



TRAVAIL ENCADRÉ
2020/2021

Monte Carlo algorithm under rough modeling

Réalisé par :
Haris AITCHEIKH
Gaetan FRAISSE

Sous la direction de :
Noufel FRIKHA

Table des matières

1	Bagage théorique	4
1.1	Brownien semi-stationnaire	4
1.2	Brownien semi-stationnaire tronqué	4
1.3	Le noyau	5
2	Modèle rBergomi	6
3	La Méthode de Cholesky	8
3.1	La fonction d'auto-covariance du processus	8
3.2	Implémentation de la méthode de Cholesky	9
4	Le schéma Hybride	10
4.1	Présentation de la méthode	10
4.2	Implémentation de la méthode Hybride	11
5	Pricing d'options sous rough volatility	13
	Bibliographie	15

Introduction

Le modèle "rough Bergomi" (**rBergomi**) est un modèle à volatilité rugueuse introduit en 2016 par **Bayer, Friz et Gatheral** (1). Il est intéressant de l'étudier car il permet de bien reproduire le phénomène de skew qui peut être observé sur les marchés actions. Néanmoins, la nature non-markovienne ni semimartingale du processus brownien semi-stationnaire (*BSS*) qui intervient dans les modèles à volatilité rugueuse entraîne l'absence de méthodes analytiques pour le pricing d'options et pose des difficultés pour la simulation exacte.

Le but de ce papier est donc de faire appel aux méthodes **Monte Carlo** pour le pricing d'options européennes dans le modèle de rBergomi. Au vu de ce modèle il est important de savoir simuler un *BSS*. Dans le cas où son processus de volatilité est constant le *BSS* est markovien et gaussien, et donc nous pouvons réaliser une simulation exacte en utilisant la factorisation de **Cholesky** par exemple. Cela sera abordé dans le chapitre (3). Cependant, lorsque la volatilité est stochastique, nous ne pouvons plus faire appel à ce type de méthodes. Nous nous dirigeons alors vers une méthode d'approximation basée sur un schéma de discrétisation qu'on appelle **schéma hybride** du fait qu'il résulte en une composition d'intégrales de Wiener et d'une somme de Riemann.

Dans un premier temps, nous présentons la théorie nécessaire à l'étude des processus *BSS*. Nous abordons entre autre les hypothèses nécessaires sur le noyau pour pouvoir construire le schéma hybride présenté dans le chapitre (4). Nous introduisons ensuite le modèle rBergomi où nous constatons que la volatilité du *BSS* y apparaît constante. Cela nous mène donc à une première simulation exacte à travers la méthode de Cholesky. Dans une deuxième partie, nous étudions le schéma hybride dans son cadre général ainsi que son implémentation réalisé dans le modèle rBergomi. Enfin, dans une dernière partie, nous approchons le prix d'une option vanille dans ce modèle par une méthode de Monte Carlo. L'accès à ce prix sur une grille de valeurs du log-strike nous permet ensuite de représenter la volatilité implicite associée pour une maturité au préalablement définie. La modification des paramètres nous permet alors d'observer un phénomène de skew et de smile caractéristique de certains marchés.

Dans ce papier, nous utilisons deux méthodes distinctes pour la simulation des processus présents dans le modèle. La méthode de Cholesky étant exacte, nous avons ainsi prévu de réaliser M simulations du processus de prix pour ensuite approcher par Monte Carlo le prix de l'option vanille. Nous aurions ainsi pu estimer, d'une part, l'erreur quadratique réalisée lors de l'utilisation du schéma hybride mais également, nous aurions pu obtenir l'erreur lors de l'estimation du prix de l'option et de la volatilité implicite. Cela n'a cependant pas été possible au vu du contexte, nous envisageons quand même de le réaliser dans un futur projet.

Chapitre 1

Bagage théorique

1.1 Brownien semi-stationnaire

Dans cette section, nous allons définir le **processus Brownien semi-stationnaire** (*BSS*) qui est la notion clé du sujet traité dans ce papier.

Définition 1.1.1 (Processus Brownien semi-stationnaire). *Un processus Brownien semi-stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est défini, pour $t \in \mathbb{R}$, par :*

$$X_t = \int_{-\infty}^t g(t-s)\sigma(s)dW(s) \quad (1.1)$$

où $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien bilatéral, $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_t$ -prévisible et à trajectoires localement bornées et $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction borélienne appelée noyau. Nous supposons par la suite que le processus σ est de carré intégrable, $\mathbb{E}[\sigma_t^2] < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et stationnaire, c'est à dire pour $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[\sigma(s)] = \mathbb{E}[\sigma(t)], \quad \text{Cov}(\sigma(s), \sigma(t)) = \text{Cov}(\sigma(0), \sigma(|s-t|))$$

Sous ces hypothèses, l'intégrale stochastique dans (1.1) est bien définie si la fonction g est de carré intégrable.

1.2 Brownien semi-stationnaire tronqué

On définit ici la notion de processus brownien semi-stationnaire tronqué (*BSST*) qui est un cas particulier du *BSS*. En réalité, c'est lui qu'on retrouve dans le modèle de rBergomi.

Définition 1.2.1 (Processus brownien semi-stationnaire tronqué). *Un processus brownien semi-stationnaire tronqué $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini, pour $t \geq 0$, par :*

$$X_t = \int_0^t g(t-s)\sigma(s)dW(s) \quad (1.2)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ ici est un mouvement brownien standard, g et σ sont comme avant. On dit qu'il est tronqué car le processus X dans (1.2) est obtenu en coupant l'intégrale dans (1.1) à 0. De plus, les mêmes hypothèses sont nécessaires pour garantir l'existence de l'intégrale stochastique dans (1.2).

Remarque. *On remarque que selon le choix de g , le processus X peut ne pas être une semi-martingale. Cette situation se produit lorsque la fonction g se comporte comme une puissance proche de zéro. De plus, si le processus de volatilité σ est déterministe et constant en fonction du temps, alors X sera strictement stationnaire et gaussien. Ainsi, dans ce cas nous pourrions utiliser des méthodes de simulations exactes comme la factorisation de Cholesky par exemple (cf section 3).*

1.3 Le noyau

Au vu de la remarque faite ci-dessus, on s'intéressera par la suite au cas où X n'est pas une semimartingale car il est pertinent avec notre application. Plus précisément $g(x) \propto x^\alpha$ avec $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$ pour $x > 0$ petit. Ainsi, nous présenterons dans cette section un cadre de travail pour g basé sur la notion de fonctions à variation régulière. Celui-ci nous permettra à la fois de rester en accord avec le comportement souhaité pour g et d'ajouter une certaine flexibilité qui nous aidera par la suite dans la construction du schéma d'approximation hybride

Définition 1.3.1 (Fonction à variation lente en 0). *Une fonction mesurable $L : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est à variation lente en 0 si pour tout $t > 0$,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

Définition 1.3.2 (Fonction à variation régulière en 0). *Une fonction $f : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est à variation régulière en 0 si il existe une fonction à variation lente $L : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ et une constante $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$f(x) = x^\beta L(x) \quad (1.3)$$

Une propriété importante des fonctions à variation lente est la suivante :

Propriété 1.3.1 (Bornes de Potter). *Soit L une fonction à variation lente en 0 et bornée sur tout intervalle $(u, 1]$ avec $u \in (0, 1)$. Alors quelque soit $\delta > 0$ il existe des constantes $0 < c_\delta \leq C_\delta$ tels que :*

$$c_\delta x^\delta \leq L(x) \leq C_\delta \quad (1.4)$$

pour tout $x \in (0, 1]$.

Remarque. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in (0, 1]$, En multipliant par x^α dans (1.4), on a :

$$c_\delta x^{\alpha+\delta} \leq x^\alpha L(x) \leq C_\delta x^{\alpha-\delta}$$

Ainsi, en faisant tendre δ vers 0 on en déduit que les fonctions à variation régulière en 0 se comportent asymptotiquement comme une fonction puissance.

Ainsi, pour la suite nous faisons les deux hypothèses suivantes sur le noyau :

(H1) : Soit $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$,

$g(x) = x^\alpha L_g(x)$, pour $x \in (0, 1]$.

Où $L_g : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est à variation lente en 0 et bornée sur tout intervalle $(u, 1]$ avec $u \in (0, 1)$.

(H2) : La fonction g est C^1 sur $(0, \infty)$

Comme on verra plus tard, ces hypothèses nous serviront pour la construction du schéma d'approximation hybride. En effet, (H1) nous dit que le noyau est une fonction à variation régulière dans l'intervalle $(0, 1]$ et permet donc de faire la décomposition en produit dans (1.3). De plus d'après la remarque faite au-dessus, (H1) garantit le comportement souhaité pour g au voisinage de 0. Concernant (H2), elle nous permettra de faire une approximation en escaliers de la fonction g sur l'intervalle $[1, \infty)$.

Chapitre 2

Modèle rBergomi

Dans ce papier, nous mènerons une étude sur le modèle **Rough Bergomi** (ou **rBergomi**) appartenant aux modèles à volatilité rugueuses. Ce sont des modèles plus difficiles à modéliser en raison d'une rugueusité apparente que l'on tente de reproduire en modifiant le processus de variance. Cela rend la simulation d'autant plus difficile que ce processus de variance se trouve être ni markovien ni une semi-martingale. Cependant, l'étude de ces modèles est intéressante du fait qu'ils permettent de reproduire les tendances de certaines surface de volatilité observées sur les marchés, contrairement aux modèles à volatilité stochastique usuels. On peut notamment spécifier la variance réalisée du **SPX 500** sur ces dernières années.

Le modèle rBergomi est défini comme un couple (S, V) où S_t est le processus de prix défini pour $t \in [0, T]$, par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sqrt{V_u} dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t V_u du\right) \quad (2.1)$$

avec $S_0 \in \mathbb{R}^+$ et le processus de variance V_t , pour $t \in [0, T]$:

$$V_t = \zeta_0(t) \exp(\eta W_t^\alpha - \frac{\eta^2}{2} t^{2\alpha+1}) \quad (2.2)$$

où $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$, et $\eta > 0$ sont des paramètres déterministes.

Le processus B est un mouvement Brownien unidimensionnel standard tel que :

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^\top \quad (2.3)$$

où $\rho \in (-1, 1)$ le paramètre de corrélation, W_t et W_t^\top sont deux mouvement Brownien standards indépendants. Les paramètres ρ et η ont une interprétation importante en terme de surface de volatilité : η représente le *smile* et ρ représente le *skew*. Le processus $(\zeta_0(t))_{t \in [0, T]}$ est défini comme le *forward variance curve process*, on supposera qu'il se sera constant égale à $\zeta > 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Nous définissons le processus W_t^α pour $t \in [0, T]$ par :

$$W_t^\alpha = \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t (t - u)^\alpha dW_u \quad (2.4)$$

pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Le paramètre α contrôle la rugueusité des trajectoires du processus. Plus il est élevé, plus les trajectoires vont être rugueuse. Ce processus est un processus de **Volterra**. Avec un noyau ainsi défini, il est aussi sous le nom de processus de **Riemann-Liouville**.

Proposition 1. *Pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$, le processus W^α est un processus gaussien centré, de variance $\text{Var}[W_t^\alpha] = t^{2\alpha+1}$. Il n'est ni une martingale, ni une semimartingale.*

Démonstration. Le processus W^α défini par (2.4) est une intégrale de **Wiener**. Ainsi c'est un processus gaussien centré à trajectoires continues. On calcule aisément que :

$$\text{Var}[W_t^\alpha] = \mathbb{E}[(W_t^\alpha)^2] = (2\alpha + 1) \int_0^t (t - u)^{2\alpha} du = \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha + 1}$$

De plus, en nous appuyant sur (5), on peut affirmer qu'un *BSS* est une semimartingale si le noyau g vérifie :

- $g(0^+) < \infty$
- $g' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$

Dans notre cas, nous avons que $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ainsi :

$$\int_0^t (t-u)^{2(\alpha-1)} du = \frac{\alpha}{2\alpha-1} (0^{2\alpha-1} - t^{2\alpha-1})$$

Ainsi, cette intégrale est bien finie pour $2\alpha-1 > 0$, ce qui revient à avoir $\alpha > \frac{1}{2}$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi $(W_t^\alpha)_{t \in [0, T]}$ n'est pas un semimartingale.

De plus, pour tout t dans $[0, T]$, W_t^α est bien un \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable. Cependant, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t^\alpha | \mathcal{F}_S] &= \mathbb{E}[\sqrt{2\alpha+1} \int_s^t (t-u)^\alpha dW_u | \mathcal{F}_S] + \mathbb{E}[\sqrt{2\alpha+1} \int_0^s (t-u)^\alpha dW_u | \mathcal{F}_S] \\ &= \mathbb{E}[\sqrt{2\alpha+1} \int_s^t (t-u)^\alpha dW_u] + \sqrt{2\alpha+1} \int_0^s (t-u)^\alpha dW_u \\ &= \sqrt{2\alpha+1} \int_0^s (t-u)^\alpha dW_u \end{aligned} \tag{2.5}$$

par \mathcal{F}_s -indépendance et \mathcal{F}_s -mesurabilité. Ainsi on voit bien que W_t^α n'est pas une martingale. \square

Remarque. On remarque que le processus W^α appartient à la classe des Browniens semi-stationnaires tronqués. Au vu de la définition 1.1, nous définissons $(\sigma_t)_t$ constant et égale à $\sqrt{2\alpha+1}$ ainsi que le noyau g défini pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^\alpha$. On remarque également que pour que l'intégrale stochastique soit bien définie, il faut que $(W_t^\alpha)_{t \in [0, T]}$ appartienne à $\mathbb{L}^2([0, T])$. Nous avons que :

$$\int_0^T (T-s)^{2\alpha} ds = \frac{T^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} - \frac{0^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$$

Nous avons par définition que $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$ ce qui assure que cette quantité est bien finie.

Dans la suite, nous allons utiliser différentes méthodes de Monte Carlo afin de simuler les trajectoires du processus, et de par la suite réaliser un pricing d'options (vanilles). Dans un premier temps, nous utiliserons la méthode de Cholesky, par la suite nous utiliserons une deuxième méthode de de simulation moins coûteuse en temps. Cette dernière méthode nous permettra de construire un estimateur du prix de l'option. Cet estimateur sera considéré comme bon si il a un biais et une variance faible.

Chapitre 3

La Méthode de Cholesky

Dans cette section, nous allons présenter une méthode de simulation du processus W^α à travers la méthode de Cholesky. Le fait que le processus (σ_t) soit déterministe et constant implique que W^α est Gaussien et strictement stationnaire. Ainsi, nous nous baserons sur le caractère gaussien du processus pour utiliser la méthode de Cholesky.

3.1 La fonction d'auto-covariance du processus

Nous allons dans un premier temps, calculer la fonction d'auto-covariance du processus $(W_t^\alpha)_{t \in [0, T]}$. Nous avons défini :

$$W_t^\alpha = \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t (t - u)^\alpha dW_u$$

pour $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$. On remarque que pour $\alpha = 0$, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $W_t^0 = W_t$ ainsi le processus est égale au mouvement brownien standard. Ainsi nous retrouvons un processus qui est semimartingale, c'est pourquoi nous excluons ce cas. Pour $\alpha \neq 0$, nous avons montré que $\text{Var}(W_t^\alpha) = t^{2\alpha+1}$. Sa covariance, quant à elle, est telle que pour $s < t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{E}(W_s^\alpha W_t^\alpha) = (2\alpha + 1) \int_0^{t \wedge s} (t - u)^\alpha (s - u)^\alpha du \stackrel{x=\frac{u}{s}}{=} (2\alpha + 1) s^{2\alpha+1} \int_0^{t \wedge s} \left(\frac{t}{s} - x\right)^\alpha (1 - x)^\alpha dx = s^{2\alpha+1} G\left(\frac{s}{t}\right)$$

où nous introduisons la fonction G définie pour $x \leq 1$ par :

$$G(x) = \frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha} x^{-\alpha} {}_2F_1(1, -\alpha, 2 - \alpha, x)$$

Pour une preuve de cette définition, on pourra se rapporter à (3). Nous devons déterminer la covariance entre le mouvement brownien (B_t) défini par (2.3) et le processus de Volterra (W_t^α) . Comme W_t et W_t^\top sont deux mouvements Browniens standards indépendants, nous avons pour $t \geq s$:

$$\mathbb{E}(B_t W_s^\alpha) = \mathbb{E}(\rho \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t dW_u \int_0^s (s - u)^\alpha dW_u) = \rho \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^s (s - u)^\alpha du = \rho \frac{\sqrt{2\alpha + 1}}{\alpha + 1} s^{\alpha+1}$$

et pour $t \leq s$:

$$\mathbb{E}(B_t W_s^\alpha) = \mathbb{E}(\rho \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t dW_u \int_0^s (s - u)^\alpha dW_u) = \rho \sqrt{2\alpha + 1} \int_0^t (s - u)^\alpha du = \rho \frac{\sqrt{2\alpha + 1}}{\alpha + 1} (s^{\alpha+1} - (s - t)^{\alpha+1})$$

Ainsi, nous obtenons pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{E}(B_t W_s^\alpha) = \rho \frac{\sqrt{2\alpha + 1}}{\alpha + 1} (s^{\alpha+1} - (s - (t \wedge s))^{\alpha+1})$$

De plus, nous avons tout $t \geq s$, $\mathbb{E}(B_t B_s) = s$.

Nous définissons le processus X pour tout $t \in [0, T]$ par $X_t := (B_t, W_t^\alpha)$. Nous discrétisons $[0, T]$ par une grille de temps $\{0, \dots, \frac{i}{n}, \dots, T\}$ pour $i = 0, \dots, nT$ et obtenons :

$$X := ((B_0, W_0^\alpha), \dots, (B_{\frac{i}{n}}, W_{\frac{i}{n}}^\alpha), \dots, (B_T, W_T^\alpha))$$

Ainsi, avec ce qui précède, nous pouvons construire la matrice de variance covariance du processus X .

$$(\Gamma)_{i,j} = \Gamma\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \quad (3.1)$$

Cette matrice est la matrice de covariance jointe du processus W^α et du mouvement brownien B .

3.2 Implémentation de la méthode de Cholesky

Ainsi, nous allons suivre l'algorithme décrit dans (3) :

Algorithm 1 Simulation via la méthode de Cholesky

1. Construire la matrice de covariance jointe Γ pour (B, W^α) et calculer sa décomposition de Cholesky
 2. Générer un vecteur aléatoire normal iid et le multiplier à la matrice triangulaire inférieure obtenu par la décomposition de Cholesky. Nous obtenons ainsi les trajectoires de W^α et de B avec la loi marginale correcte.
 3. nous pouvons ainsi calculer le processus de prix et par la suite le prix de l'option choisie.
-

Nous avons suivi cet algorithme et obtenu un vecteur de taille $2n$. Ainsi nous obtenons le mouvement Brownien sur les éléments paires de ce vecteur et le processus de Volterra sur les éléments impaires.

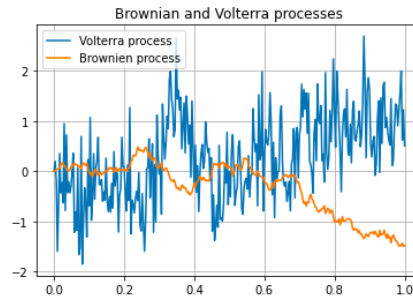


FIGURE 3.1 – Trajectoires du mouvement brownien et du processus de Volterra pour $\alpha = -0,43$ et $n = 310$.

On observe bien la covariance négative entre le mouvement brownien et le processus de Volterra. Ainsi, nous avons pu simuler le processus de variance. On peut alors simuler les processus présent dans le modèle de rBergomi :

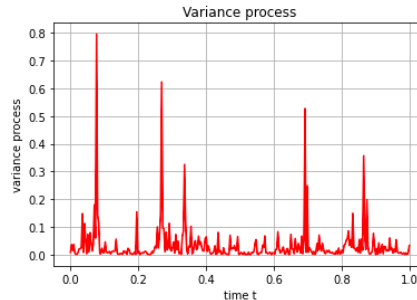


FIGURE 3.2 – Trajectoires du processus de variance avec la méthode de Cholesky pour $\alpha = -0,43$ et $n = 310$.

Chapitre 4

Le schéma Hybride

4.1 Présentation de la méthode

En nous appuyant sur les travaux de (1), nous allons introduire une méthode de simulation basée sur la discrétisation de la représentation intégrale du BSS. En effet, une fois discrétisé, on peut approcher le noyau g par une fonction en escalier. Cependant, cette fonction se comporte comme une puissance proche de zéro, ce qui induit une forte erreur d'approximation. C'est ici donc qu'intervient l'utilité principale des hypothèses (H1) et (H2) faites dans le chapitre 1. Ces hypothèses nous permettent de décomposer la représentation intégrale du BSS en une somme entre des intégrales de Wiener et une somme de Riemann.

Nous discrétisons le processus (X_t) défini par (1.1) sur la grille de temps $\{t, t - \frac{1}{n}, t - \frac{2}{n}, \dots\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme σ est supposé assez régulier, on peut faire l'approximation :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} g(t-s)\sigma(s)dW(s) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(t-\frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} g(t-s)dW(s)$$

Nous séparons alors la somme en deux. Pour k petit, par (H1) on peut faire l'approximation suivante :

$$g(t-s) \approx (t-s)^{\alpha} L_g(\frac{k}{n}), t-s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \setminus \{0\}$$

et pour k grand ($k \geq 2$), nous choisissons $b_k \in [k-1, k]$, et on peut approcher par :

$$g(t-s) \approx g(\frac{b_k}{n}), t-s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$$

Ainsi en fixant $\kappa \in \{1, 2, 3, \dots\}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma(t-\frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} g(t-s)dW(s) \approx \sum_{k=1}^{\kappa} \sigma(t-\frac{k}{n}) L_g(\frac{k}{n}) \sigma(t-\frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} (t-s)^{\alpha} dW(s) + \sum_{k=\kappa+1}^{\infty} g(\frac{b_k}{n}) \sigma(t-\frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} dW(s)$$

Pour que cette approximation soit vraiment juste, il faut pour le cas $\kappa = 0$ fixer $b_1 \in (0, 1]$. Le schéma Hybride peut être alors écrit sous la forme $X_n(t) = \hat{X}_n(t) + \check{X}_n(t)$ où :

$$\begin{aligned} - \hat{X}_n(t) &= \sigma \sum_{k=\kappa+1}^{N_n} g(\frac{b_k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} dW(s) = \sigma \sum_{k=\kappa+1}^{N_n} g(\frac{b_k}{n}) \sigma(t-\frac{k}{n}) (W(t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}) - W(t-\frac{k}{n})) \\ - \check{X}_n(t) &= \sigma \sum_{k=1}^{\kappa} L_g(\frac{k}{n}) \sigma(t-\frac{k}{n}) \int_{t-\frac{k}{n}}^{t-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} (t-s)^{\alpha} dW(s) \end{aligned}$$

La suite optimale $(b_k^*)_{k \in [\kappa+1, \infty)}$ sera choisie suite à la proposition (2.28) présente dans (1). Le choix optimal est donné pour $k \geq \kappa+1$ par :

$$b_k^* = (\frac{k^{\alpha+1} - (k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha}}$$

4.2 Implémentation de la méthode Hybride

Dans notre cas, le processus que nous voulons simuler est le processus de Volterra défini par l'équation (2.4). (W_t^α) appartient à la classe des $(BSST)$. De ce fait, nous allons simuler le processus discrétisé au temps $\frac{i}{n}$, avec $i = 0, \dots, nT$ et $\kappa = 1$, défini par :

$$X_n\left(\frac{i}{n}\right) = \sqrt{2\alpha + 1} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - s\right)^\alpha dW(s) + \sum_{k=\kappa+1}^i \left(\frac{b_k}{n}\right)^\alpha (W_{\frac{i-(k-1)}{n}} - W_{\frac{i-k}{n}}) \right)$$

Ainsi, nous allons suivre l'algorithme décrits dans (4) :

Algorithm 2 Simulation via le schéma hybride

1. Calculer la matrice de variance de covariance Γ' définie par : $\Gamma' = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \\ \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} & \frac{1}{(2\alpha+1)n^{2\alpha+1}} \end{pmatrix}$
 2. Générer un vecteur aléatoire $Z = (Z_1, Z_2)^T$ de moyenne $\mu = (0, 0)^T$ et de matrice de variance-covariance Γ'
 3. Pour la 1^{re} partie de $X_n(\frac{i}{n})$, on a $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (\frac{i}{n} - s)^\alpha dW(s) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{(2\alpha+1)n^{2\alpha+1}})$ donc on utilise Z_2
 4. Pour la 2^e partie, on calcule $(\frac{b_k}{n})^\alpha$ et on calcule la convolution avec Z_1
 5. On somme les deux parties et on multiplie par $\sqrt{2\alpha + 1}$
-

Nous avons ainsi simulé le processus X_n . Le choix des paramètres du modèle selon (1) est donné dans la figure suivante :

S_0	ζ	η	α	ρ
1	0,235 ²	1.9	-0.43	-0,9

FIGURE 4.1 – Paramètres utilisés dans le modèle *rBergomi*

Nous avons choisi de prendre un intervalle de temps $[0, T]$ où $T = 1$, un pas de discrétisation n valant 1000 et différentes valeurs de α pour observer l'effet sur la rugosité des trajectoires du processus. Nous observons bien que pour un α très proche de 0, le processus semble bien coïncider avec les trajectoires du mouvement brownien.

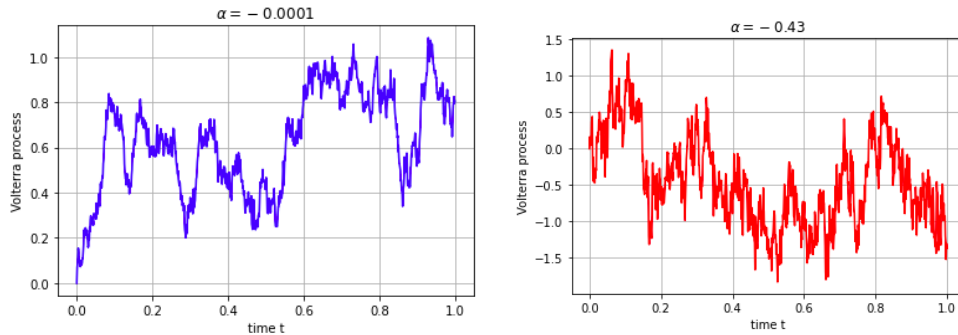
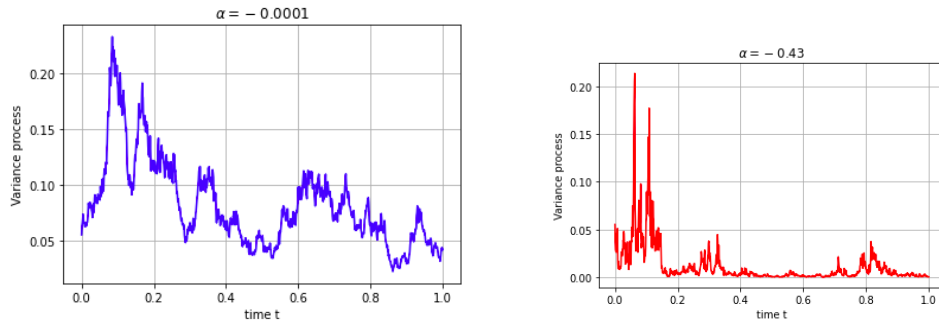
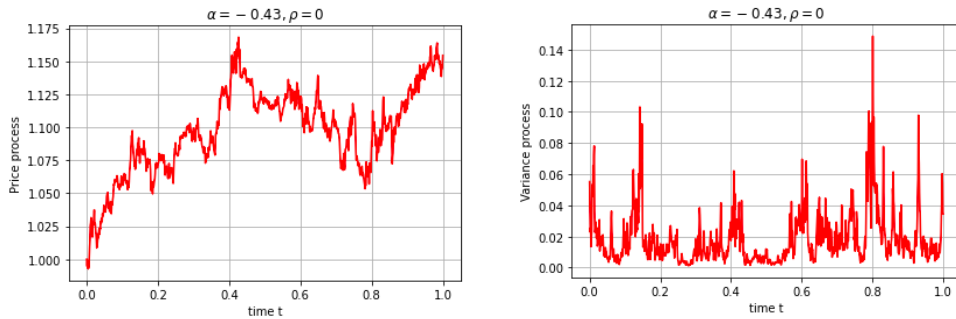


FIGURE 4.2 – Trajectoires du processus de Volterra pour $\alpha = -0,01$ et $-0,43$.

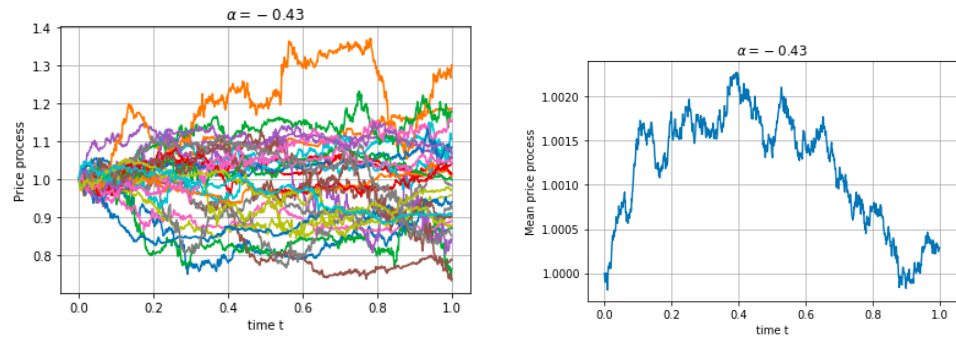
Nous voyons aussi que les trajectoires du processus lorsque α est élevé sont bien plus rugueuses. La représentation des trajectoires du processus de variance sont très similaire à ceux visible sur les marchés financiers. On obtient les résultats suivants :

FIGURE 4.3 – Trajectoires du processus de Variance pour $\alpha = -0,01$ et $-0,43$.

Sur la première figure, on observe que le processus de variance a un comportement moins rugueux, comportement typique du mouvement brownien. Sur la figure 2, on remarque la présence de pics, puis d'un retour à la moyenne brutal, cela est typique du comportement des processus de variance dans les modèles à volatilité rugueuse.

FIGURE 4.4 – Trajectoires du processus de prix et de variance pour $\alpha = -0.43$ et $\rho = 0$.

On remarque la présence de sauts quand $\rho = 0$ malgré le fait que le processus de prix soit une martingale continue. Cela a lieu aux mêmes instants où l'on observe des pics dans le processus de variance associé.

FIGURE 4.5 – La 1^{re} figure montre les trajectoires du processus de prix pour 30 simulations avec $\alpha = -0,43$. La 2^e figure nous montre la trajectoire moyenne sur 10000 simulations pour $\alpha = -0,43$.

Le processus de prix est une martingale continue, ainsi nous avons que $\mathbb{E}(S_T) = S_0$ avec $S_0 = 1$ dans notre cas. Nous voyons bien sur la 2^e figure que le processus de prix a un comportement autour de 1. De plus, son espérance est de 1,0011 ce qui concorde avec nos hypothèse.

Remarque. L'utilisation du schéma hybride pour simuler le processus de Volterra est préférable à l'utilisation de la méthode de Cholesky du fait de sa performance. En effet, la méthode de Cholesky est coûteuse en temps de calcul, avec une complexité de l'ordre de $O(n^3)$, alors que la méthode hybride n'est que de $O(n \log(n))$.

Chapitre 5

Pricing d'options sous rough volatility

Dans cette section, nous souhaitons estimer le prix d'une option européenne de strike $K > 0$ et de maturité T . Sans perte de généralité, nous fixons $r = 0$. Le prix de l'option est alors donné par :

$$C(S_0, K, T) = \mathbb{E}((S_T - K)_+)$$

Les trajectoires du processus ayant été simulées dans le chapitre précédent, il nous est alors facile d'estimer cette quantité. Nous avons, pour un nombre élevé de simulation :

$$C(S_0, K, T) \approx C_M(S_0, K, T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_T^i - K)_+ \quad (5.1)$$

Nous définissons $\Pi^m(k, T)$ le prix observé sur le marché de l'option au temps 0 et où k définit le log-strike ($k := \ln(K)$). Cette définition permet de ne pas faire varier k lorsque l'on fait varier s . Nous changeons ainsi la paramétrisation afin d'utiliser maintenant le log-strike. Nous définissons alors la fonction de prix de **Black-Scholes** du Call européen $BS(\cdot)$ par :

$$BS(v; s, k) = s\mathcal{N}(d_1) - e^k\mathcal{N}(d_2)$$

avec $d_{1/2} = \frac{(\log(s)-k)}{\sqrt{v}} \pm \frac{\sqrt{v}}{2}$ où $\mathcal{N}(\cdot)$ qui représente la fonction de répartition de la Loi normale centrée réduite.

La volatilité implicite est une quantité importante en finance car elle sert d'indicateur de marché des variations futures du cours d'un sous-jacent. Elle représente entre autre l'offre et la demande du marché pour chacune des options portant sur le même sous-jacent. Elle se définit, pour un prix de marché $\Pi^m(k, T)$ donné, par la quantité $\sigma_{(k,T)}^2$ tel que $BS(\sigma^2(k, T)T, S_0, k) = \Pi^m(k, T)$. Du fait que le prix de Black-Scholes soit strictement monotone par rapport à la volatilité, on peut ainsi garantir l'existence de la quantité $\sigma^2(k, T)$ pour tout k, T . Ainsi nous pouvons calculer la volatilité implicite $\sigma^2(k, T)$ pour un prix observé sur le marché $\Pi^m(k, T)$ en utilisant la relation :

$$\sigma^2(k, T)T = BS^{-1}(\Pi^m(k, T), S_0, k)$$

La valeur de $\sigma^2(k, T)$ peut être déterminé que numériquement. Ce problème est équivalent à trouver une racine à l'équation définie pour g par :

$$g(\sigma^2(k, T)) = BS(\sigma^2(k, T)T, S_0, k) - \Pi^m(k, T) = 0$$

Suivant (2), en assumant que le prix admet la représentation $\Pi^m(k, T) = \mathbb{E}((S_T - e^k)_+)$, nous construisons un estimateur $\hat{\Pi}_M^m(k, T)$ défini par :

$$\hat{\Pi}_M^m(k, T) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i + \hat{\alpha}_M Y_i) - \hat{\alpha}_M \mathbb{E}(Y_i) \quad (5.2)$$

et satisfaisant $\sigma_M^2(k, T)T = BS^{-1}(\hat{\Pi}_M^m(k, T), S_0, k)$. Nous spécifierons X et Y plus tard. On remarque que (5.2) est équivalent à (5.1) en prenant $X = (S_T - e^k)_+$ et $Y = 0$.

Avec les paramètres donnés dans la section précédente, nous obtenons le résultat suivant pour le graphe du prix de l'option call en fonction du log-strike k .

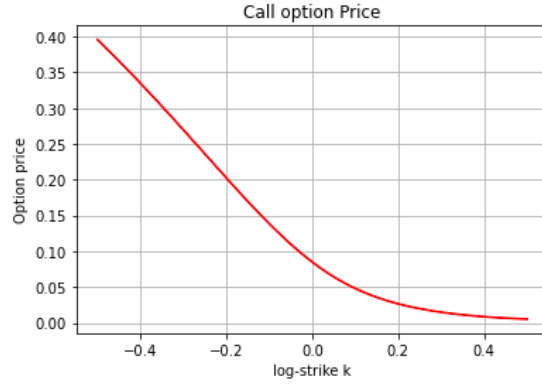


FIGURE 5.1 – Prix de l'option Call par rapport à la valeur du log-strike $\alpha = -0.43$ et $\rho = -0.9$.

Comme énoncé dans (6), nous utiliserons l'algorithme de **Newton-Raphson** pour faire une estimation de la volatilité implicite. Pour un σ_0^2 initial fixé, nous construisons σ_{k+1}^2 jusqu'à ce qu'un certain critère soit satisfait (nous prendrons $\epsilon = 10^{-6}$). où σ_{k+1}^2 vérifie :

$$\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 - \frac{BS(\sigma_k^2) - \Pi^m}{g'(\sigma_k^2)}$$

Au vu de sa définition, nous voyons que la dérivée de g est équivalente à la dérivée de la fonction de prix de Black-Scholes par rapport à la volatilité. Autrement dit, la dérivée de g représente le vega de l'option qui lui peut être calculer analytiquement. Un certain problème apparaît avec la méthode de Newton-Raphson lorsque le vega est proche de 0. De plus, l'algorithme est assez dépendant de la valeur initiale que l'on choisit. On pourra se rapporter à (6) pour la définition de méthodes alternatives (méthode de **Bent**, méthode dichotomique,...).

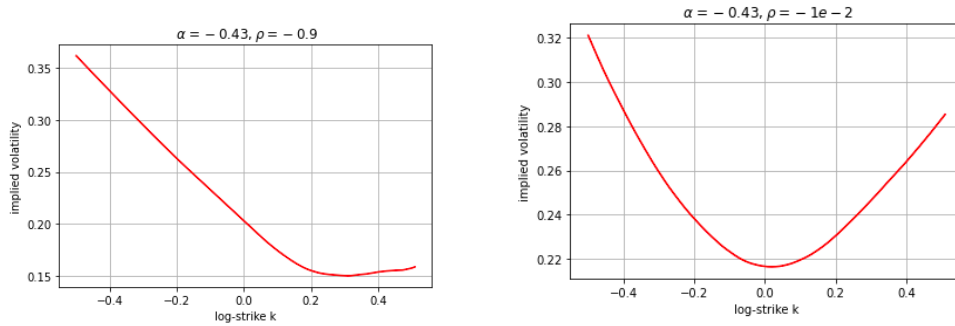


FIGURE 5.2 – Volatilité implicite en fonction du log-strike k lorsque $\alpha = -0.43$ avec respectivement $\rho = -0.9$ et $\rho = -0.01$.

La figure (5.2) a été réalisé en prenant un nombre de simulation de $M = 12000$ et un pas de discrétisation de $n = 310$ en s'appuyant sur les remarques et chiffres dans (2). Nous voyons bien apparaître un phénomène de smile lorsque α est élevé et ρ également. En revanche, nous voyons apparaître un phénomène de skew lorsque ρ prend des valeurs proche de zéro.

Bibliographie

- [1] Mikkel Bennedsen, Asger Lunde, Mikko S. Pakkanen. *Hybrid scheme for Brownian semistationary processes*. May 16, 2017.
- [2] Ryan McCrickerd, Mikko S. Pakkanen. *Turbocharging Monte Carlo pricing for the rough Bergomi model*. 16 March, 2018.
- [3] Bayer C., Fritz P., Gatheral J. *Pricing under rough volatility*. January 23, 2015.
- [4] Jacquier A., Martini C., Muguruza A. *On VIX Futures in the rough Bergomi model*. 16 January, 2017.
- [5] J.M. Corcuera, E Hedevang, Mikko S. Pakkanen, M. Podolskij. *Asymptotic theory for Brownian semistationary processes with application to turbulence*. 15 August, 2018.
- [6] Shuaiqiang Liu, Cornelis W. Oosterlee et Sander M. Bohte *Pricing Options and Computing Implied Volatilities using Neural Networks*. February 2019.