
Grupos y Simetrías

Versión del 10 de julio de 2017

Índice general

1. Simetrías y Teoría de Grupos	2
1.1. Elementos de Teoría de Grupos	2
1.1.1. Grupos de Lie	2
1.1.2. $SO(2)$	2
1.2. Representaciones	3
1.2.1. Representaciones de $SO(3)$ y $SU(2)$	5
2. El Grupo de Lorentz	7
2.1. Definición y generalidades	7
2.1.1. Ejemplo: Transformación del campo electromagnético	8
2.2. Descomposición del GL	9
2.3. Generadores y álgebra $so(1, 3)$	10
2.4. Representaciones del GL	11
2.4.1. Generalidades	11
2.4.2. Representaciones Proyectivas de L_+^\uparrow	12
2.4.3. El grupo $SL(2, C)$	12
2.4.4. Representaciones irreducibles finito-dimensionales del álgebra de Lorentz	14
2.4.5. Representaciones irreducibles: Casos particulares	16
2.4.6. Representaciones incluyendo reflexiones espaciales y temporales	18
2.4.7. Ejemplos	21
3. Teoría de Gauge en el Electromagnetismo	22
3.1. Principio de Gauge en Electrodinámica	22
3.1.1. Potenciales Escalar y Vectorial	22
3.1.2. Transformaciones de Gauge; Gauge de Lorenz y Gauge de Coulomb	24
3.1.3. Formulación Covariante; Potenciales y Transformaciones de Gauge	25
4. Teoría de Yang-Mills	27
4.1. Teorías de Gauge no Abelianas	27
4.2. Generalizaciones	29
4.3. Álgebra asociada	33
5. Quiebre Espontáneo de Simetría y Mecanismo de Higgs	37
5.1. Degeneración de los Estados de Vacío	37
5.2. Quiebre Espontáneo de Simetría	38
5.2.1. Simetrías Globales Continuas	38
5.2.2. Campo Escalar Complejo	40
5.3. Mecanismo de Higgs	41
5.3.1. Caso Abelianas	41

Capítulo 1

Simetrías y Teoría de Grupos

1.1. Elementos de Teoría de Grupos

Decimos que una colección de elementos $g_i \in G$ forman un *grupo* si ellos satisfacen las siguientes propiedades:

1. Clausura bajo una operación de composición: Si $g_i, g_j \in G$, entonces $g_i \cdot g_j \in G$.
2. Asociatividad bajo la composición: $\forall g_i, g_j, g_k \in G, g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$.
3. Existencia de Elemento *identidad*: existe un elemento \mathbb{I} tal que $\forall g_i \in G$ satisface $g_i \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot g_i = g_i$.
4. Existencia de Elemento *inverso*: $\forall g_i \in G$ existe un elemento $g_i^{-1} \in G$ tal que $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = \mathbb{I}$.

Existen varios tipos de grupos. Un *grupo discreto* tiene un número finito de elementos. Sin embargo, estamos más interesados en los grupos continuos, como el grupo de rotación y el grupo de Lorentz, los cuales dependen de un conjunto de parámetros continuos.

1.1.1. Grupos de Lie

1.1.2. $SO(2)$

El grupo $O(2)$ o rotaciones en dos dimensiones. Si rotamos el plano en un ángulo θ , luego las coordenadas (x', y') del mismo punto en el nuevo sistema coordenado son dadas por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Podemos abreviar esto como:

$$x^{i'} = O^{ij}(\theta) x^j. \quad (1.2)$$

Para ángulos pequeños, podemos reducir esto a

$$\delta x = \theta y; \quad \delta y = -\theta x \quad (1.3)$$

o simplemente

$$\delta x^i = \theta \epsilon^{ij} x^j, \quad (1.4)$$

donde ϵ^{ij} es antisimétrica. Estas matrices forman un grupo; por ejemplo, podemos escribir la inversa de alguna rotación, dada por $O^{-1}(\theta) = O(-\theta)$:

$$O(\theta)O(-\theta) = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

El hecho de que estas matrices preserven invariante la longitud da lugar a restricciones sobre ellas. Para encontrar la naturaleza de estas restricciones, hagamos una rotación sobre la distancia invariante:

$$\begin{aligned} x^{i'} x^{j'} &= O^{ij} x^j O^{ik} x^k \\ &= x^j (O^{ij} O^{ik}) x^k \\ &= x^j x^j, \end{aligned} \quad (1.6)$$

entonces esto es invariante si la matriz O es ortogonal

$$O^{ij} O^{ik} = \delta^{jk}. \quad (1.7)$$

Para tomar el inverso de una matriz ortogonal, simplemente tomamos la transpuesta. El grupo de rotaciones $O(2)$ es llamado grupo ortogonal en dos dimensiones, de hecho, puede ser definido como un conjunto de matrices reales dos dimensional matrices ortogonales. Cualquier matriz ortogonal puede ser escrita como la exponenciación de un matriz anti-simétrica τ

$$O(\theta) = e^{\theta\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta\tau)^n, \quad (1.8)$$

donde

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Todos los elementos de $O(2)$ son parametrizados por un único ángulo θ . Decimos que $O(2)$ es un grupo uniparamétrico, esto es, tiene dimensión 1. Consideremos ahora el determinante a ambos lados de la ecuación, es decir

$$\det(OO^T) = \det O \det O^T = (\det O)^2 = 1. \quad (1.10)$$

Esto significa que el determinante de O es igual a ± 1 . Si tomamos $\det O = 1$, el subgrupo resultante es llamado $SO(2)$. Las rotaciones que hemos visto entonces son miembros de $SO(2)$. Sin embargo, si tomamos ahora $\det O = -1$ esto no forman un grupo, puesto que no posee al elemento identidad.

1.2. Representaciones

Si g_i es un miembro de un grupo G , entonces el objeto $D(g_i)$ es llamado representación de G si obedece:

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_i g_j) \quad (1.11)$$

para todos los elementos en el grupo. En otras palabras, $D(g_i)$ tiene las mismas reglas de multiplicación que el grupo original. Una representación es llamada reducible si $D(g_i)$ se puede poner en forma diagonal. Por ejemplo, la siguiente matriz es una representación reducible

$$D(g_i) = \begin{pmatrix} D_1(g_i) & 0 & 0 \\ 0 & D_2(g_i) & 0 \\ 0 & 0 & D_3(g_i) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

donde D_i son representaciones más pequeñas del grupo. El principal objetivo es encontrar las representaciones irreducibles de los grupos en cuestión. En particular, una manera de generar representaciones mayores de $O(2)$ es simplemente multiplicar vectores. El producto $A^i B^j$, por ejemplo, transforma como

$$A^{i'} B^{j'} = [O^{ii'}(\theta) O^{jj'}(\theta)] A^i B^j. \quad (1.13)$$

Esta matriz $O^{in}(\theta)O^{j'j}(\theta)$ forma una representación de $SO(2)$. Tiene la misma regla de multiplicación que $O(2)$, pero el espacio sobre el que actúa es 2×2 dimensional. En general, un tensor $T^{ijk\dots}$ bajo $O(2)$ no es nada en particular pero un objeto que transforma como el producto de una serie de vectores ordinarios. La transformación de $T^{ijk\dots}$ es idéntica a la transformación del producto $x^i x^j x^k \dots$. Este producto forma una representación de $O(2)$ dado que

$$O^{i_1, i_2 \dots i_N; j_1, j_2 \dots j_N}(\theta) = O^{i_1, j_1}(\theta) O^{i_2, j_2}(\theta) \dots O^{i_N, j_N}(\theta) \quad (1.14)$$

tiene la misma regla de multiplicación que $SO(2)$. Un conveniente método que se usa para crear representaciones irreducibles es usar dos tensores bajo $O(2)$ que son constantes: δ^{ij} y ϵ^{ij} , donde $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$. Podemos mostrar la equivalencia entre $O(2)$ y otra formulación. Tomemos un objeto complejo $u = a + ib$, que transforma de la siguiente manera:

$$u' = U(\theta)u = e^{i\theta}u. \quad (1.15)$$

La matriz $U(\theta)$ es llamada matriz unitaria, porque

$$U \times U^\dagger = \mathbb{I}. \quad (1.16)$$

El conjunto de todas las matrices unitarias unidimensionales $U(\theta) = e^{i\theta}$ definen un grupo llamado $U(1)$. Si hacemos dos transformaciones encontramos

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i\theta + i\theta'}, \quad (1.17)$$

donde tenemos la misma ley de multiplicación que $O(2)$, aunque esta construcción es basada en un nuevo espacio, el espacio de números complejos unidimensionales. Luego decimos que

$$SO(2) \sim U(1). \quad (1.18)$$

Esto significa que hay una correspondencia entre las dos, aunque ellas están definidas en dos diferentes espacios

$$e^{\tau(\theta)} \leftrightarrow e^{i\theta}. \quad (1.19)$$

Para ver la correspondencia entre $O(2)$ y $U(1)$, consideremos dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 que transforman infinitesimalmente bajo $SO(2)$, es decir

$$\delta\phi_i = \theta\epsilon^{ij}\phi_j \quad (1.20)$$

lo cual es justamente la regla de transformación para θ pequeño. Dado $SO(2) \sim U(1)$, los campos escalares pueden ser combinados dentro de un campo escalar complejo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2). \quad (1.21)$$

Luego la variación infinitesimal de este campo bajo $U(1)$ es dado por

$$\delta\phi = -i\theta\phi \quad (1.22)$$

para θ pequeño.

1.2.1. Representaciones de $SO(3)$ y $SU(2)$

El grupo $O(2)$ fue fácil de analizar puesto que sus elementos conmutan entre ellos. A estos grupos los llamamos grupos Abelianos. Ahora repasaremos grupos no-Abelianos, donde los elementos no necesariamente conmutan entre ellos. Definimos $O(3)$ como el grupo que deja la distancia invariante en tres dimensiones, es decir

$$\text{Invariante: } x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.23)$$

donde $x^{i'} = O^{ij} x^j$. Si repetimos los pasos que hicimos para $SO(2)$, sabemos que el conjunto de matrices 3×3 , reales y ortogonales $O(3)$ deja invariante esta cantidad. La condición de ortogonalidad reduce el número de números independientes a $9 - 3 = 6$. Cualquier miembro de $O(3)$ puede ser escrito como la exponencial de una matriz antisimétrica

$$O = \exp \left(i \sum_{i=1}^3 \theta^i \tau^i \right), \quad (1.24)$$

donde τ^i son elementos puramente imaginarios. Así hay tres matrices antisimétricas 3×3 independientes. Por lo tanto $O(3)$ es un grupo de Lie de tres parámetros, parametrizados por tres ngulos. Estas tres matrices antisimétricas τ^i pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \tau^1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau^3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Se puede probar que este conjunto de matrices puede ser representado por el tensor antisimétrico ϵ^{ijk} como

$$(\tau^i)^{jk} = -i\epsilon^{ijk} \quad (1.26)$$

donde $\epsilon^{123} = 1$. Estas matrices antisimétricas, obedecen a la siguiente propiedad:

$$[\tau^i, \tau^j] = i\epsilon^{ijk} \tau^k. \quad (1.27)$$

Este es un ejemplo de un álgebra de Lie. Las constantes ϵ^{ijk} que aparecen en el álgebra son llamadas constantes de estructura del álgebra. Una determinación completa de las constantes de estructura de algún álgebra especifican el álgebra de Lie, y también el grupo que está por detrás. Para ángulos pequeños θ^i , podemos escribir la ley de transformación como

$$\delta x^i = \epsilon^{ijk} \theta^k x^j. \quad (1.28)$$

Introduciendo los operadores

$$L^i \equiv i\epsilon^{ijk} x^j \partial^k \quad (1.29)$$

podemos mostrar que la relación de conmutación de los L^i satisfacen la de $SO(3)$. Construyendo el operador

$$U(\theta) = e^{i\theta^i L^i}, \quad (1.30)$$

un campo escalar y vectorial, transforman como

$$\begin{aligned} U(\theta^k \phi(x) U^{-1}(\theta^k) &= \phi(x'), \\ U(\theta^k \phi^i(x) U^{-1}(\theta^k) &= (O^{-1})^{ij} (\theta^k) \phi^j(x'). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Como en el caso de $O(2)$, podemos encontrar la relación entre $O(3)$ y el grupo unitario. Considerando el conjunto de todas las matrices unitarias, con determinante 1 de 2×2 . Estas matrices forman un grupo, llamado $SU(2)$, el cual es también llamado el grupo unitario especial en dos dimensiones. Estas matrices tienen 3 elementos independientes. Una matriz unitaria puede ser escrita como la exponencial de una matriz hermitica H , donde $H = H^\dagger$,

$$U = e^{iH}. \quad (1.32)$$

Para probar esta relación, simplemente tomamos el hermitico conjugado a ambos lados de la ecuación, es decir

$$\begin{aligned} U^\dagger &= e^{-iH^\dagger} \\ &= e^{-iH} \\ &= U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Puesto que un elemento de $SU(2)$ puede ser parametrizado por tres números, el conjunto más conveniente es usar las conocidas matrices de Pauli. Cualquier elemento de $SU(2)$ puede ser escrito como

$$U = e^{i\theta^i \sigma^i / 2}, \quad (1.34)$$

donde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

donde σ^i satisfacen la relación:

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}. \quad (1.36)$$

Ahora, tenemos exactamente la misma álgebra que para $SO(3)$ en la ecuación (1.27). Por lo tanto, podemos decir que

$$SO(3) \sim SU(2). \quad (1.37)$$

Capítulo 2

El Grupo de Lorentz

2.1. Definición y generalidades

En el contexto de la teoría Especial de la Relatividad (RE), un punto (vector) de la variedad espacio-tiempo (*espacio de Minkowski*, M_4) es caracterizado, en un sistema de referencia inercial (SRI) O , por las coordenadas espacio-temporales cartesianas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, x^i) = (t, \vec{x})$.

Una Transformación de Lorentz (TL) es una transformación lineal, real y homogénea de la forma

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.1)$$

o en notación matricial

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}, \quad (2.2)$$

tal que la forma cuadrática

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.3)$$

permanece invariante. Esto implica que las matrices $\mathbf{\Lambda}$ deben satisfacer la condición

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho = \eta_{\lambda\rho}, \quad (2.4)$$

es decir,

$$\mathbf{\Lambda}^\top \eta \mathbf{\Lambda} = \eta. \quad (2.5)$$

Físicamente una TL de la forma (2.1) representa una transformación entre dos SRI's $O \rightarrow \tilde{O}$ (vinculados respectivamente a las coordenadas x y \tilde{x}). La condición anterior expresa la equivalencia física de los sistemas de referencia O y \tilde{O} (ppio. de relatividad), y en particular la existencia de una simetría fundamental entre las tres dimensiones espaciales y la dimensión temporal, la cual es manifestada en la constancia de la velocidad (rapidez) de la luz en todos los SRI's¹. El SRI \tilde{O} se mueve con *velocidad constante* con respecto a O . En general, los ejes espaciales de \tilde{O} están rotados respecto de O . Dado que una matriz Λ determina totalmente una TL entre SRI's, es común en la práctica identificar matrices y transformaciones.

El ejemplo más simple de TL corresponde a los llamados *boost*, donde los ejes espaciales de \tilde{O} son paralelos a los de O , es decir no existe una rotación espacial involucrada. La matriz

¹Aquí consideramos el sistema “geometrizado” de unidades, en el que $c \equiv 1$. ver [1], Capítulo 1, box 1.8.

Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^1 & -\gamma v^2 & -\gamma v^3 \\ -\gamma v^1 & 1 + \frac{(v^1)^2}{(v)^2}(\gamma - 1) & \frac{v^1 v^2}{(v)^2}(\gamma - 1) & \frac{v^1 v^3}{(v)^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma v^2 & \frac{v^1 v^2}{(v)^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{(v^2)^2}{(v)^2}(\gamma - 1) & \frac{v^2 v^3}{(v)^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma v^3 & \frac{v^1 v^3}{(v)^2}(\gamma - 1) & \frac{v^2 v^3}{(v)^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{(v^3)^2}{(v)^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde

$$\gamma = [1 - (v)^2]^{-1/2}, \quad v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}, \quad \vec{v} = (v^1, v^2, v^3), \quad (2.7)$$

satisface la condición (2.5) y conduce a la siguiente transformación de coordenadas inerciales

$$\tilde{x} = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{(v)^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} - \gamma \vec{v} t, \quad \tilde{t} = \gamma [t - (\vec{v} \cdot \vec{x})]. \quad (2.8)$$

Esta TL determina las coordenadas espacio-temporales de un SRI \tilde{O} que se mueve con rapidez (constante) v respecto al SRI O , en la dirección $\hat{v} = \vec{v}/v$. Una transformación del tipo (2.6) es llamada un *boost en la dirección \hat{v}* .

La condición (2.5) implica que toda TL Λ satisface $(\det \Lambda)^2 = 1$, de modo que Λ necesariamente es no-singular y por lo tanto su matriz inversa Λ^{-1} siempre existe y también satisface (2.5). Si Λ' es otra TL entonces el producto matricial $\Lambda \Lambda'$ también es una TL. En particular la matriz identidad $\mathbf{1} = \Lambda^{-1} \Lambda = \Lambda \Lambda^{-1}$ es la TL trivial. Estas propiedades, junto con la asociatividad de la multiplicación de matrices, muestran que las matrices que satisfacen (2.5) *forman un grupo* bajo la multiplicación matricial: el *Grupo de Lorentz* $L = O(1, 3)$.

2.1.1. Ejemplo: Transformación del campo electromagnético

Un cuadvivector a^μ es, *por definición*, un objeto que bajo una TL, se transforma como

$$a^\mu \rightarrow \tilde{a}^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu. \quad (2.9)$$

Análogamente, un tensor de segundo rango $a^{\mu\nu}$ se transforma

$$a^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{a}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho a^{\lambda\rho}. \quad (2.10)$$

Este es el caso del tensor $F^{\mu\nu}$ que describe el campo electromagnético, representado matricialmente por

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde \vec{E} es el vector campo eléctrico y \vec{B} el (pseudo-) vector campo magnético²

Bajo una TL \mathbf{F} se transforma como

$$\tilde{\mathbf{F}} = \Lambda \mathbf{F} \Lambda^T. \quad (2.12)$$

²Note que cuando aquí hablamos de \vec{E} y \vec{B} como “(pseudo)vectores” queremos decir que estos objetos transforman (pseudo)vectorialmente *respecto a transformaciones pertenecientes al (sub)grupo $O(3)$ de rotaciones*. \vec{E} y \vec{B} no son vectores respecto a TL.

Usando (2.6) se encuentra que, bajo un boost, \vec{E} y \vec{B} se transforman como

$$\vec{\tilde{E}} = \gamma \vec{E} + \gamma (\vec{v} \cdot \vec{B}) - \frac{(\gamma - 1)}{(v)^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v} \quad (2.13)$$

$$\vec{\tilde{B}} = \gamma \vec{B} - \gamma (\vec{v} \cdot \vec{E}) - \frac{(\gamma - 1)}{(v)^2} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v}. \quad (2.14)$$

2.2. Descomposición del GL

Si en (2.4) se hace $\lambda = \rho = 0$, se obtiene que

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 = 1, \quad (2.15)$$

de modo que

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \geq 1. \quad (2.16)$$

La ec. (2.16) y el hecho que $(\det \Lambda)^2 = 1$ implican que el *grupo completo de Lorentz*

$$L = O(1, 3) = \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(R) \quad / \quad \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta \right\}, \quad (2.17)$$

puede ser descompuesto en cuatro subconjuntos disconexos³:

1. Transformaciones de Lorentz *propias ortocronas*

$$L_+^\uparrow = \left\{ \Lambda \in O(1, 3) \quad / \quad \Lambda_0^0 \geq 1, \quad \det \Lambda = 1 \right\}. \quad (2.18)$$

2. Transformaciones de Lorentz *impropias ortocronas*

$$L_-^\uparrow = \left\{ \Lambda \in O(1, 3) \quad / \quad \Lambda_0^0 \geq 1, \quad \det \Lambda = -1 \right\}. \quad (2.19)$$

3. Transformaciones de Lorentz *propias no ortocronas*

$$L_+^\downarrow = \left\{ \Lambda \in O(1, 3) \quad / \quad \Lambda_0^0 \leq -1, \quad \det \Lambda = 1 \right\}. \quad (2.20)$$

4. Transformaciones de Lorentz *impropias no ortocronas*

$$L_-^\downarrow = \left\{ \Lambda \in O(1, 3) \quad / \quad \Lambda_0^0 \leq -1, \quad \det \Lambda = -1 \right\}. \quad (2.21)$$

Es útil definir las TL's *propias*, $L_+ = SO(1, 3) = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$; las transformaciones *impropias*, $L_- = L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow$; las transformaciones *ortocronas*, $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$; y las transformaciones *no ortocronas*, $L^\downarrow = L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow$.

L_- y L^\downarrow no constituyen grupos puesto que no contienen a la identidad. Por el contrario, es fácil verificar que L_+ y L^\uparrow sí forman grupos, que son subgrupos de $L = O(1, 3)$. Estos grupos reciben el nombre de *Grupo de Lorentz Propio* (L_+) y *Grupo de Lorentz Ortocrono* (L^\uparrow). Finalmente L_+^\uparrow , la componente conexa del GL, define el *Grupo Restringido de Lorentz* (GL propio ortocrono), el cual es un *grupo de Lie*⁴.

³Es decir, que no es posible conectar dos elementos cualesquiera de dos de estos subconjuntos a través de una curva continua en el espacio de los elementos de L .

⁴ver [2], Capítulo 3.

La reflexión espacial (paridad) $x^i \rightarrow \tilde{x}^i = -x^i$, $t \rightarrow \tilde{t} = t$, que corresponde a una matriz $\mathbf{I}_s = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, es una TL impropia ortocrona, es decir $\mathbf{I}_s \in L_-^\uparrow$. Análogamente la inversión temporal $\mathbf{I}_t = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ es una TL impropia no ortocrona, es decir $\mathbf{I}_t \in L_-^\downarrow$. Es directo verificar que el elemento $\mathbf{I}_{st} = \mathbf{I}_s \mathbf{I}_t = \mathbf{I}_t \mathbf{I}_s \in L_+^\downarrow$.

Estos elementos, junto con la identidad, forman un subgrupo discreto abeliano R del GL. Este subgrupo R es usualmente llamado *el grupo de reflexiones espaciales y temporales*. En nuestro caso este grupo discreto resulta ser el grupo factor L/L_+^\uparrow , obtenido a partir del grupo de Lorentz L y su parte conexa⁵ L_+^\uparrow . Esto es una manifestación de la propiedad que permite descomponer un elemento cualquiera de L como la composición de un elemento perteneciente a R y un elemento del grupo restringido L_+^\uparrow .

El subgrupo discreto R queda definido por

$$R = L/L_+^\uparrow = \{\mathbf{1}, \mathbf{I}_s, \mathbf{I}_t, \mathbf{I}_{st}\}, \quad (2.22)$$

de modo que una transformación $\mathbf{\Lambda} \in L$ puede siempre escribirse como

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}_+^\uparrow, \quad (2.23)$$

con apropiados elementos $\mathbf{r} \in R$ y $\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow \in L_+^\uparrow$.

Esto permite estudiar las propiedades del GL, analizando primero su parte conexa L_+^\uparrow , a través de su álgebra $so(1, 3)$, y luego el grupo de reflexiones espaciales y temporales.

2.3. Generadores y álgebra $so(1, 3)$

La transformación infinitesimal

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 \approx \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

donde \mathbf{A} satisface, de acuerdo con (2.5), la condición

$$(\eta \mathbf{A})^\top + \eta \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

implica que el álgebra de Lie $so(1, 3)$ es definida por

$$so(1, 3) = \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(R) \quad / \quad (\eta \mathbf{A})^\top + \eta \mathbf{A} = \mathbf{0} \right\}. \quad (2.26)$$

De (2.25) se ve que la matriz $\mathbf{M} \equiv \eta \mathbf{A}$ es antisimétrica, lo cual significa que una TL (propia ortocrona) queda determinada por seis parámetros independientes⁶ de modo que el álgebra del grupo de Lorentz (AL) tiene dimensión 6, es decir, tiene 6 generadores. Por esto, un elemento cualquiera de $so(1, 3)$ es de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^4 & \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ \varepsilon^4 & 0 & -\varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^5 & \varepsilon^3 & 0 & -\varepsilon^1 \\ \varepsilon^6 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

lo cual permite escribir una transformación infinitesimal como⁷

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - i\varepsilon^\alpha (T_\alpha)^\mu_\nu, \quad \alpha = 1, \dots, 6 \quad (2.28)$$

⁵Recurdese que en general, el grupo factor de un grupo continuo G por su componente conexa G_0 es un grupo discreto $D = G/G_0$. ver [2], Capítulo 3.

⁶ $\mathbf{A} \equiv \eta \mathbf{M}$, con \mathbf{M} = matriz 4×4 antisimétrica y, por lo tanto, con 6 elementos independientes.

⁷El factor i se ha introducido por conveniencia.

o matricialmente

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} - i\varepsilon^\alpha \mathbf{T}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 6 \quad (2.29)$$

donde ε^α ($\alpha = 1, \dots, 6$) son los parámetros infinitesimales reales que determinan la TL y $(T_\alpha)^\mu_\nu$ (ó \mathbf{T}_α) son los correspondientes generadores⁸, los cuales vienen dados por

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

de modo que

$$\mathbf{J}^i = \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{K}^i = \mathbf{T}_{i+3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.32)$$

donde $\vec{\mathbf{J}}$ son los generadores de rotaciones y $\vec{\mathbf{K}}$ los de Boosts. Así, las matrices \mathbf{J}^i son hermíticas y las \mathbf{K}^i antihermíticas.

Estos resultados permiten verificar que los generadores del AL satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{J}^i, \mathbf{J}^j] = i\epsilon^{ijk} \mathbf{J}^k, \quad (2.33)$$

$$[\mathbf{J}^i, \mathbf{K}^j] = i\epsilon^{ijk} \mathbf{K}^k, \quad (2.34)$$

$$[\mathbf{K}^i, \mathbf{K}^j] = -i\epsilon^{ijk} \mathbf{J}^k, \quad (2.35)$$

y que una TL propia ortocrona arbitraria \mathbf{A}_+^\uparrow , adopta la forma

$$\mathbf{A}_+^\uparrow = \exp(-i\varepsilon^\alpha \mathbf{T}_\alpha), \quad (2.36)$$

donde ahora los parámetros ε^α no son necesariamente infinitesimales, es decir, la transformación puede ser finita. Por ejemplo, la transformación (2.6) es obtenida haciendo $\varepsilon^i = 0$, $\varepsilon^{i+3} = -\phi \hat{v}^i$, con $\tanh \phi = v$.

2.4. Representaciones del GL

2.4.1. Generalidades

A continuación se presentarán algunos elementos básicos necesarios para construir las representaciones irreducibles *finito-dimensionales projectivas* del GL, las cuales serán de

⁸Es usual en la literatura denotar los parámetros por $\varepsilon^{\lambda\rho} = -\varepsilon^{\rho\lambda}$ y los generadores por $(T_{\lambda\rho})^\mu_\nu = -(T_{\rho\lambda})^\mu_\nu$, de modo que la TL infinitesimal viene dada por $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\varepsilon^{\lambda\rho} (T_{\lambda\rho})^\mu_\nu$, donde $(T_{\lambda\rho})^\mu_\nu = i[\eta_{\rho\nu}\delta^\mu_\lambda - \eta_{\lambda\nu}\delta^\mu_\rho]$. En esta notación el álgebra de Lie es de la forma $[\mathbf{T}_{\mu\nu}, \mathbf{T}_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda}\mathbf{T}_{\nu\rho} + \dots)$ y los generadores de rotaciones y boosts vienen dados por $\mathbf{J}^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\mathbf{T}^{jk}$, $\mathbf{K}^i = \mathbf{T}^{i0}$. Sin embargo, esta notación tiene el inconveniente que induce al error de considerar la cantidad $\varepsilon^{\lambda\rho}$ como un tensor de segundo rango antisimétrico. Recuérdese que en este contexto la definición de tensor depende justamente de las propiedades de transformación de un objeto bajo TL's, por lo que no es consistente aplicar esta definición a un objeto que, precisamente, es usado para determinar las TL's. Por esto, aquí introduciremos una notación alternativa que es más ventajosa para nuestros propósitos, pues permite visualizar más claramente la estructura de las teorías que nos ocupan. Es útil, sin embargo, definir las $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ como cantidades secundarias en algunos cálculos prácticos.

utilidad en la descripción de las propiedades de transformación de *campos* de materia. Una discusión acerca de las representaciones de dimensión infinita (p.ej. unitarias), útiles en la descripción de *estados de campos cuánticos*, puede encontrarse en [3, 4].

Una representación de un grupo G es una realización de la ley de multiplicación abstracta que define G , por medio de operadores, tales como matrices u operadores diferenciales, que actúan sobre algún espacio vectorial de dimensión finita o infinita. En el caso del GL una *representación finito-dimensional* puede expresarse a través de matrices que satisfacen la correspondiente regla de composición. En este caso, a cada matriz $\mathbf{\Lambda} \in L$ le corresponde una matriz, que se denotará por $\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda})$, tal que satisfacen la misma regla de multiplicación que las matrices $\mathbf{\Lambda}$. Si $\mathbf{\Lambda}_1$ y $\mathbf{\Lambda}_2$ son dos matrices que satisfacen (2.5), entonces las matrices $\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda})$ constituyen una representación del GL si

$$\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_1)\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_2) = \mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2). \quad (2.37)$$

En Mecánica Cuántica Relativista (MCR), son además de importancia, las *representaciones proyectivas*, es decir, representaciones salvo una fase. Las matrices \mathbf{S} constituyen una representación proyectiva del GL si satisfacen una regla de multiplicación de la forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_1)\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_2) = e^{i\varphi(\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2)}\mathbf{S}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2), \quad (2.38)$$

donde $\varphi(\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2)$ es alguna fase (real) que puede depender en general de las transformaciones involucradas. Así (2.37) es un caso particular de (2.38). Usualmente las matrices que satisfacen (2.37) son llamadas *representaciones univaluadas o verdaderas*, para diferenciarlas de las *representaciones proyectivas*, que son entendidas como aquellas en que $\varphi \neq 0$.

2.4.2. Representaciones Proyectivas de L_+^\uparrow

Es un hecho conocido que no existe una relación uno a uno entre grupos y álgebras de Lie [2], debido a que grupos de Lie distintos (p.ej. $SU(2)$ y $SO(3)$) pueden poseer la misma álgebra⁹. Sin embargo, al considerar representaciones proyectivas de L_+^\uparrow se simplifica en alguna medida el trabajo, debido a que existe una relación uno a uno¹⁰ entre una álgebra de Lie y el correspondiente **grupo covertedor universal**¹¹ y, a su vez, entre las representaciones univaluadas del grupo covertedor y las representaciones proyectivas del grupo original.

En nuestro caso, el GL no es simplemente conexo¹² y el grupo covertedor universal de L_+^\uparrow es $SL(2, C)$. Por lo tanto, al exponenciar **representaciones del álgebra de Lorentz** ($so(1, 3) = sl(2, C)$) no se obtienen en general representaciones univaluadas de L_+^\uparrow sino de $SL(2, C)$. Sin embargo, los objetos resultantes constituyen *representaciones proyectivas* de L_+^\uparrow , que son justamente las que nos interesan. Así, el trabajo se reduce a construir representaciones del *álgebra* de Lorentz.

2.4.3. El grupo $SL(2, C)$

El grupo de Lie especial lineal bidimensional con parámetros complejos, $SL(2, C)$, es definido como:

$$SL(2, C) = \{\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(C) \quad / \quad \det(\mathbf{M}) = 1\}. \quad (2.39)$$

⁹El álgebra de Lie sólo contiene información de las propiedades *locales* del Grupo.

¹⁰Por medio de exponenciación, ver (2.36).

¹¹El grupo covertedor universal de un grupo G es el (único) grupo, que tiene asociada la misma álgebra que G , y es simplemente conexo [2].

¹²El subgrupo de rotaciones no es simplemente conexo, es doblemente conexo. ver [5], capítulo 9.

Una matriz $\mathbf{M} \in SL(2, C)$ puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} \\ &= p_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= p_0 \mathbf{1}_2 + p_i \sigma^i,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}_2$ es la matriz identidad bidimensional y σ^i las matrices de Pauli. Los parámetros p son números complejos que satisfacen la condición $\det(\mathbf{M}) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 1$. Esto reduce a tres los parámetros complejos independientes que parametrizan una matriz de $SL(2, C)$.

Una matriz $\mathbf{M} \in SL(2, C)$ que difiere infinitesimalmente de la identidad queda definida por tres parámetros complejos infinitesimales o, equivalentemente, por seis parámetros infinitesimales reales. Esto permite escribir

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} + p_i \sigma^i = \mathbf{1} - i\varepsilon_i \left[\frac{\sigma^i}{2} \right] - i\varepsilon_{i+3} \left[i \frac{\sigma^i}{2} \right] = \mathbf{1} - i\varepsilon^\alpha \mathbf{L}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad (2.40)$$

donde ahora los parámetros $p_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i+3} - i\varepsilon_i)$ son infinitesimales y los ε^α ($\alpha = 1, \dots, 6$) son reales. Además

$$\mathbf{L}_i = \frac{\sigma^i}{2} = \mathbf{j}^i, \quad \mathbf{L}_{i+3} = i \frac{\sigma^i}{2} = \mathbf{k}^i, \quad (2.41)$$

son los generadores \mathbf{L}_α del álgebra $sl(2, C)$, y satisfacen la misma álgebra que los operadores de rotaciones (\mathbf{j}^i) y boosts (\mathbf{k}^i) derivados en la sección 2.3¹³. Por lo tanto, los grupos de Lie L_+^\uparrow y $SL(2, C)$ poseen la misma álgebra de Lie, es decir $so(1, 3) = sl(2, C)$. Sin embargo, el L_+^\uparrow no es simplemente conexo mientras que $SL(2, C)$ si lo es, y por lo tanto $SL(2, C)$ es el grupo colector universal de L_+^\uparrow . La construcción de elementos finitos por medio de la exponenciación de representaciones de elementos del álgebra de Lie $so(1, 3)$ suministra representaciones del grupo $SL(2, C)$ que, en general, constituyen representaciones proyectivas de L_+^\uparrow .

Dado que L_+^\uparrow y $SL(2, C)$ tienen la misma álgebra de Lie, ellos poseen la mismas propiedades locales¹⁴. Sin embargo, las propiedades de globales de composición no son las mismas. Estas características pueden ejemplificarse estudiando el comportamiento de “rotaciones en torno del eje 3”, para TL’s y elementos de $SL(2, C)$.

Usando la matriz correspondiente al generador \mathbf{J}^3 en (2.30) es directo verificar que una “rotación en un ángulo de 2π en torno de eje 3” es equivalente a la rotación trivial, es decir

$$\mathbf{A} = \exp(-i2\pi \mathbf{J}^3) = \mathbf{1}_4 \in L_+^\uparrow. \quad (2.42)$$

Sin embargo, no ocurre lo mismo con elementos de $SL(2, C)$ ya que

$$\mathbf{M} = \exp(-i2\pi \mathbf{j}^3) = \exp(-i\pi \sigma^3) = -\mathbf{1}_2 \in SL(2, C). \quad (2.43)$$

Así, es necesario que los parámetros asociados a los generadores \mathbf{j}^i (“rotaciones”) varíen en el intervalo $[0, 4\pi]$ para cubrir completamente los elementos de $SL(2, C)$. Mientras L_+^\uparrow asocia a los ángulos de rotación θ y $\theta + 2\pi$ el mismo elemento, el grupo $SL(2, C)$ les asocia elementos distintos. Por esto, existe en general un *mapeo dos a uno* (homomorfismo) entre

¹³y, como se veRa en la sección 2.4.5, corresponden a la representación $(0, \frac{1}{2})$.

¹⁴es decir, propiedades que involucran la composición de elementos cercanos a la identidad.

elementos de $SL(2, C)$ y elementos de L_+^\uparrow . A cada elemento de L_+^\uparrow le corresponden *dos* elementos de $SL(2, C)$: si $\mathbf{M} \in SL(2, C)$ está asociado a $\mathbf{A} \in L_+^\uparrow$ entonces $(-\mathbf{M}) \in SL(2, C)$ también lo está. En el ejemplo anterior $\mathbf{M} = \mathbf{1}_2$ y $\mathbf{A} = \mathbf{1}_4$. Es fácil ver que, debido a este comportamiento, aunque las matrices en (2.41) constituyen una *representación del álgebra* de L_+^\uparrow , las matrices finitas construidas por exponenciación de los generadores *no constituyen una representación de L_+^\uparrow* : en efecto, $e^{-i\pi\mathbf{J}^3}e^{-i\pi\mathbf{J}^3} = -\mathbf{1}_2$, y una representación requiere una ley de multiplicación de la forma $e^{-i\pi\mathbf{J}^3}e^{-i\pi\mathbf{J}^3} = \mathbf{1}$. Sin embargo, las matrices así encontradas constituyen una *representación proyectiva de L_+^\uparrow* .

El grupo L_+^\uparrow puede pensarse [2] como el grupo factor

$$L_+^\uparrow = SL(2, C)/D, \quad (2.44)$$

donde D es el *centro*¹⁵ de $SL(2, C)$, que en nuestro caso está formado por los elementos de $SL(2, C)$ asociados a la TL identidad, es decir, $D = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} = Z_2$.

2.4.4. Representaciones irreducibles finito-dimensionales del álgebra de Lorentz

Una representación matricial del AL $so(1, 3) = sl(2, C)$, queda definida por las matrices¹⁶ \mathbf{J}^i y \mathbf{K}^i , $i = 1, 2, 3$ que satisfacen las relaciones de conmutación (2.33)-(2.35). Si se introducen las combinaciones lineales con coeficientes complejos

$$\mathbf{X}^i \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{J}^i + i\mathbf{K}^i), \quad \mathbf{Y}^i \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{J}^i - i\mathbf{K}^i), \quad (2.45)$$

entonces (2.33)-(2.35) implican que

$$[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j] = i\epsilon^{ijk}\mathbf{X}^k, \quad [\mathbf{Y}^i, \mathbf{Y}^j] = i\epsilon^{ijk}\mathbf{Y}^k, \quad (2.46)$$

$$[\mathbf{X}^i, \mathbf{Y}^j] = 0. \quad (2.47)$$

Es decir, \mathbf{X}^i e \mathbf{Y}^i satisfacen el álgebra $su(2) \oplus su(2)$. Esto permite construir representaciones irreducibles del álgebra $so(1, 3)$ a partir de productos directos de las bien conocidas representaciones del álgebra $su(2)$. Las representaciones irreducibles construidas en esta forma quedan determinadas por los valores que asumen los operadores de Casimir de cada álgebra $su(2)$.

Considérese una representación irreducible del álgebra $su(2)$, que seRa asociada a los operadores X^i . Las representaciones irreducibles *finito-dimensionales* de $su(2)$ son hermiticas¹⁷ y quedan determinadas por un número j que puede asumir valores *enteros o semi-enteros* $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. La representación resultante, que se denotará por $D_X^{(j)}$, es de dimensión $(2j+1)$ y el correspondiente espacio de representación es generado por la base $|j, m\rangle_X$, donde m asume los valores $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. Las matrices \mathbf{x}^i quedan entonces definidas por:

$$x_{(\pm)\tilde{m}m} = \delta_{\tilde{m}, m \pm 1} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}, \quad x_{\tilde{m}m}^3 = m\delta_{\tilde{m}, m}, \quad (2.48)$$

$$x_{\tilde{m}m}^i = \langle j, \tilde{m} | x^i | j, m \rangle, \quad \mathbf{X}_\pm = \mathbf{X}^1 \pm i\mathbf{X}^2. \quad (2.49)$$

¹⁵E.d., el conjunto de elementos que conmutan con todos los elementos del grupo.

¹⁶Aquí denotamos los operadores “abstractos” (es decir no vinculados a alguna representación particular) por J^i y K^i , mientras que las correspondientes *matrices*, en una representación finito-dimensional dada, son denotadas por letras en negrita (p.ej. \mathbf{J}^i y \mathbf{K}^i , ó \mathbf{j}^i y \mathbf{k}^i).

¹⁷ $SU(2)$ es compacto.

De la misma forma, es posible construir representaciones $D_Y^{(j')}$ de dimensión $(2j' + 1)$ asociadas a los operadores Y^i , de modo que la base del espacio de representación viene dada por $|j', m'\rangle_Y$, $m' = -j', -j' + 1, \dots, j' - 1, j'$. Consecuentemente, las matrices \mathbf{y}^i quedan definidas por

$$y_{(\pm)\tilde{m}'m'} = \delta_{\tilde{m}', m' \pm 1} \sqrt{(j' \mp m')(j' \pm m' + 1)}, \quad y_{\tilde{m}'m'}^3 = m' \delta_{\tilde{m}', m'}, \quad (2.50)$$

$$y_{\tilde{m}'m}^i = \langle j', \tilde{m}' | y^i | j', m' \rangle, \quad \mathbf{Y}_{\pm} = \mathbf{Y}^1 \pm i\mathbf{Y}^2. \quad (2.51)$$

Recuérdese, por último, que los operadores de Casimir de las representaciones matriciales finito-dimensionales de $su(2)$ así construidas son

$$(\mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^i \mathbf{x}^i = j(j+1)\mathbf{1}, \quad (\mathbf{y})^2 = \mathbf{y}^i \mathbf{y}^i = j'(j'+1)\mathbf{1}. \quad (2.52)$$

A partir de estos objetos es posible construir las matrices \mathbf{X}^i e \mathbf{Y}^i correspondientes a una representación irreducible del álgebra $so(1, 3)$, denotada por (j, j') . Estos operadores deben satisfacer álgebras $su(2)$ mutuamente conmutantes. Esto permite construir las respectivas matrices de manera similar al usual procedimiento de “suma de momenta angulares”. Esto significa que el espacio correspondiente a la representación (j, j') de $so(1, 3)$ tiene como vectores base a

$$\left| \begin{matrix} jj' \\ mm' \end{matrix} \right\rangle = |j, m\rangle_X \otimes |j', m'\rangle_Y, \quad (2.53)$$

y las matrices \mathbf{X}^i e \mathbf{Y}^i vienen dadas por

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{x}^i \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{Y}^i = \mathbf{1} \otimes \mathbf{y}^i. \quad (2.54)$$

Por lo tanto, la representación (j, j') es de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$. Finalmente, las matrices del álgebra de Lorentz buscadas, se calculan usando

$$\mathbf{J}^i = \mathbf{X}^i + \mathbf{Y}^i, \quad \mathbf{K}^i = i(\mathbf{Y}^i - \mathbf{X}^i), \quad (2.55)$$

lo que implica que en una representación irreducible finito-dimensional (j, j') *las matrices de momentum angular son hermiticas*, mientras que *las matrices de boost son antihermiticas*¹⁸. Consecuentemente, las representaciones del GL serán *no-unitarias*¹⁹.

Es útil notar que, debido a que $\mathbf{L}^3 = \mathbf{X}^3 + \mathbf{Y}^3$, el valor máximo que puede asumir (la tercera componente de) el momentum angular en la representación (j, j') es $j + j'$. Cuando se describen partículas usando campos de materia que se transforman bajo una representación de dimensión finita del GL, el espín de la partícula descrita viene dado justamente por el momentum angular de la representación correspondiente. Consecuentemente, una representación (j, j') describirá partículas de espín $j + j'$.

Es fácil probar que, si $j + j'$ es entero, la representación asociada resulta ser univaluada, mientras que si es semientero la representación será proyectiva o *espinorial*²⁰.

De esta forma se han clasificado todas las representaciones proyectivas *finito-dimensionales irreducibles* del grupo restringido de Lorentz (L_+^\uparrow) . Si (j_1, j'_1) y (j_2, j'_2) son dos representaciones irreducibles entonces, la representación $(j_1, j'_1) \otimes (j_2, j'_2)$ puede descomponerse de

¹⁸El GL *no es compacto*. Esta propiedad es intuitivamente clara debido a que la composición de boosts en una misma dirección y sentido es equivalente a un boost con una velocidad resultante mayor (obtenida por la expresión de adición relativista de velocidades). Así, la composición sucesiva de estos boosts converge a un “boost con velocidad de la luz”. Sin embargo, este objeto límite, como puede verificarse fácilmente, *no* es una TL.

¹⁹Las matrices correspondientes a rotaciones puras son unitarias, no así las que incluyen boosts.

²⁰ver, por ejemplo, [4], página 672.

la manera siguiente²¹ [4]

$$(j_1, j'_1) \otimes (j_2, j'_2) \approx \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{j'=|j'_1-j'_2|}^{j'_1+j'_2} (j, j'). \quad (2.56)$$

Por ejemplo²²,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) \approx \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (2.57)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx (0, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0) \oplus (1, 1). \quad (2.58)$$

2.4.5. Representaciones irreducibles: Casos particulares

Con el fin de representar matricialmente los operadores, se considerarán los vectores que definen el espacio de representación (j, j') , ordenados como sigue : $\left| \begin{smallmatrix} jj' \\ j, j' \end{smallmatrix} \right\rangle, \dots, \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ -j, j' \end{smallmatrix} \right\rangle, \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ j, j'-1 \end{smallmatrix} \right\rangle, \dots, \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ -j, j'-1 \end{smallmatrix} \right\rangle, \dots, \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ j, -j' \end{smallmatrix} \right\rangle, \dots, \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ -j, -j' \end{smallmatrix} \right\rangle$.

Representación $(0, 0)$ (trivial)

La representación correspondiente a $j = j' = 0$ es la representación trivial. De las ecuaciones generales (2.48)-(2.51) se observa que la representación es unidimensional y que todos los generadores son idénticamente nulos. Por lo tanto, toda TL es representada trivialmente por la identidad (unidimensional). Esta representación es de spin cero y es usada para describir particular sin spin (escalares y pseudo-escalares).

Representación $(\frac{1}{2}, 0)$ (izquierda)

Si $j = 1/2, j' = 0$ se obtiene una representación de spin $1/2$. Esta representación es llamada “izquierda” debido a que está ligada a la descripción de “neutrinos de mano izquierda”.

En la representación $(1/2, 0)$ las matrices \mathbf{x}^i son bidimensionales, y las \mathbf{y}^i son de dimensión uno e idénticamente nulas. La expresión explícita de las matrices \mathbf{x}^i quedan determinadas por (2.48) y (2.49). Usando la base $\{|j, m\rangle_X\}$ dada por

$$\left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\rangle_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\rangle_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

se obtiene fácilmente que

$$\mathbf{x}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

o en forma compacta

$$\mathbf{x}^i = \frac{1}{2} \sigma^i \quad (2.61)$$

²¹ Aquí el símbolo \approx denota la *equivalencia* de representaciones.

²² Comparar con sec. 2.4.5.

donde σ^i son las usuales matrices de Pauli. Debido a que $\mathbf{y}^i = 0$, (2.54) implica $\mathbf{X}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$, $\mathbf{Y}^i = 0$, de modo que (2.55) nos dice que los generadores en la rep. $(\frac{1}{2}, 0)$ vienen dados por²³

$$(\mathbf{J}_L)^i = \frac{1}{2}\sigma^i, \quad (\mathbf{K}_L)^i = -\frac{i}{2}\sigma^i. \quad (2.62)$$

Representación $(0, \frac{1}{2})$ (derecha)

Análogamente al caso anterior, se obtiene que la rep. $(0, \frac{1}{2})$ es también bidimensional, pero ahora $\mathbf{X}^i = 0$, $\mathbf{Y}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$. Por lo tanto,

$$(\mathbf{J}_R)^i = \frac{1}{2}\sigma^i, \quad (\mathbf{K}_R)^i = \frac{i}{2}\sigma^i. \quad (2.63)$$

Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (vectorial)

En el caso de la rep. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ las matrices resultantes son de dimensión 4, al igual que la representación “original” dada por las matrices (4×4) Λ_μ^ν que actúan sobre los vectores del espacio de Minkowski. Más aun, éstas son en realidad la misma representación²⁴, debido a que las matrices están ligadas por una transformación de similitud.

Ya que $j = \frac{1}{2}$, las matrices \mathbf{x}^i serán las mismas que en el caso de la rep. $(\frac{1}{2}, 0)$, es decir, $\mathbf{x}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$. Análogamente, $j' = \frac{1}{2}$ implica que las matrices \mathbf{y}^i son las mismas que en $(0, \frac{1}{2})$, es decir, también proporcionales a las matrices de Pauli: $\mathbf{y}^i = \frac{1}{2}\sigma^i$. De este modo, (2.54) nos dice que

$$\mathbf{X}^i = \frac{1}{2}\sigma^i \otimes \mathbf{1}_2, \quad \mathbf{Y}^i = \frac{1}{2}\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^i, \quad (2.64)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{X}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{Y}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Usando (2.55) se obtienen las matrices que representan a los generadores de rotaciones y boosts en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\mathbf{J}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{K}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

²³Hemos incluido aquí el subíndice L para indicar que estas matrices son la representación de los generadores del GL en la representación izquierda.

²⁴Más exactamente, éstas son representaciones equivalentes.

Es fácil verificar que los generadores en las expresiones (2.30) y (2.31) pueden obtenerse aplicando una transformación de similitud sobre las matrices aquí encontradas. Si se denotan las matrices en (2.67) y (2.68) por $\tilde{\mathbf{T}}_\alpha$, entonces $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{T}}_\alpha\mathbf{S}^{-1}$ ($\alpha = 1, \dots, 6$), donde la matriz \mathbf{S} puede elegirse como

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

En particular se verifica, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{T}_3\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{J}^3\mathbf{S}^{-1}. \end{aligned}$$

2.4.6. Representaciones incluyendo reflexiones espaciales y temporales

Considérese la extensión del grupo $SL(2, C)$, de modo que incorpore reflexiones espaciales. Las representaciones del grupo ampliado nos entregan representaciones (proyectivas) del grupo completo de Lorentz L . La inclusión de estas transformaciones discretas no conduce a una única extensión de $SL(2, C)$, sino que a 8 extensiones inequivalentes²⁵ [4]. Aquí sólo se bosquejarán algunos de los resultados principales, mostrando los objetos que serán usados posteriormente.

Como es sabido²⁶, es posible descomponer una TL $\Lambda \in L$ como la composición de una reflexión espacial y/o temporal y un elemento del grupo restringido de Lorentz. Las propiedades algebraicas de los elementos del grupo de reflexiones espaciales y temporales R pueden obtenerse directamente de las expresiones explícitas de \mathbf{I}_s , \mathbf{I}_t , \mathbf{I}_{st} , \mathbf{J}_i y \mathbf{K}_i (ver secs. 2.2 y 2.3). Es directo verificar que

$$\mathbf{I}_s^2 = \mathbf{I}_t^2 = \mathbf{I}_{st}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{I}_s\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_t\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{st}, \quad (2.70)$$

$$[\mathbf{I}_{st}, \mathbf{I}_s] = [\mathbf{I}_{st}, \mathbf{I}_t] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{J}^i, \mathbf{I}_{st}] = [\mathbf{K}^i, \mathbf{I}_{st}] = \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

$$[\mathbf{J}^i, \mathbf{I}_s] = [\mathbf{J}^i, \mathbf{I}_t] = \mathbf{0}, \quad \{\mathbf{K}^i, \mathbf{I}_s\} = \{\mathbf{K}^i, \mathbf{I}_t\} = \mathbf{0}, \quad (2.72)$$

de manera que

$$\mathbf{X}^i\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s\mathbf{Y}^i, \quad \mathbf{X}^i\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_t\mathbf{Y}^i, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{Y}^i\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s\mathbf{X}^i, \quad \mathbf{Y}^i\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_t\mathbf{X}^i, \quad (2.74)$$

$$[\mathbf{X}^i, \mathbf{I}_{st}] = [\mathbf{Y}^i, \mathbf{I}_{st}] = \mathbf{0}, \quad (2.75)$$

donde \mathbf{X}^i e \mathbf{Y}^i vienen dados por (2.45).

Se asumirá que el mapeo entre elementos de $SL(2, C)$ y L_+^\uparrow es también válido en el caso extendido. Denotando por $(\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-)$, $(\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-)$ e $(\mathbf{I}_+, \mathbf{I}_-)$ a los elementos asociados a \mathbf{I}_s , \mathbf{I}_t , \mathbf{I}_{st} en la extensión de $SL(2, C)$ se tiene²⁷, por ejemplo, que la relación $\mathbf{I}_s^2 = \mathbf{1}$ puede mapearse en $\mathbf{P}_\pm^2 = \mathbf{1}_2$ o en $\mathbf{P}_\pm^2 = -\mathbf{1}_2$. Esta propiedad puede entenderse desde un punto de vista algebraico notando que $\mathbf{I}_s^2 = \mathbf{1}$ nos dice que $\mathbf{I}_s^2 \in SL(2, C)$ y que las relaciones (2.72)

²⁵Esto complica en cierta medida el análisis.

²⁶ver sección 2.2.

²⁷En nuestro caso $\mathbf{P}_- = -\mathbf{P}_+$, $\mathbf{T}_- = -\mathbf{T}_+$ e $\mathbf{I}_- = -\mathbf{I}_+$.

implican $[\mathbf{J}^i, \mathbf{I}_s^2] = [\mathbf{K}^i, \mathbf{I}_s^2] = \mathbf{0}$, por lo que \mathbf{P}_\pm^2 debe pertenecer al centro de $SL(2, C)$, es decir $\mathbf{I}_s^2 = \pm \mathbf{1}_2$. Lo mismo es válido para \mathbf{I}_t^2 y \mathbf{I}_{st}^2 .

Por lo tanto, si se incluyen las transformaciones discretas de Lorentz, existen $2^3 = 8$ extensiones distintas de $SL(2, C)$:

$$\mathbf{P}_\pm^2 = \epsilon_s \mathbf{1}, \quad \mathbf{T}_\pm^2 = \epsilon_t \mathbf{1}, \quad \mathbf{I}_\pm^2 = \epsilon_{st} \mathbf{1}, \quad (2.76)$$

donde ϵ_s , ϵ_t y ϵ_{st} , pueden asumir los valores ± 1 .

Es posible asumir, sin perder generalidad²⁸, que

$$\mathbf{P}_+ \mathbf{T}_+ = \mathbf{I}_+, \quad (2.77)$$

y entonces (2.76) implica [3] que

$$\mathbf{T}_+ \mathbf{P}_+ = \epsilon_s \epsilon_t \epsilon_{st} \mathbf{I}_+. \quad (2.78)$$

Así, por ejemplo, si $\epsilon_s = \epsilon_t = \epsilon_{st} = 1$ entonces $\mathbf{T}_+ \mathbf{P}_+ = \mathbf{I}_+$, mientras que si $\epsilon_s = \epsilon_t = -1$ entonces $\mathbf{T}_+ \mathbf{P}_+ = -\mathbf{I}_+ = \mathbf{I}_-$. En la tabla siguiente se muestran las posibles extensiones \tilde{L}_i ($i = 1, \dots, 8$) de $SL(2, C)$.

extensión	ϵ_s	ϵ_t	ϵ_{st}	$\mathbf{T}_+ \mathbf{P}_+$
\tilde{L}_1	1	1	1	\mathbf{I}_+
\tilde{L}_2	1	1	-1	\mathbf{I}_-
\tilde{L}_3	1	-1	1	\mathbf{I}_-
\tilde{L}_4	1	-1	-1	\mathbf{I}_+
\tilde{L}_5	-1	1	1	\mathbf{I}_-
\tilde{L}_6	-1	1	-1	\mathbf{I}_+
\tilde{L}_7	-1	-1	1	\mathbf{I}_+
\tilde{L}_8	-1	-1	-1	\mathbf{I}_-

De estas 8 extensiones posibles, la más usada en la descripción relativista de partículas es \tilde{L}_8 [4]²⁹. En lo que sigue *sólo se considerará esta extensión*.

Si una representación de \tilde{L}_8 contiene, en su reducción a los elementos de $SL(2, C)$, la representación (j, j') , entonces necesariamente debe contener además la representación (j', j) ya que, por ejemplo, las primeras relaciones en (2.73) y (2.74) implican que

$$\mathbf{X}^3 \left(\mathbf{I}_s \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle \right) = m' \left(\mathbf{I}_s \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle \right), \quad m' = -j', \dots, j', \quad (2.79)$$

$$\mathbf{Y}^3 \left(\mathbf{I}_s \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle \right) = m \left(\mathbf{I}_s \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle \right), \quad m = -j, \dots, j, \quad (2.80)$$

de modo que el vector $\left(\mathbf{I}_s \left| \begin{smallmatrix} jj' \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle \right)$ debe ser proporcional a $\left| \begin{smallmatrix} j'j \\ m'm \end{smallmatrix} \right\rangle$. En otras palabras, la transformación espacial \mathbf{I}_s mapea vectores del espacio de representación de (j, j') en los de (j', j) ³⁰. El mismo resultado es válido para la acción de \mathbf{I}_t .

Esto muestra que el espacio de representación correspondiente a las *representaciones irreducibles* del grupo de Lorentz completo³¹ es

²⁸ver [4], página 677.

²⁹En el caso de partículas de espín 1/2, \tilde{L}_8 describe electrones y neutrinos, a través de las ecuaciones de Dirac y Weyl.

³⁰Se dice entonces que (j, j') y (j', j) son representaciones con *paridad opuesta*.

³¹Es decir, incluyendo reflexiones espaciales y temporales.

- la *suma directa* de los espacios de representación de las representaciones (j, j') y (j', j) , cuando $j \neq j'$.
- el espacio de representación de (j, j) , si $j = j'$.

A partir de (2.73), (2.74) y de las expresiones (2.48)–(2.51) para las representaciones (j, j') es posible probar que las expresiones de \mathbf{P}_+ , \mathbf{T}_+ e \mathbf{I}_+ para representaciones irreducibles del grupo completo de Lorentz pueden considerarse tal como se describe en los dos casos siguientes [2]

Caso $j = j'$.

En este caso, la representación tiene dimensión $(2j+1)^2$ y constituye una representación verdadera de L ($j + j' = 2j = \text{entero}$). La acción de \mathbf{P}_+ , \mathbf{T}_+ e \mathbf{I}_+ vienen dadas por

$$\mathbf{P}_+ \left| \begin{smallmatrix} jj \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle = \beta_s^{jj} \left| \begin{smallmatrix} jj \\ m'm \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{T}_+ \left| \begin{smallmatrix} jj \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle = \beta_t^{jj} \left| \begin{smallmatrix} jj \\ m'm \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{I}_+ \left| \begin{smallmatrix} jj \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle = \beta_s^{jj} \beta_t^{jj} \left| \begin{smallmatrix} jj \\ mm' \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad (2.83)$$

donde los números β_s^{jj} y β_t^{jj} pueden asumir independientemente los valores 1 ó -1 . En este caso se encuentran cuatro posibles representaciones inequivalente de la extensión \tilde{L}_8 . Las matrices que representan a los generadores de rotaciones y boosts tienen la misma expresión que en la representación (j, j) de $SL(2, C)$.

Caso $j \neq j'$.

Aquí las representaciones irreducibles tienen dimensión $2(2j+1)(2j'+1)$ y sólo constituyen representaciones verdaderas de L si $j + j'$ es entero. En caso contrario se obtiene una representación proyectiva.

$j + j' \neq \text{entero}$. Aquí \mathbf{P}_+ , \mathbf{T}_+ e \mathbf{I}_+ se pueden considerar de la forma³²

$$\mathbf{P}_+ = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = -i \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

$j + j' = \text{entero}$. Aquí \mathbf{P}_+ , \mathbf{T}_+ e \mathbf{I}_+ se pueden considerar de dos maneras inequivalentes

$$\mathbf{P}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

o bien

$$\mathbf{P}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

³² $\mathbf{1}$ denota la identidad de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$.

En cualquiera de estos casos, los operadores de rotaciones y boosts, denotados conjuntamente por \mathbf{T}_α , vienen dados por la suma directa de las matrices correspondientes a las reps. (j, j') y (j', j) , es decir

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_\alpha^{(j, j')} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha^{(j', j)} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Así, cuando se incluyen las reflexiones espaciales y temporales, para considerar representaciones del grupo completo de Lorentz L , se encuentra que cada una de las 8 extensiones inequivalentes admite, en general, más de una representación.

2.4.7. Ejemplos

$j = j' = 1/2$.

La extensión \tilde{L}_8 de $SL(2, C)$, nos entrega, para el caso $j = j' = 1/2$, las siguientes posibles representaciones

$$\mathbf{P}_+ = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \mathbf{T}_+ \mathbf{I}_+. \quad (2.88)$$

La representación original se obtiene en el caso

$$\mathbf{P}_+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = \mathbf{T}_+ \mathbf{I}_+, \quad (2.89)$$

y las usuales matrices de la sec. 2.2 se encuentran aplicando la transformación de similaridad de la sec. 2.4.5.

$j = 0, j' = \frac{1}{2}$.

En este caso, la extensión \tilde{L}_8 define las matrices correspondientes a las transformaciones discretas de Lorentz

$$\mathbf{P}_+ = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_+ = -i \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Capítulo 3

Teoría de Gauge en el Electromagnetismo

Una teoría de gauge es una teoría de campos la cual es invariante bajo un grupo continuo de transformaciones locales. Las transformaciones entre posibles gauges, llamadas transformaciones de gauge, forman un grupo de Lie el cual está referido a el grupo de simetrías o el grupo de gauge de la teoría. Muchas teorías en física son descritas por Lagrangianos los cuales son invariantes bajo alguna transformación de simetría de grupos. Las teorías de gauge son importantes en las teorías de campo en donde se explica la dinámica de partículas elementales. La electrodinámica cuántica es una teoría de gauge abeliana con grupo de simetría $U(1)$, donde el *campo de gauge* es el cuadri-potencial electromagnético (ϕ, \vec{A}) . Por su parte, el Modelo Standard es una teoría de gauge no-abeliana cuyo grupo de simetría es $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Historicamente, las ideas de teorías de gauge fueron primeramente establecidas en el contexto del electromagnetismo clásico.

La primera teoría en tener una simetría de gauge fue la formulación electrodinámica de Maxwell en 1864. La importancia de esta simetría permaneció inadvertida en las primeras formulaciones. Del mismo modo, Hilbert había derivado las ecuaciones de campo de Einstein, al postular la invariancia de la acción bajo transformaciones generales de coordenadas. Más tarde Hermann Weyl, en su intento de unificar la relatividad general y el electromagnetismo conjetura el *Eichinvarianz* o invariancia bajo el cambio de escala, que también podría ser una simetría local de la relatividad general.

3.1. Principio de Gauge en Electrodinámica

3.1.1. Potenciales Escalar y Vectorial

Las ecuaciones de Maxwell consisten en un set de ecuaciones diferenciales parciales que relacionan las componentes de los campos eléctrico y magnético. Ellas pueden ser resueltas si se encuentran en situaciones simples. No obstante en conveniente introducir potenciales, de modo de obtener un número pequeño de ecuaciones de segundo grado, los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell idénticamente. Dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, podemos definir \vec{B} en términos de un potencial vectorial \vec{A} , entonces

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.1)$$

Por otro lado, tenemos de la Ley de Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -(1/c) \partial \vec{B} / \partial t$, la que puede ser escrita como

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}. \quad (3.2)$$

Esto significa que la cantidad que se anula en (3.2) puede ser escrita como el gradiente de alguna función escalar la cuál llamaremos ϕ , de modo que:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (3.3)$$

de donde

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Las definiciones de \vec{E} y \vec{B} en términos de los potenciales ϕ y \vec{A} de acuerdo con (3.2) y (3.4) satisfacen idénticamente las ecuaciones de Maxwell homogéneas. La dinámica de \vec{A} y ϕ es determinada por las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell. De esta forma, introduciendo los potenciales en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas quedan de la forma:

$$\vec{\nabla}^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi \rho \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (3.6)$$

De esta manera, se han reducido las ecuaciones de Maxwell a sólo dos ecuaciones. Sin embargo, estas aún siguen siendo ecuaciones acopladas. Podemos desacoplar estas ecuaciones estudiando la arbitrariedad de las definiciones de los potenciales. Dado que \vec{B} es definido en términos de \vec{A} , el potencial vectorial es arbitrario en el sentido de que si le agregamos un término de la forma de un gradiente de alguna función escalar la definición de \vec{B} no cambiará. En efecto, consideremos una función escalar Λ , de manera que \vec{B} queda definido como,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) \quad (3.7)$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Lambda) \quad (3.8)$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.9)$$

De esta manera, hemos encontrado que \vec{B} se mantiene invariante bajo la transformación,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda. \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.4) podemos ver también que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) \\ &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \Lambda)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

de donde entonces para que el campo eléctrico se mantenga invariante, simultáneamente el potencial escalar debe transformar como,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.12) implican que podemos escoger potenciales \vec{A} y ϕ de tal manera que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.13)$$

Con estos resultados es posible desacoplar las ecuaciones (3.5) y (3.6) y obtener dos ecuaciones de onda inhomogéneas, una para ϕ y otra para \vec{A} . Entonces,

$$\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.13) forman ecuaciones equivalentes en todos los aspectos a las ecuaciones de Maxwell.

3.1.2. Transformaciones de Gauge; Gauge de Lorenz y Gauge de Coulomb

Las transformaciones (3.10) y (3.12) son llamadas transformaciones de gauge, y la invariancia de los campos bajo estas transformaciones es llamada invariancia de gauge. La relación (3.13) entre \vec{A} y ϕ es llamada condición de Lorenz. En forma de ver que los potenciales siempre pueden encontrarse de manera que satisfagan la condición de Lorenz, supongamos que los potenciales \vec{A} y ϕ satisfacen (3.5) y (3.6) pero no (3.13). Luego, hagamos una transformación de gauge invocando potenciales \vec{A}' y ϕ' e impongamos que éstos satisfacen la condición de Lorenz, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, dada una función de gauge Λ que satisface

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (3.17)$$

los nuevos potenciales \vec{A}' y ϕ' satisfacen la condición de Lorenz y las ecuaciones de onda (3.14) y (3.15). Incluso para potenciales que satisfacen la condición de Lorenz (3.13) hay arbitrariedad. Las transformaciones de gauge (3.10) y (3.12) donde

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (3.18)$$

preservan la condición de Lorenz. Todos los potenciales de esta clase son llamados a pertenecer al gauge de Lorenz. Otro gauge a mencionar es el llamado gauge de Coulomb o gauge transversal. Este gauge es en el cual

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.19)$$

De (3.5) podemos ver que el potencial escalar satisface la ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (3.20)$$

cuya solución es bien conocida y es

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (3.21)$$

El potencial vectorial satisface la ecuación inhomogénea de onda

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.22)$$

El término de corriente que involucra al potencial puede, en principio, ser calculado a partir de (3.21). Formalmente, usamos la ecuación de continuidad para escribir

$$\vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'. \quad (3.23)$$

Si la corriente es escrita como la suma de las partes longitudinales y transversal, es decir,

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T, \quad (3.24)$$

donde $\vec{\nabla} \times \vec{J}_L = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0$, luego estas pueden ser escritas como

$$\vec{J}_L = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \quad (3.25)$$

$$\vec{J}_T = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \quad (3.26)$$

Comparando (3.23) con (3.21) se obtiene que

$$\vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 4\pi \vec{J}_L. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, la fuente de la ecuación de onda para \vec{A} puede ser expresada enteramente en términos de la corriente transversal (3.26):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}_T. \quad (3.28)$$

Se dice que este campo es transversal porque satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0. \quad (3.29)$$

El gauge de Coulomb es usualmente usado en regiones donde no hay fuentes presentes. En este caso es posible además elegir $\phi = 0$ en esas regiones, de modo que toda la información del campo electromagnético es contenida en el potencial vectorial \vec{A} .

3.1.3. Formulación Covariante; Potenciales y Transformaciones de Gauge

Como sabemos, los potenciales electromagnéticos están dados por el potencial escalar ϕ y el potencial vectorial \vec{A} , de modo que en términos de ellos los campos eléctrico y magnético satisfacen automáticamente las ecuaciones de Maxwell homogéneas, y tienen la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad (3.30)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.31)$$

Los potenciales no son funciones definidas de manera única. Esto se manifiesta en la invariancia de los campos \vec{E} y \vec{B} bajo una transformación de gauge:

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda, \quad (3.32)$$

donde $\Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$ es una función escalar arbitraia del espacio-tiempo. En la formulación covariante, podemos combinar los potenciales en el llamado cuadri-potencial vectorial

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad A_\mu = (\phi, -\vec{A}). \quad (3.33)$$

Si ahora definimos el tensor electromagnético como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.34)$$

notamos que

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i. \quad (3.35)$$

Similarmente,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk} B_k, \quad (3.36)$$

donde ϵ_{ijk} denota el tensor tres dimensional de Levi-Civita. En resumen,

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ -E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ -E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

En otras palabras, las seis componentes independientes del tensor $F_{\mu\nu}$ son dadas por el campo eléctrico y magnético. Es fácil verificar que las ecuaciones $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \partial \vec{E} / \partial t$ son dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.38)$$

Por otra parte, la invariancia de gauge de las ecuaciones de Maxwell es evidente en esta formulación. Por ejemplo, notemos que bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu \theta(x), \\ \text{o, } \delta A_\mu &= A'_\mu(x) - A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x), \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $\theta(x)$ es un parámetro de transformación arbitrario local y real. Entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \theta) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \theta) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En otras palabras, el tensor electromagnético es invariante bajo la transformación de gauge (3.39) del cuadripotencial vectorial $A_\mu(x)$. Consecuentemente, las ecuaciones de Maxwell (3.38) son también invariantes bajo esta transformación.

Capítulo 4

Teoría de Yang-Mills

En el capítulo anterior, hablamos sobre la teoría de gauge más simple, la teoría de Maxwell, la cual se basa en el grupo Abelian $U(1)$. Ahora estudiaremos teorías de gauge basadas en simetrías más complicadas. Tales teorías corresponden a teorías basadas en grupos de gauge no-Abelianos (no-conmutativos), las cuales son comúnmente llamadas teorías de Yang-Mills y son teorías fundamentales en la construcción de teorías físicas, como por ejemplo, la teoría del Modelo Estándar.

4.1. Teorías de Gauge no Abelianas

Recordemos que una teoría de gauge nace cuando tratamos de promover una simetría global a una simetría local. Por ejemplo, revisemos cómo los campos de gauge entran en la teoría en el caso de la electrodinámica cuántica. Consideremos la densidad lagrangiana de Dirac para un fermión libre,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi. \quad (4.1)$$

Este lagrangiano es invariante bajo una transformación de fase global $U(1)$ de la forma

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta} \psi(x), \quad (4.2)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\theta} \quad (4.3)$$

o

$$\delta\psi = -i\theta\psi, \quad (4.4)$$

$$\delta\bar{\psi} = i\theta\bar{\psi}. \quad (4.5)$$

La densidad lagrangiana dada por (4.1) transforma como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) &\rightarrow \mathcal{L}(\psi', \bar{\psi}') \\ &= \bar{\psi}' (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi' \\ &= \bar{\psi} e^{i\theta} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) e^{-i\theta} \psi' \\ &= \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi \\ &= \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La simetría interna en este caso asoma del hecho que ψ es un campo complejo mientras que la densidad lagrangiana es hermítica. Si ahora queremos promover la simetría a ser

local, llamando $\theta = \theta(x)$, notamos que

$$\begin{aligned}\delta\psi &= -i\theta\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= i\theta\bar{\psi}, \\ \delta(\partial_\mu\psi) &= \partial_\mu(\delta\psi) = \partial(-i\theta(x)\psi) \\ &= -i((\partial_\mu\theta(x) + \theta(x)\partial_\mu)\psi(x).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Consecuentemente, tenemos (considerando $\hbar = 1$, $c = 1$)

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= i\delta\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu)\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\delta\psi - m\delta\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\delta\psi \\ &= -\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu((\partial_\mu\theta(x)) + \theta(x)\partial_\mu)\psi - im\theta(x)\bar{\psi}\psi + im\theta(x)\bar{\psi}\psi \\ &= (\partial_\mu\theta(x))\gamma^\mu\psi.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Luego, ni la densidad lagrangiana (4.1) ni la correspondiente acción es invariante bajo la transformación local de fase (4.7) dado que $\partial_\mu\psi$ no transforma covariantemente y no hay términos en la densidad lagrangiana cuya variación pueda cancelar el término $\partial_\mu\theta(x)$. La manera de deshacerse de este problema es definiendo una **derivada covariante** $D_\mu\psi$ que transforme covariantemente bajo transformaciones locales, es decir,

$$\delta(D_\mu\psi) = -i\theta(x)D_\mu\psi(x).\tag{4.9}$$

Para que esto se cumpla, debemos introducir un nuevo campo $A_\mu(x)$ (campo de gauge) y definimos la derivada covariante como

$$D_\mu\psi(x) := (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x),\tag{4.10}$$

donde e es una constante de acoplamiento y con la transformación del campo como

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).\tag{4.11}$$

Reconocemos a (4.10) como el acoplamiento minimal de un fermión cargado al campo electromagnético, y luego

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}\psi,\tag{4.12}$$

es invariante bajo la transformaciones (infinitesimales) locales de gauge

$$\begin{aligned}\delta\psi &= -i\theta(x)\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= i\theta(x)\bar{\psi}, \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Sin embargo, el campo A_μ conocido como campo de gauge, no tiene dinámica en esta teoría. Para introducir “la parte” de energía cinética al campo de gauge (con la intención de darle dinámica) de una manera invariante, definimos el tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu},\tag{4.14}$$

el cual bajo la transformación de gauge (4.13) transforma como

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu = \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu\theta - \partial_\nu\partial_\mu\theta) = 0.\tag{4.15}$$

Dado que el tensor $F_{\mu\nu}$ es invariante de gauge el lagrangiano invariante de gauge para la parte “dinámica” del campo de gauge puede ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

El lagrangiano total para QED es luego dado por

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.17)$$

Sobre la constante $1/4$ consideremos lo siguiente. Consideremos el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \end{aligned} \quad (4.18)$$

Considerando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial^\nu A^\mu \\ &= -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange, en este caso, toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0, \\ \text{o, } \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

lo cual corresponde a las ecuaciones de Maxwell covariantes. Notemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad (4.21)$$

con A_μ y $F_{\mu\nu}$ tratados como variables dinámicas independientes también entregan las ecuaciones de Maxwell al calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange, consideramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0, \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sin embargo, consideraremos la densidad lagrangiana más simple, es decir, ecuación (4.18), ya que la densidad lagrangiana (4.21) es equivalente a (4.18) cuando el campo variable $F_{\mu\nu}$ se elimina usando la ecuación de campo de (4.22).

4.2. Generalizaciones

Ahora generalizaremos las ideas anteriores para teorías con simetrías más complicadas. Consideremos una teoría descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\partial_\mu\psi_k - m\bar{\psi}_k\psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \dim(R). \quad (4.23)$$

Asumamos que ψ_k pertenece a una representación R no trivial de algún grupo G y $\dim(R)$ denota la dimensión de esta representación. Este lagrangiano es invariante bajo la transformación global

$$\begin{aligned}\psi_k &\rightarrow (U\psi)_k = \left(e^{-i\theta^a T^a} \psi\right)_k, \quad a = 1, 2, \dots, \dim(G), \\ \bar{\psi}_k &\rightarrow (\bar{\psi}U^\dagger)_k = (\bar{\psi}U^{-1})_k = \left(\bar{\psi}e^{i\theta^a T^a}\right)_k,\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde θ^a denota un parámetro real de fase global. Luego, infinitesimalmente tenemos

$$\begin{aligned}\delta\psi_k &= -i\theta^a T_{kl}^a \psi_l, \\ \delta\bar{\psi}_k &= -i\theta^a \bar{\psi}_l (T^a)_{lk},\end{aligned}\tag{4.25}$$

donde los T^a representan los generadores del grupo de simetría G . Estos generadores satisfacen el álgebra de Lie del grupo, la cual como sabemos es de la forma

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c,\tag{4.26}$$

donde las constantes de estructura f^{abc} son constantes reales y completamente antisimétricas (bajo en cambio de cualquier par de índices). Cuando los generadores del grupo de simetría no conmutan, es decir, las constantes de estructura son no triviales, el grupo de simetría se denomina grupo no Abelian. Podemos ver que el lagrangiano es invariante bajo la transformación (4.25), de modo que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}_k(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_k + \bar{\psi}_k(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\psi_k \\ &= i\theta^a \bar{\psi}_l (T^a)_{lk} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_k - i\theta^a \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) T_{kl}^a \psi_l \\ &= i\theta^a \bar{\psi}_k (T^a)_{kl} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_l - i\theta^a \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) T_{kl}^a \psi_l \\ &= 0.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Ahora, consideremos transformaciones infinitesimales locales de la forma

$$\delta\psi_k = -i\theta^a(x) T_{kl}^a \psi_l, \quad \delta\bar{\psi}_k = -i\theta^a(x) \bar{\psi}_l (T^a)_{lk}.\tag{4.28}$$

Como hemos visto anteriormente, notemos que la derivada ordinaria actuando sobre los campos no transforma covariantemente bajo la transformación (4.28), luego

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu\psi_k) &= \partial_\mu(-i\theta^a(x) T_{kl}^a \psi_l) \\ &= -i(\partial_\mu\theta^a(x)) T_{kl}^a \psi_l - i\theta^a(x) T_{kl}^a \partial_\mu\psi_l.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Así,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}_k(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_k + \bar{\psi}_k(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\psi_k \\ &= (\partial_\mu\theta^a(x)) \bar{\psi}_k \gamma^\mu (T^a)_{kl} \psi_l.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Como en el caso de $U(1)$ que vimos anteriormente, no hay ningún término en el lagrangiano que pueda anular al término $\partial_\mu\theta^a(x)$ de modo que el lagrangiano se mantenga invariante. Por lo tanto, definimos una derivada covariante $(D_\mu\psi)_k$ tal que bajo una transformación infinitesimal local

$$\delta(D_\mu\psi)_k = -i\theta^a(x) T_{kl}^a (D_\mu\psi)_l.\tag{4.31}$$

Introduciendo un nuevo campo (campo de gauge), escribimos la derivada covariante como

$$D_\mu\psi := (\partial_\mu + igA_\mu)\psi,\tag{4.32}$$

donde g denota una constante de acoplamiento y

$$A_\mu = T^a A_\mu^a. \quad (4.33)$$

Escribiendo la derivada covariante explícitamente, tenemos

$$D_\mu \psi_k = \partial_\mu \psi_k + ig T_{kl}^a A_\mu^a \psi_l = (\partial_\mu \delta_{kl} + ig T_{kl}^a A_\mu^a) \psi_l. \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta que queremos que la derivada covariante transforme covariantemente bajo una transformación infinitesimal local tenemos

$$\delta(D_\mu \psi)_k = -i\theta^a T_{kl}^a (D_\mu \psi)_l, \quad (4.35)$$

de (4.34) debemos tener que

$$\begin{aligned} ig T_{kl}^a \delta(A_\mu^a \psi_l) &= \delta(D_\mu \psi_k) - \partial_\mu \delta \psi_k \\ &= -i\theta^a T_{kl}^a (D_\mu \psi)_l - \partial_\mu \delta \psi_k \\ &= -i\theta T_{kl}^a (\partial_\mu \psi_l + ig T_{lm}^b A_\mu^b \psi_m) - \partial_\mu (-i\theta^a T_{kl}^a \psi_l) \\ &= -i\theta^a T_{kl}^a (\partial_\mu \psi_l + ig T_{lm}^b A_\mu^b \psi_m) + i(\partial_\mu \theta^a) T_{kl}^a \psi_l + i\theta^a T_{kl}^a \partial_\mu \psi_l \\ &= i(\partial_\mu \theta^a) T_{kl}^a \psi_l + g\theta^a T_{kl}^a T_{lm}^b A_\mu^b \psi_m. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Del lado izquierdo de (4.36) notamos que podemos escribir

$$\begin{aligned} ig T_{kl}^a \delta(A_\mu^a \psi_l) &= ig T_{kl}^a \delta A_\mu^a \psi_l + ig T_{kl}^a A_\mu^a \delta \psi_l \\ &= ig T_{kl}^a \delta A_\mu^a \psi_l + ig T_{kl}^a A_\mu^a (-i\theta^b) T_{lm}^b \psi_m \\ &= ig T_{kl}^a \delta A_\mu^a \psi_l + g\theta^a T_{kl}^a T_{lm}^b A_\mu^b \psi_m. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Reemplazando lo anterior en (4.36), tenemos

$$\begin{aligned} ig T_{kl}^a \delta A_\mu^a \psi_l &= i(\partial_\mu \theta^a) T_{kl}^a \psi_l + g\theta^a (T^a T^b)_{km} A_\mu^b \psi_m - g\theta^a (T^b T^a)_{km} A_\mu^b \psi_m \\ &= i(\partial_\mu \theta^a) T_{kl}^a \psi_l + g\theta^a [T^a, T^b]_{km} A_\mu^b \psi_m \\ &= i(\partial_\mu \theta^a) T_{kl}^a \psi_l + ig\theta^a f^{abc} (T^c)_{km} A_\mu^b \psi_m. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Lo podemos reescribir como

$$ig T_{kl}^a \psi_l (\delta A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a + f^{abc} A_\mu^b \theta^c) = 0, \quad (4.39)$$

lo cual determina que la transformación para el campo de gauge debe ser

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a - g f^{abc} A_\mu^b \theta^c) = \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - f^{abc} A_\mu^b \theta^c. \quad (4.40)$$

Por lo tanto, el lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_k \gamma^\mu (D_\mu \psi)_k - m\bar{\psi}_k \psi_k, \quad (4.41)$$

con derivada covariante definida en (4.28) es invariante bajo las transformaciones infinitesimales locales:

$$\begin{aligned} \delta \psi_k &= -i\theta^a(x) T_{kl}^a \psi_l(x), \\ \delta \bar{\psi}_k &= i\theta^a(x) \bar{\psi}_l T_{lk}^a, \\ \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - f^{abc} A_\mu^b \theta^c. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Si usamos la definición de (4.33), donde los campos de gauge A_μ son matrices que pertenecen a la misma representación del grupo (que los campos ψ_k , podemos escribir el lagrangiano en términos de matrices como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.43)$$

con el producto normal de matrices. De esta forma podemos definir una representación unitaria del grupo

$$U = e^{-i\theta^a(x)T^a}, \quad U^\dagger = U^{-1}, \quad (4.44)$$

de modo que podemos escribir las transformaciones finitas para los campos en la forma de matrices como

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow U\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}U^{-1}, \\ A_\mu &\rightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para construir el lagrangiano para la parte dinámica del campo de gauge de una forma invariante de gauge, notemos que bajo la transformación de gauge (4.45) el tensor $F_{\mu\nu}$ definido en (4.14) transformaría como

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &\rightarrow \partial_\mu \left[UA_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)U^{-1} \right] - \partial_\nu \left[UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1} \right] \\ &= \partial_\mu (UA_\nu U^{-1}) - \frac{1}{ig}(\partial_\mu \partial_\nu U)U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) - \partial_\nu (UA_\mu U^{-1}) + \frac{1}{ig}(\partial_\nu \partial_\mu U)U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) \\ &= \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) + \partial_\mu UA_\nu U^{-1} + U\partial_\mu A_\nu U^{-1} + U\partial_\mu A_\nu U^{-1} + UA_\nu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\nu UA_\mu U^{-1} \\ &\quad - U\partial_\nu A_\mu U^{-1} - UA_\mu \partial_\nu U^{-1} \\ &= \frac{1}{ig}(\partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U\partial_\mu U^{-1}) + \partial_\mu UA_\nu U^{-1} + UA_\nu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\nu UA_\mu U^{-1} - UA_\mu \partial_\nu U^{-1} \\ &\quad + U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)U^{-1}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Notemos que, a diferencia del caso de QED, aquí $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, no es ni invariante ni tiene una transformación bajo la transformación de gauge (4.45). También debemos notar que bajo la transformación de gauge

$$\begin{aligned} ig[A_\mu, A_\nu] &= ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \\ &\rightarrow ig \left[\left(UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1} \right) \left(UA_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)U^{-1} \right) \right] \\ &\quad - ig \left[\left(UA_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\nu U)U^{-1} \right) \left(UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1} \right) \right] \\ &= ig \left[UA_\mu A_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu UA_\nu U^{-1} - UA_\mu \partial_\nu U^{-1}) + \frac{1}{g^2}\partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} - UA_\nu A_\mu U^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{ig}(\partial_\nu UA_\mu U^{-1} - UA_\nu \partial_\mu U^{-1}) - \frac{1}{g^2}\partial_\nu U\partial_\mu U^{-1} \right] \\ &= igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U\partial_\mu U^{-1}) \\ &\quad - [\partial_\mu UA_\nu U^{-1} + UA_\nu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\nu UA_\mu U^{-1} - UA_\mu \partial_\nu U^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Comparando (4.46) y (4.47), es claro que, en este caso, si definimos el tensor

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \quad (4.48)$$

entonces bajo la transformación de gauge (4.45),

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}. \quad (4.49)$$

Por lo tanto, $F_{\mu\nu}$ transforma covariantemente. Ahora podemos construir el lagrangiano invariante de gauge para la parte dinámica del campo de gauge como

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (4.50)$$

En términos de sus componentes, el tensor $F_{\mu\nu}$ definido en (4.48) toma la forma

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \\ F_{\mu\nu}^a T^a &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) T^a + ig A_\mu^b A_\nu^c [T^b, T^c] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) T^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c T^a, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c = -F_{\nu\mu}^a, \end{aligned} \quad (4.51)$$

de modo que $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ puede ser escrito en términos de sus componentes como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} - gf^{apq} A^{\mu p} A^{\nu q}). \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.3. Álgebra asociada

Ahora, veamos algunas de las propiedades del álgebra de Lie del grupo de simetría G . El álgebra de los generadores, tal como vimos, es de la forma de (4.26) y sabemos que la identidad de Jacobi asociada con esta álgebra es dada por

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^c, T^a], T^b] + [[T^b, T^c], T^a] = 0. \quad (4.53)$$

Usando (4.26) se puede ver que la identidad de Jacobi en (4.53) impone una restricción sobre las constantes de estructura del grupo que es de la forma

$$\begin{aligned} if^{abp}[T^p, T^c] + if^{cap}[T^p, T^b] + if^{bcp}[T^p, T^a] &= 0, \\ f^{abp} f^{pcq} T^q + f^{cap} f^{pbq} T^q + f^{bcp} f^{paq} T^q &= 0, \\ f^{abp} f^{pcq} + f^{cap} f^{pbq} + f^{bcp} f^{paq} &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

De la estructura del álgebra de Lie sabemos que podemos escribir los elementos del grupo en una forma de representación unitaria:

$$U(x) = e^{i\theta^a(x)T^a}. \quad (4.55)$$

Si somos capaces de dividir los generadores del álgebra de Lie no Abelianas en dos subconjuntos no Abelianos tales que $f^{abc} = 0$ cuando un índice está en un conjunto y otro índice en el segundo conjunto, el álgebra de Lie se divide en dos subálgebras no Abelianas conmutativas. En este caso el grupo G es un producto directo de dos grupos de Lie no Abelianos

independientes. Un grupo de Lie no Abelian que no puede ser factorizado es llamado grupo de Lie simple. El producto directo de grupos de Lie simples es llamado semi-simple. En nuestro análisis, hemos asumido que nuestro grupo de simetría G es simple. Para alguna representación de un grupo de Lie simple podemos escribir

$$Tr(T^a T^b) = C_2 \delta^{ab}. \quad (4.56)$$

Aquí, C_2 es una constante de normalización que determina el valor de las constantes de estructura. Ésta depende de la representación, pero no de los índices a y b . Para probar esto notemos que siempre podemos diagonalizar el tensor $Tr(T^a T^b)$ de manera que

$$Tr(T^a T^b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b, \\ K_a & \text{si } a = b. \end{cases} \quad (4.57)$$

Usando la propiedad de ciclicidad de la traza, notemos que la cantidad

$$\begin{aligned} h^{abc} &= Tr([T^a, T^b] T^c) \\ &= Tr(T^a T^b T^c) - Tr(T^b T^a T^c), \end{aligned} \quad (4.58)$$

es completamente antisimétrica en todos sus índices. Además, usando la relación de conmutación (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned} h^{abc} &= Tr(i f^{abp} T^p T^c) \\ &= i f^{abp} Tr(T^p T^c) \\ &= i f^{abp} K_p \delta^{pc} \\ &= i K_c f^{abc}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde el índice c es fijo. Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} h^{abc} &= Tr([T^a, T^c] T^b) \\ &= i f^{acp} Tr(T^p T^b) \\ &= i f^{acp} K_p \delta^{pb} \\ &= i K_b f^{acb} = -i K_b f^{abc}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

con el índice b fijo. Sin embargo, puesto que h^{abc} es completamente antisimétrico, tenemos que

$$h^{acb} = -h^{abc}. \quad (4.61)$$

De esta manera podemos concluir que

$$K_b = K_c = K. \quad (4.62)$$

Esto nos muestra entonces que (4.56) depende sólo de la representación. Notemos que si escribimos

$$Tr(T^a T^b) = T(R) \delta^{ab}, \quad a, b = 1, 2, \dots, \dim(G), \quad (4.63)$$

entonces $T(R)$ es conocido como el **índice de la representación** R . Similarmente, tenemos

$$(T^a T^a)_{mn} = C(R) \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \dim(R), \quad (4.64)$$

donde $C(R)$ es conocido como el **Casimir de la representación** R . Ambos se encuentran relacionados mediante

$$T(R) \dim(G) = C(R) \dim(R). \quad (4.65)$$

Podemos determinar los generadores del grupo en varias representaciones, sin embargo, una representación particular es de mucha importancia y es dada por

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc}. \quad (4.66)$$

Esto es consistente con la hermiticidad requerida por los generadores, ya que

$$\begin{aligned} (T^{a\dagger})_{bc} &= ((T^a)_{cb})^* \\ &= (-if^{acb})^* = if^{acb} = -if^{abc} = (T^a)_{bc}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Además, podemos verificar que esta representación satisface el álgebra de Lie,

$$\begin{aligned} [T^a, T^b]_{cq} &= (T^a T^b - T^b T^a)_{cq} \\ &= (T^a)_{cp}(T^b)_{pq} - (T^b)_{cp}(T^a)_{pq} \\ &= (-if^{acp})(-if^{bpq}) - (-if^{bcp})(-if^{apq}) \\ &= -f^{acp}f^{bpq} + f^{bcp}f^{apq} \\ &= -f^{cap}f^{pbq} - f^{bcp}f^{paq} \\ &= f^{abp}f^{pcq} \\ &= if^{abp}(-if^{pcq}) \\ &= if^{abp}(T^b)_{cq}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde hemos usado la antisimetría de las constantes de estructura. Como resultado, concluimos que la identificación

$$(T^a_{(\text{adj})})_{bc} = -if^{abc}, \quad (4.69)$$

define una representación del álgebra de Lie conocida como la *representación adjunta*. Consideremos nuevamente las transformaciones para los campos de gauge dados por (4.42), vemos que

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a - gf^{abc}A_\mu^b \theta^c) \\ &= \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a + gf^{bac}A_\mu^b \theta^c) \\ &= \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a + ig(-if^{bac}A_\mu^b \theta^c)) \\ &= \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a + ig(T^b_{(\text{adj})})_{ac}A_\mu^b \theta^c), \end{aligned} \quad (4.70)$$

de manera que podemos equivalentemente escribir

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g}(D_\mu^{(\text{adj})}\theta)^a, \quad (4.71)$$

lo cual muestra que el campo de gauge A_μ transforma de acuerdo a la representación adjunta del grupo de simetría. Esto también puede ser visto de la transformación del tensor $F_{\mu\nu}$ en (4.49), el cual infinitesimalmente tiene la forma

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow UF_{\mu\nu}U^{-1} \\ &= F_{\mu\nu} + i\theta^b[F_{\mu\nu}, T^b], \end{aligned} \quad (4.72)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= i\theta^b[F_{\mu\nu}, T^b] \\ &= i\theta^b F_{\mu\nu}^a [T^a, T^b], \end{aligned} \quad (4.73)$$

ó

$$\delta F_{\mu\nu}^a T^a = i\theta^b F_{\mu\nu}^a (if^{abc}T^c), \quad (4.74)$$

o bien,

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= -f^{abc} F_{\mu\nu}^b \theta^c \\ &= -i(-if^{cab})\theta^c F_{\mu\nu}^b \\ &= -i(T_{(\text{adj})}^c)_{ab}\theta^c F_{\mu\nu}^b \\ &= -i\theta^c (T_{(\text{adj})}^c)_{ab} F_{\mu\nu}^b. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Comparando los resultados anteriores con las transformaciones en (4.42) concluimos que tanto el tensor $F_{\mu\nu}$ como también el campo de gauge A_μ transforman de acuerdo a la representación adjunta del grupo.

Capítulo 5

Quiebre Espontáneo de Simetría y Mecanismo de Higgs

En la naturaleza, una variedad de simetrías elegantes nos rodean. Sin embargo, también hay muchos ejemplos de simetrías en la naturaleza que están rotas. En casos donde esto ocurre se le denomina *quiebre espontánea de simetría*, es decir, el hamiltoniano es invariante bajo una cierta simetría, pero la simetría se rompe porque el estado fundamental del hamiltoniano no es invariante. Ejemplos simples vienen de física del estado sólido, donde el fenómeno de la ruptura espontánea de simetría es bastante común. Consideremos un material ferromagnético, de manera que los átomos poseen un spin σ_i . Aunque el hamiltoniano no escoja una dirección en particular en el espacio, el estado fundamental de la teoría, sin embargo, puede consistir en átomos cuyos spines estén todos alineados en la misma dirección. Por lo tanto, la simetría de rotación puede ser rota por el estado de vacío, incluso cuando el hamiltoniano permanezca completamente simétrico. Para restaurar la simetría, se debe calentar el material ferromagnético a una alta temperatura, donde los átomos vuelvan a estar alineados aleatoriamente.

5.1. Degeneración de los Estados de Vacío

Consideremos un sistema mecánico-cuántico. Éste es descrito por el lagrangiano L o por el hamiltoniano \hat{H} . Como sabemos, el sistema puede estar en varios estados de energía E_n determinados por la ecuación

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n, \quad (5.1)$$

donde ψ_n es la función de onda correspondiente al estado de energía E_n . El estado de mínima energía E_0 descrito por la función de onda ψ_n es llamado estado fundamental (o vacío). Si un solo estado de vacío ψ_0 corresponde al valor de energía E_0 , dicho estado es llamado un estado de vacío no degenerado. Si existe más de un estado de vacío correspondiente al mismo valor de energía E_0 , dicho estado es llamado estado de vacío degenerado. El estado de vacío es invariante bajo un grupo de simetría G , si y sólo si transforma en sí mismo, en caso contrario no es invariante. Existe una conexión entre la invariancia del estado de vacío bajo un grupo de transformaciones y la invariancia del lagrangiano bajo el mismo grupo de transformaciones:

- a) Si el estado de vacío es invariante, entonces el lagrangiano debe ser necesariamente también invariante. (la invariancia del estado vacío es la invariancia del universo). Cuando tanto el estado de vacío como el lagrangiano son invariantes se tiene el caso denominado simetría exacta.

- b) Si el estado de vacío no es invariante, entonces el lagrangiano puede ser invariante o no invariante. En ambos casos la simetría como un todo es quebrada. En el caso de que tanto el estado de vacío como el lagrangiano no sean invariantes se habla de quiebre explícito de simetría. En el caso de que el estado de vacío no sea invariante pero el lagrangiano si es invariante se habla de quiebre espontáneo de simetría.

5.2. Quiebre Espontáneo de Simetría

5.2.1. Simetrías Globales Continuas

Primero examinemos un caso simple para observar la física básica. Consideremos un lagrangiano

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right). \quad (5.2)$$

Los parámetros μ y λ inicialmente se deben pensar simplemente como parámetros en el potencial. Requerimos $\lambda > 0$ de manera de imponer que el potencial sea restringido como $\phi \rightarrow \infty$, de los principios de la mecánica cuántica. Notemos que la teoría tiene una simetría; es invariante bajo $\phi \rightarrow -\phi$. Para encontrar el espectro, es necesario encontrar el mínimo del potencial, el cual será el clásico estado fundamental del sistema. Luego se expanden los campos alrededor de este valor mínimos y determina las excitaciones. Este es el procedimiento normal para manejar las perturbaciones. En teoría de campos, es convencional llamar al estado fundamental estado de vacío, y las excitaciones son partículas. Sus masas son determinadas por la forma del lagrangiano cerca de este mínimo, comparando con el lagrangiano libre?.

El término ϕ^4 representa una interacción con fuerza λ . Este lagrangiano ciertamente no es general, pero es más general de lo que parece, dado que potencias mayores de ϕ determinan infinitos en cantidades físicas, y deben ser despreciados.

Supongamos ahora que $\mu^2 > 0$. Luego obviamente el vacío corresponde a $\phi = 0$, el cual minimiza el potencial. Es ese caso μ^2 puede ser interpretado como (masa)² por comparación.

Sin embargo, no hay razón física para imponer $\mu^2 > 0$. Si $\mu^2 < 0$, encontramos el mínimo del potencial estableciendo

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (5.3)$$

el cual nos da

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0. \quad (5.4)$$

La menor energía del sistema se da cuando la energía cinética y la energía potencial son mínimas. La energía cinética es minimizada tomando $\phi(x) = cte$. La elección $\phi = 0$ no es un mínimo puesto que con μ^2 negativo podemos obtener un menor valor del potencial. La situación es mostrada en la Figura (5.1) donde se grafica energía potencial versus ϕ .

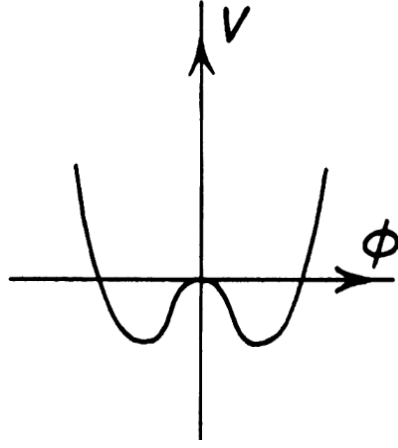


Figura 5.1: Energía Potencial versus ϕ .

Tenemos

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv v, \quad (5.5)$$

los cuales son valores distintos de cero para ϕ en donde se minimiza el potencial. Luego ϕ toma el valor v en el estado fundamental, v es llamado valor de expectación de vacío de ϕ . El campo ϕ es llamado un campo de Higgs.

Para determinar el espectro de la partícula, debemos estudiar la teoría en la región del mínimo, entonces hacemos

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (5.6)$$

luego estamos expandiendo alrededor de $\eta = 0$. Notemos que de igual manera pudimos haber elegido $\phi = -v + \eta(x)$, pero las conclusiones físicas son independientes de esta elección, puesto que dijimos que la teoría es simétrica bajo $\phi \rightarrow -\phi$. Substituyendo (5.6) en \mathcal{L} tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta) - \left\{ \frac{1}{2} \mu^2 [v^2 + 2\eta v + \eta^2] + \frac{1}{4} \lambda [v^4 + 4v^3 \eta + 6v^2 \eta^2 + 4v \eta^3 + \eta^4] \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta) - \left\{ \frac{v^2}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda v^2 \right) + \eta v (\mu^2 + \lambda v^2) + \frac{\eta^2}{2} (\mu^2 + 3\lambda v^2) + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando (5.5), el término lineal en η desaparece (cerca del mínimo), y \mathcal{L} se reduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta) - \left(\lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 \right) + \text{cte.} \quad (5.8)$$

El término con η^2 tiene el signo correcto, por lo tanto puede ser interpretado como un término de masa. Este lagrangiano representa a un partícula con masa

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2, \quad (5.9)$$

y con dos interacciones, una cúbica de fuerza λv y una a la cuarta de fuerza $\lambda/4$. Notemos que ambas dependen de λ , el cual es un parámetro libre hasta donde sabemos. La constante puede ser despreciada dado que el nivel cero del potencial puede ser redefinido.

Las dos descripciones de la teoría, en términos de ϕ o η , debe ser equivalente si el problema es resuelto en forma exacta. Si queremos una descripción perturbativa es esencial perturbar alrededor del mínimo para tener una descripción valida (convergente). La

partícula escalar descrita por la teoría con $\mu^2 < 0$ es un escalar real, con una masa obtenida por sus propias interacciones con otros escalares, dado que el mínimo del potencial no tiene un valor cero para el valor de expectación v . No hay rastro de la simetría de reflexión $\phi \rightarrow -\phi$ en la ecuación (5.8). Una memoria de esto es preservado en la interacción de término η^3 . Puesto que la simetría está quebrada, entonces cuando un vacío específico fue elegido, el vacío no tiene la simetría del lagrangiano original. Cada vez que esto ocurre se llama **quiebre espontáneo de simetría**.

5.2.2. Campo Escalar Complejo

Supongamos que ϕ es un escalar complejo

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad (5.10)$$

y

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (5.11)$$

Este es invariante bajo una transformación de gauge global,

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\chi} \phi, \quad (5.12)$$

entonces la simetría de \mathcal{L} es ahora una simetría global $U(1)$ en lugar de una reflexión como en el ejemplo de 5.2.1. Escribiendo en términos de las componentes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (5.13)$$

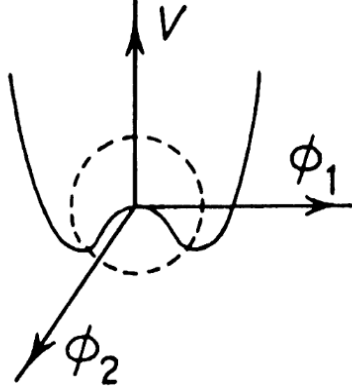


Figura 5.2: Energía Potencial en función de ϕ_1 y ϕ_2 .

En el plano ϕ_1, ϕ_2 (figura (5.2)), la energía potencial es claramente un mínimo en el origen si $\mu^2 > 0$, y para $\mu^2 < 0$ el mínimo es un círculo de radio

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (5.14)$$

Para analizar el caso con $\mu^2 < 0$ tenemos que expandir cerca de $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2$. Podemos elegir cualquier punto sobre el círculo, pero debemos elegir algún punto, el cual romperá la simetría para la solución. Escogemos, arbitrariamente, el punto $\phi_1 = v, \phi_2 = 0$, y escribimos, con η y ρ reales,

$$\phi = \frac{v + \eta(x) + i\rho(x)}{\sqrt{2}}. \quad (5.15)$$

Substituyendo en (5.13), encontramos un lagrangiano que puede ser interpretado en términos de partículas y sus interacciones:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 - \lambda v (\eta \rho^2 + \eta^3) - \frac{\lambda}{2} \eta^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 + \text{cte.} \quad (5.16)$$

Los primeros términos corresponden a la energía cinética. El término $+\mu^2 \eta^2$ nos dice que el campo η corresponde a una partícula de masa $m_\eta^2 = 2|\mu^2|$. El término en ρ^2 a desaparecido, implicando que el campo ρ no tiene masa. Este es llamado bosón de Goldstone. Existe un teorema general que dice, cualquiera sea una simetría global continua que está espontáneamente rota, el espectro contendrá un boson de espín cero sin masa (bosón de Goldstone).

Técnicamente es claro como el bosón sin masa aparece. El potencial es un mínimo a lo largo de un círculo. Excitaciones en la dirección radial requieren tirar el potencial fuera del mínimo y una masa está asociada con la curvatura del potencial. A lo largo del círculo el potencial es plano, entonces no hay resistencia al movimiento alrededor del círculo, lo cual es el resultado de la excitación sin masa. La simetría $U(1)$ es rota dado la necesidad de elegir un punto en particular sobre el círculo sobre el cual se expande. La presencia y particular forma de los términos de interacción en (5.16) proveen una memoria de la simetría, pero no de una forma obvia.

5.3. Mecanismo de Higgs

5.3.1. Caso Abelian

Previamente consideramos una invariancia global de gauge. Ahora consideremos una local, hagamos el lagrangiano invariante bajo una transformación local de gauge. Sabemos que la invariancia bajo una transformación local de gauge requiere la introducción de un campos A_μ sin masa, y debemos escribir el lagrangiano en términos de la derivada covariante. Entonces

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu. \quad (5.17)$$

El campo de gauge transforma como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \chi(x) \quad (5.18)$$

y ϕ es invariante bajo

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\chi(x)} \phi(x). \quad (5.19)$$

Así el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.20)$$

Para $\mu^2 > 0$ este describe la interacción de una partícula escalar cargada (con $g \equiv e$) de masa μ con el campo electromagnético A_μ , por ejemplo. Notemos que no hay un término de masa para A_μ . Queremos elegir $\mu^2 < 0$ como en las secciones anteriores. Notemos que el lagrangiano contiene cuatro campos independientes o grados de libertad, los dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 , y los dos estados de polarización transversal del bosón sin masa.

La ecuación (5.19) nos dice que la teoría será invariante bajo una transformación de gauge de $\phi(x)$. En general ϕ puede ser escrito de la forma

$$\phi(x) = \eta(x) e^{-i\rho(x)} \quad (5.21)$$

donde η, ρ son reales, por lo que podemos reescribir $\phi(x)$ de la forma

$$\phi(x) = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \quad (5.22)$$

con h real, habiendo usado una transformación como $\phi \rightarrow e^{i\chi(x)}\phi$. Substituyendo en \mathcal{L} tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu + igA^\mu)(v + h)][(\partial_\mu - igA_\mu)(v + h)] - \frac{\mu^2}{2}(v + h)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + h)^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu - \lambda v^2h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4 + g^2v h A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}g^2h^2A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aquí cada término puede ser interpretado. Hay un resultado interesante, ahora hay un término de masa para el bosón de gauge!. Pero dado que comenzamos con una teoría invariante de gauge e hicimos solo transformaciones algebraicas, esperamos que la teoría resultante sea invariante de gauge también. La masa del bosón de gauge es la raíz cuadrada del coeficiente de $A_\mu A^\mu/2$,

$$M_A = gv, \quad (5.24)$$

y este es distinto de cero solo cuando la simetría de gauge esta espontáneamente quebrada por el campo de Higgs adquiriendo un valor de expectación de vacío. Entonces la teoría es solo invariante de gauge en un sentido restringido. El lagrangiano es invariante de gauge pero el vacío no lo es, porque hemos escogido una dirección particular en ϕ_1, ϕ_2 para el potencial mínimo. El espectro es ahora un unico boson de Higgs real h , con masa $\sqrt{(2\lambda v^2)}$, varias interacciones propias e interacciones cúbicas y cuarticas con el campo de gauge A_μ , más un bosón A_μ . Dado que el bosón masivo tiene 3 estados de spin (correspondientes a $J_z = 1, 0, -1$) el número de campos independientes es aún cuatro, lo que es consistente.

Lo que ha ocurrido aquí es que el bosón de Goldstone de la sección anterior se ha convertido en el estado de polarización longitudinal del bosón de gauge. Éste fenómeno se le refiere a veces diciendo que el bosón de gauge se *come* al bosón de Goldstone. El mecanismo anterior es llamado como **Mecanismo de Higgs**.

Bibliografía

- [1] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company (1973).
- [2] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of Their Applications*, John Wiley & Sons, Inc. (1974).
- [3] S. Browne and D. Šijački, “On the Irreducible Representations of the Lorentz Group”, *Ann. Phys.* (N.Y.) **99** 92–126 (1976).
- [4] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics, Vol II*, Academic Press Ltd. (1984).
- [5] M. Hamermesh, *Group Theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1962).
- [6] Ashok Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, Univerity of Rochester, USA, 2008.
- [7] Michio Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, 1993.
- [8] Guillermo F. Rubilar, *Apuntes Curso Electrodinámica*, Universidad de Concepción. <https://sites.google.com/site/apuntesdecienciasfisicas/>.
- [9] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [10] Patricio Salgado, *Apuntes Quiebre Espontáneo de Simetría*, Universidad de Concepción.
- [11] Gordon Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1993).