

Monte Carlo algorithm under rough modeling

Haris Aitcheikh et Gaetan Fraise

18/02/2020

Sommaire

- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
 - Brownien semi-stationnaire
 - Le noyau
- 2 Modèle rBergomi
- 3 La méthode de Cholesky
 - La fonction d'auto-covariance du processus
 - Implémentation de la méthode
- 4 Le schéma Hybride
 - Présentation de la méthode
 - Implémentation de la méthode
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
 - Brownien semi-stationnaire
 - Le noyau
- 2 Modèle rBergomi
- 3 La méthode de Cholesky
- 4 Le schéma Hybride
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

Définition du processus

Definition (Processus Brownien semi-stationnaire)

Un processus Brownien semi-stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est défini, pour $t \in \mathbb{R}$, par :

$$X_t = \int_{-\infty}^t g(t-s)\sigma(s)dW(s) \quad (1)$$

où $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien bilatéral, $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_t$ -prévisible et à trajectoires localement bornées et $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction borélienne appelée noyau.

Nous supposons par la suite que le processus σ est de carré intégrable, $\mathbb{E}[\sigma_t^2] < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et stationnaire, c'est à dire pour $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[\sigma(s)] = \mathbb{E}[\sigma(t)], \quad \text{Cov}(\sigma(s), \sigma(t)) = \text{Cov}(\sigma(0), \sigma(|s-t|))$$

Sous ces hypothèses, l'intégrale stochastique dans (1) est bien définie si la fonction g est de carré intégrable.

Le noyau

X n'est pas une semimartingale lorsque le noyau se comporte comme une fonction puissance au voisinage de 0

Un cadre de travail basé sur la notion des fonctions à variation régulière

Nous faisons les hypothèses suivantes sur le noyau :

(H1) : Soit $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$,
 $g(x) = x^\alpha L_g(x)$, pour $x \in (0, 1]$.

Où $L_g : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est à variation lente en 0 et bornée sur tout intervalle $(u, 1]$ avec $u \in (0, 1)$.

(H2) : La fonction g est C^1 sur $(0, \infty)$

- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
- 2 Modèle rBergomi**
- 3 La méthode de Cholesky
- 4 Le schéma Hybride
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

Modèle rBergomi

Le modèle rBergomi est défini comme un couple (S, V) où S_t est le processus de prix défini pour $t \in [0, T]$, par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sqrt{V_u} dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t V_u du\right) \quad (2)$$

avec $S_0 \in \mathbb{R}^+$ et le processus de variance V_t , pour $t \in [0, T]$:

$$V_t = \zeta_0(t) \exp\left(\eta W_t^\alpha - \frac{\eta^2}{2} t^{2\alpha+1}\right) \quad (3)$$

où $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$, et $\eta > 0$ sont des paramètres déterministes.

Le processus B est un mouvement Brownien unidimensionnel standard tel que :

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^\top \quad (4)$$

où $\rho \in (-1, 1)$ le paramètre de corrélation, W_t et W_t^\top sont deux mouvement Brownien standards indépendants.

Processus de Volterra

Nous définissons le processus W_t^α pour $t \in [0, T]$ par :

$$W_t^\alpha = \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t (t - u)^\alpha dW_u \quad (5)$$

pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

Remarque

On remarque que le processus W^α appartient à la classe des Browniens semi-stationnaires tronqués. Au vu de la définition 1, nous définissons $(\sigma_t)_t$ constant et égale à $\sqrt{2\alpha + 1}$ ainsi que le noyau g défini pour $x \in \mathbb{R}_+^$ par $g(x) = x^\alpha$.*

- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
- 2 Modèle rBergomi
- 3 La méthode de Cholesky
 - La fonction d'auto-covariance du processus
 - Implémentation de la méthode
- 4 Le schéma Hybride
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

La fonction d'auto-covariance du processus

Nous définissons le processus X pour tout $t \in [0, T]$ par $X_t := (B_t, W_t^\alpha)$ et ainsi sa matrice de variance covariance discrétisé au temps $\frac{i}{n}$ par :

$$(\Gamma)_{i,j} = \Gamma\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

Nous avons que, pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$, et pour tout $t, s \in [0, T]$:

- $\mathbb{E}(W_s^\alpha W_t^\alpha) = (2\alpha + 1) \int_0^{t \wedge s} (t-u)^\alpha (s-u)^\alpha du = t \wedge s^{2\alpha+1} G\left(\frac{t \wedge s}{t \vee s}\right)$
avec G définie pour $x \leq 1$ par $G(x) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} x^{-\alpha} {}_2F_1(1, -\alpha, 2-\alpha, x)$
- $\text{Var}(W_t^\alpha) = t^{2\alpha+1}$
- $\mathbb{E}(B_t W_s^\alpha) = \rho \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\alpha+1} (s^{\alpha+1} - (s - (t \wedge s))^{\alpha+1})$
- $\mathbb{E}(B_t B_s) = s \wedge t$

Implémentation de la méthode

Nous avons obtenu un vecteur de taille $2n$. Ainsi nous obtenons le mouvement Brownien sur les éléments paires de ce vecteur et le processus de Volterra sur les éléments impaires.

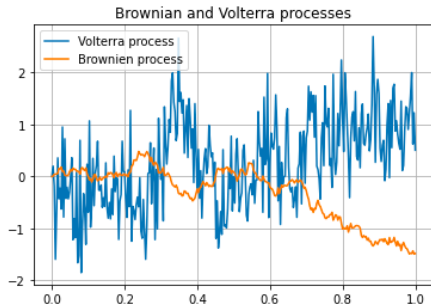


FIGURE 1 – Trajectoires du mouvement brownien et du processus de Volterra pour $\alpha = -0,43$ et $n = 310$.

Implémentation de la méthode

On peut alors simuler les processus présent dans le modèle de rBergomi :

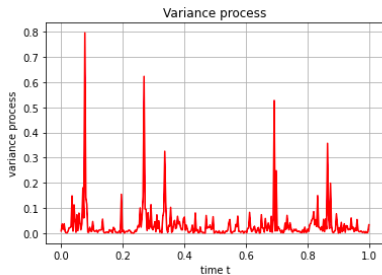


FIGURE 2 – Trajectoires du processus de variance avec la méthode de Cholesky pour $\alpha = -0,43$ et $n = 310$.

- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
- 2 Modèle rBergomi
- 3 La méthode de Cholesky
- 4 Le schéma Hybride
 - Présentation de la méthode
 - Implémentation de la méthode
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

Présentation de la méthode

Nous discrétisons le processus (X_t) sur la grille de temps $\{t, t - \frac{1}{n}, t - \frac{2}{n}, \dots\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme σ est supposé assez régulier, on peut faire l'approximation :

$$X(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(t - \frac{k}{n}) \int_{t - \frac{k}{n}}^{t - \frac{k}{n} + \frac{1}{n}} g(t - s) dW(s) \quad (6)$$

Nous séparons alors la somme en deux. Pour k petit, par (H1) on peut faire l'approximation suivante :

$$g(t - s) \approx (t - s)^\alpha L_g(\frac{k}{n}), t - s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \setminus \{0\}$$

et pour k grand ($k \geq 2$), nous choisissons $b_k \in [k-1, k]$, et on peut approcher par :

$$g(t - s) \approx g(\frac{b_k}{n}), t - s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$$

Présentation de la méthode

Le schéma Hybride peut être alors écrit sous la forme

$X_n(t) = \hat{X}_n(t) + \check{X}_n(t)$ où :

- $\hat{X}_n(t) = \sum_{k=\kappa+1}^{N_n} g(\frac{b_k}{n}) \sigma(t - \frac{k}{n}) (W(t - \frac{k}{n} + \frac{1}{n}) - W(t - \frac{k}{n}))$
- $\check{X}_n(t) = \sum_{k=1}^{\kappa} L_g(\frac{k}{n}) \sigma(t - \frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} (t-s)^{\alpha} dW(s)$

La suite optimale $(b_k^*)_{k \in [\kappa+1, \infty)}$ sera choisie suite à la proposition (2.28) présente dans **Bennedsen**, **Lunde** et **Pakkanen**. Le choix optimal est donné pour $k \geq \kappa + 1$ par :

$$b_k^* = \left(\frac{k^{\alpha+1} - (k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Implémentation de la méthode

Nous allons simuler le processus discrétisé au temps $\frac{i}{n}$, avec $i = 0, \dots, nT$ et $\kappa = 1$, défini par :

$$X_n(\frac{i}{n}) = \sqrt{2\alpha + 1}(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (\frac{i}{n} - s)^\alpha dW(s) + \sum_{k=\kappa+1}^i (\frac{b_k}{n})^\alpha (W_{\frac{i-(k-1)}{n}} - W_{\frac{i-k}{n}}))$$

Le choix des paramètres du modèles selon **Bennedsen**, **Lunde** et **Pakkanen** est donné dans la figure suivante :

| S_0 | ζ | η | α | ρ |
|-------|--------------------|--------|----------|--------|
| 1 | 0,235 ² | 1.9 | -0.43 | -0,9 |

FIGURE 3 – Paramètres utilisés dans le modèle *rBergomi*

Implémentation de la méthode

Avec $T = 1$, et un pas de discrétisation $n = 310$, nous obtenons :

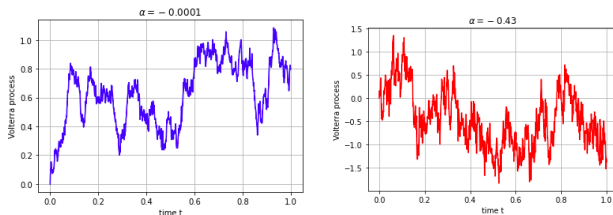


FIGURE 4 – Trajectoires du processus de Volterra pour $\alpha = -0,01$ et $-0,43$.

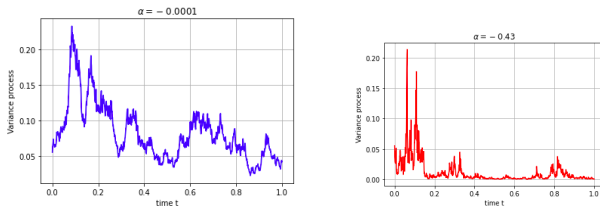


FIGURE 5 – Processus de Variance pour $\alpha = -0,01$ et $-0,43$.

Implémentation de la méthode

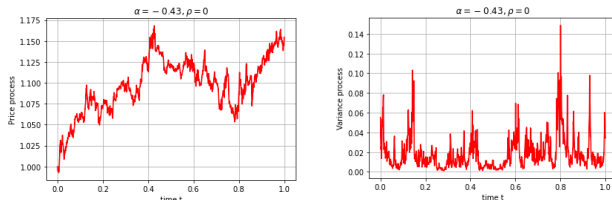
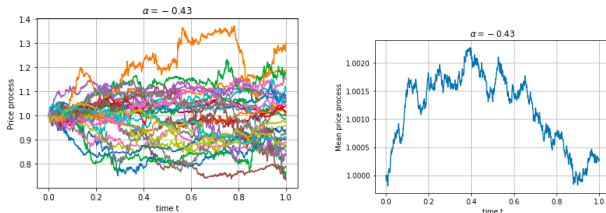


FIGURE 6 – Trajectoires du processus de prix et de variance pour $\alpha = -0.43$ et $\rho = 0$.

Processus de prix pour 30 simulations avec $\alpha = -0,43$ et trajectoire moyenne sur 10000 simulations pour $\alpha = -0,43$:



- 1 Étude du Brownien semi-stationnaire
- 2 Modèle rBergomi
- 3 La méthode de Cholesky
- 4 Le schéma Hybride
- 5 Pricing d'options sous rough volatility

Pricing d'options sous rough volatility

Les trajectoires du processus ayant été simulées dans le chapitre précédent, il nous est alors facile d'estimer cette quantité. Nous avons, pour un nombre élevé de simulation :

$$C(S_0, K, T) = \mathbb{E}((S_T - K)_+) \approx C_M(S_0, K, T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_T^i - K)_+$$

Nous définissons, pour $k = \log(K)$:

- $BS(v; s, k) = s\mathcal{N}(d_1) - e^k \mathcal{N}(d_2)$ avec $d_{1/2} = \frac{(\log(s)-k)}{\sqrt{v}} \pm \frac{\sqrt{v}}{2}$.
- $\sigma^2(k, T)T = BS^{-1}(\Pi^m(k, T), S_0, k)$

où $\Pi^m(k, T)$ le prix observé sur le marché de l'option au temps 0 et $\sigma^2(k, T)$ la volatilité implicite.

Pricing d'options sous rough volatility

Avec les paramètres donnés dans la section précédente, nous obtenons le résultat suivant pour le graphe du prix de l'option call en fonction du log-strike k .

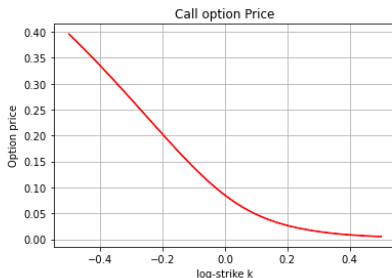


FIGURE 8 – Prix de l'option Call par rapport à la valeur du log-strike $\alpha = -0.43$ et $\rho = -0.9$.

Pricing d'options sous rough volatility

La valeur de $\sigma^2(k, T)$ peut être déterminé que numériquement. Ce problème est équivalent à trouver une racine à l'équation définie pour g par :

$$g(\sigma^2(k, T)) = BS(\sigma^2(k, T)T, S_0, k) - \Pi^m(k, T) = 0$$

Nous utilisons l'algorithme de **Newton-Raphson** pour faire une estimation de la volatilité implicite. Pour un σ_0^2 initial fixé, nous construisons σ_{k+1}^2 jusqu'à ce qu'un certain critère soit satisfait (nous prendrons $\epsilon = 10^{-6}$) et tel que $\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 - \frac{BS(\sigma_k^2) - \Pi^m}{g'(\sigma_k^2)}$.

Pricing d'options sous rough volatility

Nous obtenons :

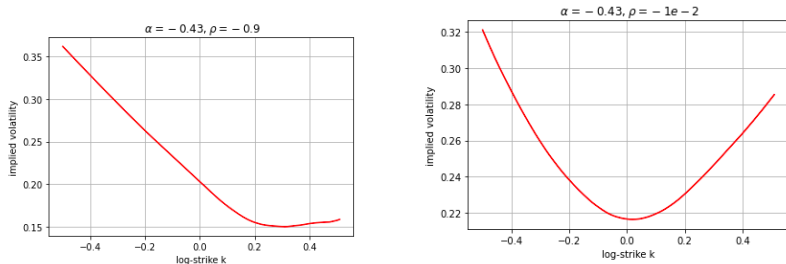


FIGURE 9 – Volatilité implicite en fonction du log-strike k lorsque $\alpha = -0.43$ avec respectivement $\rho = -0.9$ et $\rho = -0.01$.