notin$ N , $5/4 = 1{,}25 \notin$ N , $5/5 = 1$

propriétés :

Tous les nombres premiers , sauf 2 , sont impairs.
Tous les nombres premiers , sauf 2 et 5 , se terminent par 1 , 3 , 7 , 9.

hypothèse de Goldbach

Tout nombre pair est somme de 2 nombres premiers.
Tout nombre impair est somme de 3 nombres premiers.

Nota :

Les nombres premiers jouent un rôle considérable dans les algorithmes de cryptage.

décomposition en facteurs premiers

Un nombre élément de N ou Z peut se décomposer en une suite de multiplications de nombres premiers plus petits que lui. Cette suite de nombres est appelée la décomposition en facteurs premiers.

ex :
$24 = 12 . 2 = 6 . 2 . 2 = 3 . 2 . 2 . 2$
$210 = 105 . 2 = 35 . 3 . 2 = 7 . 5 . 3 . 2$
$273 = 91 . 3 = 13 . 7 . 3$

Nota : Tout nombre qui ne pourrait être décomposé en facteurs premiers , est premier lui-même.

puissance

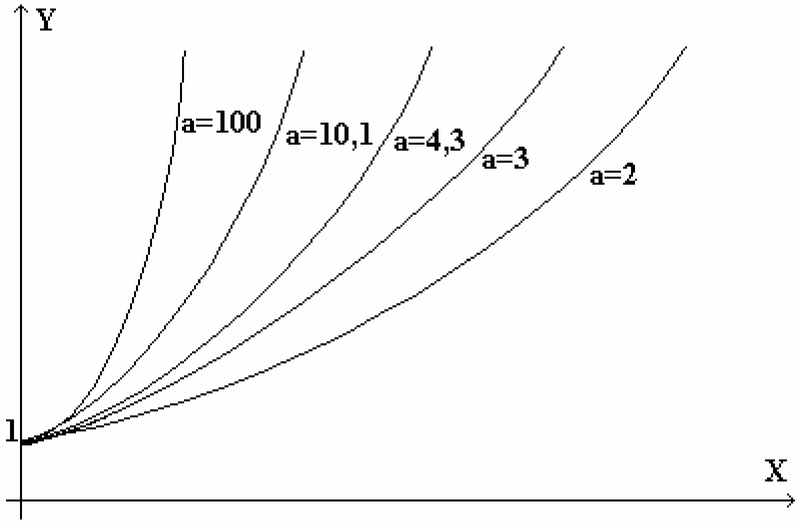
On parle de fonction puissance. C'est une application qui à un nombre x et $a \in R$ fait correspondre x^a.

Quand $a \in N$, on multiplie x a fois par lui-même .

ex : $a = 2$: on appel x^2 un carré $2^2 = 4$ $2{,}5^2 = 6{,}25$ $3^2 = 9$
$a = 3$: on appel x^3 un cube $2^3 = 8$ $2{,}5^3 = 15{,}625$ $3^3 = 27$

Nota : par définition $x^0 = 1$ quelque soit x.

On peut dessiner une courbe représentant $y = x^a$ pour différentes valeurs de a.



puissance fractionnaire

Une puissance peut être inferieure à 1 et peut s'exprimer sous forme d'un rapport $\frac{p}{q}$.

ex : $a = \frac{1}{2}$ $x^a = \sqrt{,x}$ $\sqrt{,x}$ est l'abréviation usuelle pour $\sqrt[2]{x}$

$a = \frac{1}{3}$ $x^a = \sqrt[3]{x}$

$a = \frac{2}{3}$ $x^a = \sqrt{3,x^2}$

application :

méthode de calcul de $\sqrt{,A}$ par itération (utilisée par tous les algorithmes de calcul en "*flottant*" de racine carré).

On peut mettre $x = \sqrt{A}$ sous la forme $x = \frac{A + x}{x + 1}$

demo: $x.(x + 1) = A + x \Rightarrow x^2 + x = A + x \Rightarrow x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$

ex : pour $A = 2$, on part de 1

$x_0 = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $x_1 = \frac{A + x_0}{x_0 + 1} = \frac{2+1{,}5}{1{,}5+1} = \frac{7}{5} = 1{,}4$ $x_2 = \frac{A + x_1}{x_1 + 1} = \frac{2 + \frac{7}{5}}{\frac{7}{5} + 1} = \frac{17}{12} = 1{,}416\ 66...$ etc.

Nota : On pouvait aller encore plus vite en prenant la formule $x = \frac{1}{2}.(x + \frac{A}{x})$

logarithme

La fonction logarithme est la fonction inverse de la fonction exponentielle.

On ne peut calculer[1] dans R que le log d'un nombre positif strictement supérieur à 0.

On a les formules suivantes :

$$\log 1 = 0$$
$$\log (a . b) = \log a + \log b$$
$$\log a^b = b \log a$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Le logarithme décimal d'un nombre a est le nombre b tel que :

$10^b = a$ on note $b = \log_{10} a = \text{Log } a$

a	$1 = 10^0$	$10 = 10^1$	$100= 10^2$	$1000 = 10^3$
Log a	0	1	2	3

On appelle logarithme de base *a* le nombre *y* tel que :

$a^y = x$ d'ou $y = \log_a x = \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$

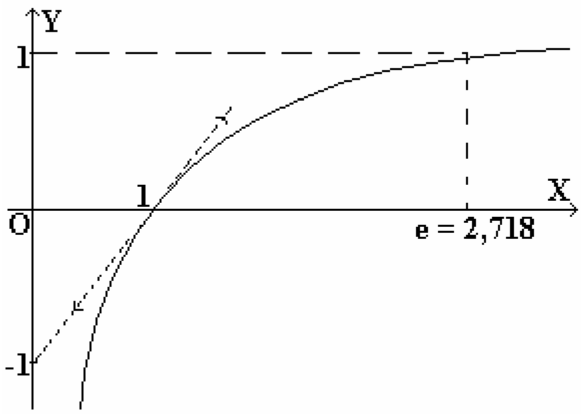
On peut écrire le log comme un développement en série :

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \varepsilon . x^n$$

Ce qui donne pour log 2 :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 0{,}693\ 15\ldots$$

On dessine la courbe y = log x :



[1] Le logarithme d'un nombre négatif se calcule comme un log complexe :
$\log z = \log \rho + i\theta + 2ik\pi$ avec $z = i^2 x$ $(i^2 = -1)$. Ce résultat nécessite une connaissance importante des mathématiques que nous ne pouvons pas étudier dans ce cours.

exercices

1) Faire :

modulo noté §	division euclidienne	résultat avec virgule
17 § 3	17 / 3	17 / 3
249 § 7	249 / 7	249 / 7
2 § 3	2 / 3	2 / 3

2) Décomposer en facteurs premiers les nombres , et s'il y en a qui sont premiers les indiquer :
87 , 1547 , 247 , 127 , 1279 , 4096 , 6561

3) Par décomposition en facteurs premiers trouver le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur) des 4 nombres suivants :
120 , 280 , 728 , 1672

4) Classer par taux d'accroissement les fonctions suivantes :
Le taux d'accroissement c'est la vitesse à laquelle une fonction augmente , on parle de pente.
Pour avoir la pente d'une fonction f(x) qui est aussi la dérivée[2] *, on calcule* $pt = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ex : entre y = x et z = 2x

$f'(x) = \frac{1 - 2}{1 - 2} = 1$

$f'(x) = \frac{2 - 4}{1 - 2} = 2$

donc z a un taux d'accroissement 2 fois plus important que y (z va 2 fois plus vite que y).

$f_1(x) = \frac{1}{x}$; $f_2(x) = x^{10}$; $f_3(x) = x^2$; $f_4(x) = \sqrt{,x}$; $f_5(x) = \log x$; $f_5(x) = 2^x$

5) Par la méthode itérative la plus rapide calculer $\sqrt{,5}$, vous stopperez les calculs à la 6ème itération et vous comparerez votre résultat à la valeur 2,236067977

6) Calculer au moyen d'une calculette scientifique :
$\log_2 32$ $\log_2 1\,024$ $\log_2 4\,096$ $\log_2 65\,536$
Comparer avec les nombres suivants que vous calculerez à la main :
2^{10} , 2^5 , 2^{16} , 2^{12}
qu'en déduisez-vous ?

[2] La pente est la dérivée si b se rapproche de a à ε près.

Algèbre de Boole

Il y a 2 éléments seulement dans une algèbre de Boole. On les notera par commodité 0 & 1 , on peut aussi les appeler a & b.

Calcul binaire

Comme en système décimal on rajoute 1 à gauche du nombre quand celui-ci dépasse le nombre d'éléments.
ex . 0 , 1 , 10 , 11 , 100 , 101 , etc.

Représentation : octale , décimale , hexadécimale , BCD

On représente les nombres binaires par une suite de 0 ou de 1. Comme cette représentation conduit très vite à d'énormes suites de 0 ou de 1 , on a plusieurs façons qui permettent de rendre plus compacte la représentation .

base

On se donne un nombre x de signes différents pour symboliser la suite de chiffres élémentaires. La base est ce nombre x de signes disponibles.
ex : Le système décimal comporte 10 symboles (0 , 1 , . . . , 9) on dit qu'il est en base 10.
Le système de Boole comporte 2 symboles (0 , 1) on dit qu'il est en base 2.

poids des chiffres

Quand on a un nombre , on associe à chaque chiffre un poids.
ex : 6 347 = (6 * 1000) + (3 * 100) + (4 * 10) + 7
On voit aussi que le poids est une puissance de 10 de la place du chiffre.
6 qui est à la $3^{ème}$ place à gauche (on commence à 0) , possède comme poids 10^3 = 1000.
Cette notion toute simple se retrouve dans toutes les bases. Cela permet en outre de faire une conversion d'une base dans une autre base.

conversion binaire -> décimale

En base 2 , on associe à tout chiffre d'un nombre binaire , lu de la droite vers la gauche , une puissance de 2 de la place du chiffre.
ex :
prenons un nombre binaire quelconque : 01001101101[3] => 01001101101b

nombre binaire	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
place	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
puissance de 2	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
poids	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Le nombre binaire vaut donc :
(0 * 1024)+(1*512)+(0*256)+(0*128)+(1*64)+(1*32)+(0*16)+(1*8)+(1*4)+(0*2)+(1*1) = 621d

[3] Quelle différence entre 101 binaire et 101 décimal ? On note la base à la fin du nombre par son initiale, pour qu'il n'y ait pas de confusion.

conversion décimale -> binaire

1ère méthode

On prend le nombre décimal et on lui soustrait le plus grand nombre binaire possible dont on note par 1 le rang du poids correspondant. On continue la séquence en complétant par 0 pour les nombres binaires trop grands.

ex :

prenons un nombre décimal quelconque : 14 279d

Il est compris entre 16 384 = 2^{14} et 8 192 = 2^{13}. Le premier chiffre est donc 1 à la 13ème place à droite.

On recommence avec : 14 279 - 8 192 = 6087d

Il est compris entre 8 192 et 4 096 = 2^{12} . Le 2ème chiffre est 1 à la 12ème place à droite.

On recommence avec : 6087 - 4 096 = 1 991d

Il est compris entre 2048 = 2^{11} et 1 024 = 2^{10}. Le 4ème chiffre est 1 à la 10ème place à droite et on complète la 11ème place par un 0.

On va représenter cela par un tableau.

nombre décimal	+ grand binaire	poids	nombre binaire
14 279	8 192	13	1 - - - - - - - - - - - - -
14 279 - 8 192 = 6087	4 096	12	1 1 - - - - - - - - - - - -
6087 - 4 096 = 1 991	1 024	10	1 1 0 1 - - - - - - - - - -
1 991 - 1 024 = 967	512	9	1 1 0 1 1 - - - - - - - - -
967 - 512 = 455	256	8	1 1 0 1 1 1 - - - - - - - -
455 - 256 = 199	128	7	1 1 0 1 1 1 1 - - - - - - -
199 - 128 = 71	64	6	1 1 0 1 1 1 1 1 - - - - - -
71 - 64 = 7	4	2	1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 - -
7 - 4 = 3	2	1	1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1-
3 - 2 = 1	1	0	1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1

On obtient ainsi un nombre binaire

2ème méthode

On divise (division euclidienne) le nombre par 2 et on note le reste jusqu'au 1 final qui est le bit de plus fort poids.

ex : 1189 à convertir

nombre	pair	reste	
1189/2	1188/2	1	lsb
594/2		0	
297/2	296/2	1	
148/2		0	
74/2		0	
37/2	36/2	1	
18/2		0	
9/2	8/2	1	
4/2		0	
2/2		0	
1/2		1	msb

On obtient 100 1010 0101 qui est bien le résultat

Pour des questions de représentation et de place prise par un nombre binaire (appelé binaire tout court), les informaticiens ont imaginé des systèmes avec des bases plus grandes mais multiples de 2.

représentation octale

On a imaginé de partager un binaire en groupe de 3 chiffres et de coder avec ces groupes les chiffres décimaux.

ex : 10011101001b => 10 011 101 001b => 2 3 5 1 => 2 351o (on rajoute o en fin de nombre pour dire que c'est de l'octale)

On peut appliquer les même règles de conversion entre l'octal et le décimal , que celles que nous avons décrites précédemment. Cependant il est plus simple de "passer" en binaire.

groupe binaire	symbole	valeur
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

2 351o = 10011101001b = 1257d

représentation hexadécimale

On utilise aussi (beaucoup plus que l'octal) la numérotation hexadécimale.
On regroupe par 4 les chiffres d'un binaire. On lui associe les symboles 0 . . . 9 et A . . . F pour les 16 combinaisons que ces 4 bits induisent.

groupe binaire	symbole	valeur
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15

ex : 2 540 791*d* = 26C 4F7*h*

représentation BCD

Pour des commodités de calcul on utilise un codage que l'on nomme Binary Code Decimal et qui reproduit avec 4 bits le décimal. C'est de l'hexa. qui s'arrête à 9.

exercices

a) Avec le tableau de toutes les puissances de 2 ci-dessous.

rang	valeur	rang	valeur	rang	valeur
0	1	11	2 048	22	4 194 304
1	2	12	4 096	23	8 388 608
2	4	13	8 192	24	16 777 216
3	8	14	16 384	25	33 554 432
4	16	15	32 768	26	67 108 864
5	32	16	65 536	27	134 217 728
6	64	17	131 072	28	268 435 456
7	128	18	262 144	29	536 870 912
8	256	19	524 288	30	1 073 741 824
9	512	20	1 048 576	31	2 147 483 648
10	1 024	21	2 097 152	32	4 294 967 296

Combien font $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$? Que pouvez-vous dire?
Trouver une relation générale.

b) Représenter dans toutes les bases (binaire , octale , hexa.) les nombres décimaux suivants :
3 394 , 1 000 , 16 , 147 520 , 635 , 1 048 576 , 1 048 575

c) Convertir en toutes les bases (binaire , octale , hexa. , décimale) les nombres suivants :
10*b* , 10*o* , 10*h* , 500*h* , 10111000*b* , 1 000 000*d* , FF FF FF FF*h*

d) Convertir en BCD (les bits groupés en 4) les nombres décimaux suivants :
458 , 1 024 , 56 , 1 054 836 489 789 999 145

Représentation des nombres

On a bien sûr la possibilité de faire les 4 opérations classiques avec les nombre binaires. Il faut cependant définir une représentation afin de pouvoir obtenir un ensemble de travail. Ces ensembles sont issus naturellement des formats de machines.
Les µ-processeurs ont une organisation mémoire en multiple de 8 bits que l'on appelle un octet. Ce multiple d'octet est la taille des registres interne du µ-processeur. Les premiers circuits travaillaient avec des registres d'un octet , ils furent appelés µ-p à 8 bits. Actuellement beaucoup de µ-p travaillent avec des registres de 32 bits. Cela n'empêche pas l'accès à un octet seulement , mais permet d'agrandir la valeur maximale qui peut être traitée.
Nous regarderons d'abord les nombres entiers et relatifs.

entiers

Sur un registre de x bit on peut représenter un binaire de valeur maximum 2^x-1
ex : avec 16 bits on peut avoir au maximum 1111 1111 1111 1111b = 65 535

<u>Les nombres ne sont pas signés</u>. Ce sont les entiers naturels que nous avons vus précédemment.

relatifs

On doit rajouter un bit donnant le signe. On le met en général à la place du dernier bits (Most Significant Bit , signe de poids le plus fort ou msb). Cela diminue le nombre maximum représentable par 2.

Il y a plusieurs façons de "faire" des nombres négatifs. Les exemples se font sur un octet et la systématique peut facilement être étendus.

<u>la valeur signée</u>

Le msb sert de signe , les autre bits servant à la valeur absolue du nombre.
ex : 5 => 0000 0101 -5 => 1000 0101

<u>le complément à 1</u>

Le msb sert de signe. Le nombre entier est complémenté bit à bit s'il est négatif.
ex : 7 => 0000 0111 -7 => 1111 1000

<u>le complément à 2</u>

Le msb sert de signe. Le nombre entier est complémenté bit à bit s'il est négatif et on additionne 1.

ex : 7 => 0000 0111	pour avoir -7 on fait :	0000 0111	(7)
		1111 1000	(-7 en complément à 1)
	+	1	
		1111 1001	

Cette représentation , qui est généralement utilisée dans les machine , offre l'avantage de permettre des calculs rapides et sans conversion.

ex : -7 + 8 =		1111 1001	
	+	0000 1000	
		1 0000 0001	On oublie le 9ème bit et on a bien 1 comme résultat.

Opérations arithmétiques sur les relatifs

addition

L'addition de 2 bits est naturelle.

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 1 = 0 et 1 de retenue

```
ex :        0111 0101 = 75h = 117d
          + 0000 1100 = Ch  = 12d
            1000 0001 = 81h = 129d
```

soustraction

C'est faire l'addition d'un binaire et du complément à 2 du soustracteur.

ex : 10 - 5

```
       0000 0101  = 5
       1111 1010  Cpl à 1
       1111 1011  Cpl à 2

       0000 1010  = 10
   +   1111 1011  = -5
     ___________
     1 0000 0101  = 5        et on oublie le dernier 1 à droite
```

On peut cependant donner les règles de base de la soustraction.

0 - 0 = 0
1- 0 = 1
1 - 1 = 0
0 - 1 = 1 avec 1 de retenue

ex :

```
        111  1  1  retenue
       1010 1010  = 170
   -   0011 0101  = 53
     ___________
       0111 0101  = 117
```

multiplication

La multiplication d'un binaire par un autre se fait comme dans le cas des décimaux , par multiplication d'un nombre par les chiffres successifs de l'autre et décalage , avec sommation finale.

Dans le cas des binaires la multiplication du nombre par les chiffres de l'autre revient pour le 1 à reporter le nombre avec son décalage , ou pour le 0 à décaler pour le nombre suivant.

ex :

```
                    1 1 0 1 0 0 0 1    =  D1h  =   209d
                  * 1 1 0 0 1 0 0 0    =  C8h  =   200d
                  _________________
                    - - - - - - - -
                  - - - - - - - -
                - - - - - - - -
              1 1 0 1 0 0 0 1
            - - - - - - - -
          - - - - - - - -
        1 1 0 1 0 0 0 1
      1 1 0 1 0 0 0 1
  _________________________________
  1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0    =  A348h  =  41800d
```

division

La division d'un entier (relatif) par un autre est une division euclidienne , c.a.d. partie entière et reste.
La division d'un binaire par un autre se fait comme dans le cas des décimaux , par soustraction du plus grand motif du dividende par le diviseur et décalage à droite.
Il n'y a qu'une comparaison à faire , entre le motif et le diviseur , pour savoir si on a un 1 ou un 0.
ex :

1177 / 13 = 90 reste 7 on convertit en hexa. 499*h* / D*h* = 5A*h*

```
   1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1
 - 1 1 0 1                   0

   1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1
 -   1 1 0 1                   1
   ---------------------
   0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1

       1 0 1 0 1 1 0 0 1
     - 1 1 0 1                   0

       1 0 1 0 1 1 0 0 1
     -   1 1 0 1                   1
       -----------------
       0 1 0 0 0 1 0 0 1

         1 0 0 0 1 0 0 1
       -   1 1 0 1                   1
         ---------------
         0 0 1 0 0 0 0 1

             1 0 0 0 0 1
           - 1 1 0 1                   0

             1 0 0 0 0 1
           -   1 1 0 1                   1
             -----------
             0 0 0 1 1 1

                 0 1 1 1
               - 1 1 0 1                   0

                   1 1 1    reste
```

On obtient bien 5A*h* ou 90 comme résultat , et 7 comme reste.

Dans l'ex. on a obtenu le résultat en 8 opérations élémentaires (comparaison et décalage). En fait le nombre d'opérations maximales est la taille en bits du nombre.
Certain µ-processeurs intègrent une unité de multiplication et division entière dans le silicium. Cette unité n'est pas toujours optimisée , mais l'opération , multiplication ou division , sera toujours exécutée plus rapidement que la suite d'instructions simples équivalentes. Excepté le cas d'une multiplication | division par un nombre en puissance de 2. Dans ce cas cela revient à décaler respectivement à gauche ou à droite , du chiffre (nombre de la puissance).

```
ex :  10 * 8 = 80
            1010
            1000
         1010000
```

C'est une "astuce" classique quand on a *d'énormes problèmes de vitesse* mais elle est **<u>spécialement illisible</u>** , à ne jamais utiliser dans un programme normal.

Opérations booléennes

Nous allons donner une description et un tableau récapitulatif des opérations booléennes courantes. Ces opérations sont unaires ou binaires (elles s'effectuent sur 1 bit ou sur 2 bits).

On notera B l'ensemble de Boole , et x un élément de B.

le NON

C'est une opération unaire qui inverse les bits (nous l'avons entrevue dans le complément à 2).

On la notera $\boxed{\sim}$. $x \in B$ --- $\boxed{\sim}$ ---> $x \in B$

le OU

C'est une opération binaire qui donne 1 si l'un ou l'autre des bits est à 1.

On la notera $\boxed{\vee}$ ou $\boxed{|}$. $x \in B$, $y \in B$ --- $\boxed{\vee}$ ---> $z \in B$

le ET

C'est une opération binaire qui donne 1 si l'un et l'autre des bits est à 1.

On la notera $\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{\&}$. $x \in B$, $y \in B$ --- $\boxed{\wedge}$ ---> $z \in B$

le OU EXCLUSIF

C'est une opération binaire qui donne 0 si les 2 bits sont identique.

On la notera $\boxed{\oplus}$ ou $\boxed{\wedge}$. $x \in B$, $y \in B$ --- $\boxed{\oplus}$ ---> $z \in B$

tableau :

x	~x
0	1
1	0

x	y		x | y	x & y	x ^ y
0	0		0	0	0
0	1		1	0	1
1	0		1	0	1
1	1		1	1	0

nota :
Pour les binaires les opérations sont effectuées bit à bit.

ex :

```
  011010001        011010001        011010001
^ 010101100      & 010101100      | 010101100
-----------      -----------      -----------
  001111101        010000000        011111101
```

exercices

a) Faire les conversions de :
1896*d* , 1256*d* , 478*d* , 18914*d* , 573*d*

b) Faire , avec les conversions du (a) :
1896*d* * F2*h* 1256*d* - 478*d* 18914*d* / 573*d*

c) Faire , et expliquer l'action finale :
010101100 | 01 010101100 & 111111101 010101100 ^ 111111111

d) Faire , et dire ce que représente le résultat :
0010010 ^ 0100100

e) Soit X un nombre binaire de 9 bits. Nous voulons positionner à 0 ou 1 certains bits de X . Donner les opérations booléennes nécessaires :

i) Le 3ème bit à 1 , et le 6ème à 0. Ce que l'on note par :
- - - 0 - - 1 - -

ii) - 111 - 00 - -

iii) 01111 0000

iv) 00- - - 0101

v) Inverser les 4 bits de poids faibles. Inversion que l'on note !
- - - - - ! ! ! !

vi) - 0 - ! ! - 1- !

Algèbre booléenne

A la suite des opérations booléennes nous pouvons donner une liste de quelques relations qui forment l'algèbre de Boole.

0)	a = 0 ou 1		B a seulement 2 éléments
1)	a | 0 = a		0 est élément neutre pour |
2)	a | 1 = 1		
3)	a & 0 = 0		
4)	a & 1 = a		1 est élément neutre pour &
5)	a | a = a		| est stable
6)	a & a = a		& est stable
7)	a | b = b | a		| est commutative
8)	a & b = b & a		& est commutative
9)	(a | b) | c = a | (b | c)		| est associative
10)	(a & b) & c = a & (b & c)		& est associative
11)	a | (b & c) = (a | b) & (a | c)		| est distributive par rapport à &
12)	a & (b | c) = (a & b) | (a & c)		& est distributive par rapport à |
13)	a | (a & b) = a & (a | b) = a		
14)	~~a = a		
15)	~a & a = 0		voir tables de vérité de &
16)	~a | a = 1		voir tables de vérité de |
	Théorème de Morgan		
17)	~ (a & b) = ~a | ~ b		
18)	~ (a | b) = ~a & ~b		

Certaines relations sont redondantes. Mais il est utile de les connaître ou de savoir les retrouver.

A l'aide des autres relations retrouver (5) , (6) , (11) , (12) , (13) .

ex : démo. partielle de (13).

par 0) x & (x | y) = x & (x | 0) ou x & (x | 1)

par 1) x & (x | 0) = x & (x)
par 6) x & x = x

par 2) x & (x | 1) = x & (1)
par 4) x & 1 = x

En réunissant les 2 (elles ont même résultat) :
x & (x | b) = x ou x = x
Donc x & (x | b) = x est vrai.

exercices

Dans tous les exercices on s'efforcera de donner (par son numéro) la règle ou relation utilisée pour trouver le résultat (comme fait dans l'ex. de résolution partielle de (13)).

1) Donner le résultat de : ~ (a | b |c) et de ~ (a & b & c)que peut-on en déduire ?

2) Donner le résultat de : (a & b) | (~a & ~b) quelle est cette opération ?

3) Donner le résultat de : ~a | (~b & (a & b))
((a | b) & (a | c) & (~b & ~c)) & (~a | (~a & ~b))
((a & ~b) | (~a & b)) & (a & b)

3) On peut réduire la phrase suivante "*Le train peut rouler* ***si*** *le signal est vert* ***et*** *les portes* ***ne*** *sont* ***pas*** *ouvertes*" à la relation : x = a & ~b
(ne - - - pas , ni , pas , etc. vaut la négation donc ~).
faire de même pour :

a) Les voitures s'arrêtent si elles n'ont plus d'essence ou le feu n'est pas vert ou il y a un bouchon.

b) Les avions volent s'ils ont des moteurs et des pilotes à l'intérieur ou des systèmes de commandes au sol et des opérateurs.

c) Le signal est bon si la valeur_1 est bonne et la valeur_2 est bonne mais pas la valeur_3 ni la valeur_4.

d) La lampe s'éclaire si la lampe est bonne et l'interrupteur est fermé et le compteur est ouvert et la centrale n'est pas en panne et l'EDF n'est pas en grève ou , la pile est bonne et le boîtier est bien fermé et la lampe est bonne et l'interrupteur est fermé.
Simplifier l'expression obtenue.

e) La fusée peut partir si il n'y a pas de fuite et pas de défaillance du matériel et pas de problème météo.
Donner l'inverse de cette phrase et vérifier que cela correspond aux relations trouvées.

Maintenant , après le SI dans la phrase , on associe à chaque verbe "être" ou "avoir" le signe = = (test d'égalité) , et "ne pas être" ou "ne pas avoir" à != (test d'inégalité).
ex : "*Un homme est instruit s'il a été à l'école et n'a pas oublié*"
=> x = (x = = a) | (x != b)

Reprendre et résoudre (a) , (b) , (c) , (d) et (e)

Grand nombres

Nous avons vu les représentations et calculs avec des nombres entiers (signés ou non).
Les ordinateurs savent aussi travailler avec des nombres dits "flottants" , c.a.d. des nombres qui appartiennent à l'ensemble R (on appelle aussi ces nombres des réels).

Représentation des nombres flottants en machine

Pour représenter un nombre flottant on utilise une numérotation , que l'on appelle sur les calculatrices la "notation scientifique" , et qui consiste à donner le nombre sous forme de mantisse et exposant , les 2 étant signés.
ex : 3,14 = 314 * 0.01 = 314 * 10^{-2}

On a une organisation du nombre avec le schéma suivant :

SE	exposant	SM	mantisse

SE = signe de l'exposant , SM = signe de la mantisse

On peut considérer que l'exposant est un nombre binaire signé en complément à 1 comme vu dans les nombres relatifs. Le signe de l'exposant disparaît et il ne reste plus que le signe du nombre , car on désire garder le plus de bits pour la mantisse.
On a l'organisation suivante :

S	exposant	mantisse

flottant

Admettons que nous soyons capables de représenter les chiffres décimaux dans la machine. Nous allons voir pourquoi cette représentation s'appelle flottante.
On prend 3 chiffres et signes pour l'exposant , 5 pour la mantisse et on représente π = 3.1415926.

s		e1	e2	e3		m1	m2	m3	m4	m5			
+		-	0	4		3	1	4	1	5	=	31415 * 10^{-4}	= 3.1415
+		-	0	3		0	3	1	4	1	=	3141 * 10^{-3}	= 3.141
+		-	0	2		0	0	3	1	4	=	314 * 10^{-2}	= 3.14
+		-	0	1		0	0	0	3	1	=	31 * 10^{-1}	= 3.1
+			0	0		0	0	0	0	3	=	3 * 1	= 3
+		+	0	1		0	0	0	0	0	=	0 * 10	= 0

On voit que l'on a tout avantage à utiliser le plus possible de l'espace de la mantisse si on veut avoir de la précision sur le nombre. Cependant, lors des calculs entre 2 nombres qui n'ont pas le même exposant, il faut bien en décaler un par rapport à l'autre afin d'effectuer l'opération.
ex :

s	e1	e2	e3		m1	m2	m3	m4	m5	
+	-	0	4		3	1	4	1	5	3.1415
+	-	0	2		9	9	7	4	2	+ 997.42
+	-	0	2		0	0	3	1	4	normaliser π
+	-	0	2	1	0	0	0	5	6	additionner
+	-	0	1		1	0	0	0	5	décaler pour normaliser

C'est pour cela que l'on a appelé cette organisation les nombres flottants. Car la place de la virgule est flottante en fonction de la puissance de l'exposant.

Nous n'allons pas développper davantage le sujet des nombres flottants. Mais nous allons donner les principales façons usuelles de coder qui existent.

normes

La plus petite façon de coder un nombre flottant se fait sur 32 bits. Il existe d'exotiques codages sur 16 bits mais ils sont très peu usités du fait de leur manque de précision.
Nous allons prendre les formats d'Intel comme ex. afin de voir comment sont organisés les différents réels.

nom	range	bits		exposant	mantisse
simple précision	$\pm 10^{\pm 38}$	32	s	7	24
double précision	$\pm 10^{\pm 308}$	64	s	10	53
extend précision	$\pm 10^{\pm 4932}$	80	s	15	64

De plus grandes représentations existent encore sur des ordinateurs qui servent au calcul intensif. Par ex., le Cray a un format de flottant sur 128 ou 256 bits de large.

précision et erreurs

Le plus gros problème qui se pose avec les réels c'est la précision.
Si on reprend l'ex. précédent où l'on a montré comment faire une addition , on voit que :

$$3.1415 + 997.42 = 1000.5$$

alors que le vrai résultat aurait dû être 1000.5615.
On a perdu 0.0615 dans l'opération.
Cet ex. simpliste montre que la pleine précision ne peut pas toujours être conservée , et que lors d'un calcul on perd de l'information.

Les ordinateurs comptent faux.

Les algorithmes qui utilisent le calcul intensif , font plusieurs milliers de fois des opérations sur les réels. Il est évident que le résultat est faux.
Tout l'art du concepteur du programme est de savoir jusqu'à combien de décimales son résultat est juste.
C'est pourquoi l'informatique scientifique est un domaine à part entière , qui emploie des personnes avec une très solide formation de maths.
On peut ranger dans la catégorie scientifique , la C.A.O. , la C.F.A.O. et la D.A.O. étant entendu que chaque domaine possède sa spécificité.

B.C.D.

Quand on dit à un financier que son ordinateur ne compte pas juste il entre en transes. Pour stopper ses convulsions les informaticiens ont inventé un nouveau codage des grands nombres.
Le problème posé n'est pas d'avoir une précision importante après la virgule , mais de perdre le moins possible d'information lors des calculs.
Pour cela le format B.C.D. (Binary Coded Decimal) a été inventé.
On peut se représenter le format BCD comme un tableau de nombres décimaux , sur lequels on peut faire les opérations habituelles. Chaque chiffre prend la place d'1/2 octet. On l'appelle un digit.

ex : repésenter 58694132440078.45 sur un BCD de 18 digits de long.

17		15					10					5					0
+	5	8	6	9	4	1	3	2	4	4	0	0	7	8	.	4	5

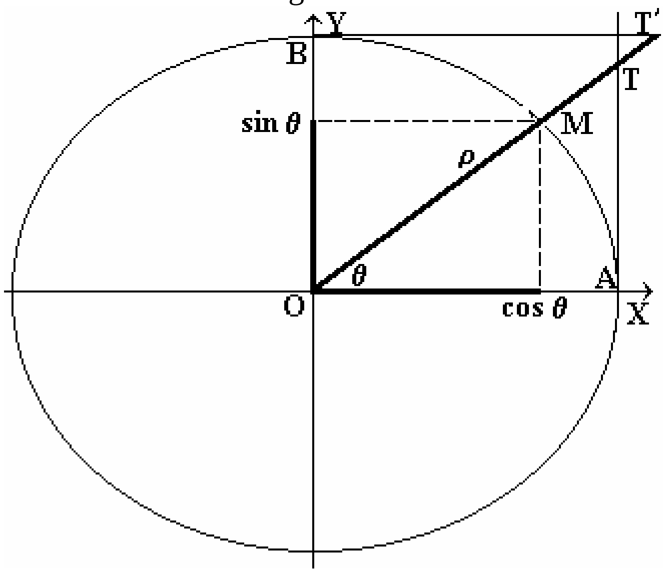
Ce format résout un certain nombre de problèmes pour les financiers mais pas pour les scientifiques.

Mathématiques pour Graphisme

Nous allons aborder un chapitre qui fait beaucoup référence aux maths. et qui se développe de plus en plus, c'est le graphisme. Il est nécessaire de faire des rappels de notions vues durant la scolarité.

Trigonométrie

On donne un cercle de rayon 1 , centré sur un repère orthonormé O,X,Y.
On définit un segment de droite , partant du centre et passant par le point M situé sur le cercle.
L'angle que forme ce segment de droite avec l'axe des X est noté θ. La longueur OM est notée ρ.
Le sinus (noté sinθ) est la projection du point M sur l'axe OY.
Le cosinus (noté cosθ) est la projection du point M sur l'axe OX.
La tangente est la longueur AT et est notée tgθ.
La cotangente est la longueur BT ' et est notée cotgθ.



Un angle est toujours exprimé en radians. C'est pour des raisons de commodité que l'on parle de degrés. L'angle qui parcourt tout le cercle vaut 2π radians. Donc un angle de 90° vaut π/2 radians.

quelques valeurs remarquables

t en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t en degrés	0	30	45	60	90
sin t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	* [4]
cotg t	* [4]	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

quelques formules de trigo

D'après le théorème de Pythagore :

* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ = rayon du cercle[5]

* $-1 \leq \sin\theta \leq 1$
* $-1 \leq \cos\theta \leq 1$
* $tg\theta = \sin\theta / \cos\theta = 1 / cotg\theta$
* $cotg\theta = 1 + tg^2\theta$
* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
* $\cos(-\theta) = \cos\theta$

4

[4] * veut dire : n'existe pas

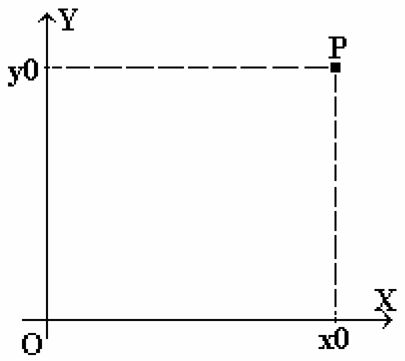
[5] $\sin^2\theta$: c'est tout le sinus qui est au carré. Idem pour cos

Coordonnées : cartésiennes , polaires

Pour déterminer où se trouve un point sur un plan (ou dans un volume) on a besoin de connaître 2 valeurs (3 pour un volume).

cartésiennes

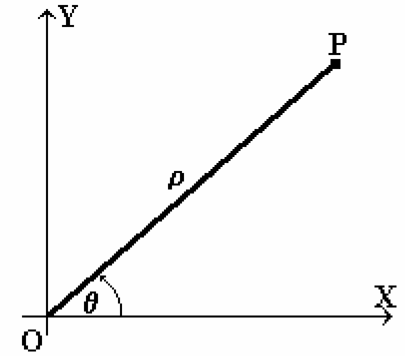
Ce sont les coordonnées classiques en X , Y.
On définit une origine et 2 axes perpendiculaires X et Y.



Le point P a comme coordonnées (x0 , y0) dans le système orthonormé { O , X , Y }.

polaires

On définit une origine et 2 axes perpendiculaires X et Y.
Un point est repéré par 2 valeurs qui sont : la distance ρ (longueur du segment de droite) entre l'origine et le point , et l'angle θ que forme ce segment de droite avec l'axe des X.



Le point P a comme coordonnées (ρ , θ) dans le système orthonormé { O , X , Y }.

correspondance

notons (x , y) et (ρ , θ) les coordonnées.
Pour passer d'une représentation à une autre on utilise les formules suivantes :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = \rho \,.\, \cos\theta$$

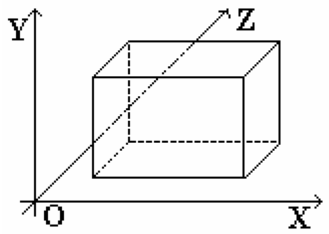
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad y = \rho \,.\, \sin\theta$$

Représentation d'une figure

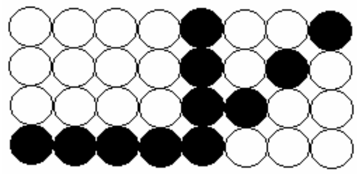
Une figure , que nous prenons de forme géométrique , est un composé de lignes. Les lignes peuvent être courbes , droites , brisées , etc. Il existe 2 façons de représenter ces figures.
Nous prendrons une figure simple (un cube) afin d'illustrer les propos suivants.

Le dessin "Bit Map"

Les lignes d'une figure sont constituées d'une succession de points. Tous ces points sont enregistrés en mémoire (coordonnées et couleurs).
ex :



Les traits sont faits avec l'affichage de pixels qui ont la forme suivante :



Avantages :

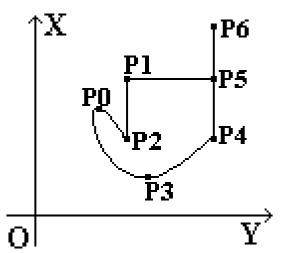
* Cela permet d'avoir un tracé de figure à la vitesse de l'accès mémoire.

Inconvénients :

* La détermination d'un contour est très difficile.
* La place mémoire utilisée est importante.

Le dessin Vectoriel

On donne seulement l'ensemble des points formant le début ou la fin d'une arête , ou des points significatifs
comme dans le cas des courbes de Béziers ou des β-splines[6]. Le tracé des lignes se fait par programme lors de la construction du dessin sur le périphérique de sortie (écran ou imprimante).
ex :



Avantages :

* Place mémoire occupée très réduite.
* La détermination d'un contour est simple.

Inconvénients :

* Nécessité du calcul des lignes joignant 2 points.
* Structure de données pour stocker les points assez complexe.

conclusion

Les 2 techniques sont utilisées et de nombreux algorithmes permettent d'augmenter leurs possibilités , remplissage , zoom , etc.

Passer d'un dessin vectoriel à un dessin bit-map est assez simple , c'est un peu plus compliqué dans le sens contraire.

---

[6] Technique mathématique permettant de tracer une courbe enveloppe de 2, 3, 4, n points de contrôle.

Produit d'une matrice par un vecteur

Soit un dessin D dans un référenciel , on peut dresser la liste des opérations possibles que l'on peut faire subir à ce dessin. On peut le déplacer (translation) , le faire tourner (rotation) , ou l'agrandir/rétrécir (facteur d'échelle).
Toutes ces opérations s'effectuent en multipliant une matrice par le vecteur coordonnée.
Le vecteur coordonnée correspond aux coordonnées du point dans le repère choisi , rangées dans un ordre précis.

produit matrice/vecteur

Les matrices que l'on va utiliser sont carrées , c.a.d. qu'elles ont autant de lignes que de colonnes , on dit qu'elles sont d'ordre n , avec n la dimension d'une ligne ou d'une colonne.
Les matrices sont de même ordre que les vecteurs.

Pour faire le produit :
on prend la 1ère ligne de la matrice , on multiplie terme à terme le vecteur , on additionne les sous-produits et on obtient la 1ère valeur du nouveau vecteur. On recommence l'opération avec toutes les lignes de la matrice.

ex : matrice et vecteur d'ordre 3. $\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (l_{11} \bullet v_1) + (l_{12} \bullet v_2) + (l_{13} \bullet v_3) \\ (l_{21} \bullet v_1) + (l_{22} \bullet v_2) + (l_{23} \bullet v_3) \\ (l_{31} \bullet v_1) + (l_{32} \bullet v_2) + (l_{33} \bullet v_3) \end{vmatrix}$

On prend des valeurs numériques. $\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 \bullet 2) + (2 \bullet 7) + (3 \bullet 3) \\ (4 \bullet 2) + (5 \bullet 7) + (6 \bullet 3) \\ (7 \bullet 2) + (8 \bullet 7) + (9 \bullet 3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+14+9 \\ 8+35+18 \\ 14+56+27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 \\ 61 \\ 87 \end{vmatrix}$

vecteur point

Nous avons décrit un point comme un composé de ses coordonnées. On peut donc le représenter comme un vecteur de dimension 2 ou 3 suivant que l'on se place dans le plan ou dans l'espace.

ex : Le point de coordonnées { 3 , 6 } peut s'écrire : $\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix}$

nouvelles coordonnées

En utilisant le produit matrice vecteur on s'apperçoit que nous donnons de nouvelles coordonnées au point de départ. Cette technique de déplacement du point est extrêmement intéressante car elle ne demande qu'une seule opération , le produit matrice vecteur , répétée éventuellement plusieurs fois , et seules les valeurs de la matrice changent suivant l'action désirée.

Dans toute la suite nous allons prendre comme base de travail que nous nous situons dans un plan orthonormé. Cela veut dire que nous allons travailler en 2 dimensions. Les méthodes et résultats peuvent se reporter au cas 3 dimensions sans difficulté.
Nous donnerons en fin de chapitre un tableau des différentes formes des matrices de mouvements en 2 et 3 dimensions.

translation

Nous avons un point (ou un ensemble de points) et nous voulons le déplacer.

Si nous écrivons une équation cela revient à poser :

$x' = x + t$ { x , y } sont les anciennes coordonnées

$y' = y + t'$ { t , t' } sont les valeurs du déplacement désiré

Normaliser

Il nous est impossible de trouver une matrice d'ordre 2 qui permette de faire ce calcul.
Nous sommes obligés de rajouter une colonne à la matrice afin d'avoir les valeurs { t , t' }.
Comme la matrice est carrée on est donc obligé de rajouter une ligne.
Cette transformation de l'ordre 2 de base de la matrice s'appelle normaliser.
Normaliser une matrice c'est donner une matrice d'ordre 3 pour un calcul dans le plan et d'ordre 4 pour un calcul dans l'espace.
On normalise de même le vecteur point en rajoutant un 1 en dernière position.

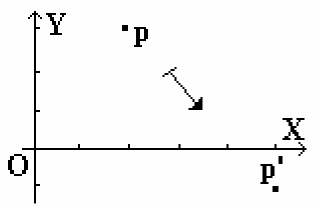
Pour une translation la matrice normalisée a la forme : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Le résultat général a la forme : $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x \bullet 1) + (y \bullet 0) + (t \bullet 1) \\ (x \bullet 0) + (y \bullet 1) + (t' \bullet 1) \\ 0 + 0 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + t \\ y + t' \\ 1 \end{vmatrix}$

ex : Soit un point { 2 , 3 } à translater vers { 5 , -1 }. Alors t = 3 et t' = -4

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 \\ 3-4 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

En dessinant l'opération que nous venons de faire , nous avons :



rotation

Nous avons un point en { a , b } et nous voulons le déplacer suivant un arc de cercle. Le meilleur moyen est d'utiliser une rotation d'un angle α.
On va donc prendre une matrice qui permette d'opérer cette rotation sur le point.

Les matrices de rotation sont de la forme : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

En normalisant la matrice on obtient : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

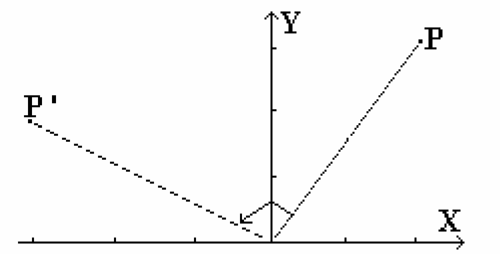
On peut alors donner un résultat général.

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\cos\alpha \bullet v_1)+(\sin\alpha \bullet v_2)+0 \\ (\sin\alpha \bullet v_1)+(\cos\alpha \bullet v_2)+0 \\ 0+0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\cos\alpha \bullet v_1)+(\sin\alpha \bullet v_2) \\ (\sin\alpha \bullet v_1)+(\cos\alpha \bullet v_2) \\ 1 \end{vmatrix}$$

ex : On va prendre : $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $\alpha = 90°$ $\Rightarrow$ cos90° = 0 et sin90° = 1 , on obtient :

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

En dessinant l'opération que nous venons de faire , nous avons :



facteur d'échelle

Le facteur d'échelle (scale) est une homothétie qui permet de translater un groupe de points .

Nous voulons que : $x' = a.x$
$y' = b.y$

Les matrices d'échelle sont de la forme : $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$

En normalisant la matrice on obtient : $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On peut alors donner un résultat général. $\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a \bullet v_1)+(0 \bullet v_2)+0 \\ (0 \bullet v_1)+(b \bullet v_2)+0 \\ 0+0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \bullet v_1 \\ b \bullet v_2 \\ 1 \end{vmatrix}$

ex :

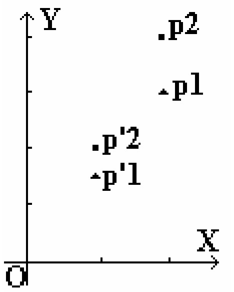
On va prendre 2 points : $p_{11} = 2$, $p_{12} = 3$
$p_{21} = 2$, $p_{22} = 4$

et une matrice : $\begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pour p_1 on a : $\begin{vmatrix} p'_{11} \\ p'_{12} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1 \end{vmatrix}$

Pour p_2 on a : $\begin{vmatrix} p'_{21} \\ p'_{22} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

En dessinant l'opération que nous venons de faire , nous avons :

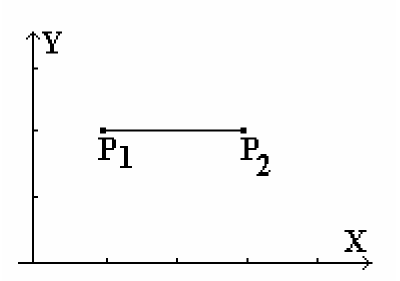


barycentre / isobarycentre

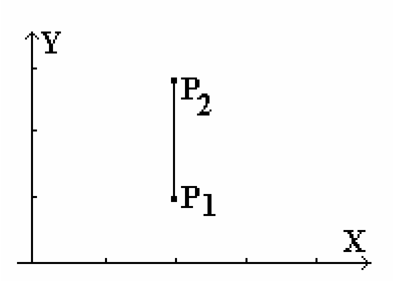
Pour opérer sur une figure comportant plus de 1 point , il faut en premier calculer son barycentre (ou isobarycentre).

Prendre un point arbitrairement de la figure , et appliquer une transformation matricielle sur tous les autres points , avec les calculs obtenus des coordonnées de ce point , est une erreur.

ex.   On a 2 points qui forment une droite. $P_1 = \{ 1 , 2 \}$, $P_2 = \{ 3 , 2 \}$.
Pour la placer verticalement on doit faire une rotation de $\pi/2$ de cette droite.



$\Rightarrow$



En prenant 1 des points comme référence :

rotation du point $P_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$. Le point se retrouve de l'autre côté de l'axe des Y.

Ce n'est absolument pas ce que nous désirons.

Règles

Pour opérer une transformation / rotation / scale sur un objet constitué de plusieurs points:

1) **Il faut calculer l'isobarycentre de l'objet**
2) **Le translater à l'origine**
3) **Lui appliquer la matrice d'opération**
4) **Ne pas oublier de faire la translation inverse pour restituer la place de l'objet.**

calcul du barycentre

Le barycentre ou isobarycentre d'une figure plane constituée de n points est la moyenne de ces points.

On prend toutes les coordonnées en X , on fait leur somme , que l'on divise par le nombre total de points.
On fait de même pour les points de coordonnées Y , on a alors le barycentre G.

$$G = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} ; \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \right)$$

application

1) calcul du barycentre

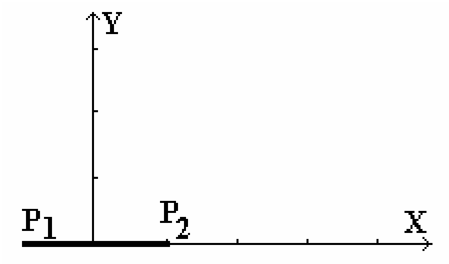
Dans la figure de la droite il semble naturel de dire que le centre de la droite est son barycentre , c.a.d. G = { 2 , 2 }.

Mais on peut aussi faire le calcul :

$G = \{ (P_{1x} + P_{2x}) / 2 \ , (P_{1y} + P_{2y}) / 2 \}$
$G = \{ (1 + 3) / 2 \ , (2 + 2) / 2 \}$
$G = \{ 2 , 2 \}$

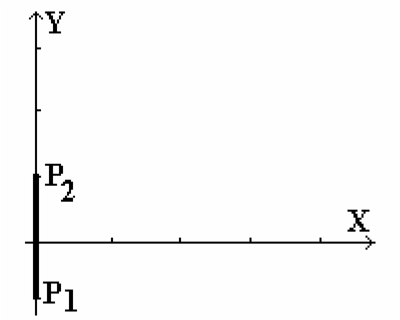
2) Translation des points vers l'origine , avec les coordonnées du barycentre

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2 \\ 2-2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \{ -1 , 0 \} \qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2 \\ 2-2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \{ 1 , 0 \}$$



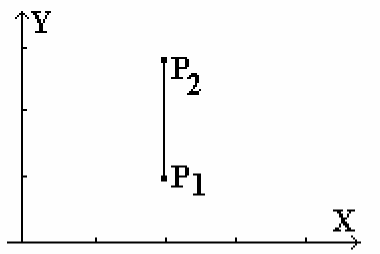
3) Rotation des points de $\pi/2$.

$$P''_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \{ -1 , 0 \} \qquad P''_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \{ 1 , 0 \}$$



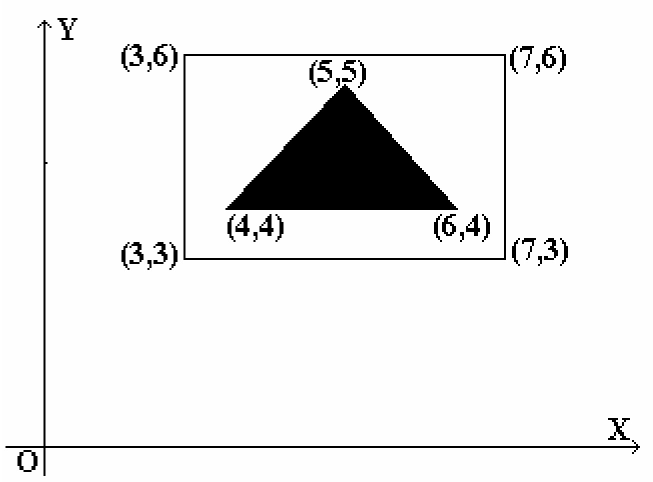
4) Translation inverse des points , avec les coordonnées du barycentre.

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1+2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \{ 2 , 1 \} \qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1+2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = \{ 2 , 3 \}$$



C'est bien le résultat désiré.

On a 2 objets , un triangle plein dans un rectangle (voir dessin).



Les coordonnées sont données en (x,y)

Donner la (ou les) matrice qui permet

1) de faire un effet miroir par rapport à l'axe des Y.

2) idem , mais par rapport à l'axe des X.

3) idem , mais par rapport à l'axe des X **et** des Y.

4) de faire tourner le rectangle autour du triangle d'1/4 de tour.

5) d'agrandir le triangle pour qu'au moins 1 sommet touche un des côtés du rectangle.

6) à partir de la figure, de rétrécir le rectangle pour qu'un au moins de ses côtés touche un des sommets du triangle.

bibliographie

Ouvrages secondaire/supérieur

Tous les chapitres jusqu'au graphisme sont du niveau d'un cours de mathématiques de l'enseignement secondaire. Il nous est impossible de citer tous les ouvrages traitant de ces sujets. Nous pouvons seulement donner les références des ouvrages que nous avons consultés en insistant sur le côté partial de notre choix au vu de la pléthore d'ouvrages tous plus excellents les uns que les autres.

quelques références

André Warusfel	Dictionnaire raisonné de mathématiques	Seuil[7]
J. Quinet	Les 6 tomes	Dunod

Ouvrages sur le graphisme

Serie Schaum	Infographie cours et problèmes	M^{C} Graw Hill
Philippe Schweizer	Infographie (2 tomes)	Presses Polytechniques Romandes

Ouvrages de réflexion générale

Jean Dieudonné	Pour l'honneur de l'esprit humain (Les mathématiques aujourd'hui)	Hachette
Ian Stewart	Les mathématiques	Belin

Mathématiques appliquée à l'informatique

Jérôme Ramunni	La physique du calcul (Histoire de l'ordinateur)	Hachette
Bibliothèque pour la science	Le calcul intensif	Belin

Historique

Andrew Hodges	Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence	Bibliothèque scientifique Payot

---

7 Malheureusement épuisé et aucune réédition n'est prévue.

Table des matières

Cours de Mathématique

Arno LLOP