
Teoría General de la Relatividad

Tópicos en Relatividad General

Versión del 3 de mayo de 2018

Prefacio

Este apunte ha sido escrito principalmente por [G. Rubilar](#), con contribuciones de J. Crisóstomo, O. Fuentealba (cap. 5), N. Ibarra, F. Izaurieta, N. Merino (cap. 2), J. Moya (cap. 7), P. Muñoz (cap. 9 y 10), A. Pérez (cap. 2), T. Ramos (cap. 8), E. Rodríguez y O. Valdivia.

Esta obra ha sido publicada bajo una [licencia GPL v3](#). El código fuente ([pdf](#)) \LaTeX , así como las figuras en formato editable están disponibles en el [repositorio GitHub del proyecto](#).

“...Así, nosotros los mortales, somos inmortales en lo que creamos en común.”

Albert Einstein.

Índice general

Prefacio	1
1. Motivaciones para RG: Relatividad Especial y Gravitación newtoniana	2
1.1. Distribución de energía y moméntum de la materia: tensor de energía-moméntum	2
1.1.1. Campo electromagnético	3
1.1.2. Fluido perfecto	3
1.1.3. Fluido simple (polvo)	5
1.2. Ley de Gravitación universal	5
1.3. Masa inercial y masa gravitacional	7
1.3.1. Universalidad de la interacción gravitacional, Principio de Equivalencia Débil	7
1.4. Fuerzas de marea	9
1.5. Observadores acelerados y gravedad: Versión no-relativista	10
1.6. Principio de Equivalencia de Einstein y Sistemas de Referencia Localmente inerciales	11
1.6.1. Desvío de la luz*	13
1.6.2. Redshift gravitacional*	14
1.7. Observadores acelerados y gravedad: Versión relativista	14
2. Análisis tensorial y geometría diferencial	17
2.1. Variedades diferenciables	17
2.2. Escalares, vectores y tensores	18
2.2.1. Escalares	19
2.2.2. Vectores contravariantes	19
2.2.3. Vectores covariantes	20
2.2.4. Tensores	21
2.3. Álgebra tensorial sobre variedades diferenciables	22
2.3.1. Multiplicación	22
2.3.2. Adición	23
2.3.3. Contracción	23
2.3.4. Permutación y (Anti-)Simetrización	24
2.3.5. Invariancia de las ecuaciones tensoriales	25
2.4. Densidades tensoriales *	25
2.4.1. Densidades tensoriales de Levi-Civita*	27
2.5. Tensores antisimétricos y densidades tensoriales duales*	27
2.6. Métrica	28
2.6.1. Longitud, producto interior, ángulos	29
2.6.2. Métrica Inversa	29
2.6.3. Métrica inducida	30
2.6.4. Curvas geodésicas	31

2.6.5. Isometrías (simetrías de la métrica)	33
2.6.6. Coodenadas adaptadas a una isometría	37
2.6.7. Vectores de Killing y operadores diferenciales	37
2.7. Conexión, derivadas covariantes y transporte paralelo	37
2.7.1. Derivada parcial de campos tensoriales	37
2.7.2. Conexión y derivada covariante de tensores	39
2.7.3. Transporte paralelo*	40
2.7.4. Integrabilidad*	41
2.7.5. No-commutatividad de las derivadas covariantes, curvatura y torsión	42
2.7.6. Interpretación geométrica de la curvatura*	43
2.7.7. Interpretación geométrica de la torsión*	45
2.7.8. Curvas autoparalelas*	46
2.8. Geometría riemanniana	46
2.8.1. Propiedades de los símbolos de Christoffel	46
2.8.2. Espacios planos	47
2.8.3. Coordenadas geodésicas	47
2.8.4. Propiedades del tensor de Riemann	49
2.8.5. Tensor de Ricci, y escalar de curvatura	50
2.8.6. Identidades de Bianchi	50
3. La teoría de Einstein de la gravitación	52
3.1. Gravitación como curvatura del espaciotiempo	52
3.2. Métrica, trayectorias, tiempo propio y coordenadas	53
3.2.1. Sobre coordenadas tipo espacio, tipo tiempo y tipo luz	54
3.3. Límite Newtoniano	54
3.3.1. Redshift gravitacional en el límite newtoniano	56
3.4. Ecuaciones de campo de Einstein	57
3.4.1. Fluido perfecto sin presión y geodésicas*	59
3.5. La solución de Schwarzschild	60
3.5.1. Solución de Schwarzschild Exterior	62
3.5.2. Solución de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas	64
3.5.3. Geodésicas en la geometría de Schwarzschild	65
3.5.4. Geodésicas tipo tiempo	65
3.5.5. Desvío de la luz	72
3.5.6. Redshift Gravitacional	76
3.5.7. Tiempo de Vuelo (Efecto Shapiro)*	77
4. Agujeros Negros ***PRELIMINAR***	81
4.1. Singularidades y radio de Schwarzschild	81
4.1.1. Diagrama Espacio-Temporal en Coordenadas de Schwarzschild	82
4.1.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	84
4.1.3. Partículas cayendo radialmente	86
4.2. Colapso gravitacional	86
5. Agujeros Negros Rotantes ***PRELIMINAR***	88
5.1. Solución de Kerr	88
5.1.1. Singularidades y Horizontes de la Solución de Kerr	89
5.1.2. Geodésicas tipo luz	92
5.1.3. Diagrama Espacio-Temporal	96
5.1.4. Límite Estacionario y Observadores Estacionarios	97

5.2. Extracción de Energía de una Agujero Negro Rotante	99
5.2.1. Geodésicas tipo tiempo	99
5.2.2. Región de Energía Negativa	103
5.2.3. Mecanismo de Penrose	103
6. Campos gravitacionales débiles y ondas gravitacionales	107
6.1. Expansión en potencias de G	107
6.1.1. Expansión a primer orden	108
6.2. Ecuaciones de Einstein linealizadas	109
6.3. Transformaciones de gauge	110
6.3.1. Invariancia de gauge	110
6.3.2. Gauge de Lorenz	111
6.4. Ondas gravitacionales planas: dos polarizaciones	113
6.5. Efectos de una onda gravitacional: principio de un detector de ondas gravitacionales	115
6.6. Generación de ondas gravitacionales	118
6.6.1. Ejemplo	119
6.7. Expansión hasta orden cuadrático en G	120
6.8. Ecuaciones de Einstein a segundo orden	122
6.8.1. Gauges	123
6.8.2. Tensor de energía-moméntum del campo gravitacional: con gauges, en el vacío	123
6.9. Fórmula cuadrupolar para la potencia radiada	125
6.9.1. Transformación de una onda plana	125
6.9.2. Transformación de ondas esféricas en la zona de radiación	127
6.9.3. Ejemplo: Potencia radiada por un sistema binario	128
7. Elementos de Cosmología ***PRELIMINAR***	133
7.1. Espacios de Curvatura constante	133
7.2. La métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker	135
7.3. Observadores comóviles	136
7.4. Redshift Cosmológico	136
7.5. Definiciones de Distancia	138
7.5.1. Paralaje Trigonométrico	139
7.5.2. Movimiento Propio	139
7.5.3. Luminosidad Aparente	139
7.5.4. Velas Estandar	140
7.5.5. Distancia de Luminosidad	141
7.5.6. Distancia Angular	143
7.6. Ecuaciones de Einstein	144
7.7. Datos experimentales, Modelos y Ajustes	148
8. Campo Gravitomagnético ***PRELIMINAR***	158
8.1. Introducción	158
8.2. Caso de una distribución de materia no-relativista sin presión	158
8.3. Ecuación de la geodésica para un cuerpo masivo en términos de los potenciales gravitomagnéticos	159
8.3.1. Ecuación del movimiento de una partícula ligada no-relativista y definición de los campos gravitomagnéticos	161
8.3.2. Forma de Maxwell de las Ecuaciones del campo gravitacional*	163

8.4. Campo gravitomagnético producido por una distribución de masa esféricamente simétrica y estacionaria que rota lentamente en torno a un eje fijo.	164
8.4.1. Geometría del espaciotiempo fuera de la distribución de masa esférica rotante	167
8.5. Estudio de órbitas y resolución perturbativa de la ecuación del movimiento para una partícula ligada y no-relativista en el espaciotiempo fuera de una esfera rotante.	168
8.6. Precesión Relativista de Giróscopos	168
8.6.1. Giróscopos y 4-vector de spin	168
8.6.2. Determinación de la velocidad angular de precesión del spin de un giróscopo moviéndose en una geodésica bajo la acción del campo gravitomagnético.	169
8.6.3. Predicción para un giróscopo que orbita la Tierra y que intenta medir el GPB	172
9. Equilibrio Estelar Newtoniano	175
9.1. Ecuaciones de equilibrio	175
9.2. Resolviendo las ecuaciones de estructura	176
9.3. Solución: Densidad constante	177
9.3.1. Obteniendo la presión $P(r)$	177
9.3.2. Validez de la descripción newtoniana	178
9.4. Solución: Estrellas politrópicas	178
9.4.1. Ecuación de Lane-Emden	178
9.4.2. Propiedades físicas de las funciones de Lane-Emden	180
9.4.3. Soluciones exactas de la ecuación de Lane-Emden	183
9.4.4. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden	188
9.4.5. Comportamiento físico de algunas soluciones particulares	189
9.5. Solución exacta para gas de Fermi	194
9.5.1. Ecuación de estructura de Fermi	194
9.5.2. Propiedades físicas de la ecuación de estructura de Fermi	195
9.5.3. Casos límite de las soluciones	198
9.5.4. Solución numérica de la ecuación de estructura de Fermi	203
9.6. Aplicación: Estrellas degeneradas	204
9.6.1. Enanas blancas	204
9.6.2. Estrellas de neutrones	209
10. Equilibrio Estelar Relativista	213
10.1. Métrica de Schwarzschild interna	213
10.1.1. Ecuaciones de Einstein para un fluido ideal	213
10.1.2. Métrica de Schwarzschild interior	218
10.2. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	219
10.2.1. Ecuaciones de Estructura Estelar	219
10.2.2. Propiedades de la ecuación TOV	220
10.3. Solución: Densidad constante	221
10.3.1. Obteniendo la presión $P(r)$ relativista	221
10.3.2. Obteniendo los coeficientes métricos	222
10.3.3. Estabilidad de la solución	224
10.4. Solución numérica para gas ideal de Fermi	224
10.4.1. Reducción de las ecuaciones a la forma de OV	224
10.4.2. Método y Gráficos	227

A. Problema de Kepler Newtoniano	229
B. Constantes Físicas (S.I.)	235
C. Enanas Blancas y Estrellas de Neutrones: Reseña Histórica	236
D. Nociones de Termodinámica	238
D.1. Primera ley de la Termodinámica	238
D.2. Ecuación de estado adiabática o politrópica	239
D.3. Involucrando la Temperatura y Entropía	240
D.4. Ecuaciones de estado de Fermi	241
D.4.1. Definiciones estadísticas	241
D.4.2. Función de distribución de Fermi	242
D.4.3. Ecuación de estado de Fermi exacta	243
D.4.4. Ecuaciones de estado de Fermi aproximadas	246
Bibliografía	249

Capítulo 1

Motivaciones para RG: Relatividad Especial y Gravitación newtoniana

1.1. Distribución de energía y moméntum de la materia: tensor de energía-moméntum

Para un resumen de las definiciones básicas, la notación y convenciones usadas en la teoría de la mecánica y electrodinámica relativista, vea los apuntes de Electrodinámica (II) [1].

En la teoría newtoniana de la gravitación la *masa* de los cuerpos es la fuente del campo gravitacional. Desde el punto de vista de una descripción de un sistema como un *continuo*, la distribución espacial y el movimiento de su masa es caracterizada por 4 cantidades: la densidad de masa ρ y (las tres componentes de) la densidad de corriente de masa¹ \vec{J} . En la teoría de RE, por otro lado, la masa de los cuerpos no es más que una componente de la energía de éstos: el concepto de masa es reemplazado por el de energía (no existe ley de conservación de la masa de un sistema, sino sólo de la energía total, etc.). Más aún, la energía es “sólo” una componente del 4-moméntum de un cuerpo. Los valores de las componentes del 4-moméntum, y por lo tanto de la energía y del moméntum lineal, se “mezclan” al describir un sistema desde distintos SRI's (el 4-moméntum es un 4-vector bajo TL's). Por todo esto, es natural suponer que en una teoría relativista de la gravitación las fuentes del campo gravitacional estén descritas por la distribución de energía y moméntum en el espacio(tiempo) y sus flujos². Todas estas cantidades quedan condensadas en el *tensor energía-moméntum de un sistema*.

Las componentes del tensor de energía-moméntum³ $T^{\mu\nu}$ están relacionadas con las densidades y flujos de energía y moméntum, de acuerdo a

$$T^{00}(x) = u(x), \quad T^{0i}(x) = \frac{1}{c}S^i(x), \quad T^{i0}(x) = c\pi^i(x), \quad T^{ij}(x) = p^{ij}(x), \quad (1.1)$$

donde u es la *densidad de energía* (energía por unidad de volumen), S^i la *densidad de flujo de energía* (energía por unidad de tiempo y superficie), π^i la *densidad de moméntum* (moméntum por unidad de volumen) y p^{ij} el *tensor de tensiones* (moméntum por unidad de tiempo y superficie).

El *4-moméntum total del sistema*, contenido en un volumen V en un instante dado, es

¹Si el sistema está constituido de una distribución de densidad ρ que se mueve con velocidad \vec{v} , entonces $\vec{J} = \rho\vec{v}$.

²Es decir, densidad de energía, densidad de flujo de energía, densidad de moméntum y densidad de flujo de moméntum.

³De acuerdo a nuestras convenciones este tensor tiene unidades de *densidad de energía*, es decir, energía por unidad de volumen o, equivalentemente, de *presión*.

entonces la integral

$$p^\mu = \frac{1}{c} \int_V T^{\mu 0} dV \quad (1.2)$$

o, equivalentemente, la energía y el moméntum adoptan la forma

$$E = \int_V u dV, \quad P^i = \int_V \pi^i dV. \quad (1.3)$$

Si el sistema está *aislado*, de modo que su energía y moméntum se conserven, se satisface

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4)$$

que, en virtud de las identificaciones anteriores, es equivalente a las usuales "ecuaciones de continuidad" para la energía y el moméntum:

$$\partial_t u + \partial_i S^i = 0, \quad \partial_t \pi^i + \partial_j p^{ij} = 0. \quad (1.5)$$

1.1.1. Campo electromagnético

El campo electromagnético posee y transporta energía y moméntum. El respectivo tensor de energía-moméntum del campo electromagnético en el vacío es dado por

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} := \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} \right). \quad (1.6)$$

Puede verificarse que las densidades de energía, moméntum y sus flujos están dados por las cantidades apropiadas definidas en electrodinámica:

$$u := \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right), \quad (1.7)$$

$$S^i := \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)^i = c^2 \pi^i, \quad (1.8)$$

$$T^{ij} := \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \delta_j^i - \varepsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j, \quad (1.9)$$

Para mayores detalles, ver [1].

1.1.2. Fluido perfecto

Consideramos ahora un fluido con estructura interna descrita por una *presión isótropa* p . Ésta está definida respecto al SRI comóvil K' con un elemento de fluido dado, ubicado en el evento x , de modo que

$$T'^{00}(x) = \epsilon(x), \quad (1.10)$$

$$T'^{0i}(x) = 0, \quad (1.11)$$

$$T'^{i0}(x) = 0, \quad (1.12)$$

$$T'^{ij}(x) = p(x) \delta^{ij}. \quad (1.13)$$

La componente en (1.10) es la *densidad propia de energía* (es decir, $\epsilon(x) dV'$ es la energía del sistema contenida en el elemento de volumen dV' , en el SRI instantáneamente comóvil con el fluido en el evento x), que a menudo se expresa en términos de la *densidad propia de masa* $\rho(x)$, definida por $\rho(x) := \epsilon(x)/c^2$. Las componentes mixtas (1.11) y (1.12) son nulas puesto

que suponemos que en el sistema comóvil *la distribución microscópica es isotropa*, por lo que no existe una dirección preferente para el flujo de energía ni para la densidad de moméntum. Finalmente las componentes espaciales en (1.13) son diagonales puesto que *suponemos que en un fluido perfecto la fuerza sobre cada elemento de superficie es normal a esta superficie*, de modo que $T^{ij}dS^j = T^{ij}\hat{n}^j dS = p\hat{n}^i dS$ y que $p > 0$ corresponde a un fluido que tiende a expandirse.

A partir del tensor de energía-moméntum para un fluido perfecto en su sistema local comóvil, encontraremos la expresión general respecto a cualquier otro SRI por medio del boost de Lorentz apropiado. Para esto usaremos los resultados y convenciones contenidos en [1]. Si la TL es denotada como $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ y $v^i = c\beta^i$ es la velocidad de K' respecto a K entonces

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^i_0 = \Lambda^0_i = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta^i\beta^j. \quad (1.14)$$

Por otro lado el tensor buscado $T^{\mu\nu}$ está relacionado con $T'^{\mu\nu}$ por medio de

$$T^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu_\lambda (\Lambda^{-1})^\nu_\rho T'^{\lambda\rho} \quad (1.15)$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu_0 \Lambda^\nu_0 T'^{00} + (\Lambda^{-1})^\mu_i \Lambda^\nu_j T'^{ij} \quad (1.16)$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu_0 (\Lambda^{-1})^\nu_0 \rho c^2 + p (\Lambda^{-1})^\mu_i (\Lambda^{-1})^\nu_j \delta^{ij}. \quad (1.17)$$

Las componentes de la matriz (Λ^{-1}) están dadas por

$$(\Lambda^{-1})^0_0 = \gamma, \quad (\Lambda^{-1})^i_0 = (\Lambda^{-1})^0_i = +\gamma\beta^i, \quad (\Lambda^{-1})^i_j = \delta^i_j + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta^i\beta^j. \quad (1.18)$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$T^{00} = (\Lambda^{-1})^0_0 (\Lambda^{-1})^0_0 \rho c^2 + p (\Lambda^{-1})^0_i (\Lambda^{-1})^0_j \delta^{ij} \quad (1.19)$$

$$= \gamma^2 \rho c^2 + p \gamma^2 \beta^i \beta^j \delta^{ij} \quad (1.20)$$

$$= \gamma^2 \rho c^2 + p \gamma^2 \beta^2. \quad (1.21)$$

Vemos que en el contexto de la teoría Especial de la Relatividad *la presión de un fluido en movimiento aporta a su densidad de energía*⁴. Además,

$$T^{0i} = (\Lambda^{-1})^0_0 (\Lambda^{-1})^i_0 \rho c^2 + p (\Lambda^{-1})^0_j (\Lambda^{-1})^i_k \delta^{jk} \quad (1.22)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \rho c^2 + p \gamma \beta^j \left(\delta^i_k + \frac{1}{\beta^2} \beta^i \beta^k (\gamma-1) \right) \delta^{jk} \quad (1.23)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \rho c^2 + p \gamma (\beta^i + \beta^i (\gamma-1)) \quad (1.24)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \rho c^2 + p \gamma^2 \beta^i, \quad (1.25)$$

y $T^{i0} = T^{0i}$. Note además que $T^{0i} \neq T^{00}\beta^i$ cuando $p \neq 0$. Finalmente,

$$T^{ij} = (\Lambda^{-1})^i_0 (\Lambda^{-1})^j_0 \rho c^2 + p (\Lambda^{-1})^i_k (\Lambda^{-1})^j_l \delta^{kl} \quad (1.26)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \beta^j \rho c^2 + p \left(\delta^i_k + \frac{1}{\beta^2} \beta^i \beta^k (\gamma-1) \right) \left(\delta^j_l + \frac{1}{\beta^2} \beta^j \beta^l (\gamma-1) \right) \delta^{kl} \quad (1.27)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \beta^j \rho c^2 + p \left(\delta^{ij} + \frac{2}{\beta^2} \beta^i \beta^j (\gamma-1) + \frac{1}{\beta^2} \beta^i \beta^j (\gamma-1)^2 \right) \quad (1.28)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \beta^j \rho c^2 + p \left(\delta^{ij} + \frac{1}{\beta^2} \beta^i \beta^j (\gamma^2 - 1) \right) \quad (1.29)$$

$$= \gamma^2 \beta^i \beta^j \rho c^2 + p (\delta^{ij} + \gamma^2 \beta^i \beta^j). \quad (1.30)$$

⁴En su generalización a la teoría General de la Relatividad, este hecho tiene importantes consecuencias, por ejemplo, para el análisis de estabilidad (y colapso) estelar.

Puede verificarse fácilmente que éstas son precisamente las componentes de

$$T_{\text{fp}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

energía-moméntum fluido perfecto

La expresión (1.31) constituye por tanto la expresión covariante del tensor de energía-moméntum de un fluido perfecto, caracterizado por su densidad propia de masa ρ , y su presión isótropa p , moviéndose con 4-velocidad u^μ . Estas tres cantidades son, en general, dependientes de la posición y del tiempo. En términos de la densidad propia de energía, ϵ , tenemos:

$$T_{\text{fp}}^{\mu\nu} = (\epsilon + p) \frac{u^\mu}{c} \frac{u^\nu}{c} - p \eta^{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

energía-moméntum fluido perfecto

1.1.3. Fluido simple (polvo)

El caso particular de un fluido simple, es decir, sin presión, describe la situación en que el sistema está constituido por un conjunto de partículas *no interactuantes* moviéndose *todas con la misma velocidad* en un elemento de volumen dado (“polvo”). El tensor energía-moméntum se reduce entonces a:

$$T_{\text{polvo}}^{\mu\nu}(x) = \rho u^\mu u^\nu. \quad (1.33)$$

Las respectivas densidades de energía, de flujo de energía, de moméntum y el tensor de tensiones están dadas en este caso por:

$$u = \rho \gamma^2 c^2, \quad (1.34)$$

$$S^i = \rho \gamma^2 c^2 v^i = u v^i, \quad (1.35)$$

$$\pi^i = \rho \gamma^2 v^i = \frac{u}{c^2} v^i, \quad (1.36)$$

$$p^{ij} = \rho \gamma^2 v^i v^j = \pi^i v^j. \quad (1.37)$$

Note que para este tipo de sistema se verifica que los respectivos flujos S^i y p^{ij} tienen la forma esperada de producto de la respectiva densidad (“transportada”) y la velocidad de cada elemento de fluido (“a la que es transportada”), tal como ocurre por ejemplo para una distribución de carga de densidad ρ_c moviéndose con velocidad \vec{v}_c , para la cual la densidad de corriente es dada por $\vec{J}_c = \rho_c \vec{v}_c$.

1.2. Ley de Gravitación universal

En la teoría newtoniana la fuerza gravitacional de una masa muy pequeña (“puntual”) m_1 sobre otra masa (también muy pequeña) m_2 está dada por la ley de gravitación de Newton (1687),

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (1.38)$$

donde G es la constante de gravitación (de Cavendish, medida por primera vez en 1897). Su valor, de acuerdo a las mediciones actuales, es⁵

$$G \stackrel{\text{SI}}{=} (6,67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad (1.39)$$

El vector $\vec{r} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ apunta desde m_1 hasta m_2 , ver figura 1.1. De acuerdo al principio de acción y reacción (tercera ley de Newton), tenemos que $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

⁵Ver por ejemplo, <http://www.codata.org>.

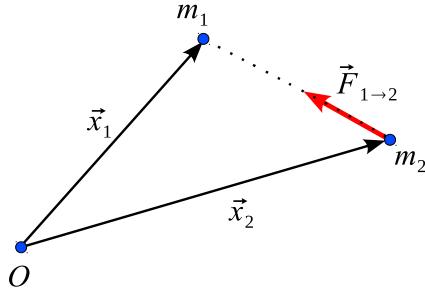


Figura 1.1: Ley de gravitación universal de Newton.

El *campo gravitacional* \vec{g} es definido como la fuerza por unidad de masa que experimenta una masa de prueba. Por tanto, el campo gravitacional en la posición \vec{x}_2 generado por una masa (muy pequeña) m_1 es

$$\vec{g}_1(x_2) := \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{m_2} = -G \frac{m_1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (1.40)$$

En el caso anterior, es posible distinguir entre la masa m_1 que *genera* el campo gravitacional, que llamamos *masa gravitacional activa*, y la masa m_2 de la partícula que sobre la cual actúa la fuerza, que llamaremos *masa gravitacional pasiva*.

Por el *principio de superposición*, el campo gravitacional generado por una distribución continua de masa, caracterizada por su densidad de masa $\rho(\vec{x})$ será de la forma

$$\vec{g}(\vec{x}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (1.41)$$

Como consecuencia, el campo gravitacional es siempre irrotacional,

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0}, \quad (1.42)$$

y puede derivarse a partir de un *potencial gravitacional* ϕ , de modo que

$$\boxed{\vec{g}(x) = -\vec{\nabla}\phi(x)}, \quad (1.43)$$

donde

$$\phi(\vec{x}) := -G \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \text{cte.} \quad (1.44)$$

Este potencial satisface la *ecuación de Poisson*,

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho}, \quad (1.45) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{Ecuación de} \\ & \text{Poisson} \end{matrix}$$

o equivalentemente, el campo gravitacional satisface la ecuación (“de Gauss”)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (1.46)$$

que relaciona los *gradientes* del campo gravitacional con la distribución de masa, descrita por la densidad $\rho(\vec{r})$, que lo genera.

Si bien la ecuación (1.45) es una ecuación para el campo ϕ , en el contexto newtoniano el campo gravitacional no es un genuino *campo dinámico*, es decir, no contiene grados de libertad independientes, ya que éste queda determinado (para condiciones de borde dadas) únicamente por la densidad de masa ρ . En otras palabras, la teoría newtoniana de la gravitación es una teoría de *acción a distancia*. De acuerdo a este modelo, si se removiese la fuente del campo ($\rho \rightarrow 0$) entonces el campo gravitacional desaparecería *instantáneamente* en todo punto. El mismo Newton estaba bastante preocupado por este hecho. Claramente, esta propiedad es *incompatible* con los postulados básicos de la teoría de Relatividad Especial.

1.3. Masa inercial y masa gravitacional

Una característica especial de la interacción gravitacional es que, hasta donde hemos podido observar, la aceleración de un cuerpo que cae libremente en un campo gravitacional dado *no depende de su masa sino sólo de su posición* en el campo gravitacional. En el contexto newtoniano esto puede describirse a través de la igualdad entre la **masa inercial** y la **masa gravitacional** de *todo cuerpo*.

En este contexto, la **masa inercial** de un cuerpo, $\overset{\text{iner}}{m}$, es definida como aquella cantidad que mide la resistencia de éste a cambiar su estado de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \overset{\text{iner}}{m} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}. \quad (1.47)$$

Esta masa puede ser determinada por medio de experimentos “no-gravitacionales”, es decir, que no involucran la interacción gravitacional. Por ejemplo, puede determinarse la masa inercial de un cuerpo comparando su frecuencia de oscilación ω con la frecuencia de oscilación de un cuerpo de referencia ω_{ref}) cuando ambos son unidos alternativamente a un mismo resorte, de modo que se produzca una oscilación horizontal. En este caso (suponiendo la ley de Hooke) se cumple que $\overset{\text{iner}}{m} / \overset{\text{iner}}{m}_{\text{ref}} = \omega_{\text{ref}}^2 / \omega^2$.

Por otro lado, se define la **masa gravitacional**, $\overset{\text{grav}}{m}$, de un cuerpo como la cantidad que mide la magnitud de la fuerza que este cuerpo experimenta al estar en una región del espacio con campo gravitacional \vec{g} :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = \overset{\text{grav}}{m} \vec{g} = - \overset{\text{grav}}{m} \vec{\nabla}\phi. \quad (1.48)$$

A partir de (1.47) y (1.48) obtenemos que la aceleración de un cuerpo debido a un campo gravitacional \vec{g} es dado por

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left(\frac{\overset{\text{grav}}{m}}{\overset{\text{iner}}{m}} \right) \vec{g}. \quad (1.49)$$

Esta expresión es análoga a la que determina la aceleración de un cuerpo cargado en presencia de un campo eléctrico externo:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left(\frac{q}{\overset{\text{iner}}{m}} \right) \vec{E}. \quad (1.50)$$

En este sentido, la masa gravitacional es el análogo gravitacional a la carga eléctrica (es decir, es la “carga gravitacional”).

1.3.1. Universalidad de la interacción gravitacional, Principio de Equivalencia Débil

La experiencia muestra que la interacción electrostática causa, incluso en presencia de un mismo campo eléctrico, que cuerpos diferentes aceleren en forma diferente. Esto se describe, de acuerdo a (1.50), diciendo que distintos cuerpos poseen distintos valores de la relación carga-masa (inercial) q/m . Existen cuerpos donde esta relación es positiva, negativa, o cero. En contraste, la interacción gravitacional parece (de acuerdo a todas observaciones realizadas hasta hoy) tener la propiedad única que *todos* los cuerpos aceleran en la *misma* dirección y con la *misma* magnitud en un campo gravitacional dado. De acuerdo a (1.49), esto requiere que el cuociente entre la masa inercial y gravitacional de todo cuerpo sea una constante universal (es decir, que tenga siempre el mismo valor, independiente del cuerpo). Por simplicidad, usualmente se eligen las unidades de $\overset{\text{grav}}{m}$ (o, equivalentemente, de la constante gravitacional G) tal que

esta *universalidad de la interacción gravitacional* implique que

$$\frac{\text{iner}}{m} = \frac{\text{grav}}{m} . \quad (1.51)$$

En este caso, (1.49) se reduce a

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \quad (1.52)$$

para todo cuerpo.

Si el *postulado* de universalidad de la interacción gravitacional o, en otras palabras, de la igualdad de masa inercial y gravitacional, es *siempre* válido entonces la trayectoria de los cuerpos sometidos (sólo) a la acción de la gravedad es independiente del cuerpo (de su carga, composición, temperatura, color, etc.) y sólo depende del campo gravitacional en el que se encuentra (determinado por los otros cuerpos en el sistema) y de la posición y velocidad inicial de éste. La suposición que las trayectorias de los cuerpos sometidos a la acción de la gravedad son realmente idénticas (dadas las mismas condiciones iniciales) es usualmente llamado **Principio de Equivalencia Débil** (PED). Lo importante es que la validez del PED o, equivalentemente, de la universalidad de la aceleración debido a la gravedad, o de la igualdad de las masas inerciales y gravitacionales, son características distintivas de la interacción gravitacional que se han obtenido a partir de la generalización de *observaciones*, y que pueden (y deben!) ser testeadas experimentalmente. Hasta ahora, toda la evidencia observational respalda al PED, siendo verificado con precisiones que restringen las posibles **desviaciones relativas de la aceleración**, y por lo tanto la diferencia relativa del cuociente $\frac{\text{iner}}{m} / \frac{\text{grav}}{m}$ entre dos cuerpos ("1" y "2")

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\left(\frac{\text{iner}}{m} / \frac{\text{grav}}{m} \right)_2 - \left(\frac{\text{iner}}{m} / \frac{\text{grav}}{m} \right)_1}{\left(\frac{\text{iner}}{m} / \frac{\text{grav}}{m} \right)_1}, \quad (1.53)$$

a ser menores que una parte en 10^{13} . Para más detalles, ver [2]-[9]. Estas observaciones abarcan desde los experimentos originales de Galileo usando péndulos, planos inclinados, etc. hasta los más modernos y precisos experimentos con satélites e incluso neutrones [5] y electrones. El PED también ha sido testeado con átomos, usando técnicas de interferometría atómica, ver [6] y las referencias ahí citadas. Recientemente, se han reportado experimentos que testean el PED con átomos con distintas orientaciones de su spin, ver [7].

Como veremos más adelante, la teoría general de la relatividad de Einstein *supone* como ingrediente crucial para su construcción el PED⁶. Por esta razón existe continuo interés en poner a prueba este principio, y mejorar cada vez más la precisión con la que se ha verificado su validez.

El siguiente gráfico resume los resultados de múltiples experimentos modernos que determinan cotas máximas para las aceleraciones relativas de distintos cuerpos sometidos a la acción de la gravedad, junto con el año en que fueron realizados los experimentos.

⁶de hecho se postula una versión generalizada y aún más demandante, el así llamado “principio de equivalencia fuerte” (PEF).

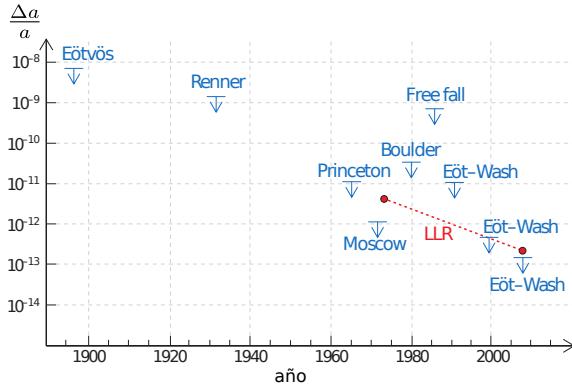


Figura 1.2: Límites a posibles violaciones del PED. Figura adaptada a partir de la original en [4].

1.4. Fuerzas de marea

En el contexto newtoniano, se usa el término **fuerzas de marea** para describir el efecto de la *inhomogeneidad* de un campo gravitacional, que genera diferencias en la aceleración de la materia en distintas partes de un sistema. Consideré el caso de un campo gravitacional generado por una distribución compacta de masa (ver, por ejemplo, la figura 1.5). Debido a las inhomogeneidades del campo gravitacional, dos pequeñas masas de prueba inicialmente en reposo caerán hacia el centro de fuerzas, acercándose entre ellas. Similarmente, una gota de agua inicialmente esférica tenderá a deformarse a una forma elipsoidal debido a que la fuerza gravitacional en su parte inferior (más cerca del centro de fuerzas) es mayor que en la parte superior, que está a una distancia mayor de la fuente.

Si la distancia entre las dos masas de prueba es *suficientemente pequeña*, podemos encontrar una expresión explícita simple para su aceleración relativa. Consideré que las posiciones de estas masas son \vec{x} y $\vec{x} + \delta\vec{x}$. Podemos entonces, a primer orden en $\delta\vec{x}$, escribir:

$$a_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) = a_i(\vec{x}) + \delta x^j \partial_j a_i(\vec{x}). \quad (1.54)$$

Esta aproximación es buena si $|\delta\vec{x}| \ll |a_i|/|\partial_j a_i|$. Definimos el **tensor de mareas** K_{ij} por

$$K_{ij}(\vec{x}) := -\partial_j a_i(\vec{x}), \quad (1.55) \quad \text{Tensor de Mareas}$$

(el signo negativo es convencional) de modo que

$$\delta a_i := a_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) - a_i(\vec{x}) = -K_{ij}\delta x^j. \quad (1.56)$$

Si ahora expresamos la aceleración relativa en términos de la variación temporal de la posición relativa, es decir, $\delta a_i = d^2(\delta x^i)/dt^2$, encontramos

$$\frac{d^2(\delta x^i)}{dt^2} + K_{ij}\delta x^j = 0. \quad (1.57)$$

El carácter irrotacional del campo gravitacional es equivalente a la simetría del tensor de mareas, $K_{ij} = K_{ji}$. Además,

$$K_{ij} = \partial_i \partial_j \phi. \quad (1.58)$$

En términos del tensor de mareas, la ecuación de Poisson (1.45) puede escribirse como

$$K_{ii} = 4\pi G\rho. \quad (1.59)$$

Como veremos posteriormente, el tensor de mareas es el análogo newtoniano del **tensor de curvatura de Riemann**, y las relaciones (1.57) y (1.59) corresponden al límite no-relativista de la **ecuación de desvío geodésico** y de las **ecuaciones de Einstein**, respectivamente.

1.5. Observadores acelerados y gravedad: Versión no-relativista

Considere, aún en el contexto de la mecánica de Newton, una partícula moviéndose sólo bajo la acción de un campo gravitacional \vec{g} . Siempre es posible considerar una región suficientemente pequeña del espacio y un intervalo de tiempo suficientemente corto que permitan aproximar a \vec{g} como *homogéneo e independiente del tiempo* en aquella región. Como vimos anteriormente, suponiendo la validez del PED, la ecuación de movimiento de toda partícula respecto de un SRI K será

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g}, \quad (1.60)$$

cuya solución es una trayectoria parabólica:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2. \quad (1.61)$$

Considere ahora un SR K' que *acelera respecto a K*, con aceleración constante \vec{a} . Consideraremos que la transformación entre las coordenadas asociadas a ambos SR's es

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \quad (1.62)$$

Verificamos que nuestra interpretación es consistente ya que los eventos sobre trayectorias en reposo respecto a K' , es decir, con $\vec{x}' = \vec{x}'_0$, describen un movimiento uniformemente acelerado respecto al SRI K : $(ct, \vec{x}) = (ct, \vec{x}'_0 + \vec{a}t^2/2)$.

Usando la transformación (1.62) y la aceleración (1.60) podemos calcular la aceleración de la partícula respecto a K' , obteniendo

$$\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{g} - \vec{a}. \quad (1.63)$$

Equivalentemente, la trayectoria respecto a K' es determinada transformando (1.61):

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}(\vec{g} - \vec{a})t^2. \quad (1.64)$$

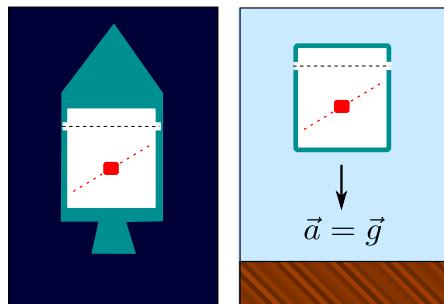


Figura 1.3: Equivalencia entre un SRI en ausencia de gravedad y un SR en caída libre.

Este resultado establece cierta relación de *equivalencia* en lo que respecta a la mecánica (es decir, al movimiento de cuerpos) en campos gravitacionales *estacionarios* y *homogéneos* y en SR's *acelerados*. Por ejemplo, en un sistema de referencia *en caída libre*, es decir, con $\vec{a} = \vec{g}$, tendremos que cada partícula describirá una trayectoria rectilínea con velocidad constante respecto a K' , tal como lo haría en un SRI en el que no existiese campo gravitacional. Ver figura 1.2. En otras palabras, parece posible “eliminar” los efectos de un campo gravitacional (estacionario y homogéneo) sobre el movimiento de cuerpos, refiriendo estos movimientos a un SR en caída libre⁷. Análogamente, si consideramos una región muy lejos de todo cuerpo masivo que genere un campo gravitacional ($\vec{g} = \vec{0}$), entonces es posible “simular” (los efectos mecánicos de) un campo gravitacional (estacionario y homogéneo) describiendo los movimientos desde un SR acelerado (por ejemplo, con aceleración $\vec{a} = -\vec{g}$). Ver figura⁸ 1.4.

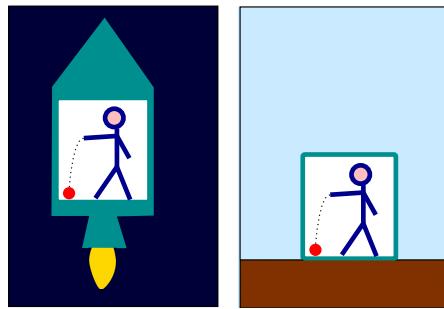


Figura 1.4: Equivalencia entre campo gravitacional y aceleración.

Note que la existencia de esta equivalencia entre efectos gravitacionales y efectos iniciales depende crucialmente del carácter universal de la interacción gravitacional (en otras palabras, de la validez del PED).

1.6. Principio de Equivalencia de Einstein y Sistemas de Referencia Localmente iniciales

Tal como hemos discutido, la experiencia suministra evidencia a favor de que la interacción gravitacional posee las siguientes características:

En una región (espacio-temporal) suficientemente pequeña (donde las inhomogeneidades del campo puedan ser despreciadas), y respecto a un SR *en caída libre*, las trayectorias de *todo* (pequeño) cuerpo, libre de fuerzas no-gravitacionales, son *líneas rectas con velocidad constante*.

Note además que suficientemente lejos de otras distribuciones de masa, donde el campo gravitacional pueda considerarse como nulo, los SR's en caída libre son los usuales SRI's. En este sentido, al menos en lo que respecta a la trayectoria de cuerpos no sometidos a fuerzas no-gravitacionales, los SR's en caída libre juegan el mismo rol físico que los SRI's en ausencia de gravedad. Einstein supuso que estos SR's en caída libre son *en toda situación*, es decir, para todo tipo de fenómeno físico (no sólo mecánico, también por ejemplo, electromagnético), equivalentes a los SRI's en ausencia de gravitación. Por esta razón, y dada la extensión finita de estos SR's en caída libre, éstos son también llamados **Sistemas de Referencia Localmente**

Principio de
Equivalencia
de Einstein

⁷Ver, por ejemplo, el siguiente [video](#) y también [éste](#).

⁸Adaptada a partir de [esta](#) figura original.

Inerciales (SRI's). Este supuesto es también llamado **Principio de Equivalencia Fuerte** (PEF), en contraste al PED, que se refiere sólo a la *mecánica* de los cuerpos (macroscópicos).

La primera referencia conocida al PEF se encuentra en el artículo de 1907 de Einstein [10], cuyo título podría traducirse “Sobre el Principio de Relatividad y las consecuencias que de él se desprenden”. Casi al final de este trabajo (página 454) Einstein escribe

“Wir... wollen ... in folgenden die völlige physikalische Gleichwertigkeit von Gravitationsfeld und entsprechender Beschleunigung des Bezugssystems annehmen”,

que se traduciría como “queremos suponer la completa equivalencia física de un campo gravitacional y la correspondiente aceleración del sistema de referencia”. Acto seguido (en el resto del paper) Einstein estudia las primeras consecuencias de esta suposición.

El PEF obliga a repensar la existencia y el rol de los Sistemas de Referencia Inerciales. En la mecánica de Newton y en RE los SRI's juegan un papel fundamental. Un SRI es entendido como un sistema de ejes rectos ortogonales respecto a los cuales un cuerpo libre de fuerzas externas se mueve en línea recta con velocidad constante. Esta abstracción resulta entonces ser consistente y útil sólo en ausencia de interacción gravitacional. En presencia de gravitación, por otro lado, *no existen SRI's con extensión infinita*. Esto es debido a que, por un lado, de acuerdo al PED, *todas* las trayectorias de cuerpos son afectadas por la gravedad, es decir, no existen cuerpos libres de esta interacción. Además, en presencia de campos gravitacionales (no homogéneos) no existe ningún SR (“rígido” y de extensión infinita) respecto al cual los cuerpos se muevan en forma rectilínea y uniforme. Sin embargo, en presencia de gravitación los SRI's sí tienen realidad física, pero necesariamente tienen una extensión finita en el espaciotiempo. Como los fenómenos físicos no-gravitacionales conocidos son descritos exitosamente en el marco de la Teoría Especial de la Relatividad, Einstein supuso en su teoría de Relatividad General, que incorpora la gravedad, que es *en los SRI's en caída libre donde son válidas las leyes conocidas en la teoría de RE*.

En resumen, en presencia de un campo gravitacional general no existen SRI's *globales* (de extensión infinita). No obstante, de acuerdo al PEF sí es posible encontrar SR's en regiones pequeñas (los SRI's, es decir, SR's en “caída libre”) donde las leyes de RE son válidas. Un campo gravitacional no nulo está entonces caracterizado por el hecho que los SRI's no pueden “unirse” para formar un SRI global. Además, si bien en un SRI no es posible detectar efectos de la gravedad, sí es posible hacerlo comparando cantidades físicas en *distintos* SRI's. Por ejemplo, en presencia de campo gravitacional no nulo los SRI's *aceleran entre sí*, ver figura 1.5.

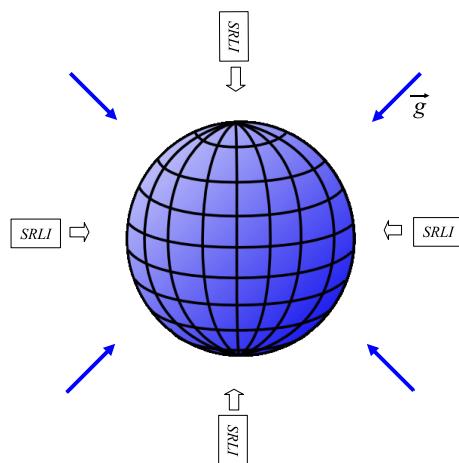


Figura 1.5: Sistemas de referencia localmente inerciales cayendo hacia la Tierra.

Una consecuencia directa del PEF es que *la luz debiese ser deflectada por campos gravitacionales*. En efecto, la hipótesis planteada por el PEF es que en los SRLI's, es decir, SR en caída libre, son válidas las leyes Físicas conocidas en la teoría de RE. En particular las ecuaciones de Maxwell en su forma usual, y sus conocidas implicancias respecto de la propagación de la radiación electromagnética, son válidas en estos SRLI's. Como consecuencia, es en estos SRLI's en los que la luz debe(ría) moverse en línea recta con velocidad constante. Por otro lado, respecto a un SR que acelera respecto a estos SRLI's, por ejemplo, en un SR a una distancia fija de la Tierra, la luz debe(ría) curvarse. Ver figura 1.6.

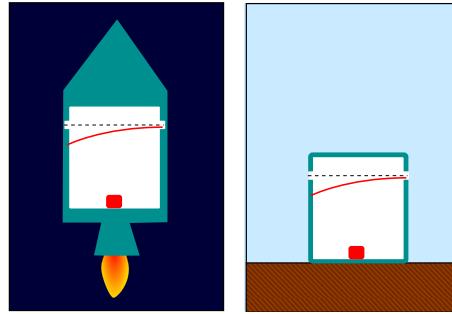


Figura 1.6: Deflexión de la luz. Ambos SR's aceleran respecto a SRLI's.

Tal como en este caso simple, relacionado con la trayectoria de la luz en un campo gravitacional, el PEF permite determinar cómo se comporta cualquier sistema físico en presencia de un campo gravitacional no nulo (en una región suficientemente pequeña), ya que es (o debe ser, de acuerdo a este principio) exactamente lo mismo que ocurre cuando el sistema se describe desde un SR que acelera respecto a uno (localmente) inercial. De hecho, el PEF *unifica* localmente (los efectos de) la gravitación con (los de) la aceleración respecto a SRLI's, puesto que son físicamente indistinguibles. En este sentido en la teoría de gravitación de Einstein la gravedad “es” aceleración respecto a SRLI's: el hecho que en una región del espacio se experimente un campo gravitacional respecto a un SR es simplemente una consecuencia de que ese SR acelera respecto a los SRLI's que cubren esa región. Note que estas consideraciones son puramente “cinemáticas” en el sentido que no permiten por si solas determinar la distribución, orientación y dinámica de los SRLI's (exactamente cómo y hacia donde “caen” cada uno de estos SRLI's), éste es precisamente el rol de las **ecuaciones de campo de la teoría**, que discutiremos en el capítulo 3. No obstante, el PEF determina la forma en que un sistema físico responde a un campo gravitacional dado, tal como discutiremos a continuación, ahora en el contexto relativista.

1.6.1. Desvío de la luz*

$$\Delta t' = \frac{L}{c}, \quad \Delta y' = 0 \quad (1.65)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g(\Delta t')^2 = \frac{gL^2}{2c^2} \quad (1.66)$$

Si $L \approx 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, y usando $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ entonces

$$\Delta y \approx 5.4 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (1.67)$$

$$\theta \approx \frac{d(\Delta y)}{dL} \approx \frac{gL}{c^2} \approx \times 10^{-13} \text{ rad.} \quad (1.68)$$

Ángulo total de desvío

$$\Theta = \int d\theta \approx \int \frac{g}{c^2} dL = \frac{1}{2c^2} \int g r d\varphi \quad (1.69)$$

Si $g \approx GM/r^2$ y $r(\varphi) \approx D/\sin \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$ (línea recta), entonces

$$\Theta \approx \frac{GM}{c^2 D} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2GM}{c^2 D}. \quad (1.70)$$

1.6.2. Redshift gravitacional*

$$y_f(t) = ct, \quad y_d(t) = h + \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.71)$$

$$t_d = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2gh}}{g} \quad (1.72)$$

$$v_d = gt_d = c - \sqrt{c^2 - 2gh} \quad (1.73)$$

$$z = \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{c^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) = \frac{gh}{c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2} \quad (1.74)$$

$$z = \frac{\lambda_d - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_d} - 1 \quad (1.75)$$

$$\nu_e - \nu_d \approx \nu_d \frac{\Delta\phi}{c^2} \quad (1.76)$$

$$E_e - E_d \approx E_d \frac{\Delta\phi}{c^2} \quad (1.77)$$

$$E_e \approx E_d + \left(\frac{E_d}{c^2}\right) \Delta\phi \quad (1.78)$$

1.7. Observadores acelerados y gravedad: Versión relativista

Tal como Einstein [11], seguiremos considerando que un sistema coordenado (SC) está asociado a un SR de modo que un *cambio* de SR queda descrito por una cierta *transformación de coordenadas* (más adelante, sin embargo, veremos que es posible separar estos conceptos: un sistema de coordenadas no necesita siempre estar asociado a un sistema de referencia).

En RE la ecuación que describe el movimiento de una partícula en ausencia de fuerzas externas, respecto a un SRI K , es

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.79)$$

donde $x^\mu(\tau)$ es la trayectoria de la partícula, expresada en coordenadas (pseudo-)cartesianas $x^\mu = (ct, \vec{x})$, y donde τ es el correspondiente tiempo propio.

De acuerdo a lo discutido en las secciones anteriores, el PEF implica que (1.79) será también la ecuación de movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad (pero libre de otras fuerzas) *respecto a SRLI's*.

Deseamos ahora transformar la ecuación (1.79) para expresarla en términos de las coordenadas asociadas a un SR que no sea un SRLI, es decir, un SR que *acelera* respecto a los SRLI's. La transformación de coordenadas correspondiente debe necesariamente ser *no-lineal* (y mezclar coordenadas espaciales y temporales) para poder describir un cambio a un SR con *aceleración* relativa (las transformaciones de Lorentz, que describen cambios entre SR's con

velocidad relativa constante, son lineales). Consideraremos entonces una **transformación general de coordenadas** (TGC) $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu(x)$ que en el caso considerado aquí describe un cambio desde el (SC asociado al) SRLI K hasta (el SC asociado a) un SR \bar{K} que en general no será localmente inercial⁹. Respecto al SC \bar{x}^μ la ecuación de movimiento (1.79) adopta la forma

$$\boxed{\frac{d^2\bar{x}^\mu}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\bar{x}^\nu}{d\tau} \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau} = 0.} \quad (1.80) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{Ec. de mov. en} \\ & \text{coord.} \\ & \text{arbitrarias} \end{matrix}$$

En efecto,

$$\frac{d^2\bar{x}^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau} \right) \quad (1.81)$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (1.82)$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\bar{x}^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.83)$$

$$= \frac{\partial^2\bar{x}^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.84)$$

$$= -\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\bar{x}^\nu}{d\tau} \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau}, \quad (1.85)$$

donde definimos

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu(\bar{x}) := -\frac{\partial^2\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\lambda} = \frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\lambda}.} \quad (1.86)$$

Así, la ecuación del movimiento de una partícula libre en un SC general posee, adicionalmente al usual término proporcional a la segunda derivada de la 4-posición, un término *bilineal* en la 4-velocidad. Este segundo término describe las llamadas “fuerzas iniciales”¹⁰.

Simultáneamente, el elemento de línea (el tiempo propio, para el caso de separaciones tipo tiempo), adopta la forma

$$\boxed{ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu,} \quad (1.87) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{Elemento de} \\ & \text{línea en coord.} \\ & \text{arbitrarias} \end{matrix}$$

con

$$\boxed{\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) := \eta_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu}.} \quad (1.88) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{métrica en} \\ & \text{coord.} \\ & \text{arbitrarias} \end{matrix}$$

Recuerde que tanto en (1.86) como en (1.88) las coordenadas x^μ están asociadas a un SRLI.

Derivando (1.88) y usando (1.86) es posible expresar las componentes de $\bar{\Gamma}$ directamente en términos de las (derivadas de las) componentes de \bar{g} :

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu \equiv \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\rho} (\bar{\partial}_\nu \bar{g}_{\lambda\rho} + \bar{\partial}_\lambda \bar{g}_{\nu\rho} - \bar{\partial}_\rho \bar{g}_{\nu\lambda}),} \quad (1.89)$$

donde $\bar{g}^{\mu\rho}(\bar{x})$ son las componentes de la **inversa** de $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x})$, definida de modo que (en cada evento)

$$\bar{g}^{\mu\rho}(\bar{x}) \bar{g}_{\rho\nu}(\bar{x}) = \delta_\nu^\mu. \quad (1.90)$$

⁹El nuevo SR será también localmente inercial si la transformación es una transformación de Lorentz. Además, una TGC no sólo puede aplicarse para describir transformaciones a SR's con movimiento relativo, sino que también al caso en que se usan *coordenadas curvilíneas en un mismo sistema de referencia*. Por ejemplo, la transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ con $x^\mu = (ct, x, y, z)$ y $\bar{x}^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, donde (r, θ, φ) son las usuales coordenadas esféricas se interpreta como un simple cambio de coordenadas espaciales, *en el mismo SR*. En general, la TC estará ligada a un cambio de SR si mezcla coordenadas temporales y espaciales. Ver por ejemplo (1.62).

¹⁰Este es el término que, en los límites apropiados, reproduce la aceleración de Coriolis en un SR rotante, o el segundo término del lado derecho de (1.63).

Vemos con esto que, en pequeñas regiones del espaciotiempo, pero respecto a SR's generales (asociados a coordenadas \bar{x}), los efectos del campo gravitacional sobre la trayectoria de cuerpos quedan descritos por las cantidades $\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu}$ (con 40 componentes linealmente independientes!) que miden "que tan no-(localmente-)inercial" es el SR. *Simultáneamente*, los coeficientes $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x})$ que determinan el elemento de línea, y por consiguiente el tiempo propio, *dejan de ser constantes y diagonales* (10 componentes linealmente independientes!).

Para estudiar cómo cambian estas cantidades entre SC's arbitrarios (es decir, ninguno de ellos asociados, en general, a SRLI's), efectuamos una segunda TGC $\bar{x}^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(\bar{x})$. Como es de esperar, se encuentra que la ecuación de movimiento de la partícula (libre de fuerzas no-gravitacionales), expresada en coordenadas \tilde{x}^μ es nuevamente de la forma (1.80), es decir,

$$\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (1.91)$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu}(\tilde{x}) := \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu \partial\tilde{x}^\lambda} \quad (1.92)$$

$$= \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial\bar{x}^\sigma} \frac{\partial\bar{x}^\rho}{\partial\tilde{x}^\nu} \frac{\partial\bar{x}^\eta}{\partial\tilde{x}^\lambda} \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\sigma(\bar{x}) + \frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial\bar{x}^\rho} \frac{\partial^2\bar{x}^\rho}{\partial\tilde{x}^\nu \partial\tilde{x}^\lambda}. \quad (1.93) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{ley de transf.} \\ & \text{de conexión} \end{matrix}$$

Vemos que los coeficientes Γ transforman *inhomogéneamente* bajo una TGC. Esta propiedad es precisamente la que posibilita que Γ sea nulo en coordenadas pseudo-cartesianas asociadas a SRLI's, pero distinto de cero en coordenadas asociadas a SR's que aceleran respecto a los primeros. Más precisamente, los coeficientes Γ *transforman como una conexión* bajo una TGC.

Por otro lado, las componentes de la métrica en el SR \tilde{K} , con coordenadas \tilde{x} , están relacionadas con las componentes en \bar{K} por medio de

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu} \frac{\partial\bar{x}^\rho}{\partial\tilde{x}^\nu} \bar{g}_{\lambda\rho}(\bar{x}). \quad (1.94) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{ley de transf.} \\ & \text{de métrica} \end{matrix}$$

Métricas no constantes, conexiones no nulas (así como curvaturas y torsiones, etc.) son objetos matemáticos definidos usualmente en el contexto de la *geometría diferencial* y en particular de la *geometría riemanniana*, o geometría de *espacios curvos*. En el capítulo 2 resumiremos algunos aspectos básicos de este vasto tema.

Capítulo 2

Análisis tensorial y geometría diferencial

2.1. Variedades diferenciables

Definición: Una variedad diferenciable n -dimensional M es un conjunto continuo de puntos que puede ser cubierto completamente por un conjunto contable de vecindades abiertas U_1, U_2, \dots sobre los cuales pueden ser definidos sistemas coordenados (n -dimensionales) continuos y diferenciables, tales que en las intersecciones de dichas vecindades, sus correspondientes sistemas están relacionados unos a otros por transformaciones de coordenadas diferenciables.

Una variedad puede ser concebida básicamente como un espacio de dimensión n , análogo a una superficie n -dimensional. En general, es posible que ella no pueda ser cubierta completamente por un único sistema coordenado. Curvas y superficies en el espacio n -dimensional R_n son ejemplos de variedades.

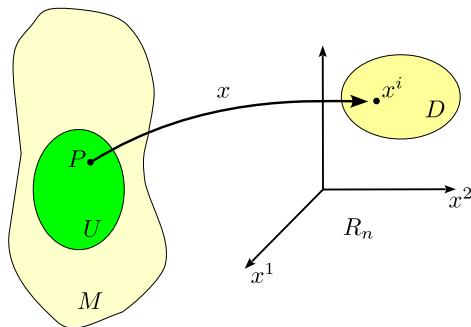


Figura 2.1: Una variedad y un sistema coordenado.

Como vemos en la figura 2.1, sobre cada vecindad U pueden definirse sistemas coordinados (SC's) que asignan únicamente a cada punto $P \in U$ un conjunto ordenado de números $x^i = (x^1, \dots, x^n)$, $i, j, \dots = 1, \dots, n$, llamados *coordenadas de P* . Se exige que este mapeo uno a uno sea continuo, de modo que, cuando P se mueve en U , la correspondiente n -upla

(x^1, \dots, x^n) se mueve continuamente en un dominio D contenido en R_n . También se supone que la dimensión n del mapeo de puntos de M a R_n es siempre la misma, en la vecindad de cada punto de la variedad.

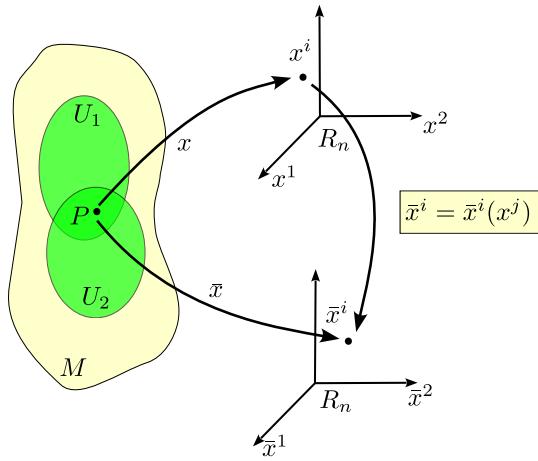


Figura 2.2: Una variedad y dos sistemas coordinados.

Consideremos la figura 2.2. El conjunto M es una variedad diferenciable si para cada punto P en la intersección de dos abiertos, $U_1, U_2 \subseteq M$, los correspondientes sistemas de coordenadas están relacionados por transformaciones diferenciables e invertibles:

$$\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^i), \quad x^i = x^i(\bar{x}^j), \quad (2.1)$$

de modo que, en cada punto de $U_1 \cap U_2$,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \delta_k^i, \quad \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = \delta_l^j, \quad (2.2)$$

y además

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)} \cdot \frac{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = 1. \quad (2.3)$$

2.2. Escalares, vectores y tensores

En una variedad dada, es posible (y útil) definir cantidades que representen magnitudes de interés físico. Estas cantidades pueden en general poseer componentes cuyos valores dependen del sistema de coordenadas usado para describir una cierta región de la variedad. Por esto, es importante estudiar cómo cambian las distintas cantidades definidas sobre una variedad bajo TGC's, clasificándolas de acuerdo a la ley de transformación que satisfacen. A continuación estudiaremos la definición de vectores y tensores bajo TGC's. Note que los tensores no agotan todas las cantidades útiles de definir en una variedad¹

¹Por ejemplo, en algunas aplicaciones es útil considerar objetos llamados **densidades tensoriales**, cuya ley de transformación es distinta a los de los tensores. Además, más adelante definiremos objetos llamados **conexiones**, que tampoco son tensores.

2.2.1. Escalares

El caso más simple de una magnitud definida sobre una variedad es aquel en que se asocia un valor (real) a cada punto $P \in M$, el cual, por definición, no cambia bajo una transformación de coordenadas (TC) arbitraria.

Definición: Una cantidad real ϕ , definido en un punto P de la variedad M , es un **escalar** si bajo toda TGC se verifica que

$$\bar{\phi}(P) = \phi(P). \quad (2.4) \quad \text{Escalar}$$

2.2.2. Vectores contravariantes

Consideremos dos puntos P y Q , infinitesimalmente próximos, de la variedad M . Las respectivas coordenadas de estos puntos en un SC x son

$$x^i(P) = x^i, \quad x^i(Q) = x^i + dx^i. \quad (2.5)$$

En otro SC \bar{x} , relacionado con el original por medio de (2.1), tendremos

$$\bar{x}^i(P) = \bar{x}^i, \quad \bar{x}^i(Q) = \bar{x}^i + d\bar{x}^i. \quad (2.6)$$

Encontremos ahora la relación entre las diferencias coordenadas $d\bar{x}^i$ y dx^i . Usando (2.1) y (2.6b) podemos escribir

$$\bar{x}^i(Q) = \bar{x}^i(x(Q)) = \bar{x}^i(x^j + dx^j) = \bar{x}^i(x^j) + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(x)dx^j, \quad (2.7)$$

de modo que obtenemos

$$d\bar{x}^i_{P \rightarrow Q} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(P) dx^j_{P \rightarrow Q}. \quad (2.8) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{Transf. de} \\ & \text{diferencias} \\ & \text{coordenadas} \end{matrix}$$

Por tanto, bajo un cambio de SC, las diferencias de coordenadas entre puntos P y Q infinitesimalmente próximos cambian su valor, pero están relacionados por medio del Jacobiano de la TGC, evaluado en el punto P . La ley de transformación (2.8) es el modelo para definir lo que llamaremos un **vector contravariante**.

Definición: Se dice que un conjunto de n números $A^i(P) = (A^1, \dots, A^n)$, definidos en cada SC x , son las componentes de un **vector contravariante en un punto P** (en el SC x), si bajo cada TGC (2.1), dichas componentes obedecen la siguiente ley de transformación:

$$\bar{A}^i(P) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(P) A^j(P). \quad (2.9) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{Vector} \\ & \text{contravariante} \end{matrix}$$

De esta forma, la diferencia de coordenadas entre dos puntos infinitesimalmente próximos P y Q define un vector contravariante infinitesimal en P . Equivalentemente, si C es una curva en M (e.d. una subvariedad unidimensional de M), parametrizada (en una cierta vecindad y en algún SC definido en ella) por $x^i = x^i(\lambda)$ donde λ es un parámetro real continuo, entonces los **vectores tangentes** $A^i(P) := (dx^i/d\lambda)(\lambda_P)$ son componentes de un vector contravariante asociado al punto P (con coordenadas $x^i(P) = x^i(\lambda_P)$).

Se debe enfatizar que la ley de transformación anterior define un vector contravariante *asociado a un punto dado* de la variedad. Esta identificación de un vector con un punto de la variedad es necesaria ya que el jacobiano $\partial \bar{x}^i / \partial x^j$ no es constante en general, es decir,

su valor depende del punto donde es evaluado. En general, cada punto de la variedad puede tener asociado infinitos vectores contravariantes. Es fácil comprobar que si $A^i(P)$ es un vector contravariante definido en un punto P dado, entonces $\alpha A^i(P)$ (donde α es un escalar) es un nuevo vector contravariante en el punto P . Análogamente, dado dos vectores contravariantes $A^i(P)$ y $B^i(P)$ definidos en el mismo punto entonces $\alpha A^i(P) + \beta B^i(P)$ es también un vector contravariante en P (para valores arbitrarios de los escalares α y β). En otras palabras, el conjunto de vectores contravariantes definidos en un mismo punto P define un **espacio vectorial n -dimensional**, que llamaremos **espacio tangente en P** : $T_n(P)$.

Es importante destacar que los vectores contravariantes definidos en P son elementos del espacio tangente de P , y no son elementos de M (los elementos de M son los *puntos* de la variedad). Note además que las componentes x^i de un punto P de M no son componentes de un vector contravariante, simplemente porque su ley de transformación bajo TGC's es dada por (2.1), que es diferente de (2.9)²

Espacio Tangente

Coords. no son vectores bajo TGC's

Representación pictórica de vectores contravariantes

Es posible representar pictóricamente un vector contravariante $A^i(P)$ por medio de una “flechita” (infinitesimal) a partir del punto P . Más detalladamente, dado un vector contravariante $A^i(P)$ en P es posible asociar consistentemente (esto quiere decir, independiente del SC usado) un punto Q infinitesimalmente próximo a P . En un SC dado (pero arbitrario) con coordenadas x^i , definimos las componentes del nuevo punto Q por

$$x^i(Q) := x^i(P) + \varepsilon A^i(P), \quad (2.10)$$

donde ε es un *parámetro escalar infinitesimal*.

La ley de transformación de $A^i(P)$, es decir, el hecho éste que sea un vector contravariante, asegura que la definición del punto Q de la variedad por medio de (2.10) sea independiente del SC usado. [En realidad, un vector contravariante define sólo la *dirección* de la correspondiente flechita, la ubicación del punto Q depende también del parámetro infinitesimal ε].

Equivalentemente, es posible definir la representación pictórica de vectores contravariantes asociándoles una curva C (al menos, en alguna vecindad que incluya al punto P) tal que su vector tangente en P sea igual (o proporcional, con una constante de proporcionalidad positiva) al vector $A^i(P)$, es decir, tal que $(dx^i/d\lambda)(P) = A^i(P)$.

2.2.3. Vectores covariantes

Consideremos un campo escalar ϕ definido en una región de la variedad. En un SC x tendremos una dependencia explícita $\phi(x)$, y podemos calcular las derivadas de ϕ respecto a las coordenadas x^i , es decir, el gradiente del campo ϕ , $\partial\phi/\partial x^i$, que define nuevos campos. Análogamente, si usamos un nuevo SC \bar{x} , tendremos otras funciones explícitas $\phi(\bar{x})$ y podemos calcular el correspondiente gradiente $\partial\phi/\partial\bar{x}^i$. En un punto P dado, podemos relacionar estos gradientes usando la transformación coordenada (2.1) y la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}(\bar{x}(P)) = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}(P) \frac{\partial\phi}{\partial x^j}(x(P)).} \quad (2.11)$$

²Ambas leyes de transformación, de las coordenadas y de vectores contravariantes, coinciden sólo si restringimos nuestra atención a transformaciones *lineales* de coordenadas, de la forma $\bar{x}^i = L^i_j x^j$, donde L^i_j son (en general 16 valores independientes) *constantes*. Este hecho justifica porqué en mecánica newtoniana y en la Teoría Especial de la Relatividad sí es posible considerar las coordenadas como vectores, bajo rotaciones y transformaciones de Lorentz, respectivamente.

Comparando (2.11) con (2.9) vemos que las n cantidades definidas por *el gradiente de un campo escalar* (calculado respecto a un SC) *no forman un vector contravariante*. En otras palabras, las derivadas de un campo escalar definen un nuevo tipo de objeto, que llamaremos **vector covariante**.

Definición: Se dice que un conjunto de n cantidades $A_i(P) = (A_1, \dots, A_n)$ (definidas en cada SC) son las componentes (en el SC x^i) de un *vector covariante en un punto P*, si bajo cada TGC (2.1) dichas componentes obedecen la siguiente ley de transformación:

$$\bar{A}_i(P) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}(P) A_j(P). \quad (2.12)$$

Vector
Contravariante

Análogamente al caso de vectores contravariantes, el conjunto de vectores covariantes definidos en un punto dado P de la variedad forma un espacio vectorial n -dimensional: el **espacio cotangente en P**: $T_n^*(P)$. Es importante notar que los espacios tangente y cotangente son espacios vectoriales distintos definidos en cada punto de la variedad. Nuevamente, los vectores covariantes son elementos del espacio cotangente de cada punto y no de la variedad M . Por otro lado, los vectores covariantes no pueden ser representados por “flechitas”, ya que no están (directamente, al menos) relacionados con direcciones (desplazamientos) en la variedad.

2.2.4. Tensores

Consideremos el producto de las componentes $A^i(P)$ de un vector contravariante y las componentes $B_j(P)$ de un vector covariante. Veamos cómo transforma el siguiente producto bajo una TGC:

$$\bar{A}^i(P) \bar{B}_j(P) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}(P) A^l(P) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}(P) B_k(P) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}(P) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}(P) A^l(P) B_k(P). \quad (2.13)$$

Las n^2 cantidades $(A^i B_j)(P)$ transforman bajo una TCG en forma lineal y homogénea según la relación (2.13). Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Un conjunto de n^2 cantidades $T^i_j(P)$ son las componentes de un tensor de tipo $(1, 1)$ en un punto P , si bajo una TGC dichas componentes transforman según la ley:

$$T^i_j(P) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}(P) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(P) T^k_l(P). \quad (2.14)$$

Note que en el ejemplo anterior, el tensor $T^i_j := A^i B_j$ fue construido como un producto de las componentes de dos vectores (uno covariante y otro contravariante, en este caso). Sin embargo, *no todo tensor de tipo $(1, 1)$ puede ser “factorizado” en un producto de dos vectores*.

Podemos generalizar la definición anterior a objetos con más índices:

Definición: Un conjunto de n^{r+s} cantidades $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(P)$ son las componentes de un tensor de rango $r + s$ y tipo (r, s) en un punto P si, bajo cada TGC, dichas componentes transforman según la ley:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(P) = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(P) \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(P) \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}(P) \dots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}}(P) T^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}(P). \quad (2.15)$$

Tensor general

Note que $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(P)$ es un tensor de carácter mixto, contravariante de rango r y covariante de rango s , definido en el punto P .

Algunas consecuencias directas de la definición de tensores bajo TGC's son:

- Los dos tipos de vectores definidos previamente son casos especiales de tensores. Un vector contravariante es un tensor del tipo $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$ y un vector covariante es un tensor del tipo $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})$. Un escalar puede ser considerado como un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$.
- La relación (2.2b) puede ser escrita en la forma:

$$\delta_l^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(P) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}(P) \delta_k^i, \quad (2.16)$$

lo cual muestra que (los n^2 números definidos por) la delta de Kronecker define un tensor del tipo $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})$. Además, la delta de Kronecker es una de las muy pocas entidades tensoriales *numéricamente invariantes* (es decir, que asume los mismos valores en todo SC) que es posible definir en una variedad cualquiera.

- Una de las características principales de los tensores es que si todas las componentes de un tensor son nulas en un SC entonces ellas se anulan *en todo SC*. Esto se verifica directamente a partir de (2.15) y en particular del hecho que la transformación es *homogénea*³.

2.3. Algebra tensorial sobre variedades diferenciables

Dadas las componentes de uno o más tensores, es posible definir una infinidad de operaciones algebraicas usando sus componentes. Sin embargo, sólo algunas de estas operaciones definirán nuevos tensores. A continuación resumiremos las operaciones algebraicas básicas (más usadas) que mapean tensores en tensores (no necesariamente del mismo tipo).

2.3.1. Multiplicación

La multiplicación de todas las componentes de un tipo $(\begin{smallmatrix} r_1 \\ s_1 \end{smallmatrix})$ con las de otro de tipo $(\begin{smallmatrix} r_2 \\ s_2 \end{smallmatrix})$, definidos en un mismo punto P , conduce a un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} r_1+r_2 \\ s_1+s_2 \end{smallmatrix})$ en P . Este proceso es llamado **producto directo**.

Para ilustrar esto consideramos, por ejemplo, un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$ y un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix})$, pues el razonamiento es general. Sus leyes de transformación son, respectivamente⁴:

$$\begin{aligned} \bar{T}^{jl}_m &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} T^{ik}_p, \\ \bar{S}_{qr} &= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r} S_{tu}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

El producto de las componentes de estos dos tensores se transforma de acuerdo a:

$$\bar{T}^{jl}_m \bar{S}_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r} T^{ik}_p S_{tu}, \quad (2.18)$$

que es la ley de transformación de las componentes de un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix})$, $V^{ij}_{klm} := T^{ij}_k S_{lm}$. Note que esta conclusión es válida sólo si ambos tensores T y S están *definidos en el mismo punto*.

Como caso particular vemos que la multiplicación de (todas) las componentes de un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix})$ por un escalar (es decir, un tensor de tipo $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$) conduce a un tensor del mismo tipo.

³Los tensores no son los únicos objetos útiles que cumplen esta propiedad, las **densidades tensoriales** también lo hacen.

⁴Desde ahora, para no recargar la notación, omitiremos el punto P donde cada tensor es definido.

2.3.2. Adición

Sea $S^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s}$ un tensor del tipo $(r)_s$ definido en el punto P . Su ley de transformación, de acuerdo con (2.15), es:

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}} S^{l_1 \dots l_r}_{m_1 \dots m_s}, \quad (2.19)$$

y sea el tensor $T^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s}$ otro tensor de tipo $(r)_s$, entonces la suma de sus componentes $T^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s} + S^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s}$ definen un nuevo tensor de tipo $(r)_s$ ya que

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s} + \bar{S}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}} (T^{l_1 \dots l_r}_{m_1 \dots m_s} + S^{l_1 \dots l_r}_{m_1 \dots m_s}). \quad (2.20)$$

La operación de multiplicación puede ser combinada con la de adición de tensores, siempre que sus respectivos tipos sean apropiados. Estas operaciones satisfacen las leyes comutativa, asociativa y distributiva.

Combinando la adición con la multiplicación por escalar vemos que el conjunto de todos los tensores de un tipo $(r)_s$ dado, en el punto P de M , constituye un espacio vectorial de dimensión n^{r+s} .

Es importante notar que una combinación lineal de tensores de *distinto tipo* en un mismo punto, o de tensores del mismo tipo, pero *en distintos puntos*, no suministra un nuevo tensor.

2.3.3. Contracción

Dado un tensor de tipo $(r)_s$ es posible construir un tensor de tipo $(r-1)_{s-1}$ seleccionando un superíndice y un subíndice y sumando sobre componentes iguales, de acuerdo con la convención de suma de Einstein. En efecto, de (2.15) obtenemos que si sumamos sobre el p -ésimo índice contravariante y el q -ésimo covariante, tendremos que

$$\begin{aligned} \bar{T}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots i \dots k_s} &= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}{\partial x^{l_{p-1}}} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^{l_p}} \frac{\partial \bar{x}^{i_{p+1}}}{\partial x^{l_{p+1}}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}} \\ &\times \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^{m_{q-1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q-1}}} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{m_{q+1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q+1}}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}} T^{l_1 \dots l \dots l_r}_{m_1 \dots m \dots m_s} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \right) \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}{\partial x^{l_{p-1}}} \frac{\partial \bar{x}^{i_{p+1}}}{\partial x^{l_{p+1}}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}} \\ &\times \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^{m_{q-1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q-1}}} \frac{\partial x^{m_{q+1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q+1}}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}} T^{l_1 \dots l \dots l_r}_{m_1 \dots m \dots m_s} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} &= \delta_l^m \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}{\partial x^{l_{p-1}}} \frac{\partial \bar{x}^{i_{p+1}}}{\partial x^{l_{p+1}}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}} \\ &\times \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^{m_{q-1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q-1}}} \frac{\partial x^{m_{q+1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q+1}}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}} T^{l_1 \dots l \dots l_r}_{m_1 \dots m \dots m_s} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}{\partial x^{l_{p-1}}} \frac{\partial \bar{x}^{i_{p+1}}}{\partial x^{l_{p+1}}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}}}_{(r-1) \text{ términos}} \\ &\times \underbrace{\frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^{m_{q-1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q-1}}} \frac{\partial x^{m_{q+1}}}{\partial \bar{x}^{k_{q+1}}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}}}_{(s-1) \text{ términos}} T^{l_1 \dots l \dots l_r}_{m_1 \dots l \dots m_s}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por tanto, $T^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots i \dots k_s}$ satisface ley de transformación de un tensor de tipo $(r-1)_{s-1}$. Este proceso es conocido como **contracción**.

Claramente, el proceso de contracción de un tensor de tipo (1) da origen a un escalar. En particular, para el caso de la delta de Kronecker tenemos:

$$\delta_j^j = \delta_1^1 + \dots \delta_n^n = n. \quad (2.25)$$

2.3.4. Permutación y (Anti-)Simetrización

Es directo verificar que la *permutación de dos índices del mismo tipo (covariante o contravariante)* de un tensor define un nuevo tensor. Por ejemplo, si A_{ij} son las componentes de un tensor de tipo (0) entonces las nuevas componentes B_{ij} determinadas por la permutación de las componentes de A_{ij} , es decir, $B_{ij} := A_{ji}$ también son las componentes de un tensor del mismo tipo. Lo mismo ocurre si se permutan dos índices contravariantes. Sin embargo, *esto no ocurre si se permutan índices de distinto tipo*⁵.

Un tensor es llamado *simétrico* con respecto a un par de índices (del mismo tipo, ya sean covariantes o contravariantes) si una permutación de ellos no afecta el valor de las componentes de dicho tensor. Si, por otro lado, este proceso afecta a cada componente multiplicándola por -1 , entonces el tensor es llamado *antisimétrico* en dichos índices. Finalmente, se dice que un tensor es *totalmente (anti-)simétrico* si lo es con todo a cualquier de índices. En general, cuando hablemos de tensores (anti-)simétricos nos referimos a tensores totalmente (anti-)simétricos, salvo que se indique lo contrario.

Por ejemplo, si A_{ij} y B_{ij} son las componentes de tensores de tipo (0) , entonces A_{ij} es un tensor simétrico si:

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad (2.26)$$

y B_{ij} será un tensor antisimétrico si

$$B_{ij} = -B_{ji}. \quad (2.27)$$

Como consecuencia inmediata de la forma de la ley de transformación de tensores, estas ecuaciones son válidas en cualquier sistema coordenado.

Teorema: *Todas las propiedades de simetría y de antisimetría de los tensores (respecto a índices del mismo tipo) son independientes de la elección del sistema coordenado.*

Dado un tensor de tipo (r_s) con $r > 1$ ó $s > 1$, podemos construir a partir de dicho tensor, un tensor simétrico y un tensor antisimétrico respecto a cualquier par de índices del mismo tipo. Por ejemplo, a partir del tensor A_{ij} podemos definir los nuevos tensores

$$\begin{aligned} A_{(ij)} &:= \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}), \\ A_{[ij]} &:= \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

que son simétricos y antisimétricos, respectivamente. El proceso correspondiente a definir $A_{(ij)}$ a partir de A_{ij} es llamado **simetrización**. Análogamente $A_{[ij]}$ resulta del proceso de **antisimetrización**.

Vemos también que todo tensor de tipo (r_s) con $r > 1$ ó $s > 1$, se puede expresar como suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico respecto a cualquier par de índices del mismo tipo. En el caso anterior tenemos:

$$A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]}. \quad (2.29)$$

⁵Por ejemplo, si a partir de $A^i{}_j$ se define $B^i{}_j := A^j{}_i$ o, más explícitamente, $B^1{}_2 := A^2{}_1$, $B^2{}_3 := A^3{}_2$, etc.

Es posible extender el proceso de (anti-)simetrización a más de dos índices, por medio de

$$T_{[ij]} := \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \quad (2.30)$$

$$T_{[ijk]} := \frac{1}{3}(T_{i[jk]} + T_{j[ki]} + T_{k[ij]}), \quad (2.31)$$

$$T_{[ijkl]} := \frac{1}{4}(T_{i[jkl]} - T_{j[kli]} + T_{k[lij]} - T_{l[ijk]}), \quad (2.32)$$

etcétera, y

$$T_{(ij)} := \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad (2.33)$$

$$T_{(ijk)} := \frac{1}{3}(T_{i(jk)} + T_{j(ki)} + T_{k(ij)}), \quad (2.34)$$

$$T_{(ijkl)} := \frac{1}{4}(T_{i(jkl)} + T_{j(kli)} + T_{k(lij)} + T_{l(ijk)}), \quad (2.35)$$

etcétera.

2.3.5. Invariancia de las ecuaciones tensoriales

Hemos visto que los tensores pueden ser sumados, restados o, más generalmente, linealmente combinados con coeficientes escalares. Podemos formar productos entre tensores y/o contraerlos, definiendo nuevos tensores, siempre que ellos estén definidos en el mismo punto de M . Todas estas operaciones suministran nuevos tensores.

Un importante tensor de cada tipo es el **tensor nulo** de ese tipo. Dicho tensor es numéricamente invariante debido a que la ley de transformación de tensores es *homogénea*. Esto tiene como consecuencia que una ecuación tensorial como $S^{ij\dots}_{\dots kl\dots} = T^{ij\dots}_{\dots kl\dots}$ sea válida *con la misma forma* en todo sistema coordenado, ya que es equivalente a afirmar que $S^{ij\dots}_{\dots kl\dots} - T^{ij\dots}_{\dots kl\dots}$ es el tensor nulo. Este hecho garantiza además el teorema de la invariancia de las propiedades de simetría y antisimetría de los tensores. Si S y T son de distinto tipo, o bien, si están definidos en puntos distintos, la ecuación carece de sentido invariante (independiente de las coordenadas usadas).

2.4. Densidades tensoriales *

Consideremos un campo vectorial contravariante A^i y la integral:

$$\int_{\Omega} A^i d^n x, \quad (2.36)$$

donde $d^n x := dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ y la integral se toma sobre una región Ω dada de M . Observamos que el resultado de esta integral *no constituye un vector bajo TGC's* (ya que básicamente se están sumando vectores definidos en distintos puntos de la variedad, que bajo una TGC transforman de forma distinta en cada punto). Del mismo modo, consideraremos la integral de un campo escalar A :

$$I = \int_{\Omega} A d^n x. \quad (2.37)$$

Veamos cómo transforma bajo I bajo una TGC. El elemento de volumen transforma de acuerdo al teorema de cambio de variables para integrales de Riemann múltiples:

$$d^n x = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \right| d^n \bar{x}, \quad (2.38)$$

donde $\left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \right|$ es el módulo del jacobiano de la transformación. Luego:

$$I = \int_{\Omega} A d^n x = \int_{\Omega} \bar{A} \left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \right| d^n \bar{x} \neq \int_{\Omega} \bar{A} d^n \bar{x} = \bar{I}. \quad (2.39)$$

De este modo I no es *invariante bajo una TGC* (de hecho, I y \bar{I} ni siquiera son proporcionales, en general). Pero nos interesa poder definir integrales de la forma (2.37) cuyo resultado sí sea un escalar, es decir, independiente del SC en el que se calcule. Esto implica entonces que, para que I sea un escalar, A no puede ser un campo escalar. Por otra parte, sabemos que si sumamos sólo cantidades escalares el resultado es un escalar. En nuestro caso tenemos una integral en vez de una suma. Luego, si $A d^n x$ es un escalar entonces I será un escalar. Para esto la ley de transformación de A no debe ser $A = \bar{A}$, sino⁶

$$\mathcal{A} = \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right| \bar{A}, \quad (2.40)$$

de modo que

$$I = \int_{\Omega} \mathcal{A} d^n x = \int_{\Omega} \bar{A} \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right| \left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \right| d^n \bar{x} = \int_{\Omega} \bar{A} d^n \bar{x} = \bar{I}. \quad (2.41)$$

Ahora I es un escalar, pero \mathcal{A} no lo es. Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Una cantidad ρ es llamada *densidad escalar de peso p* si bajo una TGC ésta obedece la ley:

$$\bar{\rho} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|^p \rho. \quad (2.42)$$

De lo anterior se concluye que $d^n x$ es una densidad escalar de peso -1 , y que la integral de una densidad escalar de peso $+1$ es un escalar.

Definición: Un conjunto de n^{r+s} cantidades $\mathcal{A}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s}(P)$ son las componentes de una densidad tensorial de peso p y tipo $(r)_s$ en un punto P , si bajo una TGC dichas componentes transforman según la ley:

$$\bar{\mathcal{A}}^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_s}(P) = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right|^p (P) \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}}(P) \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{l_r}}(P) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{k_1}}(P) \dots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{k_s}}(P) \mathcal{A}^{l_1 \dots l_r}_{m_1 \dots m_s}(P).$$

(2.43)

No se debe inferir que la integral de las componentes de una densidad tensorial es un tensor, pues no lo es (salvo el caso de una densidad escalar).

Consecuencias inmediatas de la definición de densidades tensoriales son:

- Si todas las componentes de una densidad son nulas en un SC, entonces son nulas en cualquier SC. Como consecuencia, las ecuaciones entre densidades son independientes del SC.
- La suma o diferencia de densidades del mismo tipo y referidas al mismo punto es otra densidad del mismo tipo.
- El producto de una densidad tensorial de tipo $(r)_s$ y peso p por una densidad tensorial de tipo $(t)_u$ y peso q es una densidad tensorial de tipo $(r+t)_{s+u}$ y peso $p+q$.
- La contracción de índices puede realizarse para densidades tensoriales de tipo $(r)_s$ con $r, s \geq 1$, del mismo modo que para tensores, resultando una densidad de tipo $(r-1)_{s-1}$ y del mismo peso.

⁶Desde ahora, denotaremos a las densidades (tensoriales) usando letras cursivas.

2.4.1. Densidades tensoriales de Levi-Civita*

Considere ahora un tensor $T_{i_1 \dots i_n}$ de tipo $(0)_n$ totalmente antisimétrico. Si denotamos el valor numérico de $T_{12\dots n}$ por \mathcal{T} , entonces cualquier otra componente $T_{i_1 \dots i_n}$ tendrá valor $\pm \mathcal{T}$ de acuerdo a si la permutación $i_1 \dots i_n$ es par o impar, o bien será nula si se repite un índice. Escribamos la ley de transformación para la componente $T_{12\dots n}$:

$$\bar{T}_{12\dots n} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial \bar{x}^2} \dots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial \bar{x}^n} T_{k_1 \dots k_n}. \quad (2.44)$$

Escribiendo explícitamente la suma y usando las propiedades antisimétricas de T se obtiene:

$$\bar{T}_{12\dots n} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right| T_{12\dots n}, \quad (2.45)$$

es decir,

$$\bar{\mathcal{T}} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right| \mathcal{T}. \quad (2.46)$$

Esto significa que el valor de una componente (no nula) de un tensor antisimétrico de tipo $(0)_n$ es una densidad escalar de tipo +1. Por otro lado, ya que todos los valores de $T_{i_1 \dots i_n}$ son proporcionales a $T_{12\dots n} = \mathcal{T}$, podemos escribir que

$$T_{i_1 \dots i_n} = \mathcal{T} \hat{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}, \quad (2.47)$$

donde $\hat{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ denota un objeto que es definido tal que es totalmente antisimétrico y que en todo SC $\hat{\epsilon}_{12\dots n} := 1$. Ya que $T_{i_1 \dots i_n}$ es un tensor (es decir, una densidad tensorial de peso 0) y \mathcal{T} es una densidad tensorial de peso +1 concluimos de (2.47) que $\hat{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ es una densidad tensorial de peso -1, llamada **densidad tensorial de Levi-Civita**.

Análogamente, podemos descomponer cualquier tensor contravariante $A^{i_1 \dots i_n}$ en

$$A^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{A} \epsilon^{i_1 \dots i_n}, \quad (2.48)$$

donde $\mathcal{A} := A^{1\dots n}$ es una densidad escalar de peso -1 y $\epsilon^{i_1 \dots i_n}$ es la densidad de Levi-Civita de peso +1, definida como totalmente antisimétrica y tal que en todo SC $\epsilon^{1\dots n} := 1$.

Las densidades tensoriales de Levi-Civita son cantidades numéricamente invariantes que pueden ser definidas en cualquier variedad.

En el caso que $n = 4$, ellas satisfacen las siguientes identidades:

$$\epsilon^{ijkl} \hat{\epsilon}_{mnpq} = 4! \delta_{[m}^i \delta_n^j \delta_p^k \delta_{q]}^l, \quad (2.49)$$

$$\epsilon^{ijkl} \hat{\epsilon}_{mnpl} = 3! \delta_{[m}^i \delta_n^j \delta_p^k \delta_{l]}^l, \quad (2.50)$$

$$\epsilon^{ijkl} \hat{\epsilon}_{mnkl} = 2! (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i), \quad (2.51)$$

$$\epsilon^{ijkl} \hat{\epsilon}_{mjkl} = 3! \delta_m^i, \quad (2.52)$$

$$\epsilon^{ijkl} \hat{\epsilon}_{ijkl} = 4!. \quad (2.53)$$

2.5. Tensores antisimétricos y densidades tensoriales duales*

Consideremos una variedad de 4 dimensiones. Si disponemos de un tensor antisimétrico de tipo $(0)_2$, A_{ij} , que tendrá en general 6 componentes linealmente independientes, podemos definir una densidad tensorial antisimétrica de peso +1, por

$$\mathcal{A}^{ij} := \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} A_{kl}. \quad (2.54)$$

Puede verificarse que \mathcal{A}_{ij} es equivalente a A_{ij} en el sentido que contiene la misma información. En efecto, usando la identidad (2.51) podemos encontrar que

$$A_{ij} := \frac{1}{2!} \epsilon_{ijkl} \mathcal{A}^{kl}. \quad (2.55)$$

Por tanto, es posible considerar en forma alternativa, pero equivalentemente, al tensor antisimétrico A_{ij} y a la densidad antisimétrica de peso +1 \mathcal{A}^{ij} , que es usualmente llamado *dual de A_{ij}* .

Análogamente (para $n = 4$) existe una relación 1 a 1 entre tensores totalmente antisimétricos de tipo $(0)_3$ A_{ijk} y densidades ("duales") vectoriales contravariante de peso +1 \mathcal{A}^i definidas por $\mathcal{A}^i := \frac{1}{3!} \epsilon^{ijkl} A_{jkl}$, ya que $A_{jkl} := \epsilon_{ijkl} \mathcal{A}^i$, como puede verificarse usando (2.52).

En general, puede establecerse el siguiente resultado:

Teorema: A todo tensor antisimétrico $T_{i_1 \dots i_p}$ de tipo $(0)_p$ ($p \leq n$) se le puede hacer corresponder una densidad tensorial $\mathcal{T}^{j_1 \dots j_{n-p}}$ de tipo $(n-p)_0$ y peso +1, cuyas componentes contienen las componentes independientes del tensor. Las componentes de $\mathcal{T}^{j_1 \dots j_{n-p}}$ están dadas por:

$$\mathcal{T}^{j_1 \dots j_{n-p}} := \frac{1}{p!} \epsilon^{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p} T_{i_1 \dots i_p}, \quad (2.56)$$

y recibe el nombre de **densidad adjunta o dual** del tensor original. Además se satisface que

$$T_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_{n-p} i_1 \dots i_p} \mathcal{T}^{j_1 \dots j_{n-p}}. \quad (2.57)$$

Finalmente, una equivalencia similar es válida entre tensores antisimétricos de tipo $(p)_0$ y densidades tensoriales antisimétricas de tipo $(0)_{n-p}$ y peso -1.

2.6. Métrica

La métrica es un objeto geométrico que permite introducir el concepto de **distancia** en una variedad.

Definición: Se denomina **espacio métrico** al espacio que cuenta con una ley para definir distancias.

Sean x^i y $x^i + dx^i$ las coordenadas de dos puntos infinitesimalmente cercanos P y Q en una variedad, respecto a un SC x . La expresión para la distancia $d\ell$ entre estos puntos puede (en principio) ser muy general, pero se exige que sea un escalar, es decir, que su valor sea independiente del sistema coordenado. El caso más estudiado es el que supone que la distancia entre dichos puntos está dada por una expresión de la forma:

$$d\ell^2 := g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (2.58) \quad \text{métrica y elem. de línea}$$

donde los coeficientes g_{ij} son funciones de las coordenadas x^i . Además, por definición, g_{ij} son las componentes de un tensor covariante de segundo orden, simétrico⁷ y recibe el nombre de **tensor métrico**. Esto asegura que $d\ell$ sea efectivamente un escalar y se denomina **elemento de línea**.

Consideraremos espacios métricos "no degenerados", en los cuales la distancia elemental se define por una expresión de la forma (2.58) con $g := \det(g_{ij}) \neq 0$.

⁷... por lo que, en general, tiene $n(n+1)/2$ componentes linealmente independientes.

2.6.1. Longitud, producto interior, ángulos

Con el tensor métrico es posible definir la longitud de una curva, el módulo de un vector, el producto escalar entre vectores, y en ángulo entre vectores.

Definición: Sea \mathcal{C} una curva en la variedad, parametrizada por $x^i = x^i(\lambda)$ en un SC x , con $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_f]$. Definimos la **longitud de la curva** como el escalar

$$L := \int_{P_i}^{P_f} d\ell = \int_{P_i}^{P_f} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda, \quad (2.59)$$

Longitud de curva

donde P_i y P_f son los puntos de M asociados a los extremos de la curva: $x^i(P_i) = x^i(\lambda_i)$, $x^i(P_f) = x^i(\lambda_f)$.

Definición: Sean A^i y B^i dos vectores contravariantes definidos en un mismo punto P de la variedad. Se define el **producto escalar** entre dichos vectores como:

$$A \cdot B := g_{ij} A^i B^j. \quad (2.60)$$

Prod. escalar entre vectores

Es importante recordar que en la ecuación (2.61) g_{ij} , A^i y B^j deben estar evaluados en el mismo punto P .

Definición: Sea A^i un vector contravariante definido en un punto P de la variedad. Llamamos **módulo (o norma)** de A^i al escalar $|A|$ definido por

$$|A|^2 := A \cdot A = g_{ij} A^i A^j. \quad (2.61)$$

Módulo de vect. contrav.

Definición: Se define el **ángulo** $\sphericalangle(A, B)$ entre los vectores A^i y B^i (de norma no nula) mediante la relación:

$$\cos \sphericalangle(A, B) := \frac{A \cdot B}{|A| |B|}. \quad (2.62)$$

Ángulo entre vectores

2.6.2. Métrica Inversa

En el caso de espacios métricos no degenerados, en los que $g := \det(g_{ij}) \neq 0$ en cada punto, está asegurada la existencia de un tensor contravariante $g^{ij}(x)$ tal que:

$$g^{ij}(x) g_{jk}(x) = \delta_k^i. \quad (2.63)$$

Métrica inversa

Este tensor recibe el nombre de **métrica inversa**⁸ y es único, en cada SC, dadas las componentes de la métrica $g_{ij}(x)$.

Consideremos ahora un vector contravariante A^i . Es posible definir un vector covariante asociado, A'_i , como:

$$A'_i := g_{ij} A^j. \quad (2.64)$$

"bajando" índices

Análogamente, con g^{ij} podemos definir un vector contravariante asociado, A''^i , como:

$$A''^i := g^{ij} A'_j. \quad (2.65)$$

"subiendo" índices

⁸ $g^{ij} = (1/(n-1)!g) \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_n j_n}$, $g := (1/n!) \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_n j_n}$.

De este modo vemos que, usando la métrica y su inversa, podemos mapear vectores contravariantes (pertenecientes al espacio tangente) en vectores covariantes (pertenecientes al espacio cotangente) y viceversa.

Además, si usamos (2.64) en (2.65) obtenemos:

$$A''^i = g^{ij} A'_j = g^{ij} g_{jk} A^k = \delta_k^i A^k = A^i, \quad (2.66)$$

que prueba que hay una relación uno a uno entre vectores del espacio tangente y cotangente.

En espacios métricos es posible (y se acostumbra) no distinguir mayormente (en cuanto a su interpretación) los vectores covariantes de sus “duales” contravariantes, y viceversa. Por el contrario, se acostumbra decir que los vectores son “objetos geométricos”, cada uno de los cuales puede expresarse tanto por sus componentes covariantes como contravariantes. A esto se suma el hecho que el espacio euclídeo E_n es un espacio métrico en el cual $g_{ij} \stackrel{*}{=} \delta_{ij} = \text{diag}(+1, +1, \dots)$ en coordenadas cartesianas, de modo que las componentes covariantes y contravariantes de cualquier vector coinciden numéricamente (pero sólo en coordenadas cartesianas!). De aquí que en tales espacios no sea necesaria la distinción entre estos dos tipos de vectores *cuando se trabaja en coordenadas cartesianas*.

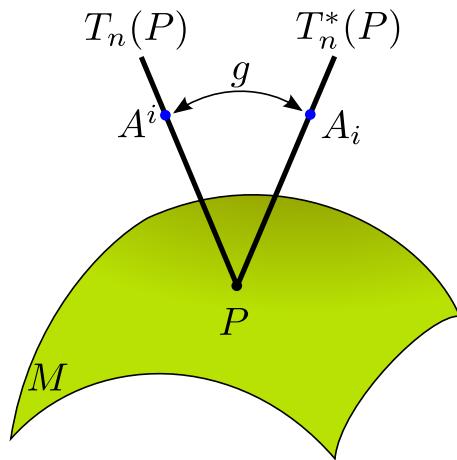


Figura 2.3: El tensor métrico define una relación uno a uno (isomorfismo) entre los espacios tangente y cotangente en cada punto de la variedad.

El uso del tensor métrico para “subir” o “bajar” índices también es útil para tensores de mayor rango. Por ejemplo, a partir del tensor de tipo $(2, 2)$, T^{kl}_{ij} , podemos definir el tensor de tipo (3) :

$$T^{kli}_j := g^{im} T^{kl}_{mj}, \quad (2.67)$$

etc.

2.6.3. Métrica inducida

Considere una variedad M de dimensión n y una **subvariedad** S de dimensión $d < n$. Entonces la métrica de M induce la métrica sobre S , ya que la distancia entre dos puntos arbitrarios de S puede calcularse aplicando (o restringiendo) la distancia entre puntos infinitesimalmente próximos de M al caso particular de dos puntos infinitesimalmente próximos de S .

Si se usan coordenadas x^i en (una vecindad de) M , y la subvariedad S es definida por medio de una **parametrización** de la forma

$$x^i = x^i(y^a), \quad a = 1, \dots, d, \quad (2.68)$$

donde y^a son *coordenadas sobre la subvariedad S* , entonces la diferencia de coordenadas de M correspondiente a dos puntos infinitesimalmente próximos de S puede expresarse como

$$dx^i|_S = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}(x(y)) dy^a. \quad (2.69)$$

Con esto, podemos expresar el elemento de línea sobre S como

$$dl^2|_S = g_{ij}(x)|_S dx^i|_S dx^j|_S \quad (2.70)$$

$$= g_{ij}(x(y)) \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^b} dy^b \right) \quad (2.71)$$

$$= g_{ab}(y) dy^a dy^b. \quad (2.72)$$

De esta forma, las componentes del tensor métrico inducido sobre S , en coordenadas y^a está dadas por

$$g_{ab}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b}. \quad (2.73)$$
métrica inducida

Note que esta relación *no es simplemente la usual ley de transformación de las componentes del tensor métrico bajo una TGC*, ya que g_{ij} y g_{ab} tienen dimensiones distintas (n y $d < n$ respectivamente) y son componentes de representan las *métricas de dos variedades distintas* (pero relacionadas).

2.6.4. Curvas geodésicas

Consideremos dos puntos P y Q en una variedad provista de métrica. Se define la **geodésica** como la curva de longitud mínima (extrema) entre P y Q .

Si \mathcal{C} es una curva representada paramétricamente por $x^i = x^i(\lambda)$, entonces \mathcal{C} es una geodésica entre P y Q si y sólo si⁹

$$L = \int_P^Q d\ell = \int_P^Q \sqrt{g_{ij}(x(\lambda)) dx^i dx^j} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{g_{ij}(x(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \quad (2.74)$$

es mínima. Esto implica que su variación respecto a pequeñas desviaciones de la trayectoria geodésica es nula:

$$\delta L = 0. \quad (2.75)$$

La condición (2.75) implica que las geodésicas satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)} \right) = 0, \quad (2.76)$$

donde

$$\tilde{L}(x^i, \frac{dx^i}{d\lambda}) = \sqrt{g_{ij}(x(\lambda)) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}. \quad (2.77)$$

⁹Suponemos, por simplicidad, pero sin perder generalidad, que el parámetro λ crece desde P a Q , de modo que en la integral $d\lambda > 0$.

De aquí, tenemos que

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m)^{-1/2}(\partial_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2\tilde{L}}(\partial_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}(g_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m)^{-1/2}(2g_{kj}\dot{x}^j) = \frac{1}{\tilde{L}}g_{kj}\dot{x}^j, \quad (2.79)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^k} \right) = -\frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}^2}g_{kj}\dot{x}^j + \frac{1}{\tilde{L}}(\partial_l g_{kj})\dot{x}^j\dot{x}^l + \frac{1}{\tilde{L}}g_{kj}\ddot{x}^j. \quad (2.80)$$

De esta forma, encontramos que

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} = \frac{1}{2\tilde{L}}(\partial_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}^2}g_{kj}\dot{x}^j - \frac{1}{\tilde{L}}(\partial_l g_{kj})\dot{x}^j\dot{x}^l - \frac{1}{\tilde{L}}g_{kj}\ddot{x}^j. \quad (2.81)$$

Multiplicando por $\tilde{L}g^{ki}$ y reordenando términos obtenemos

$$\frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}}\dot{x}^i = \ddot{x}^i + g^{ik}(\partial_l g_{kj})\dot{x}^j\dot{x}^l - \frac{1}{2}(\partial_k g_{jl})\dot{x}^j\dot{x}^l \quad (2.82)$$

$$= \ddot{x}^i + \frac{1}{2}g^{ik}(\partial_l g_{kj} + \partial_j g_{kl} - \partial_k g_{jl})\dot{x}^j\dot{x}^l \quad (2.83)$$

$$= \ddot{x}^i + \{_{jl}^i\}\dot{x}^j\dot{x}^l. \quad (2.84)$$

Por lo tanto (2.76) es equivalente a

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \{_{jl}^i\}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} = f(\lambda)\frac{dx^i}{d\lambda}}, \quad (2.85) \quad \text{Ecuación Geodésicas}$$

donde

$$\boxed{\{_{jk}^i\} := \frac{1}{2}g^{il}[\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}]}, \quad (2.86) \quad \text{Símbolos de Christoffel}$$

es llamado **símbolo de Christoffel**¹⁰ (de segunda especie), y

$$f(\lambda) := \frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \tilde{L} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \frac{d\ell}{d\lambda} \right) = \frac{\frac{d^2\ell}{d\lambda^2}}{\frac{d\ell}{d\lambda}} \quad (2.87)$$

es una función que depende de la elección del parámetro λ usado para parametrizar la curva. Note que aquí hemos implícitamente introducido una función $\ell(\lambda)$, el largo de la curva desde el punto inicial P_i , dada por $\ell(\lambda) := \int_{\lambda_i}^{\lambda} \tilde{L} d\lambda$, de modo que $\tilde{L} = d\ell/d\lambda$.

La relación (2.87) determina la función f a partir de la relación entre la longitud propia de la curva y el parámetro λ . De aquí es directo verificar que un cambio de parámetro $\lambda \rightarrow \lambda'$ implicará un cambio en la función f , de modo que

$$f' = \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda} \right)^{-1} \left[f - \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \frac{d\lambda'}{d\lambda} \right) \right]. \quad (2.88)$$

En efecto, como

$$\frac{d\ell}{d\lambda'} = \frac{d\ell}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'}, \quad (2.89)$$

¹⁰En honor a Elwin Bruno Christoffel: 1829-1900, físico y matemático alemán. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Elwin_Bruno_Christoffel.

$$\frac{d^2\ell}{d\lambda'^2} = \frac{d^2\ell}{d\lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^2 + \frac{d\ell}{d\lambda} \frac{d^2\lambda}{d\lambda'^2}, \quad (2.90)$$

entonces

$$f' = \frac{d^2\ell}{d\lambda'^2} = \frac{\frac{d^2\ell}{d\lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^2 + \frac{d\ell}{d\lambda} \frac{d^2\lambda}{d\lambda'^2}}{\frac{d\ell}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda'}} = f \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{\frac{d^2\lambda}{d\lambda'^2}}{\frac{d\lambda}{d\lambda'}} = f \frac{d\lambda}{d\lambda'} + \frac{d}{d\lambda'} \ln \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right), \quad (2.91)$$

que es equivalente a (2.88).

Como consecuencia de la arbitrariedad de λ es posible *elegir parámetros especiales que simplifiquen los cálculos*. Por ejemplo, si $d\ell \neq 0$ sobre toda la geodésica, entonces podemos usar un **parámetro afín**, de la forma $\lambda_{\text{afín}} := \alpha \cdot \ell + \beta$, donde ℓ es la distancia *sobre la curva* desde un punto de referencia hasta un punto arbitrario de ella, y además α y β son *constantes* (escalares). En este caso (2.87) implica que $f = 0$. Por simplicidad, usualmente se elige en estos casos la longitud (propia) de la curva ($\alpha = 1$), de modo que la ecuación de la geodésica adopta la forma “canónica”:

$$\frac{d^2x^i}{d\ell^2} + \{^i_{jl}\} \frac{dx^j}{d\ell} \frac{dx^l}{d\ell} = 0.$$

(2.92) Ec. Geodésica
c/param. afín

Por ejemplo, en el espacio euclidiano y en coordenadas cartesianas $\{^i_{jl}\} \stackrel{*}{=} 0$, de modo que, de acuerdo con (2.92), las geodésicas de este espacio son rectas con ecuaciones $x^i(\ell) \stackrel{*}{=} x_0^i + \ell v_0^i$, con x_0^i y v_0^i constantes.

A partir de la ley de transformación del tensor métrico puede verificarse fácilmente que *los símbolos de Christoffel no son componentes de un tensor bajo TGC's*, ya que

$$\overline{\{^i_{jk}\}} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \{^l_{pq}\} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}. \quad (2.93)$$

2.6.5. Isometrías (simetrías de la métrica)

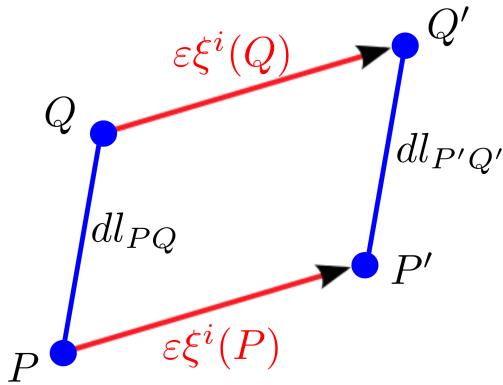


Figura 2.4: Trasladando puntos en la dirección $\xi^i(x)$.

Las **isometrías** de una métrica (en caso de que existan) describen **direcciones de simetría** de la métrica en (una región de) la variedad, de una forma covariante, es decir, independiente del sistema de coordenadas usado.

Sean P y Q dos puntos infinitesimalmente cercanos, con coordenadas x^i y $x^i + dx^i$ respectivamente y $\xi^i = \xi^i(x)$ un campo vectorial (contravariante) definido en una vecindad que

incluye a P y Q . Como se muestra en la figura, podemos localizar dos nuevos puntos P' y Q' cuyas coordenadas están dadas por:

$$x^i(P') = x^i(P) + \varepsilon \xi^i(P), \quad (2.94)$$

$$x^i(Q') = x^i(Q) + \varepsilon \xi^i(Q), \quad (2.95)$$

donde ε es un parámetro escalar infinitesimal. Los puntos P' y Q' son entonces los resultantes de “trasladar” los puntos P y Q en la dirección definida por el vector ξ . Se dice entonces que $\xi^i(x)$ describe una isometría de la variedad, si para puntos arbitrarios P y Q se cumple que la distancia entre ellos es la misma que entre los puntos “trasladados” P' y Q' , es decir, si

$$dl_{PQ} \stackrel{!}{=} dl_{P'Q'} \quad (2.96)$$

o, más explícitamente,

$$dl_{PQ}^2 = g_{ij}(P)(dx_{PQ}^i)(dx_{PQ}^j), \quad (2.97)$$

$$dl_{P'Q'}^2 = g_{ij}(P')(dx_{P'Q'}^i)(dx_{P'Q'}^j). \quad (2.98)$$

Usando (2.94), (2.95) podemos escribir

$$dx_{P'Q'}^i = dx_{PQ}^i + \varepsilon [\xi^i(Q) - \xi^i(P)] \quad (2.99)$$

$$= dx^i + \varepsilon [\xi^i(x + dx) - \xi^i(x)] \quad (2.100)$$

$$= dx^i + \varepsilon [\partial_j \xi^i(x)] dx^j. \quad (2.101)$$

Con esta expresión (2.98) se reduce, a primer orden en ε , a

$$dl_{P'Q'}^2 = g_{ij} dx^i dx^j + \varepsilon [g_{ij} dx^i dx^k \partial_k \xi^i + g_{ij} dx^k dx^j \partial_k \xi^i + \xi^k dx^i dx^j \partial_k g_{ij}], \quad (2.102)$$

donde ahora todos los campos están evaluados en el punto P , de coordenadas x^i . Cambiando adecuadamente los índices de suma, la expresión (2.102) toma la forma

$$dl_{P'Q'}^2 = g_{ij} dx^i dx^j + \varepsilon [g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{kj} \partial_i \xi^k + \xi^k \partial_k g_{ij}] dx^i dx^j, \quad (2.103)$$

de modo que la condición (2.96) es equivalente a

$g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{kj} \partial_i \xi^k + \xi^k \partial_k g_{ij} = 0.$	Ecuación de Killing
--	--

ya que ε , dx^i son infinitesimales, pero arbitrarios.

La ecuación¹¹ diferencial parcial lineal (2.104) es la condición que debe satisfacer el campo ξ^i para que describa una isometría. Las soluciones (no nulas) son llamadas **vectores de Killing**¹².

Plano euclídeo

En el plano euclidiano y en coordenadas cartesianas, $x^i = (x, y)$, la métrica es $g_{ij} \stackrel{*}{=} \delta_{ij}$. En este caso la ecuación (2.104) se reduce a:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} \partial_j \xi^k + \delta_{kj} \partial_i \xi^k &= 0, \\ \partial_j \xi_i + \partial_i \xi_j &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

¹¹Más exactamente, las $n(n+1)/2$ ecuaciones.

¹²Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923): matemático alemán. Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Killing ← se necesita traducción al español de esto!.

Escribimos explícitamente estas ecuaciones:

$$\partial_1 \xi^1 + \partial_1 \xi^1 = 0, \quad (2.106)$$

$$\partial_1 \xi^2 + \partial_2 \xi^1 = 0, \quad (2.107)$$

$$\partial_2 \xi^2 + \partial_2 \xi^2 = 0. \quad (2.108)$$

De (2.106) y de (2.108) se obtiene respectivamente que $\xi^1 = \xi^1(y)$ y $\xi^2 = \xi^2(x)$. De este modo la ecuación (2.107) toma la forma:

$$\frac{d\xi^2}{dx} + \frac{d\xi^1}{dy} = 0. \quad (2.109)$$

Usando el hecho de que x e y son coordenadas independientes, vemos que esta ecuación se satisface si y sólo si:

$$\frac{d\xi^1}{dy} = \alpha = \text{cte.}, \quad (2.110)$$

$$\frac{d\xi^2}{dx} = -\alpha,$$

de modo que:

$$\xi^1 = \alpha y + \beta, \quad \xi^2 = -\alpha x + \gamma. \quad (2.111)$$

Esta solución se puede expresar como combinación lineal de tres soluciones linealmente independientes:

$$\xi^i = (\xi^1, \xi^2) \quad (2.112)$$

$$= (\alpha y + \beta, -\alpha x + \gamma) \quad (2.113)$$

$$= \alpha (y, -x) + \beta (1, 0) + \gamma (0, 1) \quad (2.114)$$

$$= \alpha \xi_{(1)}^i + \beta \xi_{(2)}^i + \gamma \xi_{(3)}^i,$$

donde

$$\xi_{(1)}^i := (y, -x), \quad (2.115)$$

$$\xi_{(2)}^i := (1, 0), \quad (2.116)$$

$$\xi_{(3)}^i := (0, 1). \quad (2.117)$$

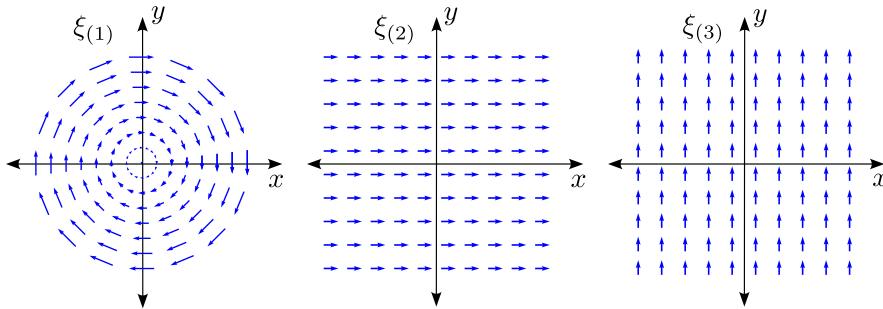


Figura 2.5: Vectores de Killing en el plano euclídeo bidimensional.

Los tres campos independientes $\xi_{(a)}^i$, $a = 1, 2, 3$ son representados en la figura 2.5. Los vectores $\xi_{(1)}^i$ y $\xi_{(2)}^i$ corresponden a *traslaciones* a lo largo de los ejes x e y respectivamente, mientras que $\xi_{(1)}^i$ a *rotaciones* respecto al origen. Cualquier combinación lineal (a coeficientes constantes) de estos tres vectores básicos define una dirección de simetría del espacio Euclídeo bidimensional.

Esfera unitaria

Consideremos como segundo ejemplo la métrica que el espacio euclíadiano tridimensional E_3 induce sobre la esfera unitaria. Sabemos que en coordenadas cartesianas la métrica de E_3 es $g_{ij} = \delta_{ij}$ y la restricción a los puntos de la esfera es:

$$x^1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.118)$$

$$x^2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.119)$$

$$x^3 = \cos \theta, \quad (2.120)$$

de modo que las coordenadas sobre la esfera son θ y φ . Usando (2.73) para calcular la métrica inducida, obtenemos

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

donde $a, b = \theta, \varphi$. Usando (2.86) obtenemos que las componentes no nulas del símbolo de Christoffel son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \varphi \varphi \end{array} \right\} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (2.122)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \theta \varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \theta \end{array} \right\} = \cot \theta. \quad (2.123)$$

El sistema de ecuaciones para los vectores de Killing sobre la esfera unitaria, según (2.104) es:

$$g_{\theta\theta} \partial_\theta \xi^\theta + g_{\theta\theta} \partial_\theta \xi^\theta + \xi^a \partial_a g_{\theta\theta} = 0, \quad (2.124)$$

$$g_{\theta\theta} \partial_\varphi \xi^\theta + g_{\varphi\varphi} \partial_\theta \xi^\varphi + \xi^a \partial_a g_{\theta\varphi} = 0, \quad (2.125)$$

$$g_{\varphi\varphi} \partial_\varphi \xi^\varphi + g_{\varphi\varphi} \partial_\varphi \xi^\varphi + \xi^a \partial_a g_{\varphi\varphi} = 0. \quad (2.126)$$

Luego:

$$\partial_\theta \xi^\theta = 0, \quad (2.127)$$

$$\partial_\varphi \xi^\theta + \sin^2 \theta \partial_\theta \xi^\varphi = 0, \quad (2.128)$$

$$2 \sin^2 \theta \partial_\varphi \xi^\varphi + \xi^\theta \partial_\theta (\sin^2 \theta) = 0. \quad (2.129)$$

La primera ecuación nos dice que $\xi^\theta = \xi^\theta(\varphi)$, de modo que la segunda y tercera ecuación nos queda:

$$\partial_\varphi \xi^\theta + \sin^2 \theta \partial_\theta \xi^\varphi = 0, \quad (2.130)$$

$$\sin \theta \partial_\varphi \xi^\varphi + \xi^\theta \cos \theta = 0. \quad (2.131)$$

Se puede verificar, reemplazando directamente en estas ecuaciones, que el sistema tiene por solución:

$$\xi^a = \alpha \xi_{(1)}^a + \beta \xi_{(2)}^a + \gamma \xi_{(3)}^a, \quad (2.132)$$

con

$$\xi_{(1)}^a = (\sin \varphi, \cot \theta \cos \varphi), \quad (2.133)$$

$$\xi_{(2)}^a = (\cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi), \quad (2.134)$$

$$\xi_{(3)}^a = (0, 1). \quad (2.135)$$

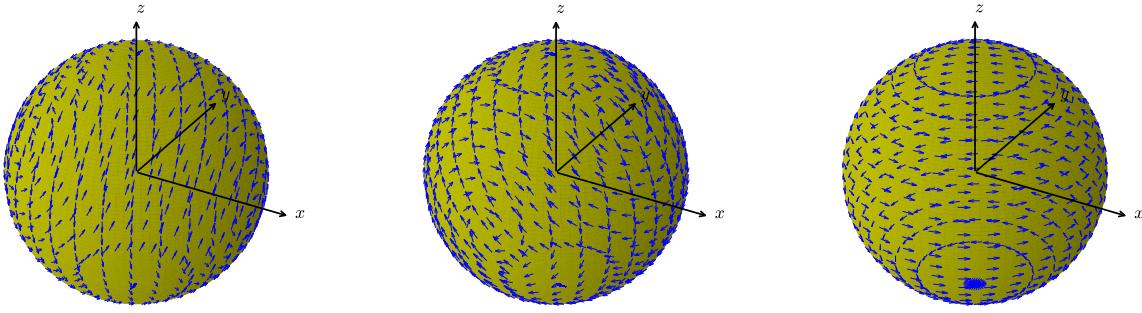


Figura 2.6: Vectores de Killing sobre la esfera: $\xi_{(1)}^a$, $\xi_{(2)}^a$ y $\xi_{(3)}^a$ respectivamente.

Teorema: El número máximo de vectores de Killing independientes que una variedad de dimensión n puede admitir es $n(n + 1)/2$ *** Agregar ref. ***

2.6.6. Coordenadas adaptadas a una isometría

Definimos una coordenada, por ejemplo, x^1 , a lo largo de las líneas integrales del campo ξ , es decir, tal que los vectores tangentes a las líneas coordenadas de x^1 son paralelos a ξ . Esto implica que en el SC adaptado

$$\xi^i \stackrel{*}{=} (\xi^1, 0, \dots, 0). \quad (2.136)$$

Siempre es posible definir la coordenada x^1 (en particular, qué tan rápido varía ésta sobre las curvas integrales de ξ) de modo que

$$\xi^i \stackrel{*}{=} (1, 0, \dots, 0). \quad (2.137)$$

Entonces, si ξ es un vector de Killing, la ecuación (2.104) implica que

$$\partial_1 g_{ij} \stackrel{*}{=} 0, \quad (2.138)$$

es decir, que en sistema de coordenadas adaptado al vector de Killing ξ la métrica no depende de la coordenada adaptada x^1 .

2.6.7. Vectores de Killing y operadores diferenciales

$$\hat{\xi} := \xi^i \partial_i \quad (2.139)$$

2.7. Conexión, derivadas covariantes y transporte paralelo

2.7.1. Derivada parcial de campos tensoriales

Salvo en el caso de un escalar, la derivada de las componentes de un tensor no define un nuevo tensor bajo TGC's. Esto puede entenderse como una consecuencia del hecho que la definición de la derivada parcial de un tensor involucra (el límite) de la sustracción de tensores en puntos distintos.

En efecto, veamos cómo transforman las derivadas parciales $\partial_i A_j := \partial A_j / \partial x^i$ de un vector covariante A_i :

$$\bar{\partial}_i \bar{A}_j = \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} A_k \right) = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \partial_l A_k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k. \quad (2.140)$$

Vemos que la derivada parcial de un vector covariante se comporta como un tensor tipo $(0)_2$ excepto por el segundo término. La ley de transformación es lineal, pero inhomogénea, lo que implica que si las derivadas de un vector se anulan en un SC entonces éstas no se anulan necesariamente en otro.

Una consecuencia importante de este hecho es que, *sin introducir elementos adicionales definidos sobre la variedad*, no existe un criterio *independiente de coordenadas* de cuándo un tensor es constante sobre (una región de) la variedad. Esto se debe a que, como se deduce de la expresión (2.140), aunque las componentes de un tensor sean iguales en dos puntos (o en una región) de la variedad en algún SC (x , de modo que $\partial_i A_j = 0$) en otros SC's (\bar{x}) éste no será el caso: $\bar{\partial}_i \bar{A}_j \neq 0$.

Lo mismo ocurre para tensores de distinto tipo. Por ejemplo, la ley de transformación de un tensor tipo $(0)_2$ es:

$$\bar{A}_{jk} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} A_{lm}. \quad (2.141)$$

Luego, sus derivadas parciales transforman bajo una TGC de la forma siguiente:

$$\bar{\partial}_i \bar{A}_{jk} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} \partial_n A_{lm} + \left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \right) A_{lm}. \quad (2.142)$$

Vemos que los dos últimos términos en (2.142) son lineales en las componentes (no derivadas) del tensor original y son también lineales en las segundas derivadas del cambio de coordenadas. Estos términos hacen que la ley de transformación de las derivadas parciales difiera de la ley correspondiente a un tensor.

Excepciones*

Existen, sin embargo, ciertas combinaciones particulares de derivadas parciales que sí son tensores. Por ejemplo, el “rotor” de un campo vectorial covariante A_k , $\partial_k A_i - \partial_i A_k$, es un tensor tipo $(0)_2$, ya que

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} A_l, \quad (2.143)$$

$$\bar{\partial}_i \bar{A}_k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \partial_m A_l + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} A_l, \quad (2.144)$$

$$\bar{\partial}_k \bar{A}_i = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} \partial_m A_l + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} A_l, \quad (2.145)$$

$$(2.146)$$

y por lo tanto

$$\bar{\partial}_i \bar{A}_k - \bar{\partial}_k \bar{A}_i = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} (\partial_m A_l - \partial_l A_m). \quad (2.147)$$

De este modo, $(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$ define un tensor antisimétrico de tipo $(0)_2$.

Todo esto no es suficiente para establecer un análisis tensorial exhaustivo sobre una variedad. Una (aparentemente simple) pregunta aún no tiene respuesta: ¿Qué condición caracteriza un campo vectorial *constante*? Claramente la respuesta no es $\partial_i A_j = 0$, pues esta condición no es

independiente del SC usado. De hecho, sin estructuras adicionales definidas sobre la variedad, el concepto de “campo vectorial constante” simplemente no está definido. La estructura adicional que permite formular éste y otros conceptos, por ejemplo el de derivada covariante, es llamada **conexión**.

2.7.2. Conexión y derivada covariante de tensores

Definición: Llamamos **conexión**¹³, Γ , a un arreglo de n^3 cantidades definidas en cada punto de la variedad para las cuales:

- Suponemos un conjunto de valores dados en cada SC particular y,
- Cambian sus valores bajo una TGC de acuerdo a la siguiente ley de transformación:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \Gamma^l_{pq} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}. \quad (2.148) \quad \text{Conexión}$$

A partir de una conexión y de un campo vectorial (covariante) es posible definir la siguiente combinación, que es un tensor bajo TGC's:

$$\nabla_i A_j := \partial_i A_j - \Gamma^k_{ji} A_k. \quad (2.149)$$

El tensor $\nabla_i A_j$ es llamado la **derivada covariante** de A_j con respecto a la conexión Γ . Se debe notar que Γ está definida sobre nuestra variedad y puede ser concebida, *en general*, como un objeto geométrico *no necesariamente relacionado con una métrica*.

Es simple verificar a partir de (2.140) y (2.149) que $\nabla_i A_j$ es efectivamente covariante (es decir, un tensor), si suponemos que las componentes de Γ transforman de acuerdo a (2.148).

Note que el segundo término del lado derecho de (2.148) es independiente de Γ y depende entonces sólo de la transformación de coordenadas. Esta es la propiedad implica que una conexión Γ no sea nula en todo SC, aún cuando puede serlo en algunos. Otra consecuencia de la ley de transformación (2.148) es que si *dos conexiones*, Γ y $\hat{\Gamma}$, definidas en la misma variedad, entonces *su diferencia es un tensor*. En efecto, bajo una TGC se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^n_{ik} - \hat{\Gamma}^n_{ik} &= \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} \Gamma^l_{rs} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} \hat{\Gamma}^l_{rs} - \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} (\Gamma^l_{rs} - \hat{\Gamma}^l_{rs}). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Luego, la diferencia $\bar{\Gamma}^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}$ es un tensor. Equivalentemente, la suma de una conexión y un tensor de tipo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es una nueva conexión.

La noción de derivada covariante introducida en (2.149) no es un concepto intrínseco, “natural” de una variedad, sino que está definida a partir de una conexión, la cual debe ser indicada. Además, es posible introducir más que una conexión sobre la misma variedad, por lo que es en general necesario distinguir entre las derivadas definidas con respecto a distintas conexiones.

Se extenderá ahora la noción de derivada covariante a tensores de distinto tipo. Existen distintas formas de motivar la definición de derivadas covariantes de tensores de tipo arbitrario. Una manera simple es *asumiendo* que la derivación covariante satisface:

- i) la usual regla de la derivación de un producto (regla de Leibniz¹⁴) cuando se aplica al producto de tensores y,

¹³También llamada **conexión afín** o **afinidad**.

¹⁴En honor de Gottfried Leibniz: 1646-1716, filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz.

ii) que la derivada covariante de un escalar coincide con la usual derivación parcial.

A partir de estas propiedades es posible deducir la forma de la derivada covariante de cualquier cantidad tensorial. Por ejemplo, la derivada $\nabla_i B^j$ de un vector contravariante B^j puede encontrarse aplicando las propiedades arriba descritas al escalar $A_k B^k$, donde A_k son las componentes de un vector covariante (auxiliar). En efecto, la propiedad ii) implica que

$$\nabla_i (A_k B^k) = \partial_i (A_k B^k). \quad (2.151)$$

Usando ahora la propiedad i), es decir, la regla de Leibniz podemos escribir

$$A_k (\nabla_i B^k) + (\nabla_i A_k) B^k = A_k (\partial_i B^k) + (\partial_i A_k) B^k. \quad (2.152)$$

Finalmente, usando (2.149) encontramos que

$$A_k (\nabla_i B^k) + \left(\partial_i A_k - \Gamma_{ki}^j A_j \right) B^k = A_k (\partial_i B^k) + (\partial_i A_k) B^k \quad (2.153)$$

Cancelando términos y renombrando índices apropiadamente, podemos escribir:

$$A_k \left(\nabla_i B^k - \partial_i B^k - \Gamma_{ji}^k B^j \right) = 0, \quad (2.154)$$

pero A_k es arbitrario, de modo que el término entre paréntesis debe anularse para cada valor del índice k . De aquí podemos despejar una expresión explícita para la derivada covariante de un vector contravariante:

$$\boxed{\nabla_i B^k = \partial_i B^k + \Gamma_{ji}^k B^j.} \quad (2.155)$$

Para un tensor general $T^{kl\dots}_{pq\dots}$ aplicamos un método similar. Consideramos la derivada covariante del escalar

$$T^{kl\dots}_{pq\dots} A_k B_l \dots F^p G^q, \quad (2.156)$$

donde A_k, B_l, \dots, F^p y G^q vectores arbitrarios. Se obtiene así que la derivada covariante del tensor $T^{kl\dots}_{pq\dots}$ consta de su derivada parcial y de términos adicionales, uno por cada índice de $T^{kl\dots}_{pq\dots}$, cada uno de los cuales consta de una contracción entre las componentes de $T^{kl\dots}_{pq\dots}$ y Γ :

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{kl\dots}_{pq\dots} &= \partial_i T^{kl\dots}_{pq\dots} + \Gamma_{ni}^k T^{nl\dots}_{pq\dots} + \Gamma_{ni}^l T^{kn\dots}_{pq\dots} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{pi}^n T^{kl\dots}_{nq\dots} - \Gamma_{qi}^n T^{kl\dots}_{pn\dots} - \dots . \end{aligned} \quad (2.157)$$

Derivada
Covariante de
un Tensor

Note que, *de acuerdo a nuestras convenciones*, el índice de diferenciación es siempre el segundo índice covariante de Γ y los restantes lugares son llenados de modo de asignar el que falta de $T^{kl\dots}_{pq\dots}$.

Con el concepto de derivada covariante es posible definir el concepto de un campo tensorial **covariantemente constante**: un campo tensorial es (covariantemente) constante si y sólo si su derivada covariante es nula.

2.7.3. Transporte paralelo*

Una forma interesante de entender los conceptos de derivada covariante y de conexión es introduciendo la noción de **transporte paralelo**. Hemos visto que la derivada parcial de un campo vectorial covariante no define un tensor, ya que, por definición ésta resta vectores definidos en distintos puntos (aún cuando sean infinitesimalmente próximos):

$$\partial_j A_i(x) := \lim_{\Delta x^j \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x) - A_i(x)}{\Delta x^j}. \quad (2.158)$$

Análogamente, podemos escribir:

$$\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma_{ij}^k A_k \quad (2.159)$$

$$= \lim_{\Delta x^j \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x) - A_i(x)}{\Delta x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k \quad (2.160)$$

$$= \lim_{\Delta x^j \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x) - A_i(x) - \Gamma_{il}^k(x) A_k(x) \Delta x^l}{\Delta x^j} \quad (2.161)$$

$$= \lim_{\Delta x^j \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x) - [A_i(x) + \Gamma_{il}^k(x) A_k(x) \Delta x^l]}{\Delta x^j} \quad (2.162)$$

$$= \lim_{\Delta x^j \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x) - A_i^T(x + \Delta x)}{\Delta x^j}. \quad (2.163)$$

Basados en esto, definimos (en el punto con coordenadas $x + dx$) el vector $A_i^T(x + dx)$ por:

$$A_i^T(x + dx) := A_i(x) + \Gamma_{il}^k(x) A_k(x) dx^l = A_i(x) + \delta A_i(x), \quad (2.164)$$

transporte
vector
covariante

que interpretaremos geométricamente como el vector resultante de *transportar* ("paralelamente") el vector $A_i(x)$ desde el punto con coordenadas x hasta el punto con coordenadas $x + dx$. De esta forma, la derivada covariante de A_i puede ser interpretada como el límite de la diferencia de dos vectores definidos en el *mismo punto*: el vector $A_i(x + dx)$ y el vector $A_i^T(x + dx)$ resultante de transportar $A_i(x)$ desde x hasta $x + dx$.

Análogamente, la derivada covariante de un vector contravariante A^i puede ser interpretada como el límite de la diferencia del vector $A^i(x + dx)$ y el vector $A_T^i(x + dx)$ resultante de transportar $A^i(x)$ desde x hasta $x + dx$, con

$$A_T^i(x + dx) := A^i(x) - \Gamma_{jk}^i(x) A^j(x) dx^k = A^i(x) + \delta A^i(x). \quad (2.165)$$

transporte
vector
contravariante

El proceso anterior puede repetirse de forma análoga para definir el transporte paralelo de un tensor de rango arbitrario. Para esto, es útil notar que (2.164) y (2.165) pueden ser escritas como

$$A_i^T(x + dx) := A_i(x) + dx^j [\partial_j A_i - \nabla_j A_i], \quad (2.166)$$

$$A_T^i(x + dx) := A^i(x) + dx^j [\partial_j A^i - \nabla_j A^i]. \quad (2.167)$$

Similarmente, para un tensor $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ de tipo $(r)_s$ tendremos que

$$(A_T)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x + dx) := A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x) + dx^j [\partial_j - \nabla_j] A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}. \quad (2.168)$$

2.7.4. Integrabilidad*

Habiendo definido el transporte paralelo de un vector (o, en general, de un tensor) desde un punto P de coordenadas x^i a un punto Q de coordenadas $x^i + dx^i$, podemos ahora realizar una **sucesión de transportes** para definir el transporte de un vector *a lo largo de una curva dada*. La pregunta natural que surge es si el transporte de un vector sobre una curva depende de la trayectoria usada o, por el contrario depende sólo de los puntos iniciales y finales. Equivalentemente, podemos preguntarnos si al transportar un vector por una curva *cerrada*, volviendo así al punto P de partida, se obtiene o no el vector original.

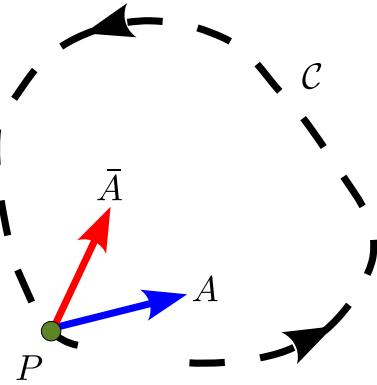


Figura 2.7: Transporte paralelo de un vector sobre una curva cerrada.

Definición: Decimos que una conexión Γ es *integrable* si y sólo si el transporte asociado a ella es independiente de la trayectoria.

Encontremos las condiciones que debe satisfacer una conexión para que sea integrable. Para ello, consideremos un vector contravariante $A^i(P)$ asociado a un punto P de coordenadas x^i . Si el transporte es independiente de la trayectoria usada, entonces puede definirse en forma única un campo vectorial $A^i(x)$ (en todo punto de la variedad) transportando el vector $A^i(P)$ desde P hasta cada punto de la variedad. En este caso podemos expresar el vector en un punto Q infinitesimalmente próximo a P como

$$A^i(x + dx) = A_T^i(x + dx). \quad (2.169)$$

Usando $A^i(x + dx) = A^i(x) + (\partial_j A^i)dx^j$ y (2.165) obtenemos que la condición (2.169) es equivalente a

$$\nabla_j A^k = \partial_j A^k + \Gamma_{ij}^k A^i = 0. \quad (2.170)$$

Resumiendo: si una conexión es integrable, existen vectores (no nulos) covariantemente constantes.

Por otro lado, puede considerarse a (2.170) como una ecuación diferencial que determina el campo (covariantemente constante) $A^i(x)$ dada la conexión, suponiendo que ésta es integrable. Las **condiciones de integrabilidad** de esta ecuación son por lo tanto las condiciones para que la conexión sea integrable.

2.7.5. No-conmutatividad de las derivadas covariantes, curvatura y torsión

Las segundas derivadas covariantes de un tensor *no conmutan*. Por ejemplo, usando (2.155) y (2.157) podemos calcular la segunda derivada covariante de un vector arbitrario A^i :

$$\nabla_i \nabla_j A^k = \partial_i \partial_j A^k + \partial_i A^l \Gamma_{lj}^k + A^l \partial_i \Gamma_{lj}^k + \partial_j A^l \Gamma_{li}^k + A^l \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k - \partial_l A^k \Gamma_{ji}^l - A^l \Gamma_{lm}^k \Gamma_{ji}^m. \quad (2.171)$$

A partir de aquí, encontramos la siguiente identidad¹⁵

$$\boxed{\nabla_i \nabla_j A^k - \nabla_j \nabla_i A^k \equiv R_{lij}^k A^l + T_{ij}^m \nabla_m A^k,} \quad (2.172)$$

¹⁵Existen identidades similares para cada tipo de tensor. Por ejemplo: $[\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i] \phi \equiv T_{ij}^k \nabla_k \phi$, $[\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i] A_k \equiv -R_{kij}^l A_l + T_{ij}^l \nabla_l A_k$. Es un buen ejercicio demostrar estas identidades ...

donde hemos definido el **tensor de curvatura** como:

$$R^k_{lij} := \partial_i \Gamma^k_{lj} - \partial_j \Gamma^k_{li} + \Gamma^k_{mi} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^k_{mj} \Gamma^m_{li}. \quad (2.173) \quad \text{Curvatura}$$

Además, definimos el **tensor de torsión** como:

$$T^k_{ij} := \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}. \quad (2.174) \quad \text{Torsión}$$

Aunque la curvatura y la torsión se definen en términos de la conexión, que no es un tensor, R^k_{lij} y T^k_{ij} sí son tensores, como puede verificarse considerando la consistencia de (2.172), o directamente a partir de su definición y la ley de transformación (2.148) de la conexión.

Note que, como consecuencia directa de su definición, estos tensores poseen las siguientes propiedades de antisimetría:

$$R^k_{lij} \equiv -R^k_{lji}, \quad T^k_{ij} \equiv -T^k_{ji}. \quad (2.175)$$

Estas simetrías, reducen el número de componentes linealmente independientes de la curvatura y la torsión de *una conexión arbitraria* a $n^3(n-1)/2$ y $n^2(n-1)/2$, respectivamente.

Retornando a la identidad (2.172), vemos que ella implica que la derivada covariante es independiente del orden de derivación (cuando se aplica a un vector arbitrario) si y sólo si $R^k_{lji} = 0$ y $T^k_{ij} = 0$.

Por otro lado, si existe un sistema coordenado donde $\Gamma^k_{ij} \stackrel{*}{=} 0$ en todo punto de una región dada, entonces la curvatura y la torsión serán idénticamente nulas, $R^l_{ijk} = 0$ y $T^k_{ij} = 0$, en esa región. Además, como la curvatura y la torsión son tensores, éstas se anularán en todo sistema coordenado. El contrarecíproco también es válido. Si existe un sistema coordenado en el cual la curvatura o la torsión sean distintas de cero, $R^l_{ijk} \neq 0$ ó $T^k_{ij} \neq 0$, entonces no existirá ningún sistema coordinado en el cual la conexión se anule en la región dada.

También es posible probar (aunque es bastante más laborioso, y omitiremos la prueba aquí. Ver, por ejemplo, la sección 6.7 de [24]) que si la curvatura y la torsión de anulan en una región de la variedad entonces es posible encontrar un SC tal que la conexión se anule en ese sistema.

En resumen:

La condición necesaria y suficiente para encontrar un sistema coordenado donde todas las componentes de la conexión se anulen en todo punto de una región dada, $\Gamma^k_{ij} \stackrel{*}{=} 0$, es que $R^l_{ijk} = 0$ y $T^k_{ij} = 0$ en esa región.

2.7.6. Interpretación geométrica de la curvatura*

Consideremos cuatro puntos P, Q, R y S como en la figura (2.8), con coordenadas x^i , $x^i + dx_1^i$, $x^i + dx_1^i + dx_2^i$ y $x^i + dx_2^i$ respectivamente. Sean $A^i(P)$ las componentes de un vector contravariante definido en el punto P . Traslademos este vector a través de la trayectoria PQR , obteniendo $\bar{A}_{PQR}^i(R)$, y comparémoslo con el vector resultante del transporte por la trayectoria PSR , $\bar{A}_{PSR}^i(R)$.

Transportamos primero A^i de P a Q , obteniendo el vector $A_T^i(Q)$:

$$A_T^i(Q) = A^i(P) - \Gamma^i_{jk}(P) A^j(P) dx_1^k. \quad (2.176)$$

Transportamos ahora A_T^i desde Q hasta R , obteniendo así el vector denotado por $A_{PQR}^i(R)$:

$$A_{PQR}^i(R) = A_T^i(Q) - \Gamma^i_{jk}(Q) A_T^j(Q) dx_2^k. \quad (2.177)$$

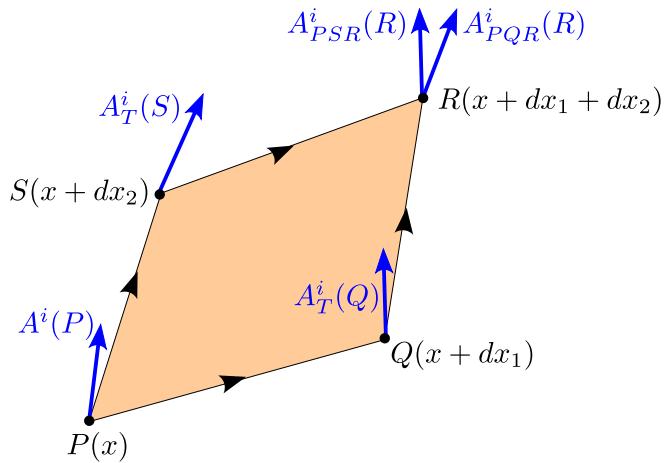


Figura 2.8: Transporte de un vector desde P a R por dos trayectorias (infinitesimales) distintas.

La conexión en el lado derecho de (2.177) está evaluada en el punto Q , de coordenadas $x^i + dx_1^i$, y por lo tanto podemos escribir

$$\Gamma^i_{jk}(Q) = \Gamma^i_{jk}(x + dx_1) = \Gamma^i_{jk}(x) + dx_1^l (\partial_l \Gamma^i_{jk})(x). \quad (2.178)$$

Reemplazando (2.178) en (2.177) y utilizando (2.176) obtenemos:

$$\begin{aligned} A^i_{PQR}(R) &= A^i - \Gamma^i_{jk} A^j dx_1^k - \Gamma^i_{jk} A^j dx_2^k \\ &\quad + \Gamma^i_{jk} \Gamma^j_{lm} A^l dx_1^m dx_2^k - (\partial_l \Gamma^i_{jk}) A^j dx_1^l dx_2^k. \end{aligned} \quad (2.179)$$

El cálculo del vector $A^i_{PSR}(R)$ es análogo, con la única diferencia que primero se realiza el desplazamiento coordenado dx_2^i hasta el punto S y luego el desplazamiento en dx_1^i hasta el punto R . Por lo tanto, el vector buscado tiene la misma forma que (2.179), pero intercambiando dx_1^i con dx_2^i , es decir,

$$\begin{aligned} A^i_{PSR}(R) &= A^i - \Gamma^i_{jk} A^j dx_2^k - \Gamma^i_{jk} A^j dx_1^k \\ &\quad + \Gamma^i_{jk} \Gamma^j_{lm} A^l dx_2^m dx_1^k - (\partial_l \Gamma^i_{jk}) A^j dx_2^l dx_1^k. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Comparamos ambos vectores transportado calculando la diferencia de sus componentes. Restando (2.179) y (2.180) obtenemos (luego de renombrar algunos índices) que el resultado es proporcional al tensor de curvatura (2.173),

$$(A^i_{PSR} - A^i_{PQR})(R) = R^i_{jkl}(x) A^j(x) dx_1^k dx_2^l. \quad (2.181)$$

Esto demuestra que el tensor de curvatura de una conexión mide localmente (en una región infinitesimal) la magnitud de la dependencia del transporte (inducido por la conexión, de vectores y tensores) con la trayectoria.

La relación (2.181) que implica que, si la curvatura es nula, el transporte de cualquier vector es independiente de la trayectoria en una región infinitesimal. Este resultado puede extenderse a trayectorias finitas que unan extremos comunes considerando una sucesión de “deformaciones infinitesimales” de una curva en otra, tal como lo ilustra la figura. Para esto, suponemos que la variedad “no tiene agujeros”, es decir, que es **simplemente conexa**. Por lo tanto, si el tensor de curvatura es nulo y la variedad es simplemente conexa entonces el transporte es independiente de la trayectoria, es decir, la conexión es integrable.

2.7.7. Interpretación geométrica de la torsión*

Consideremos tres puntos P , Q y S de la variedad, infinitesimalmente cercanos, tal que las coordenadas de P son x^i , dx_1^i es la diferencia de las coordenadas entre los puntos P y Q , y dx_2^i es la diferencia de las coordenadas entre los puntos P y S (ver figura 2.9a). Ahora transportamos los vectores contravariantes dx_1^k y dx_2^k , ambos definidos en P , hasta los puntos S y Q , para obtener así \overline{dx}_1^i y \overline{dx}_2^i , respectivamente (ver figura 2.9b). Las componentes de estos nuevos vectores (infinitesimales) están dadas entonces por

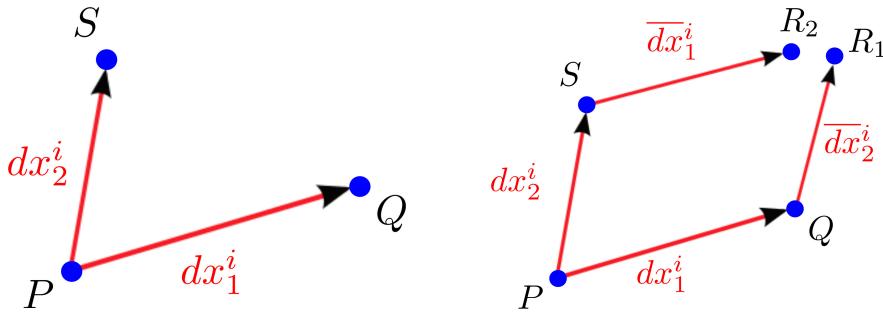


Figura 2.9:

$$\overline{dx}_2^i(Q) = dx_2^i - \Gamma_{jk}^i(x) dx_2^j dx_1^k, \quad (2.182)$$

$$\overline{dx}_1^i(S) = dx_1^i - \Gamma_{jk}^i(x) dx_1^j dx_2^k. \quad (2.183)$$

Los nuevos vectores $\overline{dx}_2^i(Q)$ y $\overline{dx}_1^i(S)$ permiten definir nuevos puntos R_1 y R_2 , cuyas coordenadas son

$$x^i(R_1) := x^i(Q) + \overline{dx}_2^i(Q) = x^i + dx_1^i + dx_2^i - \Gamma_{jk}^i(x) dx_2^j dx_1^k, \quad (2.184)$$

$$x^i(R_2) := x^i(S) + \overline{dx}_1^i(S) = x^i + dx_2^i + dx_1^i - \Gamma_{jk}^i(x) dx_1^j dx_2^k. \quad (2.185)$$

En general, los puntos R_1 y R_2 no coinciden: la diferencia entre sus coordenadas está dada por

$$x^i(R_2) - x^i(R_1) = -\Gamma_{jk}^i(x) dx_1^j dx_2^k + \Gamma_{jk}^i(x) dx_2^j dx_1^k \quad (2.186)$$

$$= [-\Gamma_{jk}^i(x) + \Gamma_{kj}^i(x)] dx_1^j dx_2^k \quad (2.187)$$

$$= -T_{jk}^i(x) dx_1^j dx_2^k. \quad (2.188)$$

Vemos entonces que en la construcción geométrica discutida de un “paralelógramo infinitesimal” los puntos finales no coinciden (el “paralelógramo no se cierra”) si el tensor de torsión es no nulo. Debido a esto a menudo se dice que la torsión describe (posibles) “fallas en el cierre local de paralelogramos infinitesimales”.

Por ejemplo, en el caso de un plano (E_2) sabemos que el transporte es independiente de la trayectoria, y por lo tanto la conexión es integrable. Además, en coordenadas cartesianas¹⁶ $\Gamma_{ij}^k \stackrel{*}{=} 0$. En este caso, según (2.173), tenemos que la curvatura se anula, $R_{ijk}^l = 0$.

¹⁶Utilizamos el símbolo $\stackrel{*}{=}$ para denotar que esta igualdad es válida sólo en un sistema coordenado particular.

2.7.8. Curvas autoparalelas*

Se dice que una curva es **autoparalela** si satisface que sus vectores tangentes son paralelos (respecto al transporte definido por una conexión Γ) a lo largo de la misma curva. En otras palabras, si $x^i(\lambda)$ es la parametrización de la curva, entonces ella es autoparalela si su vector tangente $u^i(\lambda) := dx^i/d\lambda$ evaluado en el punto correspondiente a $\lambda + d\lambda$ (es decir, el punto con coordenadas $x^i(\lambda + d\lambda)$) es *proporcional* al vector resultante de transportar $u^i(\lambda)$ (definido el punto correspondiente al parámetro λ , es decir, con coordenadas $x^i(\lambda)$) hasta el punto con parámetro $\lambda + d\lambda$. Es usual describir a las curvas autoparalelas como “las más rectas posibles” en el sentido que ellas siguen la dirección de sus propios vectores tangentes, transportados de punto a punto por medio de la conexión.

Es simple verificar que una curva autoparalela debe satisfacer una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^i}{d\lambda}} \quad (2.189) \quad \text{ec. curvas autoparalelas}$$

Tal como en el caso de las curvas de longitud extrema (geodésicas), es posible elegir un parámetro afín tal que $f = 0$.

2.8. Geometría riemanniana

La **geometría riemanniana**¹⁷ es una generalización de la geometría intrínseca de las superficies gaussianas (originalmente, superficies inmersas en E_3), a espacios de dimensiones superiores. En una geometría riemanniana tanto las propiedades métricas (longitudes, áreas, volúmenes, módulos de vectores, geodésicas, etc) como las propiedades afines (derivadas covariantes, transporte, curvatura, torsión, curvas autoparalelas) quedan determinadas por un único objeto: la métrica. En particular en una geometría de Riemann, la conexión es aquella determinada por los símbolos de Christoffel asociados al tensor métrico, adicionalmente el tensor de torsión se anula idénticamente, pero el tensor de curvatura es en general no nulo. Además, en una geometría riemanniana las curvas autoparalelas coinciden con las geodésicas.

2.8.1. Propiedades de los símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel (2.86) definen una conexión que posee torsión idénticamente nula (pues es simétrica bajo permutación de sus índices covariantes), pero que tiene en general curvatura no nula: $R^i_{jkl}(\{ \}) \neq 0$, $T^i_{jk}(\{ \}) \equiv 0$.

Es útil notar que, usando esta conexión, la ecuación de la geodésica (2.85) puede escribirse como

$$v^j \nabla_j v^i = f v^i, \quad (2.190)$$

donde $v^i := dx^i/d\lambda$ representan los vectores tangentes sobre la curva.

Además, puede verificarse directamente que la derivada covariante definida por la conexión (2.86) satisface la **condición de metricidad**

$$\boxed{\nabla_k g_{ij} \equiv 0,} \quad (2.191) \quad \text{Condición de metricidad}$$

o, equivalentemente,

$$\nabla_k g^{ij} \equiv 0. \quad (2.192)$$

¹⁷Llamada así en honor de Bernhard Riemann: 1826-1866, matemático alemán. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann.

[* Esta propiedad puede interpretarse geométricamente como la condición que asegura que el módulo de un vector arbitrario permanezca inalterado al ser transportado.]

Más aún, puede probarse que la única conexión que satisface i) que su torsión sea idénticamente nula y ii) que satisfaga la condición de metricidad (2.191) es precisamente la conexión (2.86).

Desde ahora en adelante consideraremos siempre geometrías riemannianas, es decir, donde la conexión es dada por los símbolos de Christoffel.

2.8.2. Espacios planos

Se dice que un espacio con geometría riemanniana es **plano** si y sólo si existen sistemas de coordenadas en los que las componentes del tensor métrico sean *constantes* (es decir, independientes de las coordenadas). Como consecuencia tenemos que:

Si un espacio riemanniano es plano entonces su tensor de curvatura de Riemann es nulo.

En efecto, $g_{ij} \stackrel{*}{=} \text{cte.}$ implica $\{^k_{ij}\} \stackrel{*}{=} 0$ y por tanto $R^l_{ijk} = 0$. Ejemplos de estos espacios son el espacio de Minkowski de la teoría de Relatividad Especial y los espacios euclídeos¹⁸.

Por supuesto, el contrarrecíproco es también verdadero:

Si $R^l_{ijk} \neq 0$ entonces no existe un sistema coordenado donde $g_{ij} \stackrel{*}{=} \text{cte.}$ y $\{^k_{ij}\} \stackrel{*}{=} 0$ en todo punto.

Análogamente, es posible probar el resultado recíproco: si el tensor de curvatura de Riemann se anula en todo punto entonces es posible encontrar un SC en el que la métrica asuma valores constantes. Para esto, basta aplicar el resultado visto al final de la sección (2.7.5) y la identidad $\partial_k g_{ij} \equiv g_{il} \{^l_{jk}\} + g_{jl} \{^l_{ik}\}$, que es equivalente a (2.191).

En resumen:

La condición necesaria y suficiente para que existan sistemas coordinados en los que la métrica sea constante es que su tensor de curvatura de Riemann sea nulo.

2.8.3. Coordenadas geodésicas

Puede mostrarse que, cuando la curvatura es no nula, si bien no es posible encontrar un SC en el cual la métrica sea constante y la conexión se anule *en todo punto* de una región dada, sí es posible encontrar un SC tal que *en un punto dado P* de la variedad, se satisfaga

$$g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) =: \eta_{ij}, \quad \{^k_{ij}\}(P) \stackrel{*}{=} 0, \quad (2.193)$$

o, equivalentemente

$$g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} \eta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} 0. \quad (2.194)$$

Estas coordenadas reciben el nombre de **coordenadas geodésicas**. Note que, sin embargo, necesariamente $\partial_l \partial_k g_{ij}(P) \stackrel{*}{\neq} 0$, ya que $R^l_{ijk}(P) \stackrel{*}{\neq} 0$ requiere que $\partial_l \{^m_{ik}\}(P) \stackrel{*}{\neq} 0$.

Una forma de entender el rol de las coordenadas geodésicas es expresando la métrica en una vecindad del punto P en términos de una serie de potencias en torno a P . Denotando las coordenadas de P como x^i podemos, en cualquier SC, escribir:

$$g_{ij}(x + \Delta x) = g_{ij}(P) + \Delta x^k (\partial_k g_{ij})(P) + \frac{1}{2} \Delta x^k \Delta x^l (\partial_k \partial_l g_{ij})(P) + \dots. \quad (2.195)$$

¹⁸Note que un cilindro es también un espacio plano.

En un espacio plano, es posible encontrar coordenadas en las que la métrica es constante, es decir, asume el mismo valor *en todo punto*, entonces todas las derivadas $\partial_k g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} 0$, $\partial_k \partial_l g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} 0$, etc. se anulan y la expansión anterior (2.195) se reduce a sólo el primer término, de la forma estándar η_{ij} .

Por otro lado, en un espacio curvo “sólo” es posible encontrar coordenadas geodésicas en las que se satisfaga (2.194), de modo que

$$g_{ij}(x + \Delta x) \stackrel{*}{=} \eta_{ij} + 0 + \frac{1}{2} \Delta x^k \Delta x^l (\partial_k \partial_l g_{ij})(P) + \dots \quad (2.196)$$

En otras palabras, en un espacio curvo general, siempre es posible considerar una “pequeña región” en torno a un punto P dado (pero arbitrario) tal que la métrica adopta su forma estándar y es *aproximadamente constante en esa pequeña región*. Más precisamente aquella región “pequeña” está determinada por la condición que el tercer término en la expansión (2.196) sea despreciable respecto al primero, es decir, Δx^i debe ser lo suficientemente pequeño para asegurar que $|\Delta x^k \Delta x^l (\partial_k \partial_l g_{ij})(P)| \ll 1$.

Es importante notar que *las coordenadas geodésicas no son únicas*, puesto que si x^i es un SC geodésico, entonces $\tilde{x}^i = \Lambda^i{}_j x^j$, será también un SC geodésico si Λ es una matriz *constante* (que define una transformación *lineal*) que deja invariante la métrica diagonal η_{ij} . En el caso de un geometría riemanniana (con elemento de línea definido positivo) $\eta_{ij} = \text{diag}(+1, +1, \dots)$ y entonces las transformaciones entre SC's geodésicos son rotaciones (n -dimensionales). En el caso de la geometría es pseudo-riemanniana usada en la Teoría de Relatividad General $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ y las transformaciones entre SC's geodésicos son las transformaciones de Lorentz. En este último caso las coordenadas geodésicas se identifican con las coordenadas “quasi”-cartesianas¹⁹ asociadas a un SRLI.

Prueba de existencia de coordenadas geodésicas

Primero probaremos que para cualquier conexión que sea simétrica en sus índices covariantes (es decir, que tenga torsión nula) es posible, dado un punto P de la variedad, encontrar un SC \bar{x} en el que

$$\bar{\Gamma}^i{}_{jk}(P) \stackrel{*}{=} 0. \quad (2.197)$$

Para esto, consideramos un SC x “inicial” en el que no se satisfaga lo requerido, e.d. $\Gamma^i{}_{jk}(P) \stackrel{*}{\neq} 0$. Si las coordenadas del punto P en este SC son $x^i(P) = x_P^i$ entonces consideramos el cambio *nolineal* de coordenadas

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = A^i + B^i{}_j(x^j - x_P^j) + \frac{1}{2} C^i{}_{jk}(x^j - x_P^j)(x^k - x_P^k), \quad (2.198)$$

donde A^i , $B^i{}_j$ y $C^i{}_{jk} = C^i{}_{kj}$ son constantes.

En el SC \bar{x} las coordenadas del punto P son nulas $\bar{x}^i(P) = A^i$. Además,

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = B^i{}_j + C^i{}_{jk}(x^k - x_P^k), \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = C^i{}_{jk}. \quad (2.199)$$

En particular, en el punto P las primeras derivadas se reducen a

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(P) = B^i{}_j, \quad (2.200)$$

¹⁹Aquí “quasi” significa que éstas no son realmente coordenadas cartesianas, ya que su extensión es necesariamente finita.

por lo que su inversa en ese punto es simplemente (suponemos que la matriz correspondiente a B^i_j es invertible)

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}(P) = (B^{-1})^i_j. \quad (2.201)$$

Con esto, podemos calcular las componentes de la conexión en el SC \bar{x} usando (2.199b), (2.200), (2.201), y la ley de transformación (2.148), que escribiremos como

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(P) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}(P) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(P) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}(P) \Gamma^p_{lm}(P) - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(P) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}(P) \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^l \partial x^m}(P) \quad (2.202)$$

$$= B^i_p (B^{-1})^l_j (B^{-1})^m_k \Gamma^p_{lm}(P) - (B^{-1})^l_j (B^{-1})^m_k C^i_{lm} \quad (2.203)$$

$$= (B^{-1})^l_j (B^{-1})^m_k [B^i_p \Gamma^p_{lm}(P) - C^i_{lm}] \quad (2.204)$$

Vemos entonces que la transformación (2.198) satisface la condición (2.197) si elegimos $C^i_{lm} \stackrel{!}{=} B^i_p \Gamma^p_{lm}(P)$. Note que esta elección sólo es consistente si la conexión es simétrica.

Segundo, como el resultado anterior es válido en particular para la conexión métrica (los símbolos de Christoffel), tenemos que dado P existe un SC en el que $\{\stackrel{i}{_{jk}}\} \stackrel{*}{=} 0$. Usando la identidad $\partial_k g_{ij} \equiv g_{il} \{\stackrel{l}{_{jk}}\} + g_{jl} \{\stackrel{l}{_{ik}}\}$ es claro que esto implica que $\partial_k g_{ij}(P) \stackrel{*}{=} 0$

Finalmente, como los coeficientes B^i_j no han sido aún restringidos es posible elegirlos de modo tal que en el SC \bar{x} la métrica adopte el valor estándar $\bar{g}_{ij}(P) \stackrel{*}{=} \eta_{ij}$. Usando la ley de transformación del tensor métrico encontramos que esta condición es equivalente a

$$\eta_{ij} = (B^{-1})^k_i (B^{-1})^l_j g_{kl}(P) \quad (2.205)$$

o, en notación matricial $\eta = (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{g}(P) \mathbf{B}^{-1}$. Esta condición implica que \mathbf{B}^{-1} es la matriz que diagonaliza a $\mathbf{g}(P)$, y esta matriz siempre existe en el caso de métricas (simétricas y reales) no singulares.

2.8.4. Propiedades del tensor de Riemann

Si consideramos las componentes totalmente covariantes del tensor de curvatura, $R_{ijkl} := g_{im} R^m_{jkl}$, es posible probar que en el caso de una geometría riemanniana, es decir, cuando la conexión es el símbolo de Christoffel de la métrica, el tensor de curvatura de Riemann posee, adicionalmente a (2.175a), las siguientes (anti-)simetrías:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad (2.206)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad (2.207)$$

y, además²⁰,

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \Leftrightarrow R_{i[jkl]} = 0. \quad (2.208)$$

En efecto, de la definición del tensor de Riemann (2.173) y usando la expresión de los símbolos de Christoffel, obtenemos que las componentes completamente covariantes R_{ijkl} pueden escribirse de la forma siguiente:

$$R_{ijkl} = g_{im} (\partial_k \Gamma^m_{jl} - \partial_l \Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^m_{nl} \Gamma^n_{jk}) \quad (2.209)$$

$$= \partial_k (g_{im} \Gamma^m_{jl}) - \Gamma^m_{jl} \partial_k g_{im} - \partial_l (g_{im} \Gamma^m_{jk}) + \Gamma^m_{jk} \partial_l g_{im} \\ + g_{im} (\Gamma^m_{nk} \Gamma^n_{jl} - \Gamma^m_{nl} \Gamma^n_{jk}) \quad (2.210)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_k (\partial_j g_{il} + \partial_l g_{ij} - \partial_i g_{jl}) - \frac{1}{2} \partial_l (\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) \\ + (\partial_l g_{in} - g_{im} \Gamma^m_{nl}) \Gamma^n_{jk} - (\partial_k g_{in} - g_{im} \Gamma^m_{nk}) \Gamma^n_{jl}. \quad (2.211)$$

²⁰En general se satisface $R^l_{[ijk]} \equiv -T^m_{[ij]} T^l_{km} - \nabla_{[i} T^l_{jk]}$.

Usamos ahora la identidad (2.191) para escribir $\partial_l g_{in} - g_{im} \Gamma_{nl}^m = \nabla_l g_{in} + g_{mn} \Gamma_{il}^m = g_{mn} \Gamma_{il}^m$. Con esto obtenemos

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{jl}) + g_{mn} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{jk}^n - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jl}^n), \quad (2.212)$$

de donde es posible verificar directamente las propiedades de simetría (2.206)-(2.208).

Debido a estas simetrías adicionales, las *componentes completamente covariantes linealmente independientes* del tensor de curvatura de una variedad con geometría riemanniana de dimensión n se reducen a “sólo” $n^2(n^2 - 1)/12$. Así, en los casos $n = 1, 2, 3, 4$ se tienen 0, 1, 6 y 20 componentes linealmente independientes, respectivamente.

2.8.5. Tensor de Ricci, y escalar de curvatura

A partir del tensor de Riemann podemos definir el **tensor de Ricci**²¹:

$$R_{jl} := R^i_{jil}, \quad (2.213)$$

que, en un espacio con geometría riemanniana, es simétrico $R_{ij} = R_{ji}$, en virtud de (2.207). Debido a las simetrías del tensor de curvatura, la contracción que define al tensor de Ricci es la única linealmente independiente. En otras palabras, otras contracciones son nulas o proporcionales al tensor de Ricci. Por ejemplo, $R^i_{ijk} = 0$, $R^i_{jki} = -R_{jk}$.

El **escalar de curvatura** es definido como la “traza del tensor de Ricci”,

$$R := g^{ij} R_{ij}. \quad (2.214)$$

Otro tensor útil es el **tensor de Einstein**, definido por

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (2.215)$$

que, en un espacio con geometría riemanniana, es también simétrico.

2.8.6. Identidades de Bianchi

Es posible probar que las derivadas covariantes del tensor de curvatura de Riemann satisfacen las **identidades de Bianchi**²²:

$$\boxed{\nabla_{[i} R_{jk]lm} \equiv 0}, \quad (2.216)$$

o, equivalentemente,

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0. \quad (2.217)$$

Aquí verificaremos su validez en el caso riemanniano, usando nuestro resultado anterior (2.212) y evaluando $\nabla_{[i} R_{jk]lm}$ en un punto P dado, pero arbitrario, *usando coordenadas geodésicas*. En efecto, a partir de (2.212) vemos que

$$\nabla_m R_{ijkl}(P) = \partial_m R_{ijkl} - \Gamma_{im}^n R_{njkl} - \Gamma_{jm}^n R_{inkl} - \Gamma_{km}^n R_{ijnl} - \Gamma_{lm}^n R_{ijkn} \quad (2.218)$$

$$\stackrel{*}{=} \partial_m R_{ijkl} + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (2.219)$$

$$\stackrel{*}{=} \partial_m \left[\frac{1}{2} (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{jl}) + g_{\alpha\beta} \left(\Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{jk}^\beta - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{jl}^\beta \right) \right] \quad (2.220)$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \partial_m (\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_i \partial_k g_{jl}) + 0 + 0. \quad (2.221)$$

²¹En honor a Gregorio Ricci-Curbastro: 1853-1925, matemático Italiano. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Ricci-Curbastro.

²²En honor a Luigi Bianchi: 1856-1928, matemático italiano. Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Luigi_Bianchi ← se necesita traducción al español de esto!.

De aquí es directo verificar que la parte antisimétrica $\nabla_{[i}R_{jk]lm}(P)$ efectivamente es nula. Como esta cantidad es un tensor y el punto P es arbitrario, hemos entonces verificado que $\nabla_{[i}R_{jk]lm} = 0$ en todo sistema coordenado y *cada punto* P de la variedad.

A partir la identidad de Bianchi es directo verificar que el tensor de Einstein es covariante-mente constante:

$$\boxed{\nabla_i G^{ij} \equiv 0.} \quad (2.222)$$

En efecto, contrayendo (2.217) con $g^{km}g^{il}$ podemos escribir

$$0 = g^{km}g^{il} (\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl}) \quad (2.223)$$

$$= \nabla_i (g^{km}g^{il} R_{jklm}) + \nabla_j (g^{km}g^{il} R_{kil}) + \nabla_k (g^{km}g^{il} R_{ijl}) \quad (2.224)$$

$$= \nabla_i (g^{km}g^{il} R_{kjl}) - \nabla_j (g^{km}g^{il} R_{ikl}) + \nabla_k (g^{km}g^{il} R_{ijl}) \quad (2.225)$$

$$= \nabla_i (g^{il} R_{jl}) - \nabla_j (g^{km} R_{km}) + \nabla_k (g^{km} R_{jm}) \quad (2.226)$$

$$= \nabla_i R^i_j - \nabla_j R + \nabla_k R^k_j \quad (2.227)$$

$$= \nabla_i (2R^i_j - \delta^i_j R) \quad (2.228)$$

que, luego de usar nuevamente (2.191), es equivalente a (2.222).

Capítulo 3

La teoría de Einstein de la gravitación

3.1. Gravitación como curvatura del espaciotiempo

Como hemos visto, el PEF supone que en regiones (suficientemente) pequeñas del espaciotiempo, y en un sistema de referencia en caída libre, los efectos de la gravedad desaparecen y son por lo tanto válidas las leyes no-gravitacionales conocidas. En particular es en coordenadas adaptadas a estos SR's en los que la teoría de Relatividad Especial, con su métrica de Minkowski, es recobrada. En otro sistema de coordenadas (adaptado a otros SR's no localmente inerciales) la presencia de un campo gravitacional se manifestará en el hecho que la métrica ya no será constante (independiente de las coordenadas) en la región considerada¹. Por esto, en la teoría de Einstein se asume que un campo gravitacional general puede ser descrito por un *espaciotiempo cuadridimensional curvo* (tensor de curvatura no nulo, métrica no constante), *geometrizando* de esta forma la interacción gravitacional. Además, el PEF es implementado identificando las coordenadas adaptadas a un SRLI como las coordenadas geodésicas en torno a un punto (evento) dado.

Además en RG es necesario considerar que las ecuaciones que describen algún sistema físico son covariantes bajo TGC's² (es decir, válidas con la misma forma en cualquier sistema de coordenadas), y tales que se reducen a las ecuaciones válidas en la teoría de RE en sistemas de coordenadas geodésicas (asociados a SRLI's). Como consecuencia, la ecuación de movimiento de un cuerpo de prueba macroscópico es dada en general por (1.80), es decir, adopta la forma de la ecuación de la geodésica (o autoparalelas).

Al comparar (1.52) con (1.80) vemos que la conexión Γ juega en RG el papel de generalización relativista del campo gravitacional \bar{g} . Ya que en una geometría riemanniana Γ depende de las derivadas de las componentes de la métrica g , encontramos que las componentes de g juegan un papel análogo al potencial gravitacional. En RE, sin embargo, la curvatura asociada a Γ es nula. Geométricamente, el espaciotiempo es plano en RE y se pueden encontrar SC's (asociados a SRI's globales) en los que las componentes de la métrica sean constantes y diagonales ($g^{ij} = \eta_{ij}$), la conexión es nula ($\Gamma^{ij}_{kl} = 0$), y las soluciones de la ecuación de la geodésica se reducen a líneas rectas en el espaciotiempo, es decir, a líneas de mundo describiendo movimientos rectilíneos uniformes.

Nótese que aquí se ha supuesto, siguiendo la construcción de Einstein, que la identificación de la conexión con los símbolos de Christoffel ($\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}\}(g)$) se mantiene inalterada al pasar

¹Lo mismo ocurre, en un sistema de coordenadas arbitrario, no necesariamente adaptado a algún sistema de referencia particular.

²Esta condición es usualmente llamada “principio general de covariancia”.

del caso de un campo trivial (RE) a uno general (RG). Con esta identificación el único campo independiente es la métrica.

Resumiendo, la teoría de Einstein de la gravitación se basa en la idea de *geometrizar* la interacción gravitacional, es decir, describirla asociando al espaciotiempo una geometría (pseudo-riemanniana) *curva*. En este caso, un campo gravitacional no nulo es caracterizado por una curvatura del espaciotiempo distinta de cero y los cuerpos (de prueba) siguen curvas geodésicas del espaciotiempo. En un campo gravitacional general no es posible encontrar un SC tal que la métrica sea constante y la conexión se anule en todo evento. Sí es posible encontrar SC's geodésicos asociados a SRLI's que tienen la propiedad que la métrica adopta su valor minkowskiano y la conexión se anula *en un evento dado*. En el caso de partículas masivas, las geodésicas que éstas describen son tipo tiempo ($ds^2 > 0$ a lo largo de la curva), y para señales luminosas (fotones) la curva geodésica es *nula* ($ds^2 = 0$ a lo largo de ella).

3.2. Métrica, trayectorias, tiempo propio y coordenadas

En RG se supone que la métrica $g_{\mu\nu}$ del espaciotiempo, aún siendo curva, es siempre *lorentziana*. Esto significa que el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

no es definido positivo, es decir, puede asumir, en un mismo evento P dado del espaciotiempo (con coordenadas x^μ), valores positivos, negativos o ser cero, dependiendo de los valores de dx^μ . Esto es más evidente en coordenadas geodésicas \bar{x}^μ definidas en torno al punto P , puesto que en ese caso

$$ds^2 \stackrel{*}{=} (d\bar{x}^0)^2 - (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2. \quad (3.2)$$

En este sentido, un espaciotiempo curvo es siempre *localmente un espacio de Minkowski*. En particular, eventos en la vecindad de P (es decir, eventos Q , con coordenadas $x^\mu + dx^\mu$) pueden clasificarse de acuerdo a si su separación (dx^μ) es tipo tiempo, espacio o tipo luz: El vector que une P y Q , con coordenadas dx^μ es tipo tiempo si $ds^2 > 0$, tipo espacio si $ds^2 < 0$, y tipo luz si $ds^2 = 0$. En otras palabras, en RG es posible definir, *en la vecindad de cada evento*, un cono de luz (infinitesimal) que describe la *estructura causal local* del espaciotiempo.

Como extensión natural de lo que ocurre en RE, en RG se supone que los cuerpos (masivos), moviéndose en un campo gravitacional dado, describen líneas de mundo tipo tiempo (es decir, en los que los vectores tangentes en cada punto de la trayectoria son tipo tiempo), y que los rayos de luz siguen curvas tipo luz. Por último, en el caso de líneas tipo tiempo se continúa interpretando al intervalo en términos del *tiempo propio*: $ds = c d\tau$. Más específicamente, si $x^\mu(\lambda)$ es la línea de mundo de un cuerpo masivo, entonces

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

(3.3) Tiempo Propio
en RG

se interpreta como el *tiempo que un reloj comóvil con el cuerpo registra entre los eventos con coordenadas x^μ y $x^\mu + dx^\mu$* . Como, en general, las componentes de la métrica variarán punto a punto, vemos que en un espaciotiempo curvo se espera que los tiempos propios registrados por relojes dependan tanto de dx^μ (\sim velocidades) como de la posición (x) en el espaciotiempo. Esto tendrá como consecuencia la predicción, además de dilataciones del tiempo usuales (\sim velocidades, e.d. Doppler) de dilataciones (y/o contracciones) del tiempo de origen gravitacional, debido a la inhomogeneidad de la métrica del espaciotiempo en presencia de un campo gravitacional no-trivial.

3.2.1. Sobre coordenadas tipo espacio, tipo tiempo y tipo luz

Se dice que una *coordenada es tipo tiempo* si las curvas coordinadas asociadas (es decir, las curvas determinadas por variaciones de la coordenada en cuestión, dejando las otras coordenadas constantes) son tipo tiempo. Equivalentemente, x^μ (con un μ fijo) es una coordenada temporal si al variar esta coordenada (y dejando las otras constantes) dx^μ es tal que $ds^2 > 0$. De manera análoga una *coordenada es tipo luz o tipo espacio* si sus líneas coordinadas son tipo luz ($ds^2 = 0$) o tipo espacio ($ds^2 < 0$), respectivamente. Note que, ya que esta clasificación de coordenadas depende del valor del intervalo, y por lo tanto de la métrica, una coordenada puede ser tipo tiempo en una región del espaciotiempo, pero tipo espacio o tipo luz en otra región, o viceversa. Note además que no es necesario que todo SC consista de una coordenada temporal y tres espaciales. Es posible y útil en algunas ocasiones usar, por ejemplo, una o más coordenadas tipo luz.

Por ejemplo, en la solución (3.96) t es una coordenada temporal, mientras que ρ, θ y φ son coordenadas espaciales en todo evento del espaciotiempo. Por otro lado, en la métrica (3.76) (suponiendo que ella es válida para todo valor de r) t es una coordenada temporal y r es una coordenada espacial sólo en los eventos con $r > 2m$, mientras que θ y φ son siempre espaciales.

3.3. Límite Newtoniano

En la teoría de Einstein los cuerpos, libres de fuerzas no-gravitacionales, siguen geodésicas del espaciotiempo. Por otro lado, sabemos que la teoría gravitacional de Newton describe con gran precisión las trayectorias de cuerpos (macroscópicos) en campos gravitacionales como los encontrados en el sistema solar. En estas circunstancias, los cuerpos se mueven a velocidades no-relativistas y el campo gravitacional puede considerarse como aproximadamente estático. Por lo anterior, requerimos que la ecuación de la geodésica se reduzca a la ecuación de movimiento newtoniana en el límite no-relativista y de campos gravitacionales débiles y estáticos.

En RG, un campo gravitacional débil se describe por un espacio “ligeramente curvado”. En este caso, es posible considerar que la métrica puede escribirse como una “perturbación” de la métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.4)$$
Campo grav.
débil

Note que (3.4) está escrita en coordenadas “cuasi-cartesianas”, $x^\mu := (ct, \vec{x})$, en las que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Suponiendo que los cuerpos se mueven *muy lentamente*, es decir $|dx^i/dt| \ll c$, $i = 1, 2, 3$, podemos aproximar $d\tau \approx dt$, y entonces $dx^0/d\tau \approx c$, $dx^i/d\tau \approx dx^i/dt$. Como esta aproximación es correcta a orden 0 en v^i/c , es llamada “límite estático”. Con esto la ecuación de la geodésica se reduce a

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \approx 0, \quad (3.5)$$

es decir, a

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} c^2 \approx 0. \quad (3.6)$$

Si además consideramos que el campo gravitacional es *estacionario*, en el sentido que³

³Esto significa que suponemos que existe un *vector de Killing tipo tiempo*, que en las coordenadas usadas asume la forma $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

$\partial_t h_{\mu\nu} = 0$, entonces

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{00} \quad (3.7)$$

$$= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu(\eta_{00} + h_{00}) \quad (3.8)$$

$$\approx -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}. \quad (3.9)$$

Reemplazando (3.9) en (3.6) encontramos

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \approx -\Gamma_{00}^\mu c^2 \quad (3.10)$$

$$\approx \frac{c^2}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}. \quad (3.11)$$

Para la componente $\mu = 0$, obtenemos

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\eta^{0\nu}\partial_\nu h_{00} \quad (3.12)$$

$$\approx \frac{c^2}{2}\eta^{00}\partial_0 h_{00} \quad (3.13)$$

$$\approx \frac{c}{2}\partial_t h_{00}. \quad (3.14)$$

Ya que $dx^0/d\tau \approx c$ y $\partial_t h_{00} = 0$, esta ecuación es consistente, pero no suministra información adicional en esta aproximación. Las ecuaciones restantes, con $\mu = i = 1, 2, 3$, son

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\eta^{i\nu}\partial_\nu h_{00} \quad (3.15)$$

$$\approx -\frac{c^2}{2}\partial_i h_{00}, \quad (3.16)$$

o, en notación vectorial,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00}. \quad (3.17)$$

Esta ecuación debería entonces coincidir, dentro de la aproximación considerada, con la ecuación newtoniana que determina el movimiento del cuerpo de prueba, es decir, con (1.60). De aquí, podemos identificar la componente 00 de la perturbación $h_{\mu\nu}$ como⁴

$$h_{00} \stackrel{!}{=} \frac{2}{c^2}\phi, \quad (3.18)$$

de modo que

$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}.$

(3.19)

Note que el análisis realizado entrega información, dadas las aproximaciones consideradas, sólo de una componente de la métrica, la componente g_{00} en coordenadas quasi-cartesianas. Las otras componentes son también no triviales, como puede comprobarse estudiando las ecuaciones linealizadas de Einstein.

La consistencia de la relación (3.19) con la aproximación (3.4) requiere que $|\phi/c^2| \ll 1$. Ya que el potencial (newtoniano) generado por una masa M a una distancia r es $|\phi| \approx GM/r$, entonces esta condición implica que $GM/c^2r \ll 1$. Como referencia, en la cercanía de nuestro Sol tenemos que $GM/c^2r \sim GM_\odot/c^2R_\odot \sim 10^{-6}$.

⁴Aquí se ha considerado que tanto h_{00} como ϕ se anulan muy lejos de la fuente del campo.

3.3.1. Redshift gravitacional en el límite newtoniano

Como un primer ejemplo, considere el caso en que el campo gravitacional es débil, de modo que podamos usar la aproximación newtoniana (3.19). Consideraremos además una fuente de radiación en reposo en el punto con coordenadas (cuasi-cartesianas) x_e^i y un receptor en reposo en el punto con coordenadas x_r^i . En otras palabras, las líneas de mundo del emisor y receptor son de la forma $x_e^\mu = (ct_e(\tau_e), x_e^i)$ y $x_r^\mu = (ct_r(\tau_r), x_r^i)$. Los respectivos tiempos propios del emisor y receptor son entonces:

$$d\tau_e = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x_e) c^2 dt_e^2} \approx \sqrt{1 + \frac{2\phi(x_e)}{c^2}} dt_e \approx \left(1 + \frac{\phi(x_e)}{c^2}\right) dt_e, \quad (3.20)$$

$$d\tau_r = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x_r) c^2 dt_r^2} \approx \sqrt{1 + \frac{2\phi(x_r)}{c^2}} dt_r \approx \left(1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}\right) dt_r. \quad (3.21)$$

Consideré ahora la emisión de señales luminosas desde el emisor hasta el receptor. Estas señales se mueven a lo largo de curvas geodésicas nulas desde x_e^i hasta x_r^i . Si el campo gravitacional es estacionario, entonces puede verificarse fácilmente que la diferencia de coordenadas temporales entre la emisión de dos pulsos, Δt_e , es igual a la diferencia de coordenadas temporales entre la recepción de éstos, Δt_r , es decir, $\Delta t_r = \Delta t_e$. Un ejemplo explícito en el que se puede verificar esta propiedad será estudiado en la sección 3.5.6. Con esto, podemos escribir

$$\Delta\tau_e \approx \left(1 + \frac{\phi(x_e)}{c^2}\right) \Delta t_e, \quad (3.22)$$

$$\Delta\tau_r \approx \left(1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}\right) \Delta t_r, \quad (3.23)$$

y entonces

$$\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_e} \approx \frac{1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}}{1 + \frac{\phi(x_e)}{c^2}} \approx \left(1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\phi(x_e)}{c^2}\right) \approx 1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2} - \frac{\phi(x_e)}{c^2}, \quad (3.24)$$

es decir,

$$\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_e} \approx 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (3.25)$$

Este resultado muestra que *un intervalo de tiempo respecto a un emisor es percibido con una duración mayor por un receptor, en el caso que el receptor se encuentre en una región con campo gravitacional (newtoniano) mayor*. Es decir, $\Delta\tau_r > \Delta\tau_e$ si $\phi(x_r) > \phi(x_e)$ o, equivalentemente, $\Delta\phi > 0$. Esto ocurre, por ejemplo, para señales alejándose de una masa que genera campo gravitacional⁵. Como caso particular, los intervalos de tiempo pueden ser los correspondientes a un periodo de la radiación emitida desde el emisor. En ese caso, $\Delta\tau_e = 1/\nu_e$, donde ν_e es la frecuencia de la radiación emitida. Similamente, $\Delta\tau_r = 1/\nu_r$. Entonces,

$$\frac{\nu_e}{\nu_r} \approx 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (3.26)$$

o, en términos del *redshift* $z := (\nu_e - \nu_r)/\nu_r$, simplemente

$$z \approx \frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

Redshift grav.
campo débil

(3.27)

⁵Recuerde que el potencial newtoniano (con la elección de que se anule en el infinito) es *negativo*.

Este efecto fue derivado por primera vez por Einstein en 1907 [10] a partir del Principio de Equivalencia y luego discutido en mayor detalle en [12], y fue confirmado experimentalmente (usando el efecto Mössbauer⁶) por primera vez por Pound y Rebka en 1960 [13] con un redshift $z \sim 10^{-15}$ encontrándose que $(\Delta\nu)_{\text{exp}}/(\Delta\nu)_{\text{teo}} = 1.05 \pm 0.10$ y luego en 1964/1965 [14, 15] con emisores situados sobre la Tierra y receptores a aproximadamente 22.86 m de altura (correspondiendo a $z \approx -4.9 \times 10^{-15}$) encontrando $(\Delta\nu)_{\text{exp}}/(\Delta\nu)_{\text{teo}} = 0.9990 \pm 0.0076$. Posteriormente, Snider [16] verificó la presencia del efecto en el caso de la luz emitida desde el Sol ($z \sim 10^{-6}$). Actualmente, es necesario tomar en cuenta el redshift gravitacional que afecta a los satélites que conforman el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) para hacer posible su correcto funcionamiento. El actual “record” de la medición del efecto de redshift gravitacional producto de la diferencia de altura *más pequeña* ha sido reportado por C. W. Chou et al. [17], quienes han logrado verificar la predicción (3.27) con diferencias de altura de $h \approx 33$ cm !, gracias al uso de relojes ópticos ($z \sim 10^{-17}$).

3.4. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de Einstein, es decir, las ecuaciones de campo para el “potencial gravitacional” en la teoría de Einstein (e.d., la métrica) fueron presentadas (sin constante cosmológica) en Noviembre de 1915 [18] y son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

Ecuación de Einstein s/cte. cosmológica

Discutiremos ahora algunas *motivaciones* para considerar estas ecuaciones como modelo que determina cómo el espaciotiempo se curva en presencia de una distribución de materia. Los argumentos que discutiremos hacen que estas ecuaciones parezcan “razonables” dentro del marco general en el que descansa la teoría. No debe olvidarse, sin embargo, que en definitiva la teoría asume como *postulado* la validez de estas ecuaciones de campo. Si son o no éstas las ecuaciones correctas para describir la interacción gravitacional sólo puede decidirse *a posteriori*, comparando las predicciones de la teoría así construida, con las observaciones.

En el límite newtoniano, el campo gravitacional está determinado por la ecuación de Poisson (1.45). En la teoría de Einstein, por otro lado, tenemos la relación (3.18) en el mismo límite. Como la ecuación de Poisson es de segundo orden en las derivadas del potencial, entonces es natural (y simple) suponer que las ecuaciones de campo para la geometría del espaciotiempo sean ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas de la métrica. Específicamente, en el límite no relativista las ecuaciones de campo deben reducirse a

$$\nabla^2 g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2} \rho. \quad (3.29)$$

Por otro lado, las ecuaciones buscadas deben ser covariantes bajo TGC’s (puesto que en un espacio curvo general, no hay coordenadas preferidas o “más simples”, de modo que es necesario poder escribirlas en coordenadas arbitrarias. Más aún en este caso la métrica es *la incógnita*, es decir, desconocida a priori). Las únicas combinaciones de segundas derivadas de la métrica que forman tensores son aquellas contenidas en el tensor de curvatura de Riemann y sus tensores derivados (Ricci y escalar de curvatura). De esta forma, esperamos que el lado izquierdo de (3.29) sea generalizado a alguna combinación adecuada de componentes del $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$ y/o sus contracciones. Además, el “lado derecho” de la ecuación requerida debe ser la generalización covariante y relativista de la densidad de masa de la distribución que genera el campo. En

⁶Ver, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_M%C3%B3ssbauer.

RE la descripción completa y covariante (bajo TL's en ese caso) de la distribución de energía-momentum de una distribución es dada por el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$. Naturalmente, en RG se supone que la fuente del campo gravitacional es el tensor de energía-momentum, y se considera que éste es un tensor bajo TGC's, que se reduce a la expresión válida en RE en ausencia de gravitación. Por esto, en el límite newtoniano, tenemos que $T_{00} \approx \rho c^2$. Con esto, podemos escribir la ecuación de campo no-relativista como

$$\nabla^2 g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (3.30)$$

Todo lo anterior motiva a considerar una ecuación de campo, relativista y generalmente covariante para el campo gravitacional, de la forma

$$A_{\mu\nu}(g) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

donde $A_{\mu\nu}(g)$ es un tensor de tipo $\binom{0}{2}$ simétrico construido a partir de la curvatura y sus contracciones. Las ecuaciones de Einstein son precisamente de esta forma.

Note que las ecuaciones de campo (3.28) pueden escribirse, equivalentemente, como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right], \quad (3.32)$$

donde $T := T^\mu_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ es la traza del tensor de energía-momentum de la materia. En esta forma, es simple verificar (hágalo!) que la ecuación de campo se reduce a (1.45) en el límite newtoniano.

En el vacío, es decir, en una región libre de materia, las ecuaciones de campo se reducen a la condición que el tensor de Ricci sea nulo:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.33)$$

Note que las ecuaciones de campo en el vacío (3.33) admiten como solución un espacio-tiempo de Minkowski, es decir, plano con $g_{\mu\nu} \stackrel{*}{=} \eta_{\mu\nu}$ (en coordenadas pseudo-cartesianas). Sin embargo, existen soluciones no triviales (curvas) de (3.33). Éstas describen el campo gravitacional fuera de una distribución de materia, incluyendo la posibilidad de presencia de *ondas gravitacionales*⁷. En todo caso, se supone que la métrica es siempre *Lorentziana*, es decir, que (en cada punto, usando coordenadas geodésicas) puede diagonalizarse a su forma estándar de Minkowski.

Otra propiedad particular de las ecuaciones de Einstein, y que entrega argumentos a su favor, es que, debido a la identidad (2.222), el tensor de energía-momentum de la materia satisface

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.34)$$

Esta consecuencia de las ecuaciones de campo es la generalización a un campo gravitacional no nulo de la ley de conservación de la energía y el momentum de un sistema. En efecto, en las coordenadas geodésicas asociadas a un SRLI, (3.34) se reduce a $\partial_\mu T^{\mu\nu} \stackrel{*}{=} 0$, es decir, a la ley válida en RE para la conservación de la energía y el momentum de un sistema aislado. Lo mismo ocurre, globalmente, en un espacio plano en coordenadas (pseudo-)cartesianas. Adicionalmente, es posible verificar que, en el caso que el tensor de energía-momentum $T^{\mu\nu}$ sea el de un fluido perfecto con presión despreciable (polvo), la identidad (3.34) se reduce, en el límite correspondiente, a la conocida ecuación newtoniana de movimiento para un fluido en presencia

⁷Esto es análogo al caso electromagnético, donde las ondas electromagnéticas son soluciones no-triviales de las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

de un campo gravitacional⁸. Finalmente, (3.34) implica que las partículas que conforman el polvo se mueven siguiendo geodésicas. Ver sección 3.4.1 para los detalles. Esta última es una característica muy particular de la teoría de Einstein de la gravitación: las ecuaciones que rigen la dinámica del campo gravitacional determinan además las ecuaciones de movimiento de los cuerpos sometidos a ese campo.

Una propiedad que diferencia sustancialmente a las ecuaciones de Einstein de la ecuación de Poisson de la teoría newtoniana es que (3.28) es un sistema de (10) ecuaciones *no-lineales* (para 10 incógnitas). Usualmente, se interpreta esta nolinealidad de la teoría de Einstein diciendo que en ella *toda la energía de un sistema* contribuye al campo gravitacional generado, *incluyendo la energía del propio campo gravitacional*. Esta nolinealidad da origen a tipos de fenómenos completamente nuevos respecto a la teoría newtoniana, que se manifiestan, sin embargo, cuando el campo gravitacional es muy intenso (régimen no-lineal). Note, sin embargo, que es necesario ser muy cuidadoso al hablar de “la energía (y momentum) del campo gravitacional”, ya que la teoría de RG no suministra una definición covariante para estos conceptos. En otras palabras, la teoría de RG no entrega una forma de definir un *tensor de energía-momentum para el campo gravitacional* $T_G^{\mu\nu}$ tal que “la energía y el momentum total” se conserven: $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + T_G^{\mu\nu}) = 0$. En RG por otro lado, la relación (3.34) suministra una ley de “balance” (o de “no-conservación”) para el tensor de energía-momentum de la materia, debido a la interacción gravitacional.

Es posible (y así se ha hecho) considerar modificaciones de las ecuaciones de campo (3.28). En particular, el mismo Einstein en 1917 [19], al aplicar su teoría a escala cosmológica, consideró agregar un término adicional al lado izquierdo de (3.28) que *no altera la propiedad* (3.34). En efecto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

Ecuación de Einstein c/cte. cosmológica

también implica (3.34) ya que la derivada covariante de la métrica es idénticamente nula. Aquí Λ es una constante, con dimensiones $[\Lambda] = L^{-2}$ llamada *constante cosmológica*, que no afecta las predicciones a escalas del sistema solar si su valor es suficientemente pequeño, pero tiene consecuencias importantes sobre la configuración y dinámica del espaciotiempo a grandes escalas (comparadas con $|\Lambda|^{-1/2}$). En general, excepto cuando apliquemos la teoría de Einstein a la cosmología, trabajaremos con la ecuación de campo sin constante cosmológica.

3.4.1. Fluido perfecto sin presión y geodésicas*

En el caso que el tensor de materia describa un fluido perfecto sin presión (polvo) de densidad (propia) ρ y 4-velocidad $u^\mu := dx^\mu/d\tau$, tenemos que

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad (3.36)$$

y, por lo tanto, la identidad (3.34) implica que

$$0 = \nabla_\mu(\rho u^\mu u^\nu) \quad (3.37)$$

$$= \nabla_\mu(\rho u^\mu)u^\nu + \rho u^\mu(\nabla_\mu u^\nu). \quad (3.38)$$

Contrayendo (3.38) con u_ν , y usando $u_\mu u^\mu \equiv c^2$, encontramos que

$$0 = \nabla_\mu(\rho u^\mu)c^2 + \rho u^\mu(\nabla_\mu u^\nu)u_\nu, \quad (3.39)$$

⁸Es decir, a $\partial(\rho\vec{v})/\partial t + \vec{\nabla}p = -\rho\vec{\nabla}\phi$.

pero

$$(\nabla_\mu u^\nu) u_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2} \nabla_\mu (c^2) \quad (3.41)$$

$$\equiv 0, \quad (3.42)$$

de modo que (3.39) implica

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0. \quad (3.43)$$

Esta relación⁹ es la generalización (covariante) de la ley de conservación de la 4-corriente asociada a las partículas que conforman el fluido sin presión al caso en que el campo gravitacional es no nulo. Finalmente, sustituyendo (3.43) en (3.38) encontramos que

$$u^\mu (\nabla_\mu u^\nu) = 0, \quad (3.44)$$

que no es más que la expresión abreviada para la ecuación de la geodésica.

3.5. La solución de Schwarzschild

Una solución de particular importancia es la solución independiente del tiempo y esféricamente simétrica, conocida como solución de Schwarzschild. Ésta describe el campo gravitacional fuera de una masa esféricamente simétrica en reposo. Fue encontrada por Schwarzschild¹⁰ a fines del año 1915.

La condición de que el campo gravitacional, es decir, el espaciotiempo tenga simetría esférica significa que existen tres vectores de Killing tipo espacio que satisfacen el álgebra del grupo de rotaciones tridimensionales, $so(3)$. Bajo estos supuestos es posible probar¹¹ el siguiente resultado:

Teorema: En un espaciotiempo 4-dimensional esféricamente simétrico siempre es posible definir coordenadas¹² $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ tal que el elemento de línea asuma la forma

$$ds^2 = A(r, t)(dx^0)^2 - B(r, t)dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (3.45)$$

donde $A(r, t)$ y $B(r, t)$ son funciones de la coordenada radial r y, eventualmente, de la coordenada temporal t .

En algunas aplicaciones particulares es conveniente escribir las funciones A y B como

$$A(r, t) = e^{\alpha(r, t)}, \quad B(r, t) = e^{\beta(r, t)}, \quad (3.46)$$

de modo que

$$ds^2 = e^{\alpha(r, t)}(dx^0)^2 - e^{\beta(r, t)}dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (3.47)$$

⁹... que puede escribirse equivalentemente como $\partial_\mu (\sqrt{|g|} \rho u^\mu) = 0$.

¹⁰Karl Schwarzschild (1873-1916): Físico y astrónomo alemán. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild.

¹¹Ver, por ejemplo, sección 8.1 de [39], y/o sección 10.1 de [23] para mayores detalles.

¹²Con los rangos de variación usuales para coordenadas angulares: $0 \leq \theta < \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$.

de donde vemos que el tensor métrico, en estas coordenadas, es diagonal y puede ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

La métrica inversa es entonces:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Las componentes no nulas (y linealmente independientes) de la conexión, en las coordenadas usadas, son:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\alpha}}{2c}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{\alpha'}{2}, \quad \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{\beta}}{2c}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\beta'}{2}, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\beta}, \quad (3.50)$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\beta}}{2c} e^{(\beta-\alpha)}, \quad \Gamma^1_{33} = -r \sin^2 \theta e^{-\beta}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad (3.51)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\alpha'}{2} e^{(\alpha-\beta)}, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \cot \theta, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta. \quad (3.52)$$

De igual forma, se tiene que las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$R_{00} = -\frac{1}{4c^2} [2\ddot{\beta} - \dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}^2] + \frac{1}{2} e^{(\alpha-\beta)} \left[\alpha'' - \frac{\beta'\alpha'}{2} + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right], \quad (3.53)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4c^2} e^{(\beta-\alpha)} [2\ddot{\beta} - \dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}^2] - \frac{1}{2} \left[\alpha'' - \frac{\beta'\alpha'}{2} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right], \quad (3.54)$$

$$R_{22} = 1 - e^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{2} r\beta' + \frac{1}{2} r\alpha' \right], \quad (3.55)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (3.56)$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\beta}}{cr}. \quad (3.57)$$

Con esto, el escalar de curvatura es:

$$R = e^{-\beta} \left[\alpha'' + \frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{1}{2} \beta'\alpha' + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{2}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} - \frac{e^{-\alpha}}{2c^2} [2\ddot{\beta} - \dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}^2]. \quad (3.58)$$

Conocidos $R_{\mu\nu}$ y R podemos calcular $G_{\mu\nu}$. Así obtenemos,

$$G_{00} = e^{\alpha-\beta} \left[\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} e^\alpha, \quad (3.59)$$

$$G_{01} = \frac{\dot{\beta}}{cr}, \quad (3.60)$$

$$G_{11} = \frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} e^\beta, \quad (3.61)$$

$$G_{22} = -e^{-\beta} \left[\frac{r^2}{4} \alpha' \beta' - \frac{r^2}{4} \alpha'^2 - \alpha'' \frac{r^2}{2} - \frac{r}{2} (\alpha' - \beta') \right] - \frac{r^2}{4c^2} e^{-\alpha} [2\ddot{\beta} - \dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}^2] \quad (3.62)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22}. \quad (3.63)$$

3.5.1. Solución de Schwarzschild Exterior

Las ecuaciones del campo gravitatorio se pueden resolver exactamente en el caso de un campo central en el vacío, es decir, fuera de las masas que generan el campo.

En efecto, en el vacío las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$0 = \frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r} - \frac{e^\beta}{r^2}, \quad (3.64)$$

$$0 = \dot{\beta}, \quad (3.65)$$

$$0 = \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha'}{r} - \frac{e^\beta}{r^2}, \quad (3.66)$$

$$0 = e^{-\beta} \left[\alpha'' + \frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{1}{2} \beta' \alpha' + \frac{\alpha' - \beta'}{r} \right] - \frac{e^{-\alpha}}{c^2} \left[\ddot{\beta} - \frac{\dot{\beta} \dot{\alpha}}{2} + \frac{\dot{\beta}^2}{2} \right]. \quad (3.67)$$

Puede verificarse (hágalo!) que la última de estas ecuaciones se sigue de las anteriores y, por lo tanto, no suministra información adicional. Restando (3.64) y (3.66) obtenemos

$$\frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{r} = 0, \quad (3.68)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial r} (\alpha(r, t) + \beta(r, t)) = 0. \quad (3.69)$$

Esta ecuación implica entonces que

$$\alpha(r, t) + \beta(r, t) = f(t), \quad (3.70)$$

con $f(t)$ una función dependiente sólo de la coordenada temporal. Por otro lado, de (3.65) obtenemos que $\beta(r, t) = \beta(r)$. Con esto, (3.70) implica que

$$\alpha(r, t) = f(t) - \beta(r). \quad (3.71)$$

Como consecuencia de la separación (3.71), la función $f(t)$ puede ser elegida, sin pérdida de generalidad, como $f(t) = 0^{13}$. Por lo tanto,

$$\alpha(r) = -\beta(r). \quad (3.72)$$

Observamos que (3.72) implica que las componentes de la métrica serán independientes de la coordenada temporal.

La condición (3.72) implica que (3.64) se reduce a (3.66) que, en términos de $A = e^\alpha$ adopta la forma

$$rA' + A - 1 = 0. \quad (3.73)$$

Definiendo $u := A - 1$ esta ecuación se reduce aún más a

$$ru' + u = 0, \quad (3.74)$$

que tiene como solución a

$$u(r) = -\frac{2m}{r}, \quad (3.75)$$

¹³Usando (3.71) el elemento de línea puede escribirse como $ds^2 = e^{\tilde{\alpha}(r)} e^{f(t)} (dx^0)^2 - e^\beta dr^2 - r^2 d\Omega^2$. El factor $e^{f(t)}$ puede ser eliminado realizando un cambio de la coordenada temporal: $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(x^0)$, con $\frac{d\bar{x}^0}{dx^0} = e^{f/2}$, de modo que $ds^2 = e^{\tilde{\alpha}(r)} (d\bar{x}^0)^2 - e^\beta dr^2 - r^2 d\Omega^2$.

donde m es una constante (con dimensiones de distancia), y el factor -2 (3.75) es introducido por conveniencia posterior. Con esto, podemos reconstruir la solución completa. El elemento de línea correspondiente a la solución de las ecuaciones en el vacío es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(cdt)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (3.76)$$

Schwarzschild
coord. de
curvatura

Equivalentemente,

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.77)$$

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.78)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (3.79)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.80)$$

Teorema de Birkhoff¹⁴: *Toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío es necesariamente estática, es decir, independiente del tiempo, y asintoticamente plana.*

Para identificar físicamente la constante m podemos considerar el campo a distancias muy grandes de la fuente, de modo que el campo gravitacional sea débil y podamos usar la relación (3.19). Por tanto, para $r \gg 2m$ tenemos,

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (3.81)$$

Con esto obtenemos que el potencial newtoniano (es decir, en el límite de campo débil) correspondiente a la solución encontrada es

$$\phi = -\frac{mc^2}{r}. \quad (3.82)$$

Éste es un potencial “coulombiano”, es decir, que decae proporcionalmente a $1/r$. Ya que en la teoría de Newton el potencial de un cuerpo esféricamente simétrico de masa total M es $\phi = -GM/r$, podemos identificar

$$m \stackrel{!}{=} \frac{GM}{c^2}. \quad (3.83)$$

La constante $2m$, es frecuentemente llamada *radio de Schwarzschild* del cuerpo de masa M . La escala de distancias que $2m$ determina tiene importantes propiedades, ya que por ejemplo que cuando $r = 2m$ parece haber una “singularidad en la métrica”. En general, en la teoría de RG, cada cuerpo tiene una cierta distancia característica asociada a su masa. Por ejemplo, para el Sol y la Tierra,

$$2m_\odot = \frac{2GM_\odot}{c^2} \approx 3 \text{ km}, \quad (3.84)$$

$$2m_T = \frac{2GM_T}{c^2} \approx 0.9 \text{ cm}. \quad (3.85)$$

Note, sin embargo, que en el caso del Sol, la Tierra, y de hecho casi todos los objetos astronómicos, el radio de Schwarzschild correspondiente es mucho menor que el tamaño de la

¹⁴George David Birkhoff: 1884-1944, Matemático Estadounidense. Ver http://en.wikipedia.org/wiki/G._D._Birkhoff.

distribución de materia correspondiente. En otras palabras, en estos casos no es válido considerar la solución de Schwarzschild con $r = 2m$ ya que esta solución es válida sólo en el vacío, lo que impone $r \geq R$, donde $R > 2m$ es la coordenada radial de la superficie de la distribución de materia que es fuente del campo gravitacional.

La solución de Schwarzschild posee las siguientes propiedades:

- Es esféricamente simétrica.
- Es estática (describe el campo gravitacional estacionario generado por *fuentes estáticas*).
- Es asintóticamente plana: $ds^2 \rightarrow c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ para $r \rightarrow \infty$. Más precisamente $R^\mu_{\nu\lambda\rho} \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$.

3.5.2. Solución de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas

Las coordenadas (ct, r, θ, φ) son usualmente llamadas “coordenadas de curvatura” y en ellas la métrica de Schwarzschild asume una forma relativamente simple. Una característica de la teoría de RG es que siempre tenemos a nuestra disposición muchos (en realidad, infinitos) sistemas coordinados. Una buena razón para buscar un conjunto alternativo de coordenadas para el espaciotiempo de Schwarzschild es que podríamos escribir ds^2 en un sistema coordinado isotropo en el que la sección espacial ($t = \text{cte.}$) sea proporcional a la usual distancia euclídea:

$$ds^2 = \tilde{A}(cdt)^2 - \tilde{B}d\ell_{R^3}^2, \quad (3.86)$$

donde $d\ell_{R^3}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en coordenadas “cuasi”-cartesianas, o $d\ell_{R^3}^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ en coordenadas “cuasi”-esféricas, con $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ y $z = \rho \cos \theta$. Entonces, las coordenadas isotrópicas que buscamos deben ser tales que el elemento de línea adopte la forma

$$ds^2 = \tilde{A}(\rho)(cdt)^2 - \tilde{B}(\rho)[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (3.87)$$

Comparando (3.87) con (3.76) encontramos las siguientes condiciones:

$$\tilde{A}(\rho) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.88)$$

$$\tilde{B}(\rho) d\rho^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (3.89)$$

$$\tilde{B}(\rho) \rho^2 = r^2. \quad (3.90)$$

Estas condiciones son satisfechas si ambos sistemas de coordenadas están relacionados por una simple transformación de la coordenadas radial, de la forma $\rho = \rho(r)$. La condición (3.89) suministra una ecuación diferencial para $\rho(r)$. Conocida esta relación, las funciones \tilde{A} y \tilde{B} quedan determinadas por las condiciones (3.88) y (3.90), respectivamente. Usando (3.90) y suponiendo que $d\rho/dr > 0$ y $r > 2m$ podemos reescribir (3.89) como

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{\sqrt{r(r-2m)}}, \quad r > 2m. \quad (3.91)$$

Integrando esta relación¹⁵ obtenemos, luego de algo de álgebra

$$r = \beta \rho \left(1 + \frac{m}{2\beta\rho}\right)^2, \quad (3.92)$$

¹⁵ $\int dr / \sqrt{r(r-2m)} = \ln |r - m + \sqrt{r^2 - 2mr}|.$

donde β es una constante, relacionada con la escala elegida para la coordenada radial ρ . Sin perder generalidad, podemos elegir esta constante de modo que asintóticamente se aproxime a la usual coordenada radial esférica en un espacio plano. Esto requiere que $\tilde{B} \rightarrow 1$ para $\rho \rightarrow \infty$ o, equivalentemente, que $\rho/r \rightarrow 1$. Así obtenemos $\beta = 1$ y con esto

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2, \quad \rho > \frac{m}{2}, \quad (3.93)$$

$$\tilde{B} = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4. \quad (3.94)$$

Finalmente, reemplazando (3.93) en (3.88) encontramos la otra función requerida:

$$\tilde{A} = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2}. \quad (3.95)$$

Resumiendo, el elemento de línea de la solución de Schwarzschild exterior en coordenadas isotrópicas tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} (cdt)^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2)], \quad \rho > \frac{m}{2}, \quad (3.96)$$

Schwarzschild
coord.
isotrópicas

o, alternativamente,

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} (cdt)^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.97)$$

3.5.3. Geodésicas en la geometría de Schwarzschild

Para considerar la ecuación de las geodésicas necesitamos evaluar los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild, en coordenadas de curvatura. Las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{m}{r(r-2m)}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{(r-2m)m}{r^3}, & \Gamma^1_{11} &= -\frac{m}{r(r-2m)}, \\ \Gamma^1_{22} &= -(r-2m), & \Gamma^1_{33} &= -(r-2m) \operatorname{sen}^2 \theta, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

3.5.4. Geodésicas tipo tiempo

En este caso, parametrizamos las geodésicas usando el tiempo propio τ sobre ellas, $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Con esto, las ecuaciones adoptan la siguiente forma explícita:

$$\ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (3.99)$$

$$\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3} \dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)} \dot{r}^2 - (r-2m) [\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2] = 0, \quad (3.100)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (3.101)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0, \quad (3.102)$$

donde hemos denotado $\dot{f} := df/d\tau$.

Las ecuaciones (3.99) y (3.102) son equivalentes a

$$\frac{1}{(1 - \frac{2m}{r})} \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} \right] = 0, \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{d\tau} [r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}] = 0. \quad (3.104)$$

En esta forma, es claro que ambas ecuaciones implican la existencia de *dos constantes del movimiento* (es decir, cantidades que asumen el mismo valor en todos los puntos de la línea de mundo asociada a la geodésica considerada). Por simplicidad introduciremos dos constantes adimensionales, k y h , definidas por

$$k := \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}, \quad hmc := r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (3.105) \quad \begin{matrix} & \\ & \text{cantidades} \\ & \text{conservadas} \end{matrix}$$

cuyos valores quedan determinados por las condiciones iniciales del movimiento. Estas constantes están relacionadas con las usuales definiciones newtonianas de la energía y momentum angular por unidad de masa del cuerpo orbitando, las que pueden recobrarse en los límites apropiados¹⁶ a partir de $\mathcal{E} = kc^2$ y $\mathcal{L} = hmc$, respectivamente. Por esto, llamaremos a k y h las *constantes de energía y momentum angular*, respectivamente.

Además, tal como en el caso newtoniano (ver apéndice A) es directo verificar que la órbita está contenida en un plano. Esto se manifiesta en que si inicialmente el movimiento está contenido en un plano, que dada la simetría del problema, podemos elegir como el plano ecuatorial, es decir, $\theta(0) = \pi/2$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ entonces (3.102) implica que $\ddot{\theta}(0) = 0$, y (tomando las derivadas sucesivas), que todas las derivadas superiores de θ son nulas: en otras palabras, que

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} \quad (3.106)$$

es una solución para todo τ . Con lo anterior, sólo la ecuación radial (3.100) debe ser aún resuelta.

Adicionalmente, podemos considerar la identidad

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv c^2, \quad (3.107)$$

que suministra la siguiente relación entre las derivadas de las coordenadas sobre la trayectoria:

$$\left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1 - \frac{2m}{r})} - r^2 \dot{\varphi}^2 = c^2. \quad (3.108)$$

Usando (3.105) y (3.106) podemos reescribir (3.100) y (3.108) como

$$\ddot{r} + \frac{mc^2 k^2}{r(r - 2m)} - \frac{m}{r(r - 2m)} \dot{r}^2 - h^2 m^2 c^2 \frac{(r - 2m)}{r^4} = 0, \quad (3.109)$$

$$\dot{r}^2 = k^2 c^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{h^2 m^2}{r^2} \right). \quad (3.110)$$

Puede verificarse (hágalo!) que (3.110) implica la condición (3.109). Por lo tanto, sólo es necesario resolver (3.110). El análisis de la condición (3.110) se simplifica usando el *método del potencial efectivo*.

¹⁶Es decir, campo débil $r \gg 2m$ y velocidades norelativistas $|dr/dt| \ll c$, $r|d\theta/dt| \ll c$ y $r|d\varphi/dt| \ll c$.

Potencial Efectivo

Definimos el “potencial efectivo”

$$\tilde{V}(r) := \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{h^2 m^2}{r^2}\right), \quad (3.111) \quad \text{Potencial Efectivo}$$

de modo que (3.110) puede reescribirse como

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = k^2 - \tilde{V}(r). \quad (3.112)$$

Esta relación es *análoga* a la condición de conservación de la energía mecánica de un cuerpo en un movimiento unidimensional no-relativista:

$$v^2 = \frac{2}{m}(E - V). \quad (3.113)$$

Así, la relación (3.112) restringe los valores entre los que la coordenada radial r puede variar a aquellos que efectivamente satisfacen $\dot{r}^2 \geq 0$, es decir, aquellos valores de r en los cuales el potencial asume valores menores que el cuadrado de la constante de energía de la órbita:

$$\tilde{V}(r) \leq k^2. \quad (3.114)$$

Note además que (3.112) implica (luego de derivar respecto al tiempo propio) que

$$\frac{2}{c^2} \ddot{r} = -\frac{d\tilde{V}}{dr}. \quad (3.115)$$

Puede verificarse (hágalo!) que el potencial efectivo posee dos puntos extremos r_A y r_B de la forma

$$r_A = \frac{mh^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right), \quad r_B = \frac{mh^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{h^2}}\right), \quad (3.116)$$

es decir, que satisfacen $\tilde{V}'(r_A) = \tilde{V}'(r_B) = 0$. Estos puntos extremos existen sólo si $h \geq 2\sqrt{3} \approx 3.464$. Además, puede verificarse que en este caso $\tilde{V}''(r_A) \leq 0$ y $\tilde{V}''(r_B) \geq 0$ y que la igualdad $r_A = r_B$ se encuentra precisamente si $h = 2\sqrt{3}$.

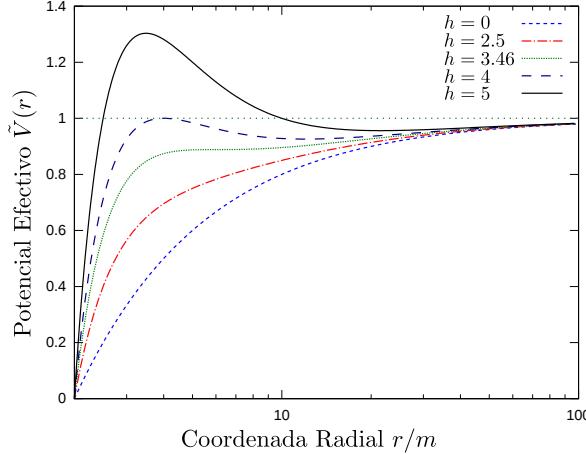


Figura 3.1: Potencial Efectivo (escala logarítmica en r).

Si $h > 2\sqrt{3}$ el potencial tiene entonces un máximo en $r = r_A$ y un mínimo en $r = r_B$. Si $h = 2\sqrt{3}$ ambos puntos convergen en un punto de inflexión, $r_A = r_B$, y si $h < 2\sqrt{3}$ no existen extremos locales.

De acuerdo a lo anterior, existen varios tipos de órbitas posibles, dependiendo de los valores de k y h :

- Si $h < 2\sqrt{3}$ y $k < 1$ el movimiento radial es acotado, con un máximo r_{\max} determinado por la igualdad $\tilde{V}(r_{\max}) = k^2$, pero no existe un mínimo, de modo que en estos casos la partícula finalmente cae hacia el cuerpo central.
- Si $h < 2\sqrt{3}$ y $k > 1$ la trayectoria no está acotada en r , correspondiendo a una partícula que viene desde el infinito y cae hacia el cuerpo central, o que escapa desde éste hasta el infinito.
- Si $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 > \tilde{V}(r_A)$ tenemos una situación similar al caso anterior ($h < 2\sqrt{3}$ y $k > 1$).
- Si $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 = \tilde{V}(r_A)$ existen en principio órbitas circulares, con $r = r_c = \text{cte.}$, tal que $\tilde{V}(r_c) = k^2$, pero éstas son *inestables*. Ver (3.115).
- Si $h > 2\sqrt{3}$, $\tilde{V}(r_B) < k^2 < \tilde{V}(r_A)$ y $k > 1$ existen órbitas no ligadas, donde r puede variar desde un valor mínimo r_{\min} (tal que $\tilde{V}(r_{\min}) = k^2$, $r_{\min} > r_A$) hasta el infinito. Ejemplo de este caso son partículas que vienen del infinito, son deflectadas por el cuerpo central y escapan nuevamente al infinito. En este caso son también posibles órbitas que caen inevitablemente al cuerpo central.
- Si $h > 2\sqrt{3}$, $\tilde{V}(r_B) < k^2 < \tilde{V}(r_A)$ y $k < 1$ existen órbitas ligadas, cuyas coordenadas radiales varían entre r_{\min} y r_{\max} , con $\tilde{V}(r_{\min}) = \tilde{V}(r_{\max}) = k^2$.
- Si $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 = \tilde{V}(r_B)$ existen órbitas circulares estables, con $r = r_c = \text{cte.}$, tal que $\tilde{V}(r_c) = k^2$.
- Si $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 < \tilde{V}(r_B)$ tenemos una situación similar al primer caso aquí listado ($h < 2\sqrt{3}$ y $k < 1$).

Órbitas circulares

De acuerdo a la clasificación anterior, estudiamos aquí el caso en que $h > 2\sqrt{3}$ y $k^2 = \tilde{V}(r_B)$. Usando (3.116b) encontramos (luego de algo de álgebra) que las constantes de movimiento apropiadas a un movimiento circular estable deben satisfacer la relación siguiente

$$h_c = \frac{r_c}{\sqrt{m(r_c - 3m)}}, \quad k_c = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_c}}}. \quad (3.117)$$

Usamos (3.105a) para expresar \dot{t} en términos de las constantes de movimiento (recuerde que elegimos $\theta = \pi/2$):

$$\dot{t}_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3m}{r_c}}}. \quad (3.118)$$

Similarmente, a partir de (3.105b) podemos evaluar $\dot{\varphi}$ en términos de las constantes de movimiento,

$$\dot{\varphi}_c = \frac{c}{r_c} \sqrt{\frac{m}{r_c - 3m}}. \quad (3.119)$$

Ya que tanto \dot{t}_c como $\dot{\varphi}_c$ son constantes, podemos integrar las ecuaciones de movimiento directamente, obteniendo

$$x^\mu(\tau) = (\dot{t}_c \tau, r_c, \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}_c \tau). \quad (3.120)$$

La menor órbita circular estable ("innermost stable circular orbit", ISCO), se obtiene, de acuerdo a (3.116b), en el límite $h \rightarrow 2\sqrt{3}$. En este caso

$$r_c = 6 \text{ m}, \quad (3.121)$$

y

$$k_{\text{ISCO}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \dot{t}_{\text{ISCO}} = \sqrt{2}, \quad \dot{\varphi}_{\text{ISCO}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{c}{m}. \quad (3.122)$$

Por lo tanto, a diferencia del caso newtoniano, **la teoría gravitacional de Einstein predice un límite para la existencia de órbitas circulares estables**. En la teoría newtoniana, ellas existen para cada valor de $r > 0$, en RG sólo pueden existir para $r_c \geq 6\text{m}$.

Órbitas ligadas no-circulares

Este es el caso en que $h > 2\sqrt{3}$, $\tilde{V}(r_B) < k^2 < \tilde{V}(r_A)$ y $k < 1$. Para analizar la forma de la trayectoria es conveniente considerar cómo cambia la coordenada radial en términos de la angular, $r = r(\varphi)$. Para esto, realizamos el cambio de variables correspondiente, de modo que

$$r' := \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{d\tau}}{\frac{d\varphi}{d\tau}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}. \quad (3.123)$$

Usando ahora (3.105b) podemos escribir

$$\dot{r} = \frac{hmc}{r^2} r', \quad \ddot{r} = \frac{h^2 m^2 c^2}{r^4} \left[-\frac{2}{r} r'^2 + r'' \right]. \quad (3.124)$$

Adicionalmente, la solución de las ecuaciones de movimiento es más simple, tal como en el caso newtoniano, definiendo la variable auxiliar

$$u := \frac{1}{r}, \quad (3.125)$$

de modo que

$$r' = -\frac{1}{u^2} u', \quad r'' = \frac{2}{u^3} u'^2 - \frac{1}{u^2} u''. \quad (3.126)$$

Con estos cambios, la ecuación (3.110) se transforma en

$$h^2 m^2 u'^2 - k^2 + (1 - 2mu)(1 + h^2 m^2 u^2) = 0. \quad (3.127)$$

Derivando esta relación y considerando el caso no circular, es decir $u' \neq 0$, obtenemos

$$u'' + u = \frac{1}{mh^2} + 3m u^2. \quad (3.128)$$

La ecuación newtoniana correspondiente, ver (A.41), es

$$u'' + u = \frac{1}{mh^2}, \quad (3.129)$$

con solución

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{mh^2} (1 + e \cos \varphi). \quad (3.130)$$

En estas condiciones, el término “extra” en el lado derecho de (3.128) es mucho más pequeño que el término “newtoniano”. En efecto, definiendo la variable adimensional

$$w := mh^2 u. \quad (3.131)$$

Entonces (3.128) es equivalente a

$$w'' + w = 1 + \epsilon w^2, \quad (3.132)$$

con

$$\epsilon := \frac{3}{h^2}. \quad (3.133)$$

Usando (3.105b) encontramos que, en el caso de cuerpos orbitando en campos débiles (como es el caso en nuestro sistema solar),

$$\epsilon = \frac{3m^2 c^2}{r^4 \dot{\varphi}^2} \approx \frac{3m^2 c^2}{r^2 v_\varphi^2} \approx 3 \frac{m^2}{r^2} \frac{c^2}{v_\varphi^2} \approx 3 \frac{m}{r} \ll 1. \quad (3.134)$$

En particular para Mercurio $\epsilon \approx 10^{-7}$. Por otro lado $w \approx 1$.

Usando el método perturbativo, postulamos la siguiente expansión para la solución de (3.128):

$$w(\varphi, \epsilon) = w_0(\varphi) + \epsilon w_1(\varphi) + \epsilon^2 w_2(\varphi) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.135)$$

donde la solución “no perturbada” es

$$w_0(\varphi) = 1 + e \cos \varphi, \quad (3.136)$$

y donde w_1, w_2 se suponen de orden de magnitud 1. Reemplazando la expansión (3.135) en (3.128) e igualando términos del mismo orden en potencias de ϵ , obtenemos la siguiente ecuación para la primera perturbación:

$$w_1'' + w_1 = 1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi \quad (3.137)$$

$$= \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} \cos(2\varphi). \quad (3.138)$$

Esta es una ecuación tipo oscilador armónico forzado, donde el término forzante es la superposición de un término constante, un *término resonante*, y un término periódico no resonante. Su solución es del tipo

$$w_1(\varphi) = A + B\varphi \sin \varphi + C \cos(2\varphi). \quad (3.139)$$

Reemplazando esta solución general en (3.138) podemos determinar las constantes involucradas:

$$A = 1 + \frac{e^2}{2}, \quad B = e, \quad C = -\frac{e^2}{6}. \quad (3.140)$$

Con esto, la solución de la ecuación (3.128) a primer orden en ϵ adopta la forma:

$$u(\varphi) = \frac{1}{mh^2} \left[1 + e \cos \varphi + \epsilon \left[\underbrace{\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)}_{\text{pert. constante}} + \underbrace{e\varphi \sin \varphi}_{\text{pert. ‘secular’}} - \underbrace{\frac{e^2}{6} \cos(2\varphi)}_{\text{pert. periódica}} \right] \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.141)$$

Usando ahora

$$\cos(\epsilon\varphi) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \sin(\epsilon\varphi) = \epsilon\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.142)$$

podemos escribir los términos newtonianos y de perturbación secular como

$$\cos \varphi + \epsilon \varphi \sin \varphi = \cos [(1 - \epsilon)\varphi] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.143)$$

Análogamente, para la perturbación periódica podemos usar

$$\epsilon \cos(2\varphi) = \epsilon \cos [2(1 - \epsilon)\varphi] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.144)$$

Con esto podemos expresar nuestra solución como

$$u(\varphi) = \frac{1}{mh^2} \left[1 + \epsilon \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + e \cos [(1 - \epsilon)\varphi] - \frac{e^2}{6} \epsilon \cos [2(1 - \epsilon)\varphi] \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.145)$$

Trayectoria perturbada

Esta forma de la solución a primer orden tiene la ventaja que revela más claramente que la órbita (nuevamente, a primer orden en ϵ) es *periódica en φ , pero con un periodo angular distinto de 2π* . Como consecuencia, la órbita no se cierra luego de una revolución completa. Este hecho implica en particular un *corrimiento del perihelio de la órbita*.

El Avance del Perihelio de Mercurio

De (3.145) vemos que, a primer orden en ϵ , el periodo angular de la órbita no es 2π , sino $2\pi/(1 - \epsilon) > 2\pi$. Esto significa que la órbita retornará a una misma distancia dada del centro de fuerzas (por ejemplo, el perihelio) sólo luego de realizar algo más que una rotación completa en torno al centro de fuerzas, en un ángulo de $2\pi/(1 - \epsilon)$. En otras palabras, el *corrimiento angular* de la órbita es dado por

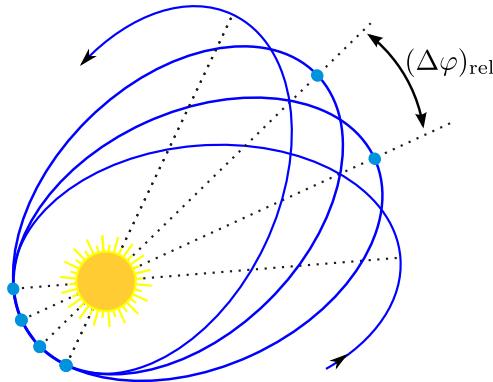


Figura 3.2: Corrimiento del perihelio (adaptada a partir de [esta](#) figura original).

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \epsilon} - 2\pi = 2\pi\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{6\pi}{h^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.146)$$

Podemos expresar ϵ en términos del semieje mayor y la excentricidad de la órbita, ya que

$$a := \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{mh^2}{1 - e^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.147)$$

Así obtenemos, a primer orden,

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)}, \quad (3.148)$$

o, en términos de la masa del cuerpo central:

$$(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}. \quad (3.149)$$

Avance periaстро

Esta expresión fue derivada por Einstein en 1915 y aplicada al caso de la órbita de Mercurio [20]. El avance del perihelio de Mercurio era un fenómeno conocido antes de la formulación de la teoría de la Relatividad General, ya que Le Verrier [25] publicó en 1859 sus observaciones y cálculos en los que dejaba en evidencia un *avance anómalo* de $\approx 45 \pm 5''/\text{siglo}$ (valor citado por Einstein en [20]). Este valor anómalo es el resultante de restar el valor esperado de acuerdo a la teoría de Newton al valor observado¹⁷ (de la época) de $\approx 574''/\text{siglo}$. De acuerdo a Clemence (1947) [26] las mayores contribuciones newtonianas al corrimiento del perihelio de Mercurio son: Venus ($\approx 278''/\text{siglo}$), Júpiter ($\approx 153''/\text{siglo}$), la Tierra ($\approx 90''/\text{siglo}$), Saturno ($\approx 7''/\text{siglo}$), Marte ($\approx 2.5''/\text{siglo}$), Urano ($\approx 0.14''/\text{siglo}$), Neptuno ($\approx 0.042''/\text{siglo}$). Con esto, el corrimiento anómalo asciende a $\approx 43''/\text{siglo}$, valor no podía ser calculado usando la teoría newtoniana, y que fue entonces explicado por la nueva teoría de Einstein.

Para el caso de Mercurio¹⁸ $a \approx 57.91 \times 10^6 \text{ km}$, $e \approx 0.2056$. Además, $GM_\odot/c^2 \approx 1.48 \text{ km}$. Con esto, la predicción relativista para el corrimiento del perihelio de Mercurio asciende a $(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx 5.03 \times 10^{-7} \text{ rad/rev} \approx 0.104''/\text{rev}$. Como el periodo orbital de Mercurio es $T \approx 87.97 \text{ días} \approx 2,41 \times 10^{-3} \text{ siglo}$, entonces $(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx 43''/\text{siglo}$. El valor aceptado actualmente para la predicción relativista es de $(\Delta\varphi)_{\text{rel}} \approx 42.98''/\text{siglo}$, ver [27]. Este resultado está en completo acuerdo con el resultado observational aceptado actualmente, de $42.98(1.000 \pm 0.001)''/\text{siglo}$. Ver [2], sección 3.5, para detalles adicionales.

La predicción de RG para el corrimiento del perihelio ha sido además verificada en nuestro sistema solar para las órbitas de Venus, la Tierra y Marte. En esos casos el corrimiento relativista asciende a aproximadamente $8.65''/\text{siglo}$, $3.85''/\text{siglo}$ y $1.36''/\text{siglo}$, respectivamente [28]. Una de las mejores verificaciones actualmente disponible es la correspondiente al corrimiento del perihelio de la órbita del pulsar binario de Hulse & Taylor PRS 1913+16, para el cual el corrimiento es de aproximadamente $13''/\text{rev}$ (y el periodo de rotación es algo menor que 8 horas!) [29].

3.5.5. Desvío de la luz

En este caso, realizaremos un cálculo similar al correspondiente a trayectorias tipo tiempo, con la diferencia que la ecuación de la geodésica, usando un parámetro arbitrario λ , adopta la forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.150)$$

De este modo las ecuaciones de movimiento toman la forma (aquí denotamos $(\dot{\cdot}) := d(\cdot)/d\lambda$):

$$\frac{1}{(1 - \frac{2m}{r})} \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} \right] = f \dot{t}, \quad (3.151)$$

$$\ddot{r} + \frac{mc^2(r-2m)}{r^3} \dot{t}^2 - \frac{m}{r(r-2m)} \dot{r}^2 - (r-2m) \left[\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] = f \dot{r}, \quad (3.152)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = f \dot{\theta}, \quad (3.153)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{d\lambda} [r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}] = f \dot{\varphi}. \quad (3.154)$$

¹⁷Luego de también sustraer el efecto de la *precesión general*. Ver referencia [26] para más detalles.

¹⁸Ver, por ejemplo, <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.

Note que hemos factorizado los términos al lado izquierdo de (3.151) y (3.154). Nuevamente, el movimiento está confinado a un plano, que podemos elegir como el plano ecuatorial, es decir, con $\theta(\lambda) = \pi/2$. Verificamos que esta solución para θ satisface (3.153). Tal como en el caso tipo tiempo, finalmente nos concentraremos en la forma de la trayectoria. Por esto, elegiremos como parámetro al ángulo φ , es decir, $\lambda := \varphi$. Con esto, $\dot{\varphi} = 1$ y podemos determinar la función f correspondiente a partir de (3.154):

$$f = \frac{d}{d\varphi} \ln [r^2] = \frac{2}{r} r'. \quad (3.155)$$

Introduciendo esta función en (3.151) obtenemos, luego de una simple álgebra,

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \left[\frac{r^2}{(1 - \frac{2m}{r}) t'} \right] = 0, \quad (3.156)$$

que expresa el hecho que existe una cantidad conservada en el movimiento:

$$\frac{r^2}{(1 - \frac{2m}{r})} \frac{d\varphi}{dt} =: \alpha. \quad (3.157)$$

Aquí, para conveniencia posterior, hemos introducido α como constante, con dimensiones $[\alpha] = L^{-1}$, determinada por las condiciones iniciales del movimiento.

Por otro lado, la ecuación radial (3.152) se reduce a

$$r'' + \frac{mc^2(r - 2m)}{r^3} t'^2 - \frac{m}{r(r - 2m)} r'^2 - (r - 2m) = \frac{2}{r} r'^2. \quad (3.158)$$

Tal como en el caso tipo tiempo, esta ecuación puede derivarse de la ecuación de primer orden, en este caso, de la condición $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$. Esta condición implica que

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{(1 - \frac{2m}{r})} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2 = 0. \quad (3.159)$$

Usando (3.157) para expresar $dr/d\varphi$ en términos de r y la constante de movimiento α , la condición (3.159) se reduce a

$$r'^2 + r^2 - 2mr - \alpha^2 r^4 = 0, \quad (3.160)$$

donde ' denota la derivada con respecto a φ .

Introduciendo ahora $u := 1/r$ transformamos esta ecuación en

$$u'^2 + u^2 = \alpha^2 + 2mu^3. \quad (3.161)$$

Derivando esta ecuación llegamos a una ecuación de segundo orden en las derivadas de u que, tal como en el caso tipo tiempo, es equivalente a la ecuación (3.158):

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (3.162)$$

Esta ecuación es la análoga a (3.128). Tal como en el caso anterior, el término introducido por la teoría de RG es $3mu^2$. Puede comprobarse que la ecuación newtoniana, que corresponde al límite $m \rightarrow 0$, es

$$u'' + u = 0, \quad (3.163)$$

y que sus soluciones son líneas rectas. En efecto, una solución general de (3.128) puede expresarse en la forma siguiente:

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{D} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0), \quad (3.164)$$

donde D es una constante con dimensiones de longitud y φ_0 una constante angular. Entonces tendremos que

$$x = r \cos \varphi = D \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi - \varphi_0)}, \quad y = r \sin \varphi = D \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \varphi_0)}. \quad (3.165)$$

Una simple álgebra permite entonces relacionar x con y , obteniendo

$$y = \frac{D}{\cos \varphi_0} + (\tan \varphi_0) x. \quad (3.166)$$

La expresión (3.166) describe una recta en el plano $x - y$, siendo D la *distancia mínima de la recta al origen* y φ_0 el ángulo que forma la recta con el eje x . Ver figura 3.3.

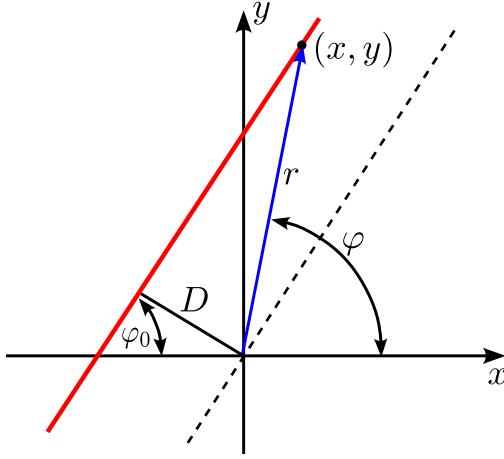


Figura 3.3: Solución newtoniana para el movimiento del rayo de luz.

Determinaremos nuevamente una solución aproximada de (3.162). Primero definimos la variable adimensional $w(\varphi) := Du(\varphi)$. Con esto (3.162) se transforma en

$$w'' + w = \epsilon w^2, \quad (3.167)$$

que tiene como solución “sin perturbar” a

$$w_0(\varphi) = \sin(\varphi - \varphi_0). \quad (3.168)$$

La constante ϵ tiene el valor

$$\epsilon := \frac{3m}{D}, \quad (3.169)$$

que es mucho menor que 1, ya que suponemos que el rayo de luz pasa suficientemente lejos del centro de fuerzas de modo que $D \gg m$. Suponemos además que $w \approx 1$. Con estos ingredientes determinaremos una solución perturbativa de la forma (3.135), con w_0 dado por (3.168). Introduciendo la expansión (3.135) y usando (3.168) encontramos la ecuación para la primera perturbación w_1 :

$$w_1'' + w_1 = \sin^2(\varphi - \varphi_0). \quad (3.170)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma

$$w_1(\varphi) = A + B \cos(\varphi - \varphi_0 + \beta) + C \cos^2(\varphi - \varphi_0). \quad (3.171)$$

Substituyendo esta expresión en (3.170) encontramos que $A = C = 1/3$, mientras que las constantes B y β pueden adoptar valores arbitrarios. Sin embargo, sin pérdida de generalidad es posible elegir¹⁹ $B = \beta = 0$. Así, nuestra solución a primer orden adopta la forma siguiente:

$$u(\varphi) = \frac{1}{D} \left[\sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{m}{D} [1 + \cos^2(\varphi - \varphi_0)] \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.172)$$

Solución perturbada rayo de luz

Para calcular el *ángulo de desvío* de la luz, δ , necesitamos los ángulos δ_1 y δ_2 en que la trayectoria se desvía de la recta no perturbada, para $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow +\infty$, respectivamente. Estos ángulos corresponden a un ángulo inicial $\varphi_i = \varphi_0 + \pi + \delta_1$ y final $\varphi_f = \varphi_0 - \delta_2$, y pueden ser determinados por la condición que en cada caso $r \rightarrow \infty$ o, equivalentemente $u = 0$. El ángulo total de desvío es entonces $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Reemplazamos por tanto $\varphi = \varphi_i = \varphi_0 + \pi + \delta_1$ en la condición $u(\varphi_i)$ obtenemos, a primer orden en δ_1 :

$$0 = u(\varphi_i) \quad (3.173)$$

$$= \frac{1}{D} \left[\sin(\pi + \delta_1) + \frac{m}{D} (1 + \cos^2(\pi + \delta_1)) \right] \quad (3.174)$$

$$= \frac{1}{D} \left[-\sin \delta_1 + \frac{m}{D} (1 + \cos^2 \delta_1) \right] \quad (3.175)$$

$$= \frac{1}{D} \left[-\delta_1 + \frac{m}{D} (1 + 1) \right] + \mathcal{O}(\delta_1^2). \quad (3.176)$$

Por lo tanto, obtenemos,

$$\delta_1 = \frac{2m}{D}. \quad (3.177)$$

Similarmente, para $\varphi_f = \varphi_0 - \delta_2$ encontramos:

$$0 = u(\varphi_f) \quad (3.178)$$

$$= \frac{1}{D} \left[-\sin \delta_2 + \frac{m}{D} (1 + \cos^2 \delta_2) \right] \quad (3.179)$$

$$= \frac{1}{D} \left[-\delta_2 + \frac{m}{D} (1 + 1) \right] + \mathcal{O}(\delta_2^2), \quad (3.180)$$

de modo que

$$\delta_2 = \frac{2m}{D}. \quad (3.181)$$

Así obtenemos que el ángulo total de desvío es

$$\delta \approx \frac{4m}{D}, \quad (3.182)$$

o, en términos de la masa del cuerpo central²⁰,

$$\delta \approx \frac{4GM}{c^2 D}. \quad (3.183)$$

Ángulo de desvío

¹⁹En efecto, si $B \neq 0$ y $\beta \neq 0$, la solución puede reescribirse, a primer orden en ϵ como

$$u(\varphi) = \frac{1}{\tilde{D}} \left[\sin(\varphi - \tilde{\varphi}_0) + \frac{m}{\tilde{D}} (1 + \cos^2(\varphi - \tilde{\varphi}_0)) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

con $\tilde{D} := D/(1 - \epsilon B \sin \beta)$ y $\tilde{\varphi}_0 := \varphi_0 - \epsilon B \cos \beta$. Esta expresión es equivalente a (3.172).

²⁰Note que, en estricto rigor, la constante D no es exactamente el valor mínimo de la coordenada radial en la trayectoria del fotón. La solución (3.172) implica que el mínimo de r (máximo de u) se obtiene para $\varphi = \varphi_0 + \pi/2$, y que a primer orden $r_{\min} = D/(1 + m/D) \approx D - m$. La diferencia entre D y r_{\min} es por esto muy pequeña y despreciable en el contexto de la aproximación usada.

En 1911 Einstein presenta un primer cálculo para el ángulo de desvío de la luz en un campo gravitacional, basado en el principio de equivalencia, pero aún en el contexto de la teoría newtoniana. El valor calculado de esta forma resulta ser *la mitad* del ángulo (3.183) que predice teoría de Relatividad General completa. Ver [12], página 908. Es interesante notar además que si se considera la teoría newtoniana de la gravitación y a los fotones como partículas (masivas) que son atraídas por el Sol y que se mueven con rapidez c , también se obtiene el resultado correspondiente a la mitad de (3.183). Ver [32] para mayores detalles. Por otro lado, el resultado (3.183) fue presentado por Einstein por primera vez en su paper de 1916 [18] (ecuación 74, página 822).

Note también que, de acuerdo a (3.183), la teoría de RG predice un ángulo de desvío *independiente de la frecuencia de la radiación*.

En el caso de rayos de luz pasando muy cerca de la superficie del Sol²¹, $D \approx R_\odot \approx 6.96 \times 10^5$ km, y entonces

$$\delta_\odot \approx \frac{4GM}{c^2R_\odot} \approx 4 \left(\frac{1.48 \text{ km}}{6.96 \times 10^5 \text{ km}} \right) \approx 4 \times 2.13 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 8.52 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 1.75''. \quad (3.184)$$

La observación de este efecto constituyó la *primera verificación experimental de una predicción* de la teoría de gravitación de Einstein. El desvío de la luz fue medido en Mayo de 1919 por Eddington²² y colaboradores, a partir de mediciones ópticas de las posiciones de estrellas cercanas al Sol, medidas durante un eclipse total de Sol, observado desde las islas atlánticas de Sobral y Principe [33]. Estos experimentos obtuvieron un resultado consistente con la predicción relativista, pero sólo con un 30 % de precisión. Sin embargo, los resultados sí permitían excluir un resultado nulo o la predicción “cuasi-newtoniana” (la mitad del valor de RG, es decir, $\approx 0.87''$). Se efectuaron nuevas medidas durante eclipses posteriores. En el del 30 de Junio de 1973 los resultados concordaban con la predicción de RG con un error del 10 %. Uno de las mayores fuentes de error en este tipo de observación es causada por la corona solar, que también curva los rayos que pasan por ella. Actualmente, la precisión alcanzada por los sistemas VLBI (Very Large Baseline Interferometry) han permitido mejorar sustancialmente la confirmación observational de la predicción de RG para el desvío de la luz, con una desviación de 0.1 % [34, 2].

3.5.6. Redshift Gravitacional

Revisaremos aquí la predicción para el redshift gravitacional (dilatación temporal gravitacional). En particular, derivaremos la expresión exacta para el redshift medido por dos observadores “en reposo” en el espaciotiempo de Schwarzschild. En particular consideraremos fotones que “escapan” del centro de fuerzas de manera radial. En este caso, debido a la simetría esférica podemos considerar que los fotones se mueven en trayectorias con $\theta = \pi/2$ y $\varphi = 0$.

De la condición de curva nula para el fotón $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ obtenemos

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0. \quad (3.185)$$

Por lo tanto,

$$c dt = \pm \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \quad (3.186)$$

²¹Ver, por ejemplo, <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.

²²Sir Arthur Eddington (1882-1944) astrofísico británico. Ver, por ejemplo, http://es.wikipedia.org/wiki/Arthur_Stanley_Eddington.

Los signos positivo y negativo corresponden a fotones “escapando desde” y “cayendo hacia” el centro de fuerzas, respectivamente. Para el primer caso, tenemos entonces que

$$c(t - t_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{(1 - \frac{2m}{r})} \quad (3.187)$$

$$= (r + 2m \ln |r - 2m|)|_{r_0}^r \quad (3.188)$$

$$= r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right). \quad (3.189)$$

En otras palabras,

$$t = t_0 + \frac{1}{c} \left[r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right) \right]. \quad (3.190)$$

Esta relación define en forma implícita la ecuación de la trayectoria, exacta en el espaciotiempo de Schwarzschild, $r(t)$, del fotón escapando radialmente. Podemos verificar aquí lo usado en la discusión del redshift gravitacional en la sección (3.3.1): que $(\Delta t)_e = (\Delta t)_r$. En efecto, si un fotón es emitido en el evento con coordenadas $x_{e,1}^\mu = (t_0, r_0, \pi/2, 0)$ entonces éste llega a un punto con coordenada radial r en el evento $x_{r,1}^\mu = (t, r, \pi/2, 0)$, donde t es dado por (3.190). Como (3.190) es lineal en t_0 tendremos que si otro fotón es enviado desde r_0 en el evento $x_{e,2}^\mu = (t_0 + (\Delta t)_e, r_0, \pi/2, 0)$, entonces llegará a r en el evento $x_{r,2}^\mu = (t + (\Delta t)_e, r, \pi/2, 0)$. En otras palabras, $(\Delta t)_e = (\Delta t)_r$. Este es un resultado general, válido para todo espaciotiempo estacionario (es decir, en que la métrica es independiente de la coordenada temporal).

Por otro lado, los tiempos propios asociados a observadores “en reposo” en el punto de emisión y recepción, es decir, cuyas líneas de mundo tienen coordenada radial constante r_e y r_r respectivamente, quedan determinados por

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2, \quad (3.191)$$

de modo que

$$\Delta\tau_e = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_e}} (\Delta t)_e, \quad \Delta\tau_r = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_r}} (\Delta t)_r. \quad (3.192)$$

Con estos ingredientes, obtenemos

$$\frac{\Delta\tau_r}{\Delta\tau_e} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_r}}{1 - \frac{2m}{r_e}}}.$$

(3.193)

Dilatación
temporal
gravitacional

Compare esta expresión con aquella encontrada en el límite de campo débil, expresiones (3.24) y (3.25).

3.5.7. Tiempo de Vuelo (Efecto Shapiro)*

Aquí estudiaremos la predicción de la teoría de Einstein de la gravitación en lo que respecta al *tiempo de vuelo* de señales luminosas en la métrica de Schwarzschild.

Para obtener información del tiempo de vuelo de una señal luminosa debemos analizar cómo cambia la coordenada temporal t a lo largo de la línea de mundo del rayo de luz. Usando (3.157) podemos escribir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r' \frac{mc}{\alpha} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{1}{r^2}. \quad (3.194)$$

Reemplazando ahora la expresión para r' determinada por la relación (3.160) encontramos que

$$\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} = \pm I(r), \quad (3.195)$$

donde hemos definido

$$I(r) := \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \sqrt{\alpha^2 + \frac{2m}{r^3} - \frac{1}{r^2}}. \quad (3.196)$$

Ahora aplicamos esta expresión al caso en que el fotón se mueve desde un punto con coordenadas $(ct_T, r_T, \pi/2, \varphi_T)$ hacia el centro de fuerzas, hasta el punto $(ct_0, r_0, \pi/2, \varphi_0)$ de máximo acercamiento. En este primer tramo $dr/dt < 0$ y entonces

$$c(t_0 - t_T) = - \int_{r_T}^{r_0} \frac{dr}{I(r)}. \quad (3.197)$$

En el segundo tramo, desde $(ct_0, r_0, \pi/2, \varphi_0)$ hasta $(ct_V, r_V, \pi/2, \varphi_V)$, tenemos que $dr/dt > 0$ y entonces

$$c(t_V - t_0) = \int_{r_0}^{r_V} \frac{dr}{I(r)}. \quad (3.198)$$

El intervalo total de coordenada temporal en el proceso de vuelo ("de ida") es entonces dado por $t_V - t_T$. Usando (3.197) y (3.198) obtenemos

$$c(t_V - t_T) = \int_{r_0}^{r_V} \frac{dr}{I(r)} - \int_{r_T}^{r_0} \frac{dr}{I(r)} \quad (3.199)$$

$$= \int_{r_0}^{r_V} \frac{dr}{I(r)} + \int_{r_0}^{r_T} \frac{dr}{I(r)}. \quad (3.200)$$

Para evaluar esta expresión es necesario escribir α en términos de $r_0 = r_{\min}$, la coordenada radial mínima al centro de fuerzas sobre la trayectoria del fotón. Esta coordenada mínima se encuentra, ver nota al pie 20, para el ángulo $\varphi_{\min} = \varphi_0 + \pi/2$ y satisface $u(\varphi_{\min}) = 1/r_{\min}$, $u'(\varphi_{\min}) = 0$, con

$$r_0 = D \left(1 - \frac{m}{D} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.201)$$

Usando estas condiciones, la relación (3.161) implica que

$$\alpha^2 = \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{2m}{r_0} \right), \quad (3.202)$$

y entonces

$$\alpha = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{m}{r_0} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.203)$$

Con esto, podemos expresar la función $I(r)$ como

$$I(r) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sqrt{\alpha^2 + \frac{2m}{r^3} - \frac{1}{r^2}} \quad (3.204)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{m}{r_0}\right) \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0} - \frac{2mr_0^2}{r^3} - \frac{r_0^2}{r^2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.205)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m}{r_0}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{2m}{r_0} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.206)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m}{r_0}\right) \left[\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} \left(-\frac{2m}{r_0}\right) \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.207)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m}{r_0}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \left[1 - \frac{m}{r_0} \frac{\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.208)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m}{r_0}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \left[1 - \frac{m}{r_0} \frac{\left(1 + \frac{r_0}{r} + \frac{r_0^2}{r^2}\right)}{1 + \frac{r_0}{r}}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.209)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \left[1 - \frac{mr_0}{r(r+r_0)} - \frac{r_0}{r}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.210)$$

De esta forma, obtenemos

$$\frac{1}{I(r)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} \left[1 + \frac{mr_0}{r(r+r_0)} + \frac{r_0}{r}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.211)$$

y entonces

$$\int \frac{dr}{I(r)} = \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2m \ln \left(r + \sqrt{r^2 - r_0^2} \right) + m \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.212)$$

Con este resultado podemos evaluar el intervalo $(\Delta t)_{\text{ir}}$ de “ida y regreso”²³ que, de acuerdo a (3.200), es entonces dado por

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} (\Delta t)_{\text{ir}} &= \sqrt{r_V^2 - r_0^2} + \sqrt{r_T^2 - r_0^2} + 2m \ln \left[\frac{\left(r_V + \sqrt{r_V^2 - r_0^2}\right) \left(r_T + \sqrt{r_T^2 - r_0^2}\right)}{r_0^2} \right] \\ &\quad + m \left(\sqrt{\frac{r_V - r_0}{r_V + r_0}} + \sqrt{\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.213)$$

En el caso que $r_0 = R_\odot \ll r_V, r_T$ (“conjunción superior”) el efecto es máximo:

$$c (\Delta t)_{\text{ir}} \approx 2 \left[r_V + r_T + 2m \ln \left[\frac{(2r_V)(2r_T)}{R_\odot^2} \right] + m(1+1) \right] \quad (3.214)$$

$$\approx 2 \left[(r_V + r_T) + 2m \left(1 + \ln \left[\frac{4r_V r_T}{R_\odot^2} \right] \right) \right]. \quad (3.215)$$

²³Note que este intervalo es en rigor el intervalo de coordenada temporal. El tiempo propio que un observador en r_T registra en el viaje de ida y regreso del fotón es dado, a primer orden, por $(\Delta\tau)_{\text{ir}} = (1 - m/r_T)(\Delta t)_{\text{ir}}$.

Para el Sol, Venus y la Tierra $r_V \approx r_T \approx 10^8$ km, el segundo término es $\approx 2 \times 10^{-4}$ s. Note que hemos despreciado el movimiento de Venus y la Tierra en el periodo en que el rayo de luz realiza su viaje de ida y regreso (~ 20 min). El uso de este efecto para testear la teoría de RG fue propuesto por I. Shapiro en 1964 [35] y verificado la predicción con precisión cada vez mayor en los casos en que la señal enviada “rebota” en Mercurio, Venus [36]. Este valor ha sido confirmado con una desviación del 5 %. Ver [39] para mayores detalles.

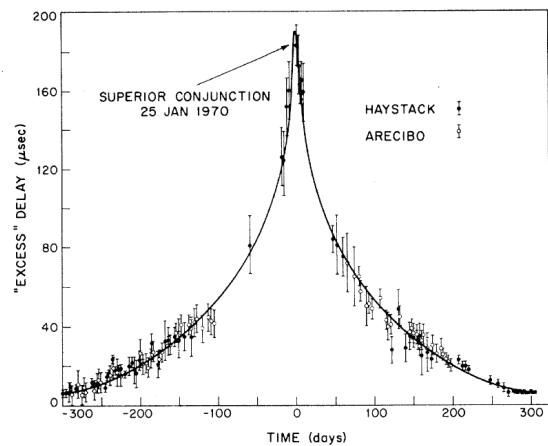


Figura 3.4: Mediciones de Radar del efecto Shapiro.

Capítulo 4

Agujeros Negros ***PRELIMINAR***

4.1. Singularidades y radio de Schwarzschild

Aquí estudiaremos la estructura de la solución de Schwarzschild en regiones *cercanas al radio de Schwarzschild*, donde el campo gravitacional es muy intenso. En otras palabras, estudiaremos las geometría del espacio-tiempo esféricamente simétrico de una masa M suficientemente compacta para que su tamaño (la coordenada radial correspondiente a su superficie) sea menor que $2m$. Por ahora, postergaremos la importante discusión acerca de si existe un mecanismo físico realista para que una distribución de masa pueda llegar a esta configuración.

La geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild, en coordenadas de curvatura, es decir (3.76), parece tener un mal comportamiento cerca de $r = 0$ y además en $r = 2m$, es decir, en el origen y en la esfera definida por la condición que la coordenada radial r sea igual al radio de Schwarzschild.

$$g_{00} \rightarrow -\infty, \quad g_{11} \rightarrow 0, \quad \text{para } r \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

$$g_{00} \rightarrow 0, \quad g_{11} \rightarrow -\infty, \quad \text{para } r \rightarrow 2m^+. \quad (4.2)$$

Los coeficientes métricos son cantidades dependientes de las coordenadas usadas, por lo que sus valores no necesariamente están relacionados con cantidades físicas singulares. Para saber si estos comportamientos singulares/divergentes son físicos, o sólo *singularidades coordenadas*, necesitamos considerar propiedades que sean independientes de las coordenadas usadas.

Es relativamente fácil generar singularidades coordenadas. Consideremos por ejemplo, el espacio euclíadiano bidimensional E_2 , con su elemento de línea en coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (4.3)$$

Si introducimos una nueva coordenada ξ por medio de

$$\xi := \frac{1}{3}x^3, \quad (4.4)$$

tendremos que la métrica toma la forma

$$ds^2 = (3\xi)^{-\frac{4}{3}} d\xi^2 + dy^2. \quad (4.5)$$

La métrica parece tener ahora una singularidad en $\xi = 0$. Sin embargo, esta singularidad es totalmente removible introduciendo una “nueva” variable x por medio de $\xi = x^3/3$. Por esto, se dice que ésta es una *singularidad coordenada*. Es posible que tengamos una singularidad

coordenada que sea el resultado de un quiebre de un sistema coordenado específico en lugar de ser una singularidad de la variedad subyacente. En otras palabras, se dice que la variedad tiene una singularidad (“verdadera” o “intrínseca”) en su geometría *si ella no puede ser removida por un cambio de coordenadas apropiado*. En general no es obvio encontrar la manera de remover una singularidad coordenada.

Una forma de testear si una región contiene singularidades de la geometría (es decir, que no sean simples singularidades coordenadas) es calcular invariantes (es decir, escalares) a partir de contracciones del tensor de curvatura. Los escalares más simples son el escalar de curvatura R , y sus contracciones $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\lambda\tau}R^{\mu\nu}_{\lambda\tau}$, etc. Si alguno de estos escalares *diverge* al acercarse a algún punto, tal punto es una singularidad de la geometría. Así, tenemos una condición *suficiente* para mostrar que un punto es una singularidad de la geometría. Por otro lado, en general no es fácil mostrar que un punto *no* es singularidad.

En el caso de la métrica de Schwarzschild un cálculo directo muestra que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48m^2}{r^6}, \quad (4.6)$$

lo que prueba que $r = 0$ (el origen del sistema coordenado usado) representa una singularidad de la geometría, donde la curvatura diverge. Puede verificarse que en $r = 2m$ ninguno de los invariantes de curvatura arriba mencionados diverge. Por lo tanto, la esfera definida por $r = 2m$ no es una singularidad de la curvatura (que mide propiedades locales de la variedad), sino algo diferente ...

- En $r = 2m$, g_{11} es infinito y g_{00} es cero. Dado que g_{00} es cero, la superficie esférica en $r = 2m$ es una *superficie infinitamente desplazada al rojo* por efecto de la dilatación temporal gravitacional. Ver la expresión (3.193). Decimos entonces que la superficie $r = 2m$ es una *superficie de redshift infinito*.
- Además, cuando $r < 2m$, el signo de las componentes g_{00} y g_{11} cambian: g_{00} se convierte en negativo y g_{11} en positivo. Esto nos fuerza a reconsiderar el significado físico de t y r . En efecto, en la región del espaciotiempo con $r < 2m$, t es una coordenada tipo espacio y r tipo tiempo, ya que una curva a lo largo del eje t (r, θ y φ constantes) posee $ds^2 < 0$, mientras que una curva a lo largo del eje r (t, θ y φ constantes) posee $ds^2 > 0$. Como veremos más adelante, esto trae como consecuencia que toda partícula dentro de la región delimitada por $r = 2m$ caerá hacia la singularidad central. Debido a esto, la superficie $r = 2m$ es adicionalmente un *horizonte de eventos*.

Estas características muestran que $r = 2m$ es un radio inusual, pero esto no implica que la geometría local del espaciotiempo sea singular en $r = 2m$, como sí ocurre en $r = 0$.

Para analizar las propiedades físicas de la región en torno a $r = 2m$ con más detalle, estudiaremos las propiedades de fotones y de partículas en movimiento radial “cayendo” hacia (y “escapando” desde) la singularidad central.

4.1.1. Diagrama Espacio-Temporal en Coordenadas de Schwarzschild

Una manera de entender una geometría es explorando su estructura causal, que está definida por las propiedades de propagación de la luz. Consideraremos en particular curvas (geodésicas) radiales tipo luz, es decir, para las cuales θ y φ son constantes y $ds^2 = 0$. Esta última condición se reduce a

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0, \quad (4.7)$$

de donde obtenemos que

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left| 1 - \frac{2m}{r} \right|}. \quad (4.8)$$

Considerando que

$$\int_a^b \frac{dr}{\left| 1 - \frac{2m}{r} \right|} = \pm \left[b - a + 2m \ln \left(\frac{b - 2m}{a - 2m} \right) \right], \quad a < b, \quad (4.9)$$

donde el signo positivo y negativo corresponde a los casos en que $a, b > 2m$ y $a, b < 2m$, respectivamente, podemos integrar (4.8).

Si $r > 2m$ el signo $+$ en (4.8) corresponde a fotones alejándose del centro de simetría y el signo $-$ a fotones acercándose a éste. En este caso obtenemos,

$$c(t - t_0) = r - r_0 + 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right), \quad (4.10)$$

para fotones salientes, y

$$c(t - t_0) = r_0 - r - 2m \ln \left(\frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right), \quad (4.11)$$

para fotones entrantes, que pasan por el evento con coordenadas (ct_0, r_0) , respectivamente.

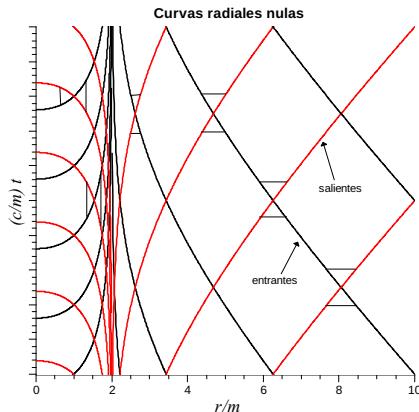


Figura 4.1: Curvas nulas radiales en coordenadas de curvatura.

Como es de esperar, muy lejos del centro de fuerzas $r \gg 2m$, recobramos

$$\frac{dr}{dt} = \pm c, \quad (4.12)$$

tal como en un espaciotiempo plano. Por otro lado, cuando r se aproxima a $2m$ (por “la derecha”, es decir, con valores mayores a $2m$), tenemos

$$\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm \infty, \quad (4.13)$$

y los conos de luz se “cierran”, ya que las líneas tienden a ser paralelas al eje t . Esto tendrá como consecuencia que al acercarse a $r = 2m$ la coordenada temporal de la trayectoria del fotón aumentará indefinidamente. En otras palabras, en términos de la coordenada temporal t , a medida que un rayo de luz se aproxima a $r = 2m$ parecerá que el fotón nunca llegará allí. En

realidad, como veremos a continuación, un rayo de luz no tiene problemas en alcanzar $r = 2m$ (tampoco partículas masivas), pero un observador lejos de $r = 2m$ nunca sería capaz de “ver” este hecho.

En efecto, para describir cómo se “ve” la caída del fotón desde lejos, consideraremos un observador en reposo en $r = R > 2m$ y cómo éste puede informarse sobre la caída del fotón.

Para esto, consideramos un fotón cayendo hacia la singularidad, y dos eventos E_1 y E_2 en su línea de mundo, con coordenadas $(ct, r) = (ct_1, r_1)$ y $(ct, r) = (ct_2, r_2)$ respectivamente, con $r_2 < r_1 < R$. De acuerdo a lo anterior, las coordenadas de estos eventos están relacionadas por medio de

$$c(t_2 - t_1) = r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{r_1 - 2m}{r_2 - 2m} \right). \quad (4.14)$$

Consideremos que cuando el fotón pasa por el evento E_1 una señal luminosa (otro fotón) es enviada hacia el observador en $R > r_1$. Este nuevo fotón viaja desde el evento E_1 hasta el evento de recepción R_1 , con coordenadas $(ct, r) = (ct_{1r}, R)$. Como estos eventos pertenecen a la línea de mundo de un fotón alejándose de la singularidad, sus coordenadas satisfacen

$$c(t_{1r} - t_1) = R - r_1 + 2m \ln \left(\frac{R - 2m}{r_1 - 2m} \right). \quad (4.15)$$

Similarmente, si en el evento E_2 se emite una segunda señal luminosa hasta el observador, de modo que éste la recibe en el evento R_2 con coordenadas $(ct, r) = (ct_{2r}, R)$, entonces

$$c(t_{2r} - t_2) = R - r_2 + 2m \ln \left(\frac{R - 2m}{r_2 - 2m} \right). \quad (4.16)$$

El intervalo de coordenada temporal entre la recepción de las dos señales por el observador en reposo en la posición $r = R$ es dada por $(\Delta t)_r = t_{2r} - t_{1r}$. Usando (4.14), (4.15) y (4.16), encontramos

$$c(\Delta t)_r = 2 \left[r_1 - r_2 + 2m \ln \left(\frac{r_1 - 2m}{r_2 - 2m} \right) \right]. \quad (4.17)$$

En otras palabras, $(\Delta t)_r = 2(t_2 - t_1)$. Finalmente, el tiempo (propio) medido por el observador en $r = R$ entre las dos señales es $(\Delta\tau)_r = (\Delta t)_r \sqrt{1 - 2m/R}$. En particular, para un observador “en el infinito”, tendremos simplemente que $(\Delta\tau)_{r,\infty} = 2(t_2 - t_1)$. Como consecuencia, desde el punto de vista de un observador externo (en $r = R$, o en el infinito) el fotón requiere un tiempo infinito en llegar a $r = 2m$, es decir, *el observador nunca registra que el fotón cruza el horizonte*, sino que lo observa acercarse cada vez más lentamente. No obstante, como veremos a continuación, el fotón no encuentra ningún obstáculo al acercarse al horizonte, cruzándolo y alcanzando finalmente la singularidad central.

4.1.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Hemos visto que en términos de las coordenadas de curvatura los conos de luz parecen comprimirse a medida que se acercan a $r = 2m$, y que las curvas tipo luz radiales entrantes parecen nunca cruzar el horizonte, ya que estas curvas se tornan cada vez más verticales.

Es posible introducir nuevas coordenadas en las que estas características no están presentes. Específicamente, podemos elegir nuevas coordenadas $\bar{x}^\mu = (c\bar{t}, r, \theta, \varphi)$, en las que las líneas nulas radiales entrantes sean rectas con un ángulo de 45 grados respecto al eje r . De (4.11) vemos que si definimos la *coordenada de Eddington-Finkelstein retardada* por

$$\bar{t}(t, r) := t + \frac{2m}{c} \ln |r - 2m|, \quad (4.18)$$

entonces la relación que define la trayectoria de un fotón entrante es simplemente

$$c(\bar{t} - \bar{t}_0) = r_0 - r, \quad (4.19)$$

que en el plano $(c\bar{t}, r)$ corresponde precisamente una línea recta con pendiente -1 .

En términos de las nuevas coordenadas \bar{x}^μ el elemento de línea adopta la forma siguiente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} c d\bar{t} dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.20)$$

Schwarzschild,
Eddington-
Finkelstein

Vemos que la métrica en estas coordenadas es regular en $r = 2m$. De hecho, ella es regular en todo el rango $0 < r < 2m$. Puede argumentarse que la transformación (4.18) no es válida para puntos con $r \leq 2m$ y que por consiguiente (4.20) sólo sería válida en la región fuera del horizonte. Sin embargo, en la teoría de RG, la métrica de Schwarzschild en coordenadas de curvatura, con $0 < r < \infty$ es una solución tan legítima de las ecuaciones de Einstein en el vacío como lo es la métrica asociada a (4.20) con $0 < r < \infty$. En general, el criterio usado es que, dada una métrica que es solución de las Ecuaciones de Einstein, se busca el rango máximo de variación de las coordenadas tales que la solución sea válida. En otras palabras, puede perfectamente considerarse la métrica en coordenadas de Eddington-Finkelstein como la “métrica original”, válida en todo el rango $0 < r < \infty$, y la métrica en coordenadas de curvatura como sólo apropiada en la región exterior al horizonte. En cierto sentido, la métrica en coordenadas Eddington-Finkelstein es una suerte de “continuación analítica” de la métrica de la solución en coordenadas de curvatura.

Como vimos, en coordenadas de Eddington-Finkelstein, las líneas nulas radiales entrantes son líneas rectas. Por otro lado, las curvas nulas radiales *salientes* están descritas por la relación

$$c(\bar{t} - \bar{t}_0) = r - r_0 + 4m \ln \left| \frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right|, \quad (4.21)$$

que se obtiene directamente de (4.10) y la definición (4.18).

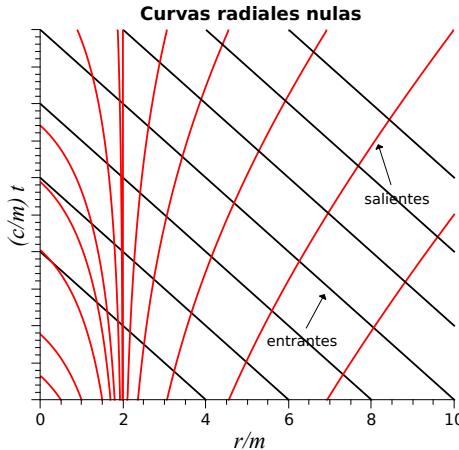


Figura 4.2: Curvas nulas radiales en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Vemos que la superficie definida por $r = 2m$ actúa como una “membrana unidireccional”, en el sentido que sólo permite cruzar a partículas cayendo hacia la singularidad central. Las líneas de mundo entrantes cruzan desde la región externa hacia la interna. La superficie $r = 2m$ es llamada un *horizonte de eventos* ya que representa la región que delimita los eventos que pueden ser en principio observados por un observador externo. El horizonte de Schwarzschild es *absoluto* en el sentido que impide a *todo observador externo* obtener información de eventos dentro del horizonte.

4.1.3. Partículas cayendo radialmente

Consideremos la trayectoria de una partícula cayendo libremente en un movimiento radial hacia la singularidad. La trayectoria es entonces una geodésica radial tipo tiempo. De acuerdo a lo estudiado anteriormente, en este caso la trayectoria tiene como constantes de movimiento a k y h dadas por (3.105), con $h = 0$. De entre las posibles trayectorias, determinadas por la constante k , nos concentraremos en aquellas correspondientes a partículas que caen “desde el reposo en el infinito”, es decir, tal que $\dot{r} \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$. En este caso la relación (3.110) implica que $k^2 = 1$. Finalmente, (3.105a), muestra que para trayectorias “orientadas hacia el futuro”, $k = 1$. Con esto, (3.110) se reduce en este caso a

$$\dot{r}^2 = \frac{2mc^2}{r}. \quad (4.22)$$

Como estamos considerando una partícula acercándose a la singularidad central, tendremos entonces que

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{2m}{r}}. \quad (4.23)$$

Podemos integrar esta expresión directamente, y obtenemos

$$c(\tau - \tau_0) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right), \quad (4.24)$$

donde τ_0 es el tiempo propio (del reloj comóvil con la partícula) registrado en el instante en que ésta pasa por $r = r_0$. Note que la expresión encontrada, (4.24), es la misma que el caso newtoniano. Como consecuencia, el intervalo de tiempo propio desde que la partícula cruza $r = r_0$ y que llega a la singularidad central es finito:

$$c(\tau|_{r=0} - \tau_0) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} r_0^{3/2}. \quad (4.25)$$

En particular, el tiempo propio requerido para caer desde el horizonte hasta la singularidad central es $4m/3c$

Para analizar cómo varía la coordenada t en este proceso, podemos escribir

$$c\frac{dt}{dr} = c\frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \sqrt{\frac{r}{2m}}. \quad (4.26)$$

Integrando esta expresión¹ encontramos

$$c(t - t_0) = -\frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0} \right) + 2m \ln \left[\frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(\sqrt{r} - \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})} \right]. \quad (4.27)$$

Vemos de esta expresión que la coordenada temporal de la trayectoria de la partícula crece indefinidamente a medida que ésta se acerca al horizonte.

4.2. Colapso gravitacional

Imaginemos una situación en el que el colapso de una estrella no rotante, y esféricamente simétrica, tiene lugar y continúa hasta que la superficie de la estrella se aproxima a su radio de Schwarzschild. Mientras la estrella se mantenga esféricamente simétrica, su campo externo

¹ $\int \sqrt{\frac{r}{a}} \frac{dr}{1 - \frac{a}{r}} = \frac{2}{3}a(r/a)^{3/2} + 2a(r/a)^{1/2} - a \ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{a}}{\sqrt{r} + \sqrt{a}} \right).$

es descrito por la solución de Schwarzschild exterior. La figura 4.3 es un diagrama espaciotemporal bidimensional del colapso gravitacional, donde la solución exterior de Schwarzschild es considerada en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Del diagrama podemos ver que un observador puede seguir una estrella que colapsa a través de su radio de Schwarzschild. Si un observador ubicado en la superficie de la estrella envía señales a intervalos regulares de acuerdo a su reloj, entonces cuando la superficie de la estrella alcance el radio de Schwarzschild, un observador distante recibirá dichas señales con una diferencia de tiempo siempre creciente. La señal en $r = 2m$ nunca logrará escapar de la hipersuperficie y mientras continua el colapso de la estrella, de manera que el radio de ésta sea menor que el radio de Schwarzschild, todas las señales enviadas de la superficie de la estrella serán arrastradas hacia la singularidad central. En la práctica, el observador distante podría pronto no ver la superficie de la estrella, debido a que la intensidad observada desaparece rápidamente debido al desplazamiento al rojo infinito en el radio de Schwarzschild. La estrella desaparece rápidamente de la vista dejando atrás un “agujero negro” en el espacio.

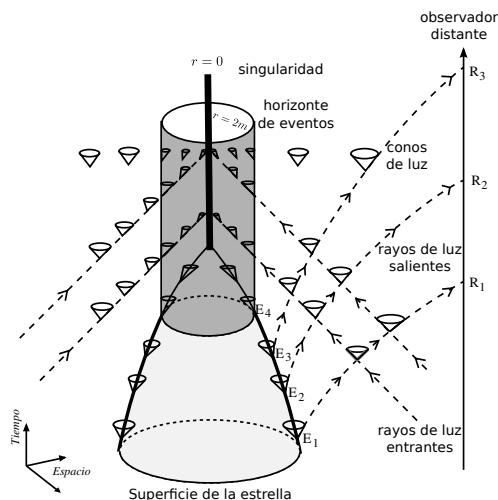


Figura 4.3: Colapso estelar, figura adaptada a partir de Ref. [40]

Capítulo 5

Agujeros Negros Rotantes ***PRELIMINAR***

Luego de que Karl Schwarzschild encontrara en 1916 la primera solución de agujero negro esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein, pasó poco menos de medio siglo sin que alguien pudiera encontrar la solución de agujero negro rotante. Roy Kerr¹ fue el que encontró esta solución en su famoso trabajo de 1963 [61], comenzando así la llamada “edad de oro” de los agujeros negros, periodo de alrededor de dos décadas donde hubo una considerable renovación en la física de estos objetos, que son el modelo usado para describir los agujeros negros astrofísicos.

Existen tres cantidades que en teoría describen completamente a un agujero negro: su masa, su momentum angular y su carga. La solución más conocida es la que tiene momentum angular y carga nula: el agujero negro de Schwarzschild. Si el agujero negro tiene sólo carga nula es llamado de Kerr. Si tiene momentum angular nulo es llamado agujero negro de Reissner-Nordstrom y en el caso de que ninguna de las cantidades sea nula es llamado agujero negro de Kerr-Newman.

5.1. Solución de Kerr

La solución de Kerr en la *forma de Boyer-Lindquist* es dada por el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (cdt - a \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - acdt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (5.1)$$

donde

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2. \quad (5.2)$$

Al realizar la transformación de coordenadas definida por

$$\begin{aligned} cd\bar{t} &= cdt + \frac{2mr}{\Delta} dr, \\ x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - a \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.3)$$

¹Roy Patrick Kerr (16 de mayo de 1934) matemático neozelandés. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Roy_Kerr.

se obtiene, a partir de (5.1), la solución de Kerr en la forma original en la que fue encontrada, es decir, en la *forma de Kerr* [61] (ver también [62]),

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2mR^3}{R^4 + a^2 z^2} \left(c d\bar{t} + \frac{R}{R^2 + a^2} (xdx + ydy) + \frac{a}{R^2 + a^2} (ydx - xdy) + \frac{z}{R} dz \right)^2, \quad (5.4)$$

donde $R(x, y, z)$ satisface

$$R^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) R^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (5.5)$$

Algunas primeras características destacables de esta solución es que es estacionaria y tiene simetría axial, ya que los coeficientes métricos no depende de t ni de φ (por lo tanto ∂_t y ∂_φ son vectores de Killing). Además, la métrica es invariante bajo reflexiones de estas coordenadas y , debido a la forma del elemento de línea, es equivalente a decir que es invariante bajo las transformaciones

$$t \rightarrow -t, \quad a \rightarrow -a. \quad (5.6)$$

Para interpretar las constantes m y a podemos reordenan los términos de (5.1) de la siguiente manera:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4amr \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} d\varphi (cdt). \quad (5.7)$$

Utilizando coordenadas isotrópicas, dadas por la transformación de coordenadas

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}} \right)^2, \quad (5.8)$$

y considerando sólo términos de primer orden en m/\bar{r} y a/\bar{r} , encontramos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\bar{r}} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{\bar{r}} \right) [\bar{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2] + \frac{4am}{\bar{r}} \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi (cdt) + \mathcal{O}(G^2). \quad (5.9)$$

Al comparar (5.9) con (8.83), que describe la geometría del espacio-tiempo de una masa esférica que rota con momentum angular constante J , vemos que esta solución tiene momento angular no nulo, proporcional al parámetro a , que será llamado **parámetro de rotación**. Más específicamente, obtenemos que el momento angular de la solución es

$$J = aMc, \quad (5.10)$$

$M = mc^2/G$ es la masa del agujero negro.

5.1.1. Singularidades y Horizontes de la Solución de Kerr

El invariante de Riemann asociado a la métrica de Kerr es

$$R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{48m^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [\rho^4 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{\rho^{12}}. \quad (5.11)$$

Se observa que existe sólo una singularidad intrínseca, cuando $\rho = 0$. Esto implica que $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, entonces

$$r = 0, \quad \cos \theta = 0.$$

Note que, utilizando (5.3), se encuentra que la singularidad es un anillo de radio a en el plano xy , es decir,

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0 \quad (5.12)$$

Este tipo de agujero negro, tiene asociada una *superficie de redshift infinito*, es decir, una superficie desde la cual las señales emitidas hacia puntos lejanos están infinitamente dilatadas temporalmente. Los radios de esta superficie se pueden encontrar utilizando el hecho que sobre ella $g_{00} = 0$, entonces de (5.7) se tiene que

$$g_{00} = 0 \Rightarrow r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow r_{s\pm}(\theta) = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.13)$$

Así, existen dos superficies S_+ y S_- , definidas por sus respectivos radios $r_{S_+}(\theta)$ y $r_{S_-}(\theta)$. Como los radios $r_{s\pm}$ sólo dependen de la coordenada θ , estas superficies son axialmente simétricas (superficies de revolución en torno del eje z).

En el caso en que el parámetro de rotación sea menor que el parámetro de masa del agujero negro ($a^2 < m^2$), la superficie S_+ posee un radio de $2m$ en el ecuador (plano $z = 0$) y radio $m + \sqrt{m^2 - a^2}$ en los polos, en tanto que la superficie S_- está contenida dentro de S_+ . Ver figura 5.1.

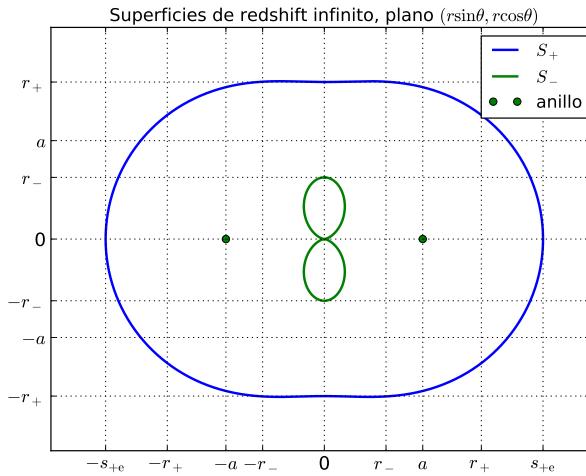


Figura 5.1: Superficies de redshift infinito. Código Python [aquí](#).

De (5.13) se observa que al hacer $a = 0$, se obtiene lo ya sabido para la solución no rotante, donde r_{S_+} coincide con el radio de Schwarzschild $2m$ y el valor de r_{S_-} con el de la singularidad.

Ahora, se buscarán superficies donde existan *horizontes de eventos*. De (5.7) vemos que el horizonte estará ubicado en los puntos en los que g_{rr} diverge, es decir, donde Δ se anula

$$g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} \rightarrow -\infty \Rightarrow r^2 - 2mr + a^2 = 0. \quad (5.14)$$

Así, los horizontes de eventos vienen dados por

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (5.15)$$

Note que estos horizontes existen sólo si $a^2 \leq m^2$. En el caso que $a^2 > m^2$ se tiene que el campo gravitacional tiene una singularidad “desnuda” (debido a la no existencia de horizontes de eventos). La hipótesis que esto no ocurre en la naturaleza es lo que se conoce como

la *Conjetura de Censura Cósmica de Penrose*² que afirma que un colapso gravitacional que tiene condiciones iniciales bien comportadas nunca dará origen a una singularidad desnuda. El agujero negro que tiene $a = m$ es llamado *agujero negro maximalmente rotante*.

Luego, existen tres zonas (sin incluir la singularidad intrínseca) en las cuales la solución de Kerr es regular

$$\begin{aligned} I : \quad & r_+ < r < \infty \\ II : \quad & r_- < r < r_+ \\ III : \quad & 0 < r < r_- \end{aligned} \tag{5.16}$$

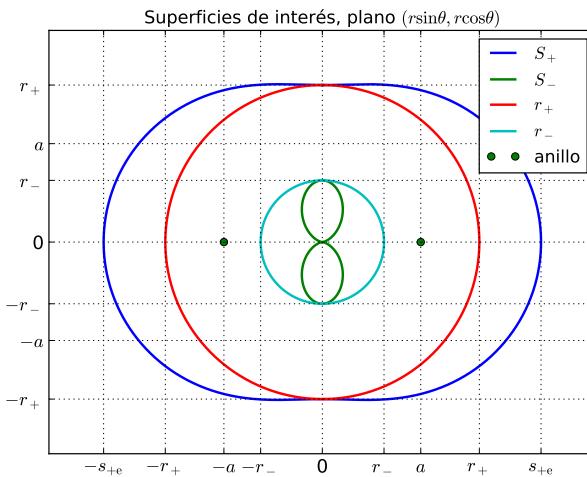


Figura 5.2: Horizontes y superficies de redshift infinito de la solución de Kerr. Código Python [aquí](#).

Si $a = 0$, entonces $r_+ = 2m$ y $r_- = 0$, que también coinciden con el radio de Schwarzschild y la singularidad intrínseca de ese caso. Se tiene que, como se mencionó anteriormente, en el caso de la solución de Schwarzschild S_+ coincide con el horizonte de eventos y S_- con la singularidad en el origen.

Se define la *Ergósfera* (del griego *ergon* que significa trabajo) como la zona que existe entre la superficie de redshift infinito S_+ y el horizonte de eventos r_+ (ver figura 5.2), cuyas propiedades serán analizadas más adelante.

²Sir Roger Penrose (1931-) físico-matemático inglés, http://es.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose.

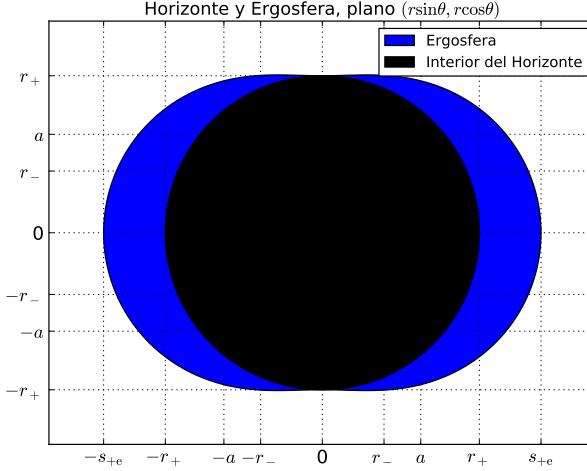


Figura 5.3: Horizonte de eventos y ergósfera de la solución de Kerr. Código Python [aquí](#).

5.1.2. Geodésicas tipo luz

A diferencia de la solución de Schwarzschild en este caso no existen geodésicas nulas radiales, ya que no hay simetría esférica. Sin embargo, sí es posible encontrar soluciones analíticas para el caso particular en que las trayectorias están contenidas en el cono definido por $\theta = \text{cte}$. Así,

$$\theta = \text{cte}, \quad ds^2 = 0. \quad (5.17)$$

Lo siguiente es resolver la ecuación de la geodésica para este caso. Sabemos que la ecuación de la geodésica puede ser derivada como las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano efectivo dado, ver (2.74) y (2.77), por

$$\tilde{L} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \quad (5.18)$$

donde la $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ y λ es algún parámetro. Si bien podemos simplemente plantear la ecuación de la geodésica y resolvérla, en esta sección haremos uso del siguiente hecho, que suministra un método alternativo (aunque equivalente), y que en algunos casos simplifica el cálculo: Si λ es un parámetro afín entonces la (misma) ecuación geodésica puede ser obtenida del siguiente lagrangeano “alternativo”:

$$\bar{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (5.19)$$

En el caso de la solución de Kerr, este lagrangiano adopta la forma

$$2\bar{L} = \frac{\Delta}{\rho^2}(ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi})^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)\dot{\varphi} - act]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2. \quad (5.20)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange vienen entonces dadas por

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (5.21)$$

Utilizando $x^0 = ct$ en (5.21), se obtiene la primera ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial ct} =: l. \quad (5.22)$$

Donde l es una constante de integración. Desarrollando (5.22), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\Delta}{\rho^2} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act] = l. \quad (5.23)$$

Ahora se buscará la ecuación de movimiento correspondiente a $x^3 = \varphi$, nuevamente de (5.21) se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\varphi}} =: -n, \quad (5.24)$$

donde n también es una constante de movimiento.

De (5.24) se tiene que

$$\frac{a \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act] = n. \quad (5.25)$$

Usando el hecho que $ds^2 = 0$ y la expresión (5.1), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\Delta}{\rho^2} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi})^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 = 0. \quad (5.26)$$

Por último utilizando $x^2 = \theta$ y de (5.21), se tiene que la ecuación de movimiento asociada a esta coordenada es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0. \quad (5.27)$$

Desarrollando esta última expresión se obtiene que

$$\frac{a^2 \Delta}{\rho^4} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi})^2 - \frac{2a \Delta \dot{\varphi}}{\rho^2} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) - \frac{(r^2 + a^2)}{\rho^4} [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act]^2 + \frac{a^2 \dot{r}^2}{\Delta} = 0. \quad (5.28)$$

Se observa que sólo existen 3 incógnitas (t , \dot{r} y $\dot{\varphi}$) y 4 ecuaciones, a saber, (5.23), (5.25), (5.26) y (5.28). Por lo tanto, debe existir una expresión que relacione los términos constantes l y n . De (5.23) y (5.25) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sin^2 \theta [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act] = (n - al \sin^2 \theta), \quad (5.29)$$

$$\Delta(ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = [(r^2 + a^2)l - an]. \quad (5.30)$$

De estas últimas se puede despejar $\dot{\varphi}$, que viene dado por

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} (n - al \sin^2 \theta) + \frac{a}{\rho^2 \Delta} [(r^2 + a^2)l - an]. \quad (5.31)$$

Por otro lado, de (5.26) y (5.28) se tiene que

$$\frac{2a^2 \Delta}{\rho^2} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi})^2 - 2a \Delta \dot{\varphi} (ct - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) - \frac{(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} [(r^2 + a^2) \dot{\varphi} - act]^2 = 0. \quad (5.32)$$

Reemplazando (5.29), (5.30) y (5.31) en (5.32) se obtiene la ecuación que relaciona a l y n :

$$(n + al \sin^2 \theta)(n - al \sin^2 \theta) = 0. \quad (5.33)$$

Se escogerá la condición $n - al \sin^2 \theta = 0$, que si es utilizada en (5.29) se tiene que

$$ct = \frac{(r^2 + a^2)}{a} \dot{\varphi}. \quad (5.34)$$

Reemplazando (5.34) en (5.23), se puede despejar una expresión para $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{al}{\Delta}. \quad (5.35)$$

Así, la ecuación para $c\dot{t}$ es

$$c\dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)l}{\Delta}. \quad (5.36)$$

Utilizando (5.34) y (5.35) en (5.26) se obtiene que

$$\dot{r} = \pm l. \quad (5.37)$$

Luego, $r = \pm l\lambda + c$, donde c es una constante, lo que entrega la libertad de elegir a r como el parámetro afín a lo largo de cada geodésica, escogiendo en particular $\dot{r} = +l$, se tiene de (5.35) que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{a}{\Delta}. \quad (5.38)$$

Por otra parte de (5.36) se tiene que

$$\frac{d(ct)}{dr} = \frac{c\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}. \quad (5.39)$$

Estas ecuaciones pueden ser integradas fácilmente. De (5.38) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{adr'}{\Delta} + \varphi_0 \\ &= a \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r' - r_+)(r' - r_-)} + \varphi_0 \\ &= \frac{a}{r_+ - r_-} \int_0^r \left(\frac{1}{r' - r_+} - \frac{1}{r' - r_-} \right) dr' + \varphi_0 \\ &= \frac{a}{r_+ - r_-} \ln \left| \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right) \left(\frac{r_0 - r_-}{r_0 - r_+} \right) \right| + \varphi_0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Utilizando (5.15) se tiene que

$$r_+ - r_- = 2\sqrt{m^2 - a^2}.$$

Considerando que $a^2 < m^2$, se encuentra que la expresión para φ como función de la coordenada r de una curva que pasa por las coordenadas (r_0, φ_0) es

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{a}{2\sqrt{m^2 - a^2}} \ln \left| \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right) \left(\frac{r_0 - r_-}{r_0 - r_+} \right) \right| + \varphi_0.} \quad (5.41)$$

De (5.39) se tiene que

$$\begin{aligned} ct &= \int_{r_0}^r \frac{r'^2 + a^2}{\Delta} dr' + ct_0 \\ &= \int_{r_0}^r \frac{r'^2 dr'}{(r' - r_+)(r' - r_-)} + a^2 \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r' - r_+)(r' - r_-)} + ct_0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Se tiene además que

$$\int \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)} = r + \frac{r_+^2 \ln |r - r_+|}{r_+ - r_-} - \frac{r_-^2 \ln |r - r_-|}{r_+ - r_-}. \quad (5.43)$$

Luego

$$ct = r - r_0 + \frac{(r_+^2 + a^2)}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r - r_+}{r_0 - r_+} \right| - \frac{(r_-^2 + a^2)}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r - r_-}{r_0 - r_-} \right| + ct_0. \quad (5.44)$$

Al igual que en el cálculo de la expresión para φ se utiliza (5.15) para encontrar lo siguiente

$$r_{\pm}^2 = m^2 + \pm 2m\sqrt{m^2 - a^2} + m^2 - a^2.$$

Así, la expresión buscada para t como función de la coordenada r de una curva que pasa por la coordenadas (ct_0, r_0) es

$$ct(r) = r - r_0 + \left(m + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r - r_+}{r_0 - r_+} \right| + \left(m - \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r - r_-}{r_0 - r_-} \right| + ct_0. \quad (5.45)$$

Tal como se observa en la figura 5.4, se tiene que Δ es positivo en las regiones I y III, mientras que es negativo en la región II.

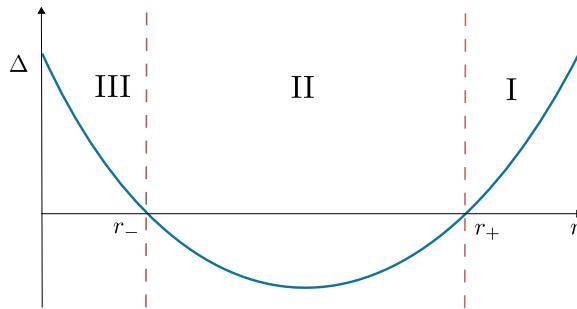


Figura 5.4: Función Δ versus coordenada r

Como $\Delta > 0$ en I entonces $dr/dt > 0$, así las curvas son salientes en esta región con esta elección de signo en \dot{r} ($\dot{r} = +l$), a este conjunto de curvas (congruencia) se le llama *congruencia principal de las geodésicas salientes tipo luz*. Mientras que si la elección es con signo negativo en \dot{r} , entonces $dr/dt < 0$, donde esta congruencia es llamada *congruencia principal de las geodésicas entrantes tipo luz*, cabe destacar que este caso es equivalente a hacer el cambio de signo simultáneamente en ct y φ .

$$\frac{dr}{dt} < 0 \iff ct \rightarrow -ct \wedge \varphi \rightarrow -\varphi. \quad (5.46)$$

Por lo tanto, la expresión para estas curvas es

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{a}{2\sqrt{m^2 - a^2}} \ln \left| \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right) \left(\frac{r_0 - r_-}{r_0 - r_+} \right) \right| + \varphi_0, \\ ct(r) &= r_0 - r - \left(m + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r - r_+}{r_0 - r_+} \right| - \left(m - \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r - r_-}{r_0 - r_-} \right| + ct_0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Al hacer $a = 0$ en (5.41) y (5.45) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0, \\ ct &= r - r_0 + 2m \ln |r - 2m| + ct_0,\end{aligned}\tag{5.48}$$

que corresponden a las congruencias salientes, de la solución de Schwarzschild dadas en (4.10) para el caso de partículas tipo luz moviéndose radialmente.

5.1.3. Diagrama Espacio-Temporal

Al representar gráficamente la expresión (5.45) se obtiene el llamado diagrama espacio-temporal de los conos de luz (figura 5.5), donde se observa que a medida que los conos se aproximan al horizonte de eventos r_+ en la región I éstos se empiezan a estrechar, hasta que la coordenada t diverge, como es de esperar, ya que $r = r_+$ es una singularidad de las coordenadas. Ésta puede ser removida al igual que en el caso de la solución de Schwarzschild con un buen cambio de coordenadas.

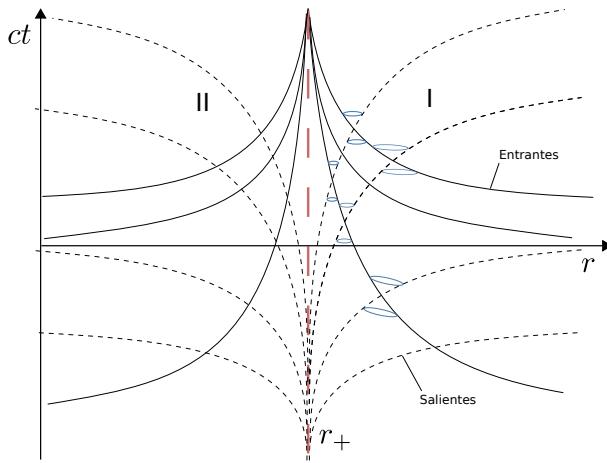


Figura 5.5: Diagrama espacio-tiempo en la vecindad de r_+

Con ese propósito se buscará un análogo al sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein utilizado en la solución de Schwarzschild.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

En el caso de la métrica de Schwarzschild para extender las congruencias entrantes a través del horizonte de eventos $r = r_+$ se hacía que las geodésicas tuvieran pendiente -1 en un diagrama espacio-tiempo durante todo su recorrido hasta llegar a la singularidad geométrica, es decir, para encontrar las coordenadas de Eddington-Finkelstein (ct, r, φ, θ) se utilizó la siguiente condición:

$$\frac{d(ct)}{dr} = -1 \quad \Rightarrow \quad d(ct) = -dr,\tag{5.49}$$

Donde las coordenadas (φ, θ) eran constantes, esto es

$$d\varphi = 0, \quad d\theta = 0.\tag{5.50}$$

En este caso se utilizarán las mismas condiciones, pero sobre las relaciones ya conocidas (5.39) y (5.38), utilizando $\dot{r} = -l$, así

$$\begin{aligned} d(ct) &= -\frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \\ d\varphi &= -\frac{a}{\Delta} dr, \end{aligned} \quad (5.51)$$

tal que

$$d(\bar{ct}) = -dr, \quad d\bar{\varphi} = 0. \quad (5.52)$$

Es fácil verificar que la transformación entre coordenadas buscada, en su forma diferencial, viene dada por

$$\begin{aligned} d(\bar{ct}) &= d(ct) + \frac{2mr}{\Delta} dr, \\ d\bar{\varphi} &= d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Por lo tanto, las congruencias entrantes de las geodésicas nulas en el sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{ct} &= r_0 - r + \bar{ct}_0, \\ \bar{\varphi} &= \bar{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Éstas se pueden ver en la figura 5.6, donde la trayectoria para las geodésicas entrantes no son alteradas por los horizontes de eventos, no así con las congruencias salientes, donde los valores de ct y ϕ divergen en estos puntos (r_- , r_+).

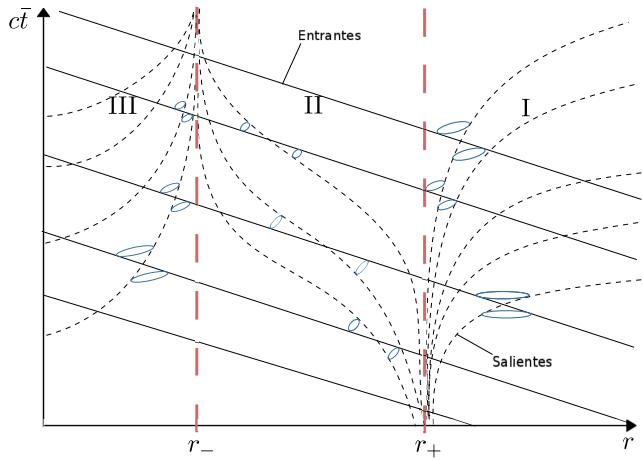


Figura 5.6: Diagrama de espacio tiempo en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

5.1.4. Límite Estacionario y Observadores Estacionarios

Al analizar la métrica de Schwarzschild fue necesario utilizar observadores estáticos en el infinito, para estudiar la métrica de Kerr se generaliza este concepto utilizando los llamados *Observadores Estacionarios* que se eligen de tal forma que r y θ permanezcan fijos y que rotan en torno al eje de giro del agujero negro con velocidad angular constante Ω dada por

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = c \frac{u^\varphi}{u^0}, \quad (5.55)$$

donde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ con τ el tiempo propio. Utilizando el hecho que el observador tiene una línea de mundo tipo tiempo ($u^\mu u_\mu = c^2$) entonces se debe cumplir que

$$(u^0)^2 \left[g_{\varphi\varphi} \frac{\Omega^2}{c^2} + 2g_{\varphi 0} \frac{\Omega}{c} + g_{00} \right] = c^2, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (5.56)$$

Así la expresión entre corchetes cuadrados debe ser positiva. Debido a que esa función tiene concavidad hacia abajo ($g_{\varphi\varphi} < 0$), entonces

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+, \quad (5.57)$$

donde Ω_\pm son la raíces de la expresión entre corchetes cuadrados en (5.56)

$$\Omega_\pm = c \left[\frac{-g_{0\varphi} \mp \sqrt{g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi}}}{g_{\varphi\varphi}} \right]. \quad (5.58)$$

Utilizando (5.7) notamos que $\Omega_- = 0$ cuando $g_{00} = r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$, cuya solución (respetando que $r_+ < r$) es justamente la superficie de redshift infinito S_+ que viene dada por el radio

$$r_{s+} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.59)$$

En el caso que $r_+ < r < r_{s+}$ la velocidad angular Ω siempre será positiva ya que en ese caso $\Omega_- > 0$, que viene del hecho que $g_{00} > 0$ (coordenada ct es tipo tiempo). Por lo tanto, en este rango no pueden existir observadores estáticos (es decir con $\Omega = 0$). Así, sólo en el caso en que $r = r_{s+}$ se tiene que $\Omega = 0$, razón por la cual se le llama *Límite Estático*.

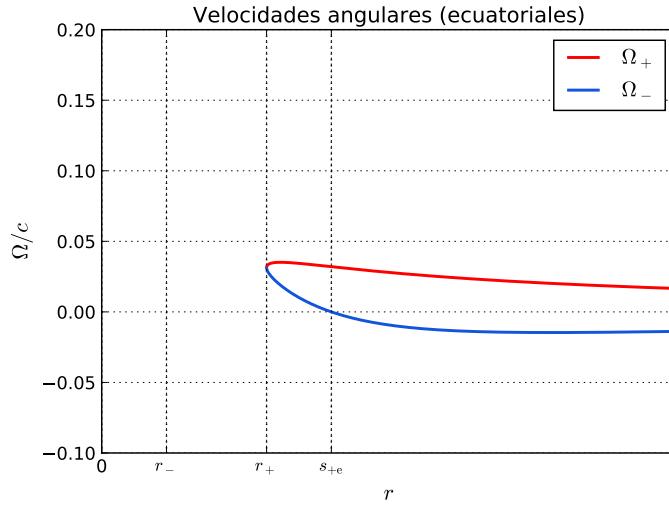


Figura 5.7: Frecuencias angulares permitidas para órbitas circulares ecuatoriales. Código Python [aquí](#).

Además, de (5.58) se observa que los observadores estacionarios no existen si $g_{0\varphi}^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi} < 0$, lo que se traduce en que $\Delta < 0$, ya que

$$(r - r_-)(r - r_+) < 0. \quad (5.60)$$

Así, los observadores estacionarios existen sólo cuando $r > r_+$ que viene a ser la generalización del hecho que los observadores estáticos no existen dentro del horizonte de eventos en la solución de Schwarzschild. Ver también la figura 5.7.

5.2. Extracción de Energía de una Agujero Negro Rotante

5.2.1. Geodésicas tipo tiempo

En este caso se calcularán las geodésicas de partículas en movimiento en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Para resolver el caso general se puede utilizar una forma descubierta por B. Carter³, que utiliza el método de Hamilton-Jacobi.

Usaremos la función lagrangeana (5.20), con $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ y λ es un parámetro afín que, por conveniencia, elegimos como $\lambda = \tau/m_0$, donde m_0 es la masa de la partícula moviéndose en este campo gravitacional y τ su tiempo propio. Ya que el lagrangiano no depende explícitamente de las coordenadas ct y φ , existen dos constantes de movimiento: $p^0 = E/c$ y $p^\varphi = -L$, donde E es la energía de la partícula y L su momentum angular:

$$\begin{aligned} p^t &:= \frac{\partial \bar{L}}{\partial(ct)} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) ct + \frac{2am\dot{\varphi}}{r} := \frac{E}{c}, \\ p^\varphi &:= \frac{\partial \bar{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2am}{r} ct - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right) \dot{\varphi} := -L, \end{aligned} \quad (5.61)$$

y en general $p^\mu := \partial\bar{L}/\partial\dot{x}^\mu$.

Despejando ct y $\dot{\varphi}$, de estas ecuaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} ct &= \frac{(r^3 + a^2r + 2ma^2)E/c - 2amL}{r\Delta}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{(r - 2m)L + 2amE/c}{r\Delta}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

De la identidad $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = m_0^2c^2$, se tiene que

$$\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{4am}{r}\dot{\varphi}(ct)\right] = m_0^2c^2, \quad (5.63)$$

de donde podemos despejar \dot{r}^2 :

$$\frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{4am}{r}\dot{\varphi}(ct) - m_0^2c^2. \quad (5.64)$$

Reemplazando (5.62) en (5.64), obtenemos

$$\frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = (r^3 + a^2r + 2ma^2) \frac{E^2}{c^2r\Delta} - 4am \frac{EL}{cr\Delta} - (r - 2m) \frac{L^2}{r\Delta} - m_0^2c^2. \quad (5.65)$$

Por lo tanto,

$$r^3\dot{r}^2 = (r^3 + a^2r + 2ma^2) \frac{E^2}{c^2} - 4am \frac{E}{c}L - (r - 2m)L^2 - m_0^2c^2r\Delta. \quad (5.66)$$

Definimos la función

$$R(E, L, r) := (r^3 + a^2r + 2ma^2) \frac{E^2}{c^2} - 4am \frac{E}{c}L - (r - 2m)L^2 - m_0^2c^2r\Delta, \quad (5.67)$$

de modo que (5.66) adopta la forma:

$$r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = R(E, L, r). \quad (5.68)$$

³Brandon Carter (1942) físico teórico australiano http://en.wikipedia.org/wiki/Brandon_Carter.

De este modo, R actúa como un potencial unidimensional efectivo para nuestro problema.

Nos restringuimos ahora al caso en que la órbita de la partícula sea una circunferencia, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, que entonces require que

$$R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = 0. \quad (5.69)$$

[Tarea: verifique la segunda condición, usando la ecuación de la geodésica]

Con estas condiciones se pueden encontrar los valores de E y L para el caso de una órbita circular:

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{r^2 - 2mr \pm a\sqrt{mr}}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.70)$$

$$\frac{L}{m_0 c} = \pm \frac{\sqrt{mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{mr} + a^2)}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.71)$$

El signo de arriba (+) al frente de (5.71) indica que la partícula gira en el mismo sentido que el agujero negro, en cambio con el de abajo (-) gira en sentido contrario al agujero (sentido retrógrado).

Las órbitas circulares para partículas con masa $m_0 \neq 0$ existen desde el infinito hasta que la órbita circular anule el denominador de (5.70)–(5.71)⁴. Así,

$$r_f^2 - 3mr_f \pm 2a\sqrt{mr_f} = 0. \quad (5.72)$$

El valor de r_f corresponde al radio de la órbita de un fotón en una órbita geodésica circular ecuatorial. Notamos que si $a = 0$ entonces $r_f = 3m$. En cambio, si $a = m$ (rotación extrema), entonces $r_f^+ = m$ para órbitas co-rotantes con el agujero y $r_f^- = 4m$ para órbitas contra-rotantes.

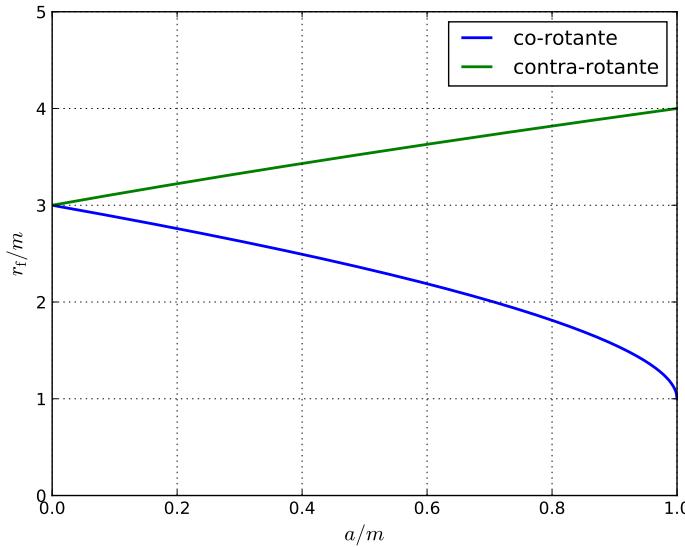


Figura 5.8: Radios mínimos para órbitas circulares ecuatoriales.

⁴Esto equivale al caso de que las órbitas sean tipo luz, lo que se obtiene en el límite L finito y $m_0 \rightarrow 0$, de modo que $L/m_0 \rightarrow \infty$.

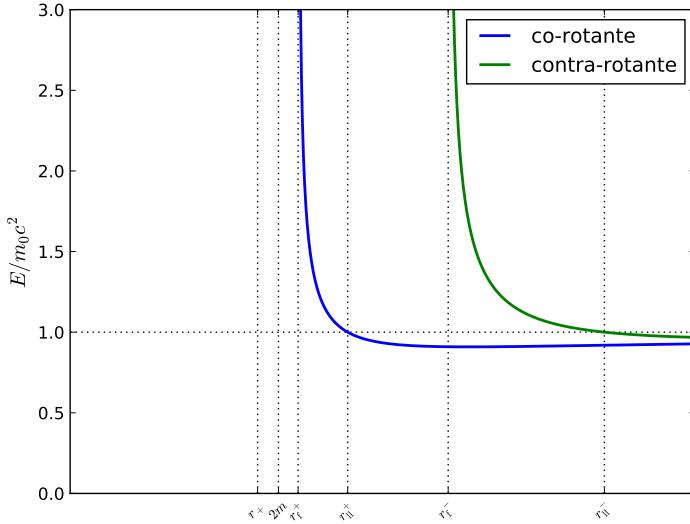


Figura 5.9: Energías de órbitas circulares ecuatoriales, para $a = 0.6m$. Código Python [aquí](#).

Las órbitas con energía $E/m_0c^2 > 1$ son tales que bajo perturbaciones del radio las partículas pueden escapar al infinito. Luego los radios para los cuales las órbitas circulares son ligadas cumplen que $r > r_{ll}$, donde r_{ll} es la órbita circular “levemente ligada”, cuyo radio puede ser determinado usando (5.70) resolviendo la condición $E/m_0c^2 = 1$ para la coordenada r . Así obtenemos

$$r_{ll} = 2m \mp a + 2\sqrt{m(m \mp a)}. \quad (5.73)$$

Vemos que si $a = 0$ entonces $r_{ll} = 4m$ y para $a = m$, $r_{ll}^+ = m$ si la partícula gira en el mismo sentido que el agujero y $r_{ll}^- = (3 + 2\sqrt{2})m \approx 5.83m$ si la rotación es retrograda con respecto al agujero.

Estabilidad de las órbitas

La estabilidad de la órbita estará garantizada si $\partial^2 R / \partial r^2 \leq 0$. Utilizando (5.67) tenemos que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = 6r \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 (6r - 4m) \leq 0. \quad (5.74)$$

Luego

$$1 - \frac{E^2}{m_0^2 c^4} \geq \frac{2m}{3r}. \quad (5.75)$$

Reemplazando (5.70) en (5.75) obtenemos

$$r^2 - 6mr \pm 8a\sqrt{mr} - 3a^2 \geq 0. \quad (5.76)$$

Así, se encuentra la siguiente condición para el radio de la órbita :

$$r \geq r_{le}. \quad (5.77)$$

Aquí r_{le} es el radio de la órbita circular levemente estable la cual está dada por

$$r_{le} = m \left[3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right], \quad (5.78)$$

donde

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \frac{a}{m}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{a}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad (5.79)$$

$$Z_2 = \left(\frac{3a^2}{m^2} + Z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.80)$$

Se tiene que para $a = 0$, entonces $r_{le} = 6m$ y para $a = m$, $r_{le} = m$ si la partícula gira en la misma dirección que el agujero negro y $r_{le} = 9m$ si la partícula gira en sentido retrógrado con respecto al agujero.

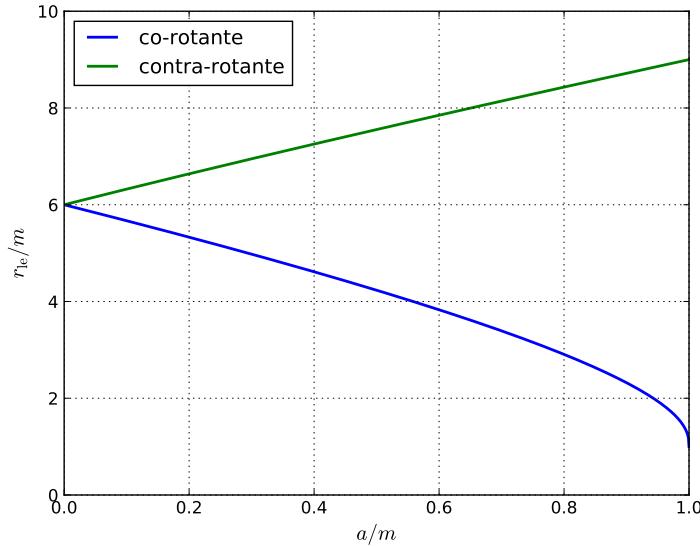


Figura 5.10: Radios de última órbita circular ecuatorial estable.

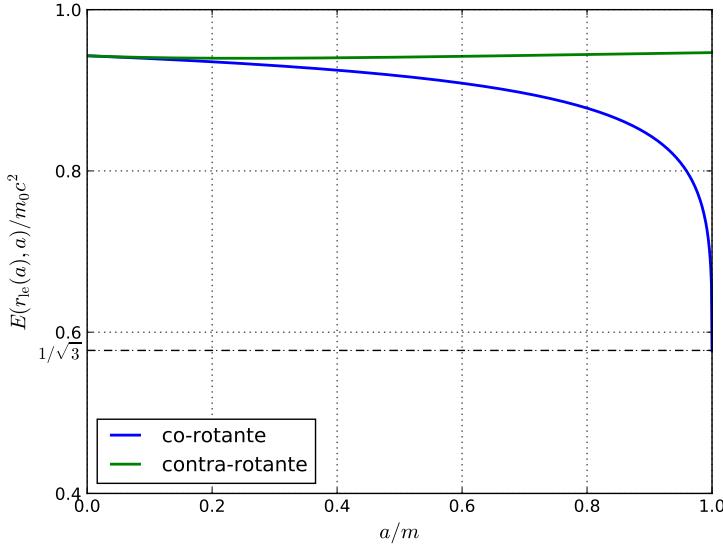


Figura 5.11: Energía de la última órbita circular ecuatorial estable.

5.2.2. Región de Energía Negativa

Resolviendo la ecuación (5.66) para E , se obtiene la siguiente expresión para la energía de una partícula en una órbita geodésica:

$$\frac{E}{c} = \frac{2amL + \sqrt{L^2r^2\Delta + (r^3 + a^2r + 2ma^2)(m_0^2c^2r\Delta + \dot{r}^2r^3)}}{r^3 + a^2r + 2ma^2}. \quad (5.81)$$

Cabe destacar la elección del signo positivo antes de la raíz de (5.81), ya que en este caso al hacer $r \rightarrow \infty$ la energía es positiva ($E \geq m_0c^2$). En el caso de que $E < 0$ se requiere que $L < 0$ (órbita retrógrada) como se observa en (5.81), con la condición de que el valor absoluto de la primera parte en el numerador de esta expresión sea mayor que el valor absoluto de la segunda, o equivalentemente:

$$L^2r^2\Delta + (r^3 + a^2r + 2ma^2)(m_0^2c^2r\Delta + \dot{r}^2r^3) < 4a^2m^2L^2. \quad (5.82)$$

De (5.82), se tiene que

$$r^2\Delta + (r^3 + a^2r + 2ma^2) \left(\frac{m_0^2}{L^2}c^2r\Delta + \frac{\dot{r}^2}{L^2}r^3 \right) < 4a^2m^2. \quad (5.83)$$

Ya que el segundo término del lado izquierdo es siempre positivo fuera del horizonte, lo anterior implica que

$$r^2\Delta < 4a^2m^2. \quad (5.84)$$

La (5.82) requiere que $r < 2m$. Por lo tanto, las órbitas geodésicas con energías negativas existen sólo en la región interior al límite estacionario, es decir, en la ergosfera.

5.2.3. Mecanismo de Penrose

Sir Roger Penrose y R. M. Floyd explotaron la existencia de energía negativa en un trabajo publicado en 1971 [64], donde explica cómo extraer energía de un agujero negro rotante. El

mecanismo que lleva su nombre se demuestra con el siguiente experimento pensado. Dada una partícula con una determinada energía E_{en} y una trayectoria tal que pase el límite estacionario y considere que cuando se encuentre en la ergósfera se divide en dos partículas, una que sea capaz de salir de la ergósfera hacia al infinito, con una energía E_{sal} , y otra partícula que tenga energía E que luego sea absorbida por el agujero (que entre en el horizonte de eventos). Utilizando la conservación de energía,

$$E_{\text{en}} = E_{\text{sal}} + E, \quad (5.85)$$

en el caso que $E < 0$ se tiene que $E_{\text{sal}} > E_{\text{en}}$. Así, el hecho de existir órbitas con energía negativa en la ergosfera abre la posibilidad de que una partícula que caiga en el agujero negro eyecte al infinito otra con una energía aún mayor.

La energía con la cual sale la partícula es extraída de la energía del agujero negro, disminuyendo también su rotación producto de que la partícula con energía negativa tiene una órbita retrógrada.

Análogamente, en el caso ondulatorio (ondas electromagnéticas o gravitacionales) ocurre un fenómeno similar de amplificación de la energía donde, con un valor de la frecuencia adecuado estas ondas son dispersadas por el agujero negro rotante. Parte de la onda es absorbida y otra parte es emitida con energía mayor que la incidente. A este fenómeno se le llama **superradiancia**.

Límite Inferior de la Velocidad Relativa

Bardeen, Press y Teukolsky, en su trabajo de 1972 [65] mostraron que existe un límite inferior para la velocidad relativa entre las partículas (creadas de la separación de la partícula entrante) que se encuentran en la ergósfera del agujero negro para que se lleve a cabo el mecanismo de Penrose.

Se considera una partícula de masa m_0 y 4-momentum p^μ . Su energía (que es conservada a lo largo de una trayectoria geodésica) es dada por $E = cp_\mu \xi_{(t)}^\mu$. Aquí $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es el vector de Killing temporal. Bajo estos supuestos, estudiaremos cuál es rango de valores que la energía E puede adoptar en un punto dado del espacio-tiempo.

Escogiendo una tetrada ortonormal $(e_a^\mu)_{a=1,4}$ como base para expresar la 4-velocidad y el vector de Killing temporal en un punto determinado, se tiene que

$$u^a = u^\mu e_\mu^a = (\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad \xi_{(t)}^a = \xi_{(t)}^\mu e_\mu^a = \left(\xi^{\hat{0}}, \vec{\xi} \right). \quad (5.86)$$

donde se satisface que $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ con $g_{\mu\nu}$ la métrica de Kerr y η_{ab} la métrica de Minkowski, donde además \vec{v} es el vector velocidad de la partícula, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y $\vec{\xi}$ es un vector en el espacio 3-dimensional.

De (5.86), el cuociente entre la energía de la partícula y su energía en reposo es

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{g_{\mu\nu} u^\mu \xi_{(t)}^\nu}{c} = \frac{\eta_{ab} u^a \xi_{(t)}^b}{c} = \gamma \left(\xi^{\hat{0}} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\xi}}{c} \right). \quad (5.87)$$

Una condición necesaria para que (5.87) sea un extremo es que \vec{v} y $\vec{\xi}$ sean (anti)paralelos, de modo que $\vec{v} \cdot \vec{\xi} = \pm v \xi$ con $\xi = \sqrt{\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}}$. Además, se tiene que la norma del 4-vector $\xi(t)$ es

$$\xi_{(t)}^2 = g_{\mu\nu} \xi_{(t)}^\mu \xi_{(t)}^\nu = g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right), \quad (5.88)$$

cuyo valor es independiente de las coordenadas utilizadas.

Por lo tanto, si la partícula se encuentra en la ergósfera entonces $\xi_{(t)}$ es un vector tipo espacio ($\xi_{(t)}^2 < 0$), de modo que $\xi_0^2 - \xi^2 < 0$ y $\xi^0 < \xi$. Así, de (5.87) vemos que E/m_0c^2 aporta su valor máximo si $v \rightarrow c$ y $\vec{v} \cdot \vec{\xi} = -v\xi$ y mínimo en el caso en que $v \rightarrow -c$ y $\vec{v} \cdot \vec{\xi} = +v\xi$. De aquí se desprende que los valores posibles de la energía son en efecto todos los valores reales,

$$-\infty < \frac{E}{m_0c^2} < +\infty. \quad (5.89)$$

En el caso de estar fuera de la ergósfera $\xi_{(t)}$ es tipo tiempo, con lo cual $\xi^0 > \xi$. Con esto el valor de la energía es siempre positivo, donde se debe determinar el límite inferior del rango permitido para el cuociente (5.87).

Derivando la expresión (5.87) con respecto a v e igualándola a 0, se encuentra que el valor de la velocidad que extremiza el valor de la energía es:

$$v = c \frac{\xi}{\xi^0}. \quad (5.90)$$

Reemplazado (5.90) en (5.87), se obtiene que el límite inferior viene dado por la norma del módulo del vector de Killing en el caso que es tipo tiempo $\xi_{(t)}$ (donde $\xi_{(t)}^2 = \xi_0^2 - \xi^2$) :

$$\xi_{(t)} \leq \frac{E}{m_0c^2} < +\infty. \quad (5.91)$$

Como (5.91) está dentro del rango (5.89), entonces se encuentra la condición general

$$\frac{E^2}{m_0^2c^4} - \xi_{(t)}^2 \geq 0. \quad (5.92)$$

Para encontrar el límite inferior para la velocidad, se debe considerar lo siguiente: Dadas las órbitas de dos partículas de masa m_1 y m_2 que se intersectan en un punto, donde las energías de cada partícula son E_1 y E_2 , respectivamente, y con diferentes 4-velocidades, tal que la norma vector de velocidad relativa $|w|$ (velocidad de una partícula vista por un observador comóvil con la otra partícula) es distinto de cero.

Se escoge nuevamente una tetrada ortonormal como base de los 4-vectores en este punto, tal que las correspondientes 4-velocidades son

$$u_1^a = (\gamma c, -\gamma \vec{v}), \quad u_2^a = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (5.93)$$

La magnitud de la velocidad relativa $|w|$, se encuentra utilizando la fórmula de composición de velocidades:

$$|w| = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.94)$$

Además, de (5.87) se tiene que

$$\frac{E_1}{m_1c^2} = \gamma \left(\xi^0 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{\xi}}{c} \right), \quad \frac{E_2}{m_2c^2} = \gamma \left(\xi^0 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\xi}}{c} \right). \quad (5.95)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.95) para ξ_0^2 y ξ^2 , considerando que $\vec{v} \cdot \vec{\xi} \equiv v\xi \cos \eta$, donde η es el ángulo entre \vec{v} y $\vec{\xi}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= \frac{\left(\frac{E_1}{m_1c^2} + \frac{E_2}{m_2c^2} \right)^2}{4\gamma^2}, \\ \xi^2 &= \frac{\left(\frac{E_1}{m_1c^2} - \frac{E_2}{m_2c^2} \right)^2}{4\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \cos^2 \eta}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Con lo cual se tiene que

$$\left(\frac{E_1}{m_1 c^2} - \frac{E_2}{m_2 c^2} \right)^2 = \left[\left(\frac{E_1}{m_1 c^2} + \frac{E_2}{m_2 c^2} \right)^2 - 4\gamma^2 \xi_{(t)}^2 \right] \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \eta. \quad (5.97)$$

Utilizando el hecho que $0 \leq \cos^2 \eta \leq 1$ se tiene que

$$\left(\frac{E_1}{m_1 c^2} - \frac{E_2}{m_2 c^2} \right)^2 \leq \left[\left(\frac{E_1}{m_1 c^2} + \frac{E_2}{m_2 c^2} \right)^2 - 4\gamma^2 \xi_{(t)}^2 \right] \frac{v^2}{c^2}. \quad (5.98)$$

Resolviendo la última desigualdad para v/c se tiene que

$$\frac{v^2}{c^2} \geq \left[\frac{\frac{E_1}{m_1 c^2} - \frac{E_2}{m_2 c^2}}{\sqrt{\frac{E_1^2}{m_1^2 c^4} - \xi_{(t)}^2} + \sqrt{\frac{E_2^2}{m_2^2 c^4} - \xi_{(t)}^2}} \right]^2. \quad (5.99)$$

Aplicando las relaciones encontradas al caso de tener la geometría de Kerr, de (5.88) con $r \geq r_+$, encontramos

$$|\xi_{(t)}^2| \leq 1, \quad \forall \theta, \varphi. \quad (5.100)$$

Consideremos el caso en que E_1 es el valor de la mínima energía que puede tener una partícula que se encuentra en el mínimo radio en que la órbita circular es estable, lo que ocurre cuando $a \rightarrow m$. Además, supondremos que E_2 tiene el valor de la energía de una partícula que se encuentra en el borde de la región de energía negativa. Bajo estos supuestos, tenemos que

$$\frac{E_1}{m_1 c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{E_2}{m_2 c^2} = 0. \quad (5.101)$$

Entonces, (5.99) obtenemos que

$$\frac{v}{c} \geq 2 - \sqrt{3}. \quad (5.102)$$

Finalmente, reemplazando (5.102) en (5.94), se obtiene la siguiente desigualdad

$$|w| \geq \frac{c}{2}. \quad (5.103)$$

Así, para lograr extraer energía de un agujero negro rotante la partícula que es capaz de salir debe acelerar a una velocidad tal que la velocidad relativa sea al menos la mitad de la velocidad de la luz, ya que bajo este requerimiento existirá una partícula en la región de energía negativa, logrando salir la partícula que se encuentra fuera de esta región (de energía negativa) con más energía que la partícula entrante.

Capítulo 6

Campos gravitacionales débiles y ondas gravitacionales

6.1. Expansión en potencias de G

Las ecuaciones de Einstein son no-lineales en la métrica. Por esto, sus soluciones dependen de forma no lineal del tensor de energía-momentum de la materia (que asumimos conocido). Como $T^{\mu\nu}$ aparece al lado derecho de las ecuaciones de Einstein siempre multiplicado por la constante de gravitación G , es decir, en la combinación $GT^{\mu\nu}$, entonces las componentes métricas dependerán no-linealmente de G . Podemos verificar esta propiedad, por ejemplo, en el caso de la solución de Schwarzschild.

Asumiendo que el *campo gravitacional es débil* (curvatura pequeña), pero *no necesariamente estacionario*, es posible desarrollar un *método perturbativo* para expresar las soluciones de las ecuaciones de Einstein como una serie de términos, cada uno proporcional a una potencia dada de la constante de gravitación G .

Dividimos la métrica en

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (6.1)$$

donde η es la métrica plana, es decir, $Riemann(\eta) = 0$ y usaremos coordenadas “cuasi-iniciales” x^μ tales que $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$. Además, separaremos la perturbación $h_{\mu\nu}$ en una serie de potencias de G , de modo que

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + h_{\mu\nu}^{(3)} + \dots, \quad (6.2)$$

donde $h_{\mu\nu}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$, denota el término proporcional a G^n . En particular $h_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$.

Realizaremos una expansión similar para cada cantidad relevante. Por ejemplo,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(1)\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{(2)\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{(3)\mu\nu}^\lambda + \dots, \quad (6.3)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + R_{\mu\nu}^{(3)} + \dots, \quad (6.4)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + G_{\mu\nu}^{(3)} + \dots. \quad (6.5)$$

Note que, ya que el término de orden cero es la métrica plana (y además usamos coordenadas donde esta métrica plana es constante), las expansiones de la conexión, curvatura, y el tensor de Einstein comienzan con el orden 1.

Similarmente, es necesario en general considerar una expansión del tensor de energía-momentum de la materia:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + \dots. \quad (6.6)$$

Aquí $T_{\mu\nu}^{(0)}$ representa el tensor de energía-momentum de la materia a orden cero en G , **como si la materia estuviese distribuida en un espacio plano**. Recuerde que en general $T_{\mu\nu}$ depende de la métrica¹, por lo que es necesario realizar la expansión correspondiente para $T_{\mu\nu}$.

Con esto, las ecuaciones de Einstein adoptan la forma

$$G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + G_{\mu\nu}^{(3)} + \dots = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \right), \quad (6.7)$$

que *separaremos*, consistentemente, en

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (6.8)$$

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (6.9)$$

$$G_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (6.10)$$

etc.

6.1.1. Expansión a primer orden

Métrica

Primero requerimos calcular la métrica inversa $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + g_{(1)}^{\mu\nu} + g_{(2)}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(G^3). \quad (6.11)$$

Un cálculo simple muestra que

$$g_{(1)}^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h_{\lambda\rho} =: -h_{(1)}^{\mu\nu}. \quad (6.12)$$

Por convención, en el contexto de la expansión realizada subimos y bajamos los índices usando la métrica plana η . Así, por ejemplo, $h^{(1)} := h_{(1)\mu}^\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{(1)}$ es la traza del tensor $h_{\mu\nu}^{(1)}$ y $\square := \partial_\mu\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ es el operador de onda.

Conexión

La primera contribución a los símbolos de Christoffel resultan ser

$$\Gamma_{(1)\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu h_{\nu\rho}^{(1)} + \partial_\nu h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{\mu\nu}^{(1)} \right) \quad (6.13)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu h_{(1)\nu}^\lambda + \partial_\nu h_{(1)\mu}^\lambda - \partial_\lambda h_{\mu\nu}^{(1)} \right). \quad (6.14)$$

Tensor de curvatura de Riemann

Similarmente, el término de primer orden del tensor de curvatura es:

$$R_{(1)\mu\nu\lambda}^\rho = \partial_\nu\Gamma_{(1)\mu\lambda}^\rho - \partial_\lambda\Gamma_{(1)\mu\nu}^\rho \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu\partial_\nu h_{(1)\lambda}^\rho - \partial_\mu\partial_\lambda h_{(1)\nu}^\rho + \partial_\lambda\partial_\nu h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\nu\partial_\lambda h_{\mu\rho}^{(1)} \right). \quad (6.16)$$

¹Por ejemplo, para un fluido perfecto $T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$.

Tensor de Ricci

Como consecuencia, el tensor de Ricci es de la forma:

$$R_{\mu\lambda}^{(1)} = R_{(1)\mu\rho\lambda}^{\rho} \quad (6.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{(1)\lambda}^{\nu} + \partial_{\lambda} \partial^{\nu} h_{\mu\nu}^{(1)} - \partial_{\mu} \partial_{\lambda} h^{(1)} - \square h_{\mu\lambda}^{(1)} \right). \quad (6.18)$$

Escalar de Curvatura

El escalar de curvatura es dado, a primer orden por,

$$R^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^{\mu} \partial^{\nu} h_{\mu\nu}^{(1)} - \square h^{(1)}. \quad (6.19)$$

Tensor de Einstein

Finalmente, el tensor de Einstein es

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\partial_{\mu} \partial^{\lambda} h_{\lambda\nu}^{(1)} + \partial_{\nu} \partial^{\lambda} h_{\lambda\mu}^{(1)} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{(1)} - \square h_{\mu\nu}^{(1)} - \eta_{\mu\nu} \left(\partial^{\lambda} \partial^{\rho} h_{\lambda\rho}^{(1)} - \square h^{(1)} \right) \right]. \quad (6.21)$$

Es conveniente definir el tensor $\bar{t}_{\mu\nu}$, asociado a un tensor simétrico $t_{\mu\nu}$, como

$$\bar{t}_{\mu\nu} := t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t \quad (6.22)$$

$$= t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} t_{\lambda\rho}. \quad (6.23)$$

Puede verificarse que

$$\bar{t} := \eta^{\mu\nu} \bar{t}_{\mu\nu} = -t, \quad \bar{\bar{t}}_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}. \quad (6.24)$$

Entonces podemos escribir:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left[\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} + \eta_{\mu\nu} \partial^{\lambda} \partial^{\rho} \bar{h}_{\lambda\rho}^{(1)} - \partial_{\mu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu}^{(1)} - \partial_{\nu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\mu}^{(1)} \right]. \quad (6.25)$$

6.2. Ecuaciones de Einstein linealizadas

A primer orden, la ecuación (6.8) para $h_{\mu\nu}^{(1)}$ es

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} + \eta_{\mu\nu} \partial^{\lambda} \partial^{\rho} \bar{h}_{\lambda\rho}^{(1)} - \partial_{\mu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu}^{(1)} - \partial_{\nu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\mu}^{(1)} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (6.26)$$

Note además que operando con ∂^{μ} a ambos lados de (6.26), obtenemos que la “cuadridivergencia” del lado izquierdo se anula idénticamente. Como consecuencia, el tensor de energía-momentum en el lado derecho de (6.26) debe satisfacer

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu}^{(0)} = 0, \quad (6.27)$$

es decir, que la energía y el momentum de la materia descrito por $T_{\mu\nu}^{(0)}$ se conserva. Esto es consistente con la interpretación que $T_{\mu\nu}^{(0)}$ describe el contenido de energía-momentum de la materia *en ausencia de gravitación*.

6.3. Transformaciones de gauge

En la sección anterior derivamos las ecuaciones de Einstein linealizadas asumiendo como punto de partida la descomposición (6.1) de la métrica, en un sistema de coordenadas cuasi-inercial. Sin embargo, este sistema de coordenadas, y por lo tanto la descomposición (6.1), *no es único*. De hecho, *existen infinitos sistemas de coordenadas en los que puede descomponerse la métrica como en (6.1)*, pero en general con perturbaciones $h_{\mu\nu}$ diferentes.

En efecto, como consecuencia del hecho que estamos usando un espacio-tiempo “de fondo” plano, el formalismo es naturalmente covariante bajo transformaciones de Lorentz *globales* de las coordenadas, es decir, bajo la transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ las componentes de la métrica son transformadas de forma tal que en el nuevo SC una descomposición de la forma (6.1) es también válida, con $h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho h^{\lambda\rho}$.

Adicionalmente, transformaciones de la forma

$$x^\mu(P) \rightarrow x'^\mu(P) = x^\mu(P) + \xi^\mu(x(P)) \quad (6.28)$$

(de las coordenadas usadas para etiquetar el evento P) conducen a nuevas descomposiciones del tipo (6.1). Verificamos esto calculando las componentes del tensor métrico en las nuevas coordenadas:

$$g'_{\mu\nu}(x'(P)) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}(P) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}(P) g_{\lambda\rho}(x(P)). \quad (6.29)$$

Tal como lo hicimos antes, podemos considerar que ξ^μ tiene una dependencia general con G , de modo que²

$$\xi^\mu = \xi_{(1)}^\mu + \xi_{(2)}^\mu + \xi_{(3)}^\mu + \dots \quad (6.30)$$

A primer orden, obtenemos

$$g'_{\mu\nu}(x'(P)) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}(P) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}(P) g_{\lambda\rho}(x(P)) \quad (6.31)$$

$$= \left(\delta_\mu^\lambda - \partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda(P) \right) \left(\delta_\nu^\rho - \partial_\nu \xi_{(1)}^\rho(P) \right) \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} \right) + \mathcal{O}(G^2) \quad (6.32)$$

$$= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)}(P) - \partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda(P) - \partial_\nu \xi_{(1)}^\lambda(P) + \mathcal{O}(G^2) \quad (6.33)$$

$$=: \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)}(P) + \mathcal{O}(G^2). \quad (6.34)$$

Por lo tanto, en las coordenadas x' las perturbaciones métricas de primer orden $h_{\mu\nu}^{(1)}$ están dadas por

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\mu\nu}^{(1)} - \partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda - \partial_\nu \xi_{(1)}^\lambda, \quad \xi_{(1)}^\lambda := \eta_{\mu\nu} \xi_{(1)}^\nu. \quad (6.35)$$
Transf. de gauge

Resumiendo, el cambio de coordenadas (6.28) transforma una métrica de la forma (6.1) en una métrica de la misma forma, pero con una perturbación $h_{\mu\nu}^{(1)}$ relacionada con la original por medio de (6.35).

6.3.1. Invariancia de gauge

La propiedad fundamental de las transformaciones de gauge (6.28) y (6.35) es que ellas dejan, a primer orden, el tensor de curvatura, y por consiguiente las ecuaciones linealizadas de Einstein, *invariantes*³. Esto es verificado fácilmente calculando el correspondiente cambio del tensor de Riemann (totalmente covariante): Verificamos que bajo (6.35) se cumple que

$$R'_{\mu\nu\lambda\rho}^{(1)} = R_{\mu\nu\lambda\rho}^{(1)} \quad (6.36)$$

²Un término del tipo $\xi_{(0)}^\mu$ no es considerado puesto que transformaría métricas donde la separación (6.1) es válida en métricas que no cumplen con esta descomposición.

³...y no sólo covariantes. Ellas *siempre* son covariantes, bajo cualquier transformación coordinada.

y, por lo tanto, $R'_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)}$, $R'^{(1)} = R^{(1)}$ y $G'_{\mu\nu}^{(1)} = G_{\mu\nu}^{(1)}$.

6.3.2. Gauge de Lorenz

Ya que el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein es invariante bajo la transformación (6.28) en el orden lineal, podemos usar esta libertad de gauge para seleccionar sistemas de coordenadas en los que las perturbaciones $\bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}$ sean particularmente simples.

Impondremos el *gauge de Lorenz*⁴, definido por

$$\boxed{\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} \stackrel{!}{=} 0.} \quad (6.37) \quad \text{Gauge de Lorenz}$$

Este gauge siempre puede ser impuesto. Suponga que se comienza con un campo $h_{\mu\nu}^{(1)}$ que no satisface (6.37). Entonces podemos realizar una transformación de gauge (6.35) tal que

$$\bar{h}'_{\mu\nu}^{(1)} = h'_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h'^{(1)} \quad (6.38)$$

$$= h_{\mu\nu}^{(1)} - \partial_\mu\xi_\nu^{(1)} - \partial_\nu\xi_\mu^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h^{(1)} - 2\partial_\lambda\xi_{(1)}^\lambda\right) \quad (6.39)$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} - \partial_\mu\xi_\nu^{(1)} - \partial_\nu\xi_\mu^{(1)} + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi_{(1)}^\lambda. \quad (6.40)$$

De este modo, podemos imponer $\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} - \square\xi_\mu^{(1)} \stackrel{!}{=} 0$, que requiere elegir un campo $\xi_\mu^{(1)}$ tal que

$$\square\xi_\mu^{(1)} = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (6.41)$$

Esta condición siempre puede ser satisfecha, ya que la ecuación de onda siempre tiene soluciones, dadas las condiciones de borde adecuadas.

Suponga ahora que ya disponemos de un campo $h_{\mu\nu}^{(1)}$ que satisface el gauge de Lorenz. Entonces existe aún una *libertad residual* (tal como en electrodinámica), definida por aquellas transformaciones de gauge generadas por un vector $\xi_\mu^{(1)}$ que sea *armónico*, es decir, que satisfaga

$$\square\xi_\mu^{(1)} = 0, \quad (6.42)$$

ver (6.41).

En el gauge de Lorenz, las ecuaciones de Einstein linealizadas asumen la forma de una *ecuación de onda inhomogénea*. Usando (6.26) y (6.37), encontramos

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^{(0)}, \quad \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} = 0.} \quad (6.43) \quad \text{Ecs. lineales gauge Lorenz}$$

Es decir, en el gauge de Lorenz la perturbación de primer orden $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda inhomogénea. En una región sin materia $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda (homogénea), lo que implica que pueden existir *soluciones propagantes*, **cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz**.

Como puede verse, la situación es análoga al caso de las ecuaciones de Maxwell en Electrodinámica Clásica donde las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell adoptan, en términos del 4-potencial electromagnético $A_\mu^{\text{em}} = (\phi_{\text{em}}, -\vec{A}_{\text{em}})$, la forma $\square A_\mu^{\text{em}} - \partial^\mu(\partial_\nu A_\mu^{\text{em}}) = 4\pi J^\mu/c$ (donde $J_\mu := (c\rho, -\vec{j})$ es la 4-densidad de corriente), pero pueden ser reducidas a ecuaciones de onda inhomogéneas, $\square A_\mu^{\text{em}} = 4\pi J_\mu/c$ si se usan potenciales que satisfagan el gauge de Lorenz, $\partial^\mu A_\mu^{\text{em}} = 0$.

⁴Denominado así por su analogía con el gauge de Lorenz usado en electrodinámica.

Recuerde que, al orden de aproximación considerado, es suficiente calcular el tensor de energía-momentum a orden cero, es decir, en ausencia de campo gravitacional y usando la métrica plana para subir y bajar los índices.

Las soluciones particulares correspondientes a *campos retardados asintóticamente nulos* son entonces de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (6.44)$$

o simplemente,

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}^{(0)}(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'}. \quad (6.45)$$

La métrica, incluyendo contribuciones hasta primer orden, puede ser obtenida entonces como

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{(1)}}. \quad (6.46)$$

Gauges adicionales en el vacío

En regiones libres de fuentes, es decir, donde $T_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, es posible elegir coordenadas tales que, adicionalmente a la condición de Lorenz (6.37), se satisfaga

$$\boxed{h^{(1)} = 0, \quad h_{0i}^{(1)} = 0}. \quad (6.47)$$

En efecto, de (6.35) se sigue que la transformación de la traza $h^{(1)}$ es de la forma siguiente:

$$h'_{(1)} = h_{(1)} - 2\partial_\mu\xi_{(1)}^\mu. \quad (6.48)$$

Por lo tanto, $h'_{(1)} = 0$ si

$$2\partial_\mu\xi_{(1)}^\mu = h_{(1)}. \quad (6.49)$$

Similarmente, (6.35) implica que

$$h''_{0i}^{(1)} = h_{0i}^{(1)} - \partial_0\xi_i^{(1)} - \partial_i\xi_0^{(1)}, \quad (6.50)$$

de modo que $h''_{0i}^{(1)} = 0$ si

$$\partial_0\xi_i^{(1)} + \partial_i\xi_0^{(1)} = h_{0i}^{(1)}. \quad (6.51)$$

Las ecuaciones (6.49) y (6.51) forman entonces un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales para los cuatro campos $\xi_{(1)}^\mu$. Podemos verificar, aplicando el operador de onda sobre (6.49) y (6.51), que la condición que estas transformaciones adicionales preserven el gauge de Lorenz, es decir, que satisfagan (6.42), implica necesariamente que $\square h^{(1)} = 0$ y $\square h_{0i}^{(1)} = 0$. Estas condiciones necesarias son satisfechas, de acuerdo a la ecuación de campo (6.43), en regiones libres de fuentes. Para una discusión que muestra que estas condiciones son *suficientes* para asegurar la solución de (6.42), (6.49) y (6.51), vea [38], sección 4.4b.

El “gauge” (es decir, la elección de coordenadas quasi-inerciales) en el que el campo $h_{\mu\nu}^{(1)}$ satisface tanto el gauge de Lorenz (6.37) como las condiciones (6.47) es llamado *gauge transversal sin traza* (o TT-gauge, por “Transverse Traceless”). En la sección 6.4 consideraremos este gauge en la descripción de ondas gravitacionales planas.

En el gauge TT no es necesario hacer la distinción entre $h_{\mu\nu}^{(1)}$ y $\bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}$, ya que $h^{(1)} = \bar{h}^{(1)} = 0$ y por lo tanto

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (6.52)$$

Además, como $h^{(1)} = h_{\mu}^{(1)\mu} = h_0^{(1)0} + h_i^{(1)i} = 0$ podemos escribir la componente $h_0^{(1)0}$ en función de las componentes puramente espaciales: $h_{00}^{(1)} = -h_i^{(1)i} = h_{ii}^{(1)}$. Esto permite escribir cualquier expresión que involucre $h_{\mu\nu}^{(1)}$ como una función sólo de las componentes puramente espaciales $h_{ij}^{(1)}$. Finalmente, note además que en el gauge TT la condición de gauge de Lorenz (6.37) se reduce a

$$\partial_0 h_{00}^{(1)} = 0, \quad \partial_i h_{(1)}^{ij} = 0. \quad (6.53)$$

6.4. Ondas gravitacionales planas: dos polarizaciones

Consideramos una región sin materia por la que se propaga una onda gravitacional plana de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re \left[A_{\mu\nu} \exp(i k_\lambda x^\lambda) \right], \quad (6.54)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es el tensor (bajo TL) *amplitud de la onda* y k_λ es el 4-vector (bajo TL) *de onda*. Introduciendo (6.54) en la ecuación de onda homogénea, $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, encontramos que $k_\lambda k^\lambda = 0$, mientras que la condición de gauge de Lorenz implica que

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0. \quad (6.55)$$

Estas últimas cuatro condiciones reducen el número de componentes linealmente independientes de la amplitud $A_{\mu\nu}$ de 10 a 6. Adicionalmente, podemos usar la libertad de gauge residual para reducir el número de componentes independientes a sólo 2.

En efecto, dado un vector tipo luz k_μ arbitrario, podemos elegir los ejes coordenados (por medio de una TL) de modo que la onda se propague a lo largo del eje z positivo, es decir, tal que

$$k^\mu = (k, 0, 0, k), \quad k_\mu = (k, 0, 0, -k), \quad (6.56)$$

con $k > 0$. Con esto, la condición (6.55) implica que $A_{\mu 3} = -A_{\mu 0}$, de modo que

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{33} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \\ A^{13} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{23} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{33} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

Consideramos ahora la transformación de gauge definida por

$$\xi^\mu = -\Re \left[i \epsilon^\mu \exp(i k_\lambda x^\lambda) \right], \quad (6.58)$$

donde ϵ^μ son constantes, que ajustaremos a continuación. Esta elección de ξ^μ satisface $\square \xi^\mu = 0$, de modo que la transformación preserva la condición de Lorenz. Además, (6.35) implica que la nueva perturbación $\bar{h}'_{\mu\nu}$ tiene también la forma (6.54) de una onda plana monocromática, pero con la nueva amplitud

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \epsilon_\mu k_\nu - \epsilon_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu}(\epsilon^\lambda k_\lambda). \quad (6.59)$$

Usando (6.56) y (6.57) podemos escribir la transformación (6.59) explícitamente como

$$A'^{00} = A^{00} - k(\epsilon^0 + \epsilon^3), \quad (6.60)$$

$$A'^{01} = A^{01} - k\epsilon^1, \quad (6.61)$$

$$A'^{02} = A^{02} - k\epsilon^2, \quad (6.62)$$

$$A'^{11} = A^{11} - k(\epsilon^0 - \epsilon^3), \quad (6.63)$$

$$A'^{12} = A^{12}, \quad (6.64)$$

$$A'^{22} = A^{22} - k(\epsilon^0 - \epsilon^3). \quad (6.65)$$

Podemos entonces elegir las constantes ϵ^μ de modo que la amplitud $A'^{\mu\nu}$ adopte una forma simple. En particular, resulta conveniente imponer que $A'^{00} = A'^{01} = A'^{02} = 0$ y $A'^{11} = -A'^{22}$. Esta elección requiere elegir

$$\epsilon^0 = \frac{1}{4k} (2A^{00} + A^{11} + A^{22}), \quad (6.66)$$

$$\epsilon^1 = \frac{1}{k} A^{01}, \quad (6.67)$$

$$\epsilon^2 = \frac{1}{k} A^{02}, \quad (6.68)$$

$$\epsilon^3 = \frac{1}{4k} (2A^{00} - A^{11} - A^{22}), \quad (6.69)$$

y con esto obtenemos finalmente que

$$A'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A'^{11} & A'^{12} & 0 \\ 0 & A'^{12} & -A'^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'^{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A'^{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Debido a que esta elección de gauge satisface $A'^{\mu}_\mu = 0$, entonces $\bar{h}' = h' = 0$, es decir, la perturbación es de traza nula. Además, como $h'_{\mu 0} = 0$ y $h'_{\mu 3} = 0$ verificamos que $A'_{\mu\nu}$ **describe una solución en el gauge transversal sin traza (TT)**. En este sentido, una onda gravitacional plana es *transversal* y tiene sólo 2 estados de polarización *independientes*.

Si denotamos las amplitudes (complejas) A'^{11} y A'^{12} en términos de constantes reales, de modo que

$$A'^{11} =: h_+ e^{-i\varphi_+}, \quad A'^{12} =: h_\times e^{-i\varphi_\times}, \quad (6.71)$$

entonces el elemento de línea correspondiente a una onda gravitacional propagándose a lo largo del eje z positivo, con vector de onda k y frecuencia $\omega = ck$, con amplitudes h_+ y h_\times , y fases φ_+ y φ_\times respectivamente, es dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 + h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) (dx^2 - dy^2) + 2h_\times \cos(\omega t - kz - \varphi_\times) dx dy. \quad (6.72)$$

El. línea onda
grav. plana,
gauge TT

Consideremos por separado las dos posibles polarizaciones linealmente independientes de la onda gravitacional plana. Para el primer estado de polarización posible, con $h_+ \neq 0$ y $h_\times = 0$, tendremos que el elemento de línea se reduce a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 + h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) (dx^2 - dy^2). \quad (6.73)$$

En cambio, para el segundo estado de polarización independiente, con $h_+ = 0$ y $h_\times \neq 0$,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 + 2h_\times \cos(\omega t - kz - \varphi_\times) dx dy. \quad (6.74)$$

Ahora, tomemos el elemento de línea (6.73) correspondiente al primer estado de polarización y efectuemos una *rotación de los ejes coordenadas en un ángulo de 45 grados en torno al eje de propagación de la onda*. Es decir, introduzcamos el nuevo sistema coordenado $x'^\mu = (ct, x', y', z)$, con

$$x' := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y' := -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y). \quad (6.75)$$

Es directo verificar que con este cambio de coordenadas el elemento de línea (6.73) adopta la forma siguiente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx'^2 - 2h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) dx' dy'. \quad (6.76)$$

Concluimos de este modo que *los elementos de línea de las ondas gravitacionales planas correspondientes a los dos estados de polarización físicos, y por consiguiente sus efectos, difieren (obviando su amplitud y fases eventualmente diferentes) sólo en una rotación de $\pi/4$ en el plano normal a la propagación de la onda*. Debido a esta propiedad, podemos en lo sucesivo restringirnos al estudio de las propiedades de un estado de polarización de una onda gravitacional plana, puesto que los efectos de la otra polarización independiente son similares, luego de efectuar una rotación de $\pi/4$ al sistema.

6.5. Efectos de una onda gravitacional: principio de un detector de ondas gravitacionales

Consideremos una región del espaciotiempo por donde viaja una onda gravitacional plana, con vector de onda $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ ($k > 0$) dado. Usando (6.14) y (6.70) encontramos que en el gauge TT, a primer orden, $\Gamma_{00}^\mu = 0$. Debido a esto, tenemos que las curvas tipo tiempo dadas por $x^\mu(\tau) = (c\tau, \vec{x}_0)$ con \vec{x}_0 constante son geodésicas, ya que entonces

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 + \Gamma_{00}^\mu c^2 = 0. \quad (6.77)$$

Lo anterior implica que una partícula de prueba ubicada en $\vec{x} = \vec{x}_0$ e inicialmente en reposo respecto al SC cuasi-inercial, es decir, con $(d\vec{x}/dt)(0) = \vec{0}$, permanecerá con su coordenada espacial constante en el futuro. Esto no implica, sin embargo, que la “distancia” (o, más precisamente, el tiempo de vuelo) entre distintos cuerpos de prueba inicialmente en reposo en el SC usado sea constante, ya que la métrica del espaciotiempo varía tanto en el espacio como en el tiempo.

Consideremos un conjunto de partículas de prueba ubicadas inicialmente en un círculo en el plano xy , de radio R en coordenadas cuasi-iniciales, y el movimiento de ida y regreso de fotones desde el centro, $\vec{x} = \vec{0}$, hasta un punto sobre la circunferencia, ubicado en un ángulo φ respecto al eje x .

Parametrizamos la curva desde el origen hasta el punto de retorno sobre la circunferencia por $\vec{x}(t) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, 0)$. El movimiento de un fotón satisface $ds^2 = 0$ de modo que, en el caso de una onda polarizada tal que el elemento de línea sea (6.73), podemos escribir

$$cdt = \sqrt{dx^2 + dy^2 - h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+)(dx^2 - dy^2)} \quad (6.78)$$

$$= \sqrt{dr^2 - h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) dr^2} \quad (6.79)$$

$$= dr \sqrt{1 - h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi)} \quad (6.80)$$

$$= dr \left[1 - \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right] + \mathcal{O}(G^2). \quad (6.81)$$

Luego

$$dr = \frac{cdt}{1 - \frac{1}{2}h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi)} + \mathcal{O}(G^2) \quad (6.82)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right] cdt + \mathcal{O}(G^2) \quad (6.83)$$

Si t_0 es (la coordenada temporal correspondiente a) el instante en que el fotón sale del origen y t_i al de llegada del fotón a la posición de la partícula ubicada en la circunferencia de radio R , entonces (a primer orden en G):

$$\int_0^R dr = \int_{t_0}^{t_i} \left[1 + \frac{1}{2}h_+ \cos(\omega t - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right] cdt \quad (6.84)$$

$$R = c \left[t_i - t_0 + \frac{h_+}{2w} [\sin(\omega t_i - kz - \varphi_+) - \sin(\omega t_0 - kz - \varphi_+)] \cos(2\varphi) \right] \quad (6.85)$$

A partir de esta expresión, obtenemos

$$t_i = t_0 + \frac{R}{c} - \frac{h_+}{2\omega} [\sin(\omega t_i - kz - \varphi_+) - \sin(\omega t_0 - kz - \varphi_+)] \cos(2\varphi) \quad (6.86)$$

$$= t_0 + \frac{R}{c} + \mathcal{O}(G). \quad (6.87)$$

Note que (6.86) define una ecuación trascendental para t_i . Afortunadamente, debido a que estamos usando un esquema perturbativo, es posible encontrar una solución analítica, a primer orden en G . Para esto usamos (6.87) e “iteramos”, es decir, reemplazamos esta expresión en el lado derecho de (6.86). Entonces, podemos escribir

$$\sin(\omega t_i - kz - \varphi_+) = \sin(\omega t_0 + \frac{R\omega}{c} - \varphi_+) + \mathcal{O}(G) \quad (6.88)$$

$$= \sin(\omega t_0 + \frac{R\omega}{c} - \varphi_+) + \mathcal{O}(G). \quad (6.89)$$

Por lo tanto, una expresión para t_i (instante de llegada del fotón a la circunferencia en función del tiempo de partida t_0 y φ), correcta a primer orden en G es dada por

$$t_i = t_0 + \frac{R}{c} - \frac{h_+}{2\omega} \left[\sin(\omega t_0 + \frac{R\omega}{c} - kz - \varphi_+) - \sin(\omega t_0 - kz - \varphi_+) \right] \cos(2\varphi) + \mathcal{O}(G^2). \quad (6.90)$$

Si el tamaño de la circunferencia es suficientemente pequeño, específicamente si $R \ll 2\pi c/\omega = \lambda$, entonces podemos aproximar (6.90) realizando una expansión de la siguiente forma:

$$\sin \left(\omega t_0 + \frac{R\omega}{c} - kz - \varphi_+ \right) \approx \sin(\omega t_0 - kz - \varphi_+) + \frac{R\omega}{c} \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+) + \mathcal{O}\left(\frac{R^2 w^2}{c^2}\right). \quad (6.91)$$

Reemplazando (6.91) en (6.90) se obtiene la siguiente relación

$$c(\Delta t)_i \approx R \left[1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right]. \quad (6.92)$$

De lo anterior, es posible obtener una expresión para el intervalo $(\Delta t)_{ir}$ de ida y vuelta del fotón desde el centro, dada por

$$c(\Delta t)_{ir} \approx 2R \left[1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right]. \quad (6.93)$$

Note que es posible obtener este resultado directamente, asumiendo la misma aproximación ($R \ll \lambda$), a partir de (6.81) ya que en este caso podemos considerar el integrando de (6.81), $\cos(\omega t - kz - \varphi_+)$ (y por tanto la métrica) como *aproximadamente constante durante el viaje de ida y regreso del fotón*, es decir, $\cos(\omega t - kz - \varphi_+) \approx \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+)$. En otras palabras, bajo estas condiciones el tiempo de vuelo del fotón es mucho menor que el tiempo que requiere la onda para cambiar su fase apreciablemente.

Si, de acuerdo a la costumbre, llamamos “distancia efectiva” entre el centro y un punto sobre la circunferencia, correspondiente al ángulo φ , a la combinación $L(\varphi) := c(\Delta t)_{\text{ir}}/2$, entonces

$$L(\varphi, t_0) \approx R \left[1 - \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+) \cos(2\varphi) \right]. \quad (6.94)$$

Esta expresión muestra, como era de esperar, que en ausencia de una onda gravitacional ($h_+ = 0$) se recobra el resultado usual $L_0(\varphi) = R$, mientras que una onda gravitacional de amplitud $h_+ \neq 0$ en forma efectiva cambia las distancias (tiempos de vuelo!) de las partículas de prueba respecto al centro. Más detalladamente, para tiempos t_0 en los que $h_+ \cos(\omega t_0 - kz - \varphi_+) > 0$ la expresión (6.94) implica que las partículas de prueba son “estiradas” y “apretadas”, en forma alternada, a lo largo de los ejes x e y respectivamente, formando elipses.

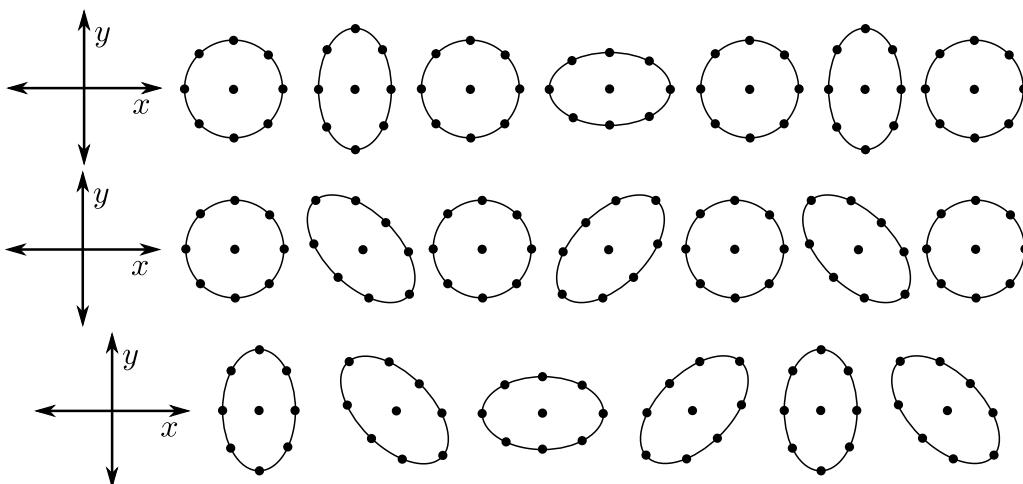


Figura 6.1: Oscilaciones inducidas por una onda gravitacional con polarización +, \times y circular. Figuras adaptadas a partir de originales en [21].

Note que la amplitud del cambio de la distancia $L(\varphi)$ es $\delta L = Rh_+/2$, es decir,

$$\frac{\delta L}{L_0} \simeq h. \quad (6.95)$$

Se espera que los detectores de ondas gravitacionales interferométricos actuales alcancen una sensibilidad que permita detectar amplitudes hasta de $h \sim 10^{-20}$, que es también el orden de magnitud de la amplitud *máxima* de la radiación gravitacional esperada en la Tierra debido a diversas fuentes astronómicas. Por ejemplo, el proyecto **LIGO** consta de un interferómetro de 4 km, de modo que debería detectar fluctuaciones de distancia (δL) del orden de 10^{-17}m , es decir, más pequeñas que un núcleo atómico!.

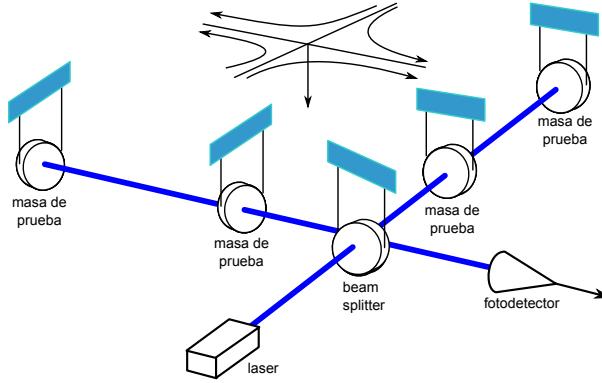


Figura 6.2: Esquema de un detector interferométrico de ondas gravitacionales. Figura original [aquí](#).

6.6. Generación de ondas gravitacionales

Tal como en el caso de ondas electromagnéticas, a distancias muy grandes (en la zona lejana o zona de radiación, $r \gg \lambda$) y para fuentes pequeñas (de tamaño $L \ll \lambda$), encontramos que el término dominante de (6.45) es

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T_{(0)}^{\mu\nu}(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) d^3x'. \quad (6.96)$$

Además, en una región limitada del espacio, la onda puede aproximarse por una onda plana. En el gauge de Lorenz, toda la información de la onda está contenida en las componentes puramente espaciales \bar{h}^{ij} , ver (6.57). Además, podemos expresar la integral (retardada) $\int T_{(0)}^{ij} d^3x$ en términos de derivadas del momento cuadrupolar de la fuente. En efecto, usando la ley de conservación para el tensor de energía-momentum $T_{(0)}^{\mu\nu}$, podemos escribir

$$\int \partial_k (T_{(0)}^{ik} x^j) d^3x = \int (\partial_k T_{(0)}^{ik}) x^j d^3x + \int T_{(0)}^{ij} d^3x \quad (6.97)$$

$$= - \int (\partial_0 T_{(0)}^{i0}) x^j d^3x + \int T_{(0)}^{ij} d^3x \quad (6.98)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T_{(0)}^{i0} x^j d^3x + \int T_{(0)}^{ij} d^3x. \quad (6.99)$$

Pero la expresión del lado izquierdo puede transformarse en una integral de superficie en la frontera del volumen de integración, que encierra la distribución de energía-momentum que genera el campo gravitacional. Asumiendo que esta distribución está confinada a una región acotada del espacio, tendremos que la integral de superficie se anula y por lo tanto

$$\int T_{(0)}^{ij} d^3x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T_{(0)}^{i0} x^j d^3x. \quad (6.100)$$

Ya que T^{ij} es simétrico podemos equivalentemente escribir

$$\int T_{(0)}^{ij} d^3x = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int (T_{(0)}^{i0} x^j + T_{(0)}^{j0} x^i) d^3x. \quad (6.101)$$

Efectuamos ahora un análisis similar con la expresión $\int \partial_k(T_{(0)}^{0k}x^i x^j) d^3x$, que también es nula debido a que puede transformarse a una integral de superficie fuera de la región con fuentes:

$$0 = \int \partial_k(T_{(0)}^{0k}x^i x^j) d^3x \quad (6.102)$$

$$= \int (\partial_k T_{(0)}^{0k}) x^i x^j d^3x + \int (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x \quad (6.103)$$

$$= - \int (\partial_0 T_{(0)}^{00}) x^i x^j d^3x + \int (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x \quad (6.104)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x + \int (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x. \quad (6.105)$$

Por lo tanto,

$$\int (T_{(0)}^{0i} x^j + T_{(0)}^{0j} x^i) d^3x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x. \quad (6.106)$$

De esta forma, usando (6.101) y (6.106) encontramos que

$$\int T_{(0)}^{ij} d^3x = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int T_{(0)}^{00} x^i x^j d^3x, \quad (6.107)$$

y entonces

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{c^2} \int T_{(0)}^{00}(x') x'^i x'^j d^3x' \right]_{\text{ret}}. \quad (6.108)$$

Como $T_{(0)}^{00}/c^2 = \rho(\vec{x}, t)$ es la densidad de masa de la fuente (a primer orden), se acostumbra escribir

$$\boxed{\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} [\ddot{M}^{ij}]_{\text{ret}}}, \quad (6.109)$$

donde

$$\dot{M}^{ij}(t) := \int \rho(\vec{x}, t) x^i x^j d^3x, \quad (6.110)$$

es el *tensor momento de inercia* (con traza) de la fuente.

Note que $\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}$ (básicamente, el potencial gravitacional de la onda generada) decae con $1/r$ y que la primera contribución no nula corresponde a *radiación cuadrupolar*. Esta diferencia con el caso de ondas electromagnéticas se debe a que la derivada temporal del *momento dipolar gravitacional* $\int \rho x^i d^3x$ es proporcional al momentum lineal del sistema, que es conservado (constante) a primer orden, por lo que no aporta a la energía radiada (que depende de la derivada de $\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}$).

6.6.1. Ejemplo

Consideremos un ejemplo sencillo, en el que dos cuerpos, cada uno de masa M , con una separación $2R$, rotan con velocidad angular ω en un movimiento no-relativista en torno al centro de masa del sistema. Si modelamos las posiciones de ambas masas por $\vec{x} = \pm(R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0)$, es decir en el plano xy y con posiciones iniciales en el eje x , tendremos que (la segunda derivada d)el tensor momento de inercia será

$$\ddot{M}^{ij} = -4MR^2\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.111)$$

Con esto, (6.109) implica que

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \begin{pmatrix} \cos[2\omega(t - r/c)] & \sin[2\omega(t - r/c)] & 0 \\ \sin[2\omega(t - r/c)] & -\cos[2\omega(t - r/c)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.112)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[2\omega(t - r/c)] + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin[2\omega(t - r/c)] \right] \\ &= \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} \Re \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i[2\omega(t - \frac{r}{c})]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i[2\omega(t - \frac{r}{c}) - \frac{\pi}{2}]} \right]. \quad (6.113) \end{aligned}$$

Vemos de aquí que *un observador ubicado en un punto sobre el eje z* detectará una onda gravitacional de frecuencia angular 2ω , que *satisface automáticamente el gauge TT*, y que es una combinación lineal de las polarizaciones $+ y \times$, con una diferencia de fase de $\pi/2$. Este estado es análogo al de una onda electromagnética con polarización circular.

El orden de magnitud de la amplitud de la onda es dada por

$$h \simeq \frac{8GMR^2\omega^2}{c^4r} = 8 \left(\frac{GM}{c^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 = 8 \left(\frac{m}{r} \right) \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (6.114)$$

Por ejemplo, el pulsar binario PSR 1913+16 consta de 2 estrellas de neutrones de masa $M \approx 1.4M_{\odot}$, con periodo orbital $T \approx 8\text{ h} \approx 3 \times 10^4\text{ s}$, velocidades orbitales $v \simeq 10^2\text{ km/s}$, a una distancia $r \approx 2 \times 10^4\text{ ly} \approx 10^{20}\text{ m}$. En este caso, $m \approx 2\text{ km}$, $v/c \simeq 3 \times 10^{-4}$ y entonces $h \simeq 10^{-23}$ para la radiación recibida en la Tierra, a una frecuencia del orden de 10^{-4} Hz (no detectable con LIGO).

6.7. Expansión hasta orden cuadrático en G

Métrica

Ahora obtendremos una expresión para las ecuaciones de Einstein a segundo orden, es decir, aquellas que son cuadráticas en la constante gravitacional. Naturalmente, esta ecuación de segundo orden en nuestro esquema perturbativo dependerá linealmente de la perturbación de segundo orden de la métrica $h_{\mu\nu}^{(2)}$ y cuadráticamente de la perturbación de primer orden $h_{\mu\nu}^{(1)}$.

Calculamos primero la perturbación de orden 2 de la métrica inversa, que resulta ser

$$g_{(2)}^{\mu\nu} = -h_{(2)}^{\mu\nu} + h_{(1)}^{\mu\lambda} h_{(1)\lambda}^{\nu}, \quad (6.115)$$

y donde hemos usado una notación similar a la usada para las perturbaciones de primer orden para simbolizar las contracciones con la métrica plana η .

Conexión

Similarmente, la perturbación de orden 2 de la conexión tiene la forma

$$\Gamma_{(2)\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} h_{(2)\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu} h_{(2)\mu}^{\lambda} - \partial^{\lambda} h_{\mu\nu}^{(2)} \right) - \frac{1}{2} h_{(1)}^{\lambda\rho} \left(\partial_{\mu} h_{\nu\rho}^{(1)} + \partial_{\nu} h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu}^{(1)} \right). \quad (6.116)$$

Tensor de Ricci

Por otro lado, la componente cuadrática en G del tensor de Ricci puede escribirse como

$$R_{\mu\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\nu h_{(2)\lambda}^\nu + \partial_\lambda \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(2)} - \partial_\mu \partial_\lambda h^{(2)} - \square h_{\mu\lambda}^{(2)} \right) \quad (6.117)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) + h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\partial_\lambda \partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \right. \\ \left. + (\partial_\sigma h_{(1)\lambda}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)\mu}^\sigma \right) - \partial_\rho \left(h_{(1)}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} h^{(1)} \right) \left(\partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} + \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} - \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \right] \quad (6.118)$$

$$+ (\partial_\sigma h_{(1)\lambda}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)\mu}^\sigma \right) - \partial_\rho \left(h_{(1)}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} h^{(1)} \right) \left(\partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} + \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} - \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \quad (6.119)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\nu h_{(2)\lambda}^\nu + \partial_\lambda \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(2)} - \partial_\mu \partial_\lambda h^{(2)} - \square h_{\mu\lambda}^{(2)} \right) + A_{\mu\lambda}, \quad (6.120)$$

donde hemos definido

$$A_{\mu\lambda} := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) + h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\partial_\lambda \partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \right. \\ \left. + (\partial_\sigma h_{(1)\lambda}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)\mu}^\sigma \right) - \partial_\rho \left(h_{(1)}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} h^{(1)} \right) \left(\partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} + \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} - \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \right]. \quad (6.121)$$

Escalar de Curvatura

La correspondiente componente del escalar de curvatura resulta ser

$$R^{(2)} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - h_{(1)}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} \quad (6.122)$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(2)} - \square h^{(2)} - \frac{1}{2} h_{(1)}^{\mu\lambda} \left(2 \partial_\mu \partial_\nu h_{(1)\lambda}^\nu - \partial_\mu \partial_\lambda h^{(1)} - \square h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) + \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \quad (6.123)$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(2)} - \square h^{(2)} + h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\square h_{\sigma\rho}^{(1)} - 2 \partial_\rho \partial_\nu \bar{h}_{(1)\sigma}^\nu \right) + \frac{3}{4} (\partial^\mu h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) \quad (6.124)$$

$$- \frac{1}{2} (\partial^\sigma h_{(1)}^{\rho\mu}) (\partial_\rho h_{\sigma\mu}^{(1)}) - (\partial_\rho h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu \bar{h}_{(1)\sigma}^\mu) + \frac{1}{2} (\partial^\nu h^{(1)}) (\partial_\mu \bar{h}_{(1)\nu}^\mu) \quad (6.125)$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(2)} - \square h^{(2)} + B, \quad (6.126)$$

con

$$B := h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\square h_{\sigma\rho}^{(1)} - 2 \partial_\rho \partial_\nu \bar{h}_{(1)\sigma}^\nu \right) + \frac{3}{4} (\partial^\mu h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) - \frac{1}{2} (\partial^\sigma h_{(1)}^{\rho\mu}) (\partial_\rho h_{\sigma\mu}^{(1)}) \\ - (\partial_\rho h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu \bar{h}_{(1)\sigma}^\mu) + \frac{1}{2} (\partial^\nu h^{(1)}) (\partial_\mu \bar{h}_{(1)\nu}^\mu). \quad (6.127)$$

Tensor de Einstein

Finalmente, la contribución cuadrática en G al tensor de Einstein es dada por

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(2)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{(1)} R^{(1)} \quad (6.128)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu}^{(2)} + \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu}^{(2)} - \partial_\mu \partial_\nu h^{(2)} - \square h_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu} \left(\partial^\lambda \partial^\rho h_{\lambda\rho}^{(2)} - \square h^{(2)} \right) \right] + C_{\mu\nu}, \quad (6.129)$$

con

$$C_{\mu\lambda} := A_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} B - \frac{1}{2} h_{\mu\lambda}^{(1)} R^{(1)}. \quad (6.130)$$

En términos de $\bar{h}_{\mu\nu}^{(2)}$, tenemos

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left[\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(2)} + \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\rho \bar{h}_{\lambda\rho}^{(2)} - \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu}^{(2)} - \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu}^{(2)} \right] + C_{\mu\nu}. \quad (6.131)$$

Note que las todas las expresiones para las perturbaciones de segundo orden dependen de la perturbación $h_{\mu\nu}^{(2)}$ exactamente de la misma forma que las expresiones de primer orden dependen de $h_{\mu\nu}^{(1)}$. Esto es consecuencia de la expansión de estamos realizando (en torno a la métrica plana, de orden 0), y de la consistencia de la separación realizada de las ecuaciones de Einstein en términos que dependen de distintas potencias de G . Como vemos, lo que diferencia las expresiones de segundo orden es que además poseen términos, necesariamente sumados a los primeros, que dependen cuadráticamente de (las derivadas de) $h_{\mu\nu}^{(1)}$.

6.8. Ecuaciones de Einstein a segundo orden

De esta forma, las ecuaciones de Einstein de segundo orden son

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(2)} + \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\rho \bar{h}_{\lambda\rho}^{(2)} - \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu}^{(2)} - \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu}^{(2)} - 2C_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(1)}, \quad (6.132)$$

o, llevando el término $C_{\mu\nu}$ al lado derecho,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}^{(2)} + \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\rho \bar{h}_{\lambda\rho}^{(2)} - \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu}^{(2)} - \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu}^{(2)} = -\frac{16\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{(1)} + t_{\mu\nu}). \quad (6.133)$$

Aquí hemos introducido

$$t_{\mu\nu} := -\frac{c^4}{8\pi G} C_{\mu\nu}, \quad (6.134)$$

que se suma a la contribución de primer orden del tensor de energía-moméntum de la materia. El lado derecho de (6.133) depende de la distribución de materia (que se supone conocida) y de $h_{\mu\nu}^{(1)}$. De esta forma, (6.133) suministra una ecuación para la perturbación de segundo orden $h_{\mu\nu}^{(2)}$, que tiene la misma forma que aquella para la perturbación de primer orden, ec. (6.26), pero con un “término fuente” dependiente de la distribución de materia y de la perturbación de primer orden de la métrica. Además, tal como en el caso de primer orden, la cuadridivergencia del lado izquierdo de (6.133) es idénticamente nula por lo que, como consecuencia,

$$\partial_\nu (T_{(1)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0. \quad (6.135)$$

En otras palabras, y esta vez a diferencia de lo encontrado a primer orden, la correspondiente componente del tensor de energía-moméntum de la materia *no es conservado por separado*, sino sólo su suma con el (pseudo-)tensor (6.134). Puesto que $t^{\mu\nu}$ depende (cuadráticamente) de $h_{\mu\nu}^{(1)}$, es posible interpretarlo como un **tensor de energía-moméntum efectivo para campo gravitacional**. Entonces (6.135) representa la conservación, correcta hasta el orden lineal en G , de la energía y el moméntum total del sistema materia + campo gravitacional. Equivalentemente, sumando (6.135) y (6.27) podemos escribir

$$\boxed{\partial_\nu (T_{(0,1)}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0}, \quad (6.136)$$

donde $T_{(0,1)}^{\mu\nu} := T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-moméntum de las fuentes, correcto hasta orden lineal en G .

6.8.1. Gauges

A segundo orden,

$$h'_{\mu\nu}^{(2)} = h_{\mu\nu}^{(2)} - \partial_\mu \xi_\nu^{(2)} - \partial_\nu \xi_\mu^{(2)} \quad (6.137)$$

$$- (\partial_\nu \xi_{(1)}^\rho) h_{\mu\rho}^{(1)} - (\partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda) h_{\nu\lambda}^{(1)} \quad (6.138)$$

$$+ (\partial_\nu \xi_{(1)}^\lambda) (\partial_\lambda \xi_\mu^{(1)}) + (\partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda) (\partial_\lambda \xi_\nu^{(1)}) + (\partial_\mu \xi_{(1)}^\lambda) (\partial_\nu \xi_\lambda^{(1)}). \quad (6.139)$$

Podemos considerar las transformaciones generadas por $\xi_{(1)}^\mu$ y $\xi_{(2)}^\mu$ en forma secuencial. Es decir, podemos efectuar primero todas las transformaciones de gauge generadas por $\xi_{(1)}^\mu$ (y $\xi_{(2)}^\mu = 0$) que sean necesarias para, por ejemplo, imponer las condiciones del gauge TT a $h_{\mu\nu}^{(1)}$, tendremos un tensor “intermedio” $h_{\mu\nu}^{i,(2)}$. A partir de este tensor intermedio, podemos posteriormente realizar transformaciones de gauge generada por $\xi_{(2)}^\mu$ (y $\xi_{(1)}^\mu = 0$). A partir de (6.137) vemos que estas transformaciones cambian $h_{\mu\nu}^{(2)}$ de forma similar a la transformación de primer orden, ver (6.35):

$$h'_{\mu\nu}^{(2)} = h_{\mu\nu}^{i,(2)} - \partial_\mu \xi_\nu^{(2)} - \partial_\nu \xi_\mu^{(2)}. \quad (6.140)$$

Por lo tanto, es posible elegir $\xi_{(2)}^\mu$ de modo que la perturbación de segundo orden también satisfaga el gauge de Lorenz,

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(2)} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.141)$$

6.8.2. Tensor de energía-moméntum del campo gravitacional: con gauges, en el vacío

De lo discutido en la sección 6.3.2 sabemos que podemos elegir coordenadas de modo que $h_{\mu\nu}^{(1)}$ satisfaga el gauge de Lorenz, ec. (6.37). Bajo estas condiciones (6.121) se reduce a

$$A_{\mu\lambda} := \frac{1}{4} (\partial_\lambda h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) + \frac{1}{2} h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\partial_\lambda \partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \quad (6.142)$$

$$+ \frac{1}{2} (\partial_\sigma h_{(1)\lambda}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)\mu}^\sigma \right), \quad (6.143)$$

mientras que (6.127) implica que

$$B := \frac{3}{4} (\partial^\mu h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) - \frac{1}{2} (\partial^\sigma h_{(1)}^{\rho\mu}) (\partial_\rho h_{\sigma\mu}^{(1)}). \quad (6.144)$$

Note que aquí fueron también usadas las ecuaciones de movimiento *fueras de las fuentes*, es decir, $\square h_{\mu\nu}^{(1)} = 0$. Además, bajo las mismas condiciones, la contribución de primer orden del escalar de curvatura, ec. (6.19), se anula, por lo que

$$C_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} B \quad (6.145)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (\partial_\lambda h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)}) + \frac{1}{2} (\partial_\sigma h_{(1)\lambda}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)\mu}^\sigma \right) \\ &+ \frac{1}{2} h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\partial_\lambda \partial_\mu h_{\sigma\rho}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\sigma}^{(1)} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\sigma}^{(1)} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\lambda}^{(1)} \right) \\ &- \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} \left[\frac{3}{4} (\partial^\nu h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_\nu h_{\sigma\rho}^{(1)}) - \frac{1}{2} (\partial^\sigma h_{(1)}^{\rho\nu}) (\partial_\rho h_{\sigma\nu}^{(1)}) \right]. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Para calcular la *potencia radiada* necesitamos las componentes C_{0i} :

$$\begin{aligned} C_{0i} &= \frac{1}{4} (\partial_i h_{(1)}^{\sigma\rho}) (\partial_0 h_{\sigma\rho}^{(1)}) + \frac{1}{2} h_{(1)}^{\sigma\rho} \left(\partial_i \partial_0 h_{\sigma\rho}^{(1)} - \partial_\rho \partial_0 h_{i\sigma}^{(1)} - \partial_\rho \partial_i h_{0\sigma}^{(1)} + \partial_\rho \partial_\sigma h_{0i}^{(1)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_\sigma h_{(1)i}^\rho) \left(\partial^\sigma h_{0\rho}^{(1)} - \partial_\rho h_{(1)0}^\sigma \right). \end{aligned} \quad (6.147)$$

Potencia Radiada: gauge de TT en zona de radiación

Sin dejar el gauge de Lorenz es posible además imponer, fuera de las fuentes, el gauge TT, es decir, las condiciones (6.47), que a su vez implican las relaciones (6.53). Usando estas expresiones, (6.147) se reduce a

$$C_{0i} = \frac{1}{4}(\partial_i h_{(1)}^{jk})(\partial_0 h_{jk}^{(1)}) + \frac{1}{2}h_{(1)}^{jk} \left(\partial_i \partial_0 h_{jk}^{(1)} - \partial_k \partial_0 h_{ij}^{(1)} \right) - \frac{1}{2}(\partial_0 h_{(1)i}^j)(\partial_j h_{(1)0}^0). \quad (6.148)$$

Para conseguir una simplificación adicional, consideramos que en la *zona de radiación* (límite de campo lejano) los campos (que representan ondas *salientes*) satisfacen la relación⁵, ver (6.96),

$$\partial_i h_{jk}^{(1)} = -\frac{\hat{r}_i}{c} \partial_t h_{jk}^{(1)} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (6.149)$$

donde $\hat{r}_i = \hat{r}^i := x^i/r$ es el vector unitario correspondiente al vector que une las fuentes con el punto de observación.

Podemos entonces usar (6.149) para convertir todas las derivadas espaciales de $h_{ij}^{(1)}$ en términos proporcionales a derivadas temporales:

$$c^2 C_{0i} = -\frac{1}{4}(\hat{r}_i \partial_t h_{(1)}^{jk})(\partial_t h_{jk}^{(1)}) - \frac{1}{2}h_{(1)}^{jk} \left(\hat{r}_i \partial_t^2 h_{jk}^{(1)} - \hat{r}_k \partial_t^2 h_{ij}^{(1)} \right) + \frac{1}{2}(\partial_t h_{(1)i}^j)(\hat{r}_j \partial_t h_{(1)0}^0) \quad (6.150)$$

$$= -\frac{1}{4}(\hat{r}_i \partial_t h_{(1)}^{jk})(\partial_t h_{jk}^{(1)}) - \frac{1}{2}h_{(1)}^{jk} \left(\hat{r}_i \partial_t^2 h_{jk}^{(1)} - \hat{r}_k \partial_t^2 h_{ij}^{(1)} \right) \quad (6.151)$$

$$= -\frac{1}{4}\hat{r}_i \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_t \left(\hat{r}_i h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \hat{r}_k h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{ij}^{(1)} \right) + \frac{1}{2}\hat{r}_i \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{r}_k \dot{h}_{(1)}^{jk} \dot{h}_{ij}^{(1)} \quad (6.152)$$

$$= \frac{1}{4}\hat{r}_i \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_t \left(\hat{r}_i h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \hat{r}_k h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{ij}^{(1)} \right) - \frac{1}{2}\hat{r}_k \dot{h}_{(1)}^{jk} \dot{h}_{ij}^{(1)} \quad (6.153)$$

$$= \frac{1}{4}\hat{r}_i \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_t \left(\hat{r}_i h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{jk}^{(1)} - \hat{r}_k h_{(1)}^{jk} \dot{h}_{ij}^{(1)} \right). \quad (6.154)$$

En el último paso se usó el hecho que (6.53b) y (6.149) implican que el último término del lado derecho de (6.153) se anula.

Finalmente, como es usual en procesos continuos de emisión de energía, es útil considerar el *promedio temporal* de la potencia radiada. Este promedio es definido en general por

$$\langle f \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T f(t') dt'. \quad (6.155)$$

Como consecuencia, el promedio de cualquier función que es la *derivada temporal de una función acotada* (tal como la amplitud $h_{ij}^{(1)}$), en un intervalo de tiempo mucho mayor que el periodo típico de variación de la función, tiende a cero, ya que

$$\left\langle \frac{dg}{dt} \right\rangle = \frac{g(T) - g(0)}{T} \rightarrow 0. \quad (6.156)$$

Usando esto, encontramos que

$$\langle c^2 C_{0i} \rangle = \frac{1}{4} \hat{r}_i \left\langle \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} \right\rangle. \quad (6.157)$$

⁵Esta relación puede también derivarse a partir de la forma asintótica de la solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas.

La potencia promedio radiada por las ondas gravitacionales es entonces dada por

$$\langle P \rangle = \oint r^2 \langle ct^{0i} \rangle \hat{r}_i d\Omega \quad (6.158)$$

$$= \frac{c^5}{8\pi G} \oint r^2 \langle C_{0i} \rangle \hat{r}_i d\Omega \quad (6.159)$$

$$= \frac{c^3}{32\pi G} \oint r^2 \langle \dot{h}_{jk}^{(1)} \dot{h}_{jk}^{(1)} \rangle d\Omega. \quad (6.160)$$

En otras palabras, la *potencia promedio radiada por unidad de ángulo sólido* es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \left\langle \dot{h}_{ij}^{(1,TT)} \dot{h}_{ij}^{(1,TT)} \right\rangle. \quad (6.161)$$

En esta última expresión hemos agregado el signo *TT* para indicar que este resultado es válido cuando el campo $h_{ij}^{(1)}$ está expresado en el gauge transversal sin traza, $h_{ij}^{(1)} = h_{ij}^{(1,TT)}$.

6.9. Fórmula cuadrupolar para la potencia radiada

Tal como vimos en la sección 6.6, en la zona de radiación ($r \gg \lambda$) el campo $h_{\mu\nu}^{(1)}$ producido por una fuente pequeña ($L \ll \lambda$) es dado por la expresión (6.109). Sin embargo, (6.109) es válido en coordenadas usadas tanto dentro como fuera de las fuentes, y en general no satisface las condiciones (adicionales a las del gauge de Lorenz) del gauge TT. Por esto, no es posible usar directamente (6.161), para el campo dado por (6.109). Es posible, sin embargo, *transformar* el campo (6.109) al gauge TT, por medio de una transformación de gauge apropiada. Como primer paso para esta transformación, generalizaremos el proceso aplicado en la sección 6.4, al caso de una onda plana propagándose en una dirección arbitraria, y luego al caso de una onda esférica en la zona de radiación.

6.9.1. Transformación de una onda plana

Tal como en la sección 6.4, consideramos una onda plana de la forma (6.54), con una amplitud $A_{\mu\nu}$ que satisface la condición de Lorenz (6.55). Esto permite escribir

$$(k^0)^2 = -k_i k^i =: +\vec{k}^2. \quad (6.162)$$

Esta vez, sin embargo, con un vector de onda \vec{k} tiene una dirección arbitraria. La condición (6.55) permite expresar las componentes de A_{00} y A_{0i} en términos de las componentes puramente espaciales de $A_{\mu\nu}$,

$$A_{00} = A_{ij} n^i n^j, \quad A_{0i} = -A_{ij} n^j, \quad (6.163)$$

donde hemos introducido el vector (tridimensional) unitario $n^i := k^i/k^0$.

Realizamos ahora una transformación de gauge de la forma (6.58), que induce la transformación (6.59) de la amplitud. Si imponemos la condiciones del gauge TT para el campo transformado, es decir, que $A'_{0i} = 0$ y que $A' := A'^{\mu}_{\mu} = 0$, obtenemos las siguientes condiciones:

$$A_{0i} - \epsilon_0 k_i - \epsilon_i k_0 = 0, \quad A + 2\epsilon_0 k^0 + 2\epsilon_i k^i = 0. \quad (6.164)$$

Estas cuatro condiciones permiten determinar únicamente las cuatro componentes del vector ϵ_{μ} , resultando:

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{4k^0} (A + 2A_{0i} n^i), \quad (6.165)$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{k^0} \left(A_{0i} + \frac{1}{4} A n_i + \frac{1}{2} A_{0j} n_i n^j \right). \quad (6.166)$$

Usando (6.163) y $A = A_{00} + A^i{}_i$, podemos reescribir el resultado anterior como:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4k^0} (A_{ij}n^i n^j - A^i{}_i), \quad (6.167)$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{k^0} \left(\frac{1}{4} A^j{}_j n_i - A_{ij} n^j - \frac{1}{4} A_{jk} n_i n^j n^k \right). \quad (6.168)$$

Sustituyendo estos parámetros en la transformación de gauge de la amplitud (6.59), obtenemos una expresión para las otras componentes de $A'_{\mu\nu}$:

$$A'_{ij} = A_{ij} + A_{jk} n_i n^k + A_{ik} n_j n^k + \frac{1}{2} A_{kl} n_i n_j n^k n^l - \frac{1}{2} A^k{}_k n_i n_j + \frac{1}{2} A^k{}_k \delta_{ij} + \frac{1}{2} A_{kl} \delta_{ij} n^k n^l, \quad (6.169)$$

mientras que

$$A'_{00} = 0. \quad (6.170)$$

Finalmente, podemos escribir A'_{ij} en (6.169) como la acción de un *operador de proyección* $\Lambda_{ij}{}^{kl}(\hat{n})$, definido por

$$\boxed{\Lambda_{ij}{}^{kl}(\hat{n}) := \delta_i^k \delta_j^l - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} + \delta_j^l n_i n^k + \delta_i^k n_j n^l + \frac{1}{2} n_i n_j \delta^{kl} + \frac{1}{2} \delta_{ij} n^k n^l + \frac{1}{2} n_i n_j n^k n^l}, \quad (6.171)$$

de modo que

$$\boxed{A'_{ij} = \Lambda_{ij}{}^{kl}(\hat{n}) A_{kl}.} \quad (6.172)$$

Equivalentemente, y usando la convención de escribir todas las componentes espaciales en forma contravariante, podemos escribir

$$A'^{ij} = \Lambda^{ij,kl}(\hat{n}) A^{kl}, \quad (6.173)$$

con

$$\Lambda^{ij,kl}(\hat{n}) := \delta^{ik} \delta^{jl} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \delta^{kl} - \delta^{jl} n^i n^k - \delta^{ik} n^j n^l + \frac{1}{2} n^i n^j \delta^{kl} + \frac{1}{2} \delta^{ij} n^k n^l + \frac{1}{2} n^i n^j n^k n^l. \quad (6.174)$$

Es directo mostrar que este operador es completamente transversal a n^i , en el sentido que satisface

$$n^i \Lambda^{ij,kl} = n^j \Lambda^{ij,kl} = \Lambda^{ij,kl} n^k = \Lambda^{ij,kl} n^l \equiv 0. \quad (6.175)$$

Además, es libre de trazas, en el sentido que

$$\Lambda^{ii,kl} = \Lambda^{ij,kk} = 0, \quad (6.176)$$

Como consecuencia de estas propiedades, se satisface

$$\Lambda^{ij,kl} \Lambda^{ij,pq} \equiv \Lambda^{kl,pq}. \quad (6.177)$$

Finalmente, la siguiente identidad geométrica nos será de utilidad

$$\oint \Lambda^{ij,kl} d\Omega = \frac{2\pi}{15} \left(11 \delta^{ik} \delta^{jl} - 4 \delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{il} \delta^{jk} \right). \quad (6.178)$$

6.9.2. Transformación de ondas esféricas en la zona de radiación

Es posible extender este resultado directamente al caso en que el campo original se escribe como una combinación lineal de ondas planas. Sin embargo, en el caso particular en el que estamos interesados aquí, basta una discusión simplificada. Esto se debe a que, por un lado, para calcular la potencia promedio radiada sólo los campos radiativos, que decaen con $1/r$ a grandes distancias, tienen una contribución no nula. Además, la expresión (6.96) nos dice que

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} A^{\mu\nu}|_{t-r/c}, \quad A^{\mu\nu}(t) := -\frac{4G}{c^4} \int T_{(0)}^{\mu\nu}(\vec{x}', t) d^3x'. \quad (6.179)$$

Por lo tanto, la perturbación de primer orden requerida depende de la distancia r a las fuentes a través del factor global $1/r$ y a través de la dependencia temporal de $A^{\mu\nu}(t)$, ya que esta función (de una variable) debe ser evaluada en el tiempo retardado $t_{\text{ret}} = t - r/c$. En resumen, en el caso de presente interés el campo a considerar tiene una dependencia espacial simple, lo que reduce considerablemente los cálculos.

Consideramos primero la descomposición de Fourier (temporal) de la función $A^{\mu\nu}(t)$,

$$A^{\mu\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}^{\mu\nu}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.180)$$

donde

$$\tilde{A}^{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A^{\mu\nu}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.181)$$

Usando (6.180) podemos escribir (6.109) como

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}^{\mu\nu}(\omega) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} d\omega, \quad (6.182)$$

es decir, como una superposición de ondas esféricas. Cada una de estas ondas puede escribirse como $e^{i\omega(t-r/c)} = e^{ik_\mu x^\mu}$, con $k^0 = \omega/c$ y $k^i = (\omega/c) \hat{r}^i$, donde \hat{r}^i es el vector radial unitario desde la fuente al punto de observación (es decir, $\hat{r}^i = x^i/r$). Para transformar (6.182) al gauge TT aplicamos la transformación generada por (compare con (6.58)):

$$\xi_{(1)}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\epsilon^\mu) \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{r} d\omega, \quad \epsilon^\mu = \epsilon^\mu(\omega, \hat{r}). \quad (6.183)$$

Usando la ley general de transformación (6.40) y teniendo en cuenta la dependencia de $\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ con $1/r$ es directo verificar que el campo transformado contendrá términos que decaen con $1/r^2$, y por lo tanto no contribuyen al campo de radiación. Por otro lado, los términos radiativos (aquellos que decaen con $1/r$) serán de la forma

$$\bar{h}'_{\text{rad}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}'^{\mu\nu}(\omega) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} d\omega, \quad (6.184)$$

con $\tilde{A}'^{\mu\nu}$ dado por la misma expresión (6.59) encontrada en el caso de ondas planas. Esto muestra que, para cada valor de ω y $\hat{n} = \hat{r}$ puede aplicarse el procedimiento descrito en 6.9.1. Esto implica entonces que

$$h_{\text{rad},TT}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \tilde{A}^{kl}(\omega) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} d\omega \quad (6.185)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}^{kl}(\omega) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} d\omega \quad (6.186)$$

$$= \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \bar{h}_{\text{rad}}^{kl}, \quad (6.187)$$

mientras que $\bar{h}_{0\mu}^{'\text{rad}} = 0$. En resumen, la transformación desde el campo de radiación en el gauge de Lorenz hasta el gauge TT tiene la siguiente forma

$$\boxed{h_{\text{rad},TT}^{ij}(\vec{x}, t) = \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \bar{h}_{\text{rad}}^{kl}(t, r).} \quad (6.188)$$

Introduciendo ahora la expresión (6.188) en (6.161) obtenemos

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \Lambda^{ij,pq}(\hat{r}) \left\langle \dot{\bar{h}}_{\text{rad}}^{kl} \dot{\bar{h}}_{\text{rad}}^{pq} \right\rangle. \quad (6.189)$$

Usando el resultado (6.177) podemos escribir

$$\boxed{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \left\langle \dot{\bar{h}}_{\text{rad}}^{ij} \dot{\bar{h}}_{\text{rad}}^{kl} \right\rangle.} \quad (6.190)$$

En virtud del resultado (6.109), encontramos la siguiente expresión para la potencia promedio radiada por unidad de ángulo sólido:

$$\boxed{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{kl} \right\rangle_{\text{ret}}.} \quad (6.191)$$

La identidad (6.178) permite encontrar una expresión simple para la potencia promedio total radiada. Al integrar, se encuentra que

$$\oint \Lambda^{ij,kl}(\hat{r}) \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{kl} d\Omega = \frac{8\pi}{5} \left[\ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}^{ii})^2 \right], \quad (6.192)$$

obteniendo así que

$$\langle P \rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}^{ii})^2 \right\rangle_{\text{ret}}, \quad (6.193)$$

o, en términos del **momento cuadrupolar sin traza**,

$$Q^{ij} := M^{ij} - \frac{1}{3} M^{kk} \delta^{ij}, \quad (6.194)$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle Q^{ij} Q^{ij} \right\rangle_{\text{ret}}}, \quad (6.195)$$

que es la famosa fórmula cuadrupolar para la potencia promedio total radiada.

In cálculo algo más complicado [45] permite además determinar el *momento angular promedio total transportado por las ondas gravitacionales, por unidad de tiempo*:

$$\boxed{\left\langle \dot{L}^i \right\rangle = \frac{2G}{5c^5} \epsilon^{ijk} \left\langle \ddot{Q}^{jl} \ddot{Q}^{kl} \right\rangle_{\text{ret}}.} \quad (6.196)$$

6.9.3. Ejemplo: Potencia radiada por un sistema binario

Consideramos aquí el caso en que un sistema binario está conformado por masas compactas, que modelaremos como puntuales, orbitando una respecto a la otra por efecto de su atracción gravitacional mutua. Para esto, realizaremos los cálculos (newtonianos) en el sistema de referencia del centro de masa, usando los resultados del apéndice A.

Requerimos el tensor momento de inercia del sistema. Como es de esperar, puede mostrarse fácilmente que el momento de inercia total del sistema binario se reduce al de una partícula con

masa reducida μ , realizando un movimiento descrito por la coordenada relativa \vec{r} . Ver apéndice A para los detalles:

$$M_{ij} = m_1 x_i^{(1)} x_j^{(1)} + m_2 x_i^{(2)} x_j^{(2)} = \mu r_i r_j. \quad (6.197)$$

Si las coordenadas son elegidas de modo que el movimiento del sistema está confinado al plano xy , tendremos que sólo M_{11} , M_{12} y M_{22} serán distintos de cero. De este modo, encontramos que

$$M_{11} = \mu x^2 \quad (6.198)$$

$$= \mu r^2 \cos^2 \varphi \quad (6.199)$$

$$= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \quad (6.200)$$

y, similarmente,

$$M_{12} = \mu xy \quad (6.201)$$

$$= \mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi \quad (6.202)$$

$$= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}, \quad (6.203)$$

$$M_{22} = \mu y^2 \quad (6.204)$$

$$= \mu r^2 \sin^2 \varphi \quad (6.205)$$

$$= \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}. \quad (6.206)$$

A continuación requerimos determinar las tercera derivadas \ddot{M}_{ij} . Para esto, introducimos la coordenada angular φ y usamos (A.27) y (A.50), de modo que podamos escribir

$$\dot{M}_{ij} = \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad (6.207)$$

$$= \frac{dM_{ij}}{d\varphi} \frac{L}{\mu r^2} \quad (6.208)$$

$$= \frac{L}{\mu a^2 (1 - e^2)^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi} \quad (6.209)$$

$$= \frac{\omega_0}{(1 - e^2)^{3/2}} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 \frac{dI_{ij}}{d\varphi}. \quad (6.210)$$

Luego de algo de álgebra encontramos que

$$\dot{M}_{11} = (-2) \mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\cos \varphi (\sin \varphi + e \sin \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (6.211)$$

$$\dot{M}_{22} = (+2) \mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{\sin \varphi (\cos \varphi + e \cos \varphi_0)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (6.212)$$

$$\dot{M}_{12} = \mu a^2 \omega_0 (1 - e^2)^{1/2} \frac{(\cos 2\varphi + e \cos(\varphi + \varphi_0))}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (6.213)$$

Análogamente, encontramos que

$$\ddot{M}_{11} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [4 \sin(2\varphi) + 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + 2e \cos \varphi \sin \varphi_0], \quad (6.214)$$

$$\ddot{M}_{22} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \sin(2\varphi) - 3e \sin(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - 2e \sin \varphi \cos \varphi_0], \quad (6.215)$$

$$\ddot{M}_{12} = \alpha [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 [-4 \cos(2\varphi) - 3e \cos(2\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) - e \cos(\varphi + \varphi_0)], \quad (6.216)$$

con

$$\alpha := \frac{\mu a^2 \omega_0^3}{(1 - e^2)^{5/2}}. \quad (6.217)$$

En términos del tensor momento de inercia con traza, la potencia promedio radiada es dada por (6.193), y se reduce en este caso a

$$\langle P \rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}^{ij} \ddot{M}^{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}^{ii})^2 \right\rangle \quad (6.218)$$

$$= \frac{G}{5c^5} \left\langle (\ddot{M}_{11})^2 + (\ddot{M}_{22})^2 + 2 (\ddot{M}_{12})^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})^2 \right\rangle \quad (6.219)$$

$$= \frac{2G}{15c^5} \left\langle (\ddot{M}_{11})^2 + (\ddot{M}_{22})^2 + 3 (\ddot{M}_{12})^2 - \ddot{M}_{11} \ddot{M}_{22} \right\rangle. \quad (6.220)$$

Luego de reemplazar las expresiones (6.214)-(6.216), y usando (A.61), obtenemos

$$\langle P \rangle = \frac{2G^4 \mu^2 M^3}{15c^5 a^5 (1 - e^2)^5} \langle g(\varphi) \rangle, \quad (6.221)$$

donde hemos introducido la función angular

$$g(\varphi) := 2 [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^4 [24 + 13e^2 + 48e \cos(\varphi - \varphi_0) + 11e^2 \cos(2\varphi - 2\varphi_0)]. \quad (6.222)$$

Para calcular el promedio $\langle g(\varphi) \rangle$, transformamos la integral temporal en una integral sobre el ángulo φ :

$$\langle g(\varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (6.223)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi \quad (6.224)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi \quad (6.225)$$

$$= \frac{1}{T L} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) g(\varphi) d\varphi \quad (6.226)$$

$$= \frac{\mu a^2 (1 - e^2)^2}{TL} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi \quad (6.227)$$

$$= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi. \quad (6.228)$$

Luego de reemplazar (6.222) en la expresión anterior, se obtiene una integral de simples funciones trigonométricas, que al ser evaluada se reduce a

$$\langle g(\varphi) \rangle = 48(1 - e^2)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (6.229)$$

Con esto, encontramos la famosa expresión de la potencia total promedio radiada por un sistema binario, de masa total M , masa reducida μ , describiendo una órbita (relativa) con semieje mayor a , y excentricidad e [46]

$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e),$	(6.230)
--	---------

Potencia
Radiada
Sistema
Binario

$$f(e) := \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \quad (6.231)$$

Análogamente, el moméntum angular promedio radiado es

$$\langle \dot{L} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left[1 + \frac{7}{8} e^2 \right]. \quad (6.232)$$

A partir de (6.230) podemos encontrar una predicción de cómo irá “colapsando” el sistema binario, es decir, cómo irá disminuyendo el tamaño de las órbitas (a) y el periodo orbital correspondiente (T). Para esto, usamos (A.48) y (A.61) que permiten relacionar el cambio $\dot{E} = -\langle P \rangle$ de la energía del sistema binario con los correspondientes cambios del semieje mayor (\dot{a}) y del periodo orbital (\dot{T}), obteniendo

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{T}}{T}. \quad (6.233)$$

De aquí encontramos la predicción de la *Teoría de Relatividad General para la disminución del periodo orbital de un sistema binario debido a la emisión de radiación gravitacional*:

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \quad (6.234)$$

$$= -\frac{96}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} f(e) \quad (6.235)$$

$$= -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e). \quad (6.236)$$

Esta predicción fue testeada por primera vez con el pulsar binario de Hulse y Taylor, verificándose la predicción de la teoría de Einstein con gran precisión. Ver figura 6.3 y la referencia [47].

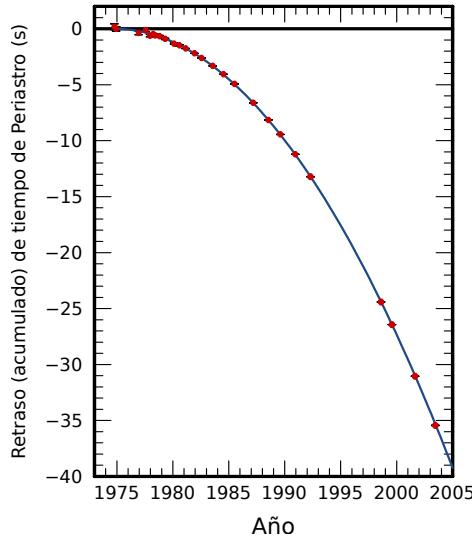


Figura 6.3: Predicción y observación del tiempo en que el pulsar binario de Hulse y Taylor completa cada revolución (tiempo de periastro), respecto al valor newtoniano. Adaptada a partir de [esta](#) figura original.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (6.237)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (6.238)$$

En el caso de una órbita circular, $e = 0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3}, \quad (6.239)$$

cuya solución es...

$$a(t) = \left[a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5} (t - t_0) \right]^{1/4}. \quad (6.240)$$

Dividiendo las ecuaciones (6.237) (6.238) para \dot{a} y \dot{e} podemos eliminar el tiempo de estas expresiones y encontrar una ecuación que relaciona directamente a con e :

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19} a \frac{1 + (73/24)e^2 + (37/96)e^4}{e(1-e^2)[1 + (121/304)e^2]}. \quad (6.241)$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$a(e) = a_0 \frac{g(e)}{g(e_0)}, \quad (6.242)$$

con

$$g(e) := \frac{e^{12/19}}{1-e^2} \left(1 + \frac{121}{304} \right)^{870/2299}. \quad (6.243)$$

Capítulo 7

Elementos de Cosmología ***PRELIMINAR***

El objetivo de la cosmología es describir la estructura y dinámica del universo a muy grandes escalas ($\gtrsim 10^7$ pc, 1pc ≈ 3.26 ly $\approx 3.1 \times 10^{16}$ m). A estas escalas cosmológicas, la dinámica de los constituyentes del universo es gobernada por la interacción gravitacional, que es descrita satisfactoriamente (hasta donde sabemos) por la teoría de RG. Comúnmente, muchas consideraciones de simplicidad son usadas en la formulación de los modelos cosmológicos. En primer lugar el contenido de materia/energía en el Universo es usualmente modelado como un fluido perfecto, con densidad propia ρ y presión p , y donde cada elemento de fluido representa una región del espacio de más de 10^7 pc. Además, el modelo cosmológico estándar asume que a escalas cosmológicas el Universo es *isótropo y homogéneo*. Estas consideraciones de simplicidad son usualmente llamadas *principio cosmológico*. El requerimiento de isotropía significa que la distribución de materia y energía en el Universo, respecto a observadores comóviles con el fluido cosmológico, es la misma en todas las direcciones, asumiendo que los elementos del fluido cosmológico (cúmulos de galaxias) se mueven por geodésicas del espaciotiempo. La supuesta homogeneidad significa que la distribución de materia y energía del Universo es la misma en todos los puntos de éste (a un mismo tiempo de evolución cosmológica), es decir, que no existe punto físicamente privilegiado en el Universo. Esto implica que las propiedades geométricas del espacio en un punto deben ser las mismas que en cualquiera otro a un mismo tiempo cosmológico. La mejor evidencia observational a favor del principio cosmológico la ofrece la radiación cósmica de fondo (CMB), descubierta en 1965 (Penzias y Wilson) que, de acuerdo a las mediciones realizadas, es altamente isótropa (con anisotropías del orden de una parte en 10^5).

7.1. Espacios de Curvatura constante

Sabemos que el espacio euclídeo tridimensional es invariante bajo rotaciones y translaciones, es decir, es isótropo y homogéneo. Esto lo hace un buen candidato para caracterizar la parte espacial del universo a grandes escalas. Por otro lado, el espacio euclídeo tiene curvatura igual a cero en toda su extensión y nos restringe al caso en que el universo es espacialmente plano. Existen, sin embargo, espacios tridimensionales isótropos y homogéneos de curvatura no nula. Una forma de encontrar la métrica de estos espacios es generalizando la construcción de espacios bidimensionales isótropos y homogéneos, que describimos a continuación.

Consideremos el espacio euclídeo tridimensional cuyo elemento de línea en coordenadas cartesianas es:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (7.1)$$

Ahora nos restingimos sólo a los puntos sobre una esfera¹ de radio a . El elemento de línea inducido sobre la esfera puede escribirse, en términos de las coordenadas x e y , como

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}, \quad (7.2)$$

donde hemos usado la condición $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ para eliminar la coordenada z .

Análogamente podemos generar otra superficie isótropa y homogénea considerando un espacio tridimensional "Lorentziano", con elemento de línea

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2, \quad (7.3)$$

y luego restringiéndonos a la superficie determinada por la condición $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$ (superficie hiperbólica), obteniéndose

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 + (x^2 + y^2)}. \quad (7.4)$$

En resumen, podemos escribir²

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + k \frac{(xdx + ydy)^2}{a^2 - k(x^2 + y^2)}, \quad (7.5)$$

con

$$k = \begin{cases} -1, & \text{Superficie Hiperbólica} \\ 0, & \text{Superficie Plana} \\ 1, & \text{Superficie Esférica} \end{cases}. \quad (7.6)$$

Estas tres superficies poseen curvatura constante. En efecto, las componentes no nulas de la conexión en estas coordenadas son:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{k^2 xy^2 - a^2 k x}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{k^2 y^3 - a^2 k y}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad (7.7)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{-k^2 x^2 y}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{-k^2 x y^2}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad (7.8)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{k^2 x^3 - a^2 k x}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{(k^2 x^2 - a^2 k) y}{a^2 ky^2 + a^2 k x^2 - a^4}, \quad (7.9)$$

y entonces el escalar de curvatura es dado por

$$R = \frac{2k}{a^2}. \quad (7.10)$$

Puede verificarse además que estos espacios son **maximalmente simétricos**, ya que poseen el número máximo de 3 vectores de Killing independientes permitidos por la dimensión. Puede elegirse como vectores de Killing independientes a

$$\hat{\xi}_1 = \sqrt{1 - k(x^2 + y^2)}\partial_x, \quad \hat{\xi}_2 = \sqrt{1 - k(x^2 + y^2)}\partial_y, \quad \hat{\xi}_3 = x\partial_y - y\partial_x. \quad (7.11)$$

¹Es claro que se conserva la homogeneidad y la isotropía pues una esfera es invariante bajo rotaciones.

²Usando el elemento de línea $dl^2 = dx^2 + dy^2 + kdz^2$ y además $z^2 + k(x^2 + y^2) = a^2$.

7.2. La métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Propuesta 1922 por Alexander Friedman la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) fue redescubierta en 1930 por Howard Robertson y Arthur G. Walker, quienes la hicieron famosa y por lo mismo lleva sus nombres. Esta métrica describe un Universo en expansión (o contracción), espacialmente homogéneo e isótropo.

Análogamente con la sección anterior buscamos una métrica que describa un espaciotiempo cuya parte espacial sea isótropa y homogénea. Partimos de un espacio plano ficticio de dimensión 5,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - k(dx^4)^2, \quad (7.12)$$

para luego restringirnos a la hipersuperficie definida por la condición:

$$(x^4)^2 + kx^i x^i = a^2(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.13)$$

donde k puede adoptar los valores -1, 0 ó 1. Obteniendo una expresión análoga a (7.5) para la métrica inducida:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 - k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{a^2(t) + k\vec{x}^2}. \quad (7.14)$$

Por otro lado, dado que nuestra hipersuperficie satisface (7.13) podemos reescalar la parte espacial, usando $x^i = a(t)x'^i$, tal que

$$(x'^4)^2 + kx'^i x'^i = 1, \quad (7.15)$$

Luego (7.14) adopta la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[d\vec{x}'^2 + k \frac{(\vec{x}' \cdot d\vec{x}')^2}{1 - k\vec{x}'^2} \right], \quad (7.16)$$

donde $a(t)$ es un factor de escala con dimensiones de longitud, dependiente sólo de la coordenada temporal t , conocido como el *Factor de Escala Cosmológico*.

Finalmente renombrando x'^i como x^i obtenemos la expresión

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[d\vec{x}^2 + k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2} \right]. \quad (7.17)$$

Otra forma común de expresar el intervalo es usando coordenadas esféricas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (7.18) \quad \text{Métrica de FRW}$$

La constante k puede adoptar, al igual que en (7.6), los valores 0, 1 ó -1, y está relacionada con la curvatura nula, positiva o negativa, de la sección espacial ($t = \text{cte.}$), respectivamente. En efecto, la geometría espacial está determinada por el elemento de línea

$$d\ell^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (7.19)$$

cuyo escalar de curvatura es constante (su valor es independiente de r , θ y φ) e igual a $6k/a^2$. Claramente, si $k = 0$ la geometría espacial es plana. Si $k = -1$ entonces el escalar de curvatura es negativo. En ambos casos el espacio es *abierto*, en el sentido que la coordenada r puede variar entre 0 y $+\infty$. Si $k = +1$ entonces el espacio es *cerrado*, ya que r puede variar entre 0 y $+1$, y el volumen total es finito.

7.3. Observadores comóviles

Las componentes no nulas de la conexión en las coordenadas en las que el elemento de línea es dado por (7.18) son

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{c} \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{c} a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{c} a\dot{a}r^2 \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (7.20)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2), \quad (7.21)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \operatorname{sen}^2 \theta, \quad \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (7.22)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \quad (7.23)$$

Ya que $\Gamma_{00}^\mu = 0$ la línea de mundo $x^\mu(\tau) = (c(\tau - \tau_0), r_0, \theta_0, \varphi_0)$ con τ_0, r_0, θ_0 y φ_0 constantes es una geodésica. En efecto,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (c, 0, 0, 0), \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (7.24)$$

y por lo tanto se satisface la ecuación de la geodésica,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 + \Gamma_{00}^\mu c^2 = 0. \quad (7.25)$$

Los cúmulos de galaxias (o el “fluído cosmológico”) se mueven en geodésicas de la métrica cosmológica, que se identifican con aquellas con coordenadas espaciales constantes. De esta forma, (7.18) implica que los intervalos de coordenada temporal t coinciden con los intervalos de tiempo propio respecto a partículas del fluido cosmológico. Por esta razón t es llamado *tiempo cósmico* y las coordenadas espaciales (r, θ, φ) son *comóviles* con el fluido cosmológico.

7.4. Redshift Cosmológico

Consideremos un observador O moviéndose con el fluido cosmológico. Sin pérdida de generalidad (debido a la homogeneidad del espacio) podemos elegir las coordenadas espaciales de O de modo que $r_O = 0$. Además, consideramos otra partícula de fluido cosmológico con coordenadas $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, que emite una señal luminosa en el evento con tiempo cósmico t_1 hacia O , quien recibe la señal en $t = t_0$. La señal luminosa viaja hasta O por una curva geodésica nula con $d\theta = d\varphi = 0$. De (7.18) vemos que la condición $ds^2 = 0$ implica:

$$\frac{cdt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (7.26)$$

Integrando (7.26) encontramos que

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} =: f(r_1), \quad (7.27)$$

donde

$$f(r_1) = \begin{cases} \operatorname{arcse}(r_1), & \text{si } k = +1 \\ r_1, & \text{si } k = 0 \\ \operatorname{arcseh}(r_1), & \text{si } k = -1 \end{cases}. \quad (7.28)$$

Vemos que la expresión (7.27) que, dados $a(t)$, r_1 , t_1 y k puede entenderse como una ecuación para t_0 , el tiempo cosmológico de recepción de la señal. Si, por ejemplo, $a(t) = a(t_1)$ es

constante entonces $t_1 = t_0 + a(t_1)f(r_1)/c$. Si $\dot{a} > 0$ entonces $t_1 > t_0 + a(t_1)f(r_1)/c$ y si $\dot{a} < 0$ entonces $t_1 < t_0 + a(t_1)f(r_1)/c$. Este comportamiento corresponde a la noción clásica que cada elemento de fluido cosmológico (si bien sus coordenadas espaciales permanecen constantes) se aleja o acerca respecto a cualquier otro, es decir que el Universo se expande o contrae, dependiendo de si el factor de escala $a(t)$ aumenta o disminuye, respectivamente. Ahora, consideremos dos rayos de luz sucesivos emanando de P a tiempos t_1 y $t_1 + \Delta t_1$, y recibidos por O en los tiempos t_0 y $t_0 + \Delta t_0$ respectivamente, asumiendo que tanto el emisor como el receptor de la señal permanecen en sus mismas posiciones. **Entonces, usando (7.27) podemos escribir:**

$$c \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (7.29)$$

Luego, igualando estas relaciones, obtenemos

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (7.30)$$

Por lo tanto,

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (7.31)$$

Asumiendo que $a(t)$ no varía apreciablemente en los intervalos Δt_1 y Δt_0 ($\Delta t_0 \ll a/\dot{a}$ y $\Delta t_1 \ll a/\dot{a}$), podemos encontrar una expresión a primer orden en Δt_1 y Δt_0 :

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)}. \quad (7.32)$$

Los intervalos Δt_1 y Δt_0 son los intervalos de tiempo propio entre las dos señales, medidas por un observador comóvil con la fuente y por el receptor, respectivamente. En el caso particular en que estos intervalos de tiempo son los períodos de la radiación emitida y recibida, encontramos una expresión para el correspondiente redshift cosmológico:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1.$$

(7.33) Redshift cosmológico

Las observaciones indican que el universo se está expandiendo ($a(t_0) > a(t_1)$) y por lo tanto $z > 0$ (recordemos que $t_0 > t_1$), es decir, hay un corrimiento de la luz hacia el rojo (si el universo se contrae se debe esperar un corrimiento hacia el azul). Además esta expansión es acelerada, lo que significa que el factor de escala cosmológico $a(t)$ tiene una segunda derivada positiva ($\ddot{a} \geq 0$). Por lo tanto, la “velocidad”³ con que se alejan las galaxias aumenta continuamente en el tiempo.

Supongamos que $a(t)$ varía muy poco en el intervalo de tiempo $(t - t_0)$. En tal caso podemos aproximar $a(t)$ por una expansión en serie de potencias

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + O[(t - t_0)^2], \quad (7.34)$$

$$= a(t_0) \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) \right] + O[(t - t_0)^2], \quad (7.35)$$

³Redshifts pequeños pueden ser interpretados como si fuesen debido al efecto Doppler causado por las galaxias que se alejan, pero para redshifts mayores esta interpretación ya no es consistente. Lo que ocurre realmente es que el universo se expande con el avanzar del tiempo, haciendo que la longitud de onda de la luz se expanda junto con él.

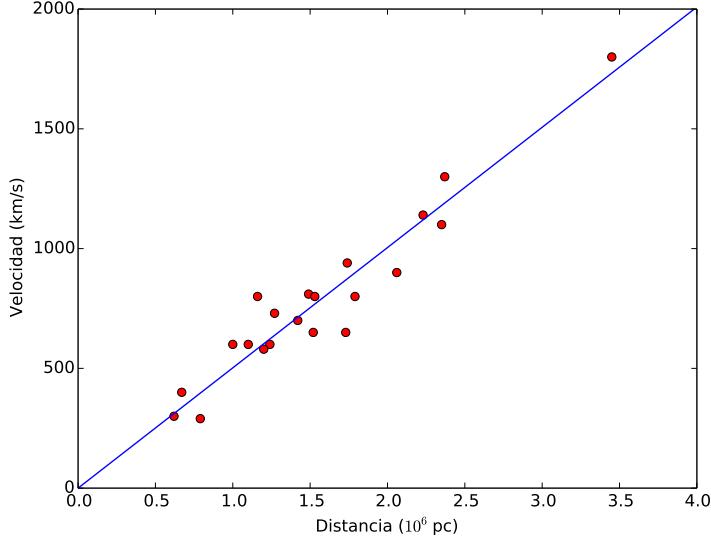


Figura 7.1: Relación entre la *velocidad* y distancia de las nebulosas, medida por Hubble [?].

entonces

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + O[(t - t_0)^2]. \quad (7.36)$$

Definimos la cantidad $H_0 := \dot{a}(t_0)/a(t_0)$, tal que a primer orden en $(t - t_0)$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + H_0(t - t_0). \quad (7.37)$$

Comparando (7.37) con (7.33) tenemos que

$$z \approx H_0(t_0 - t_1). \quad (7.38)$$

Ésta es la conocida Ley de Hubble, donde H_0 es la constante de Hubble.

En la década de 1920, Edwin Powell Hubble descubrió una relación lineal entre redshift y distancia a una galaxia: entre más lejos se encuentre mayor es su corrimiento al rojo. A través del estudio que efectuó, Hubble estimó el valor para la constante de H_0 en 502 km s⁻¹Mpc⁻¹ [?]. Este valor es mucho mayor que el valor aceptado actualmente, 72 km s⁻¹Mpc⁻¹, debido al error en la calibración de la distancia [?].

Por otro lado, por comodidad es útil definir el parámetro adimensional h tal que

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \quad (7.39)$$

7.5. Definiciones de Distancia

Desde la aparición de la teoría de Relatividad Especial el concepto de distancia deja de ser una cantidad absoluta, por lo mismo se debe tener cuidado al momento de definir las distintas medidas de distancia usadas. En Cosmología la definición de distancia no es única y se pueden emplear varios métodos para medirlas. Sus valores coinciden con la noción habitual de distancia para puntos cercanos ($r \ll 1$), pero difieren para puntos muy lejanos.

7.5.1. Paralaje Trigonométrico

El movimiento de la Tierra alrededor del Sol produce un movimiento aparente de la posición de alguna estrella alrededor de una elipse. Para efectos prácticos se asume que la Tierra gira en una órbita circular cuyo radio es la distancia promedio al Sol. Afortunadamente siempre la

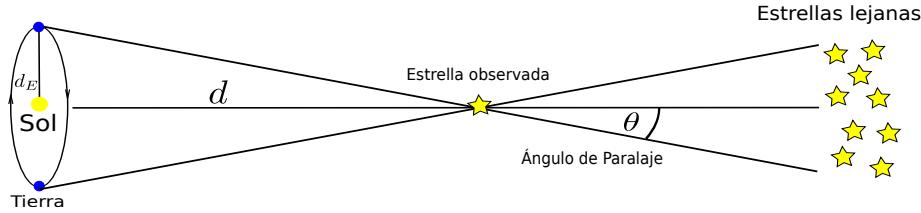


Figura 7.2: El movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

distancia de la Tierra a una estrella es mucho mayor que la distancia promedio de la Tierra al Sol (definida como *Unidad Astronómica*⁴ y simbolizada como *AU*) en ese caso el ángulo de paralaje se puede aproximar por la tangente entre ambos,

$$\theta = \frac{d_E}{d}, \quad (7.40)$$

con d_E la distancia Tierra-Sol y d la distancia Tierra-Estrella.

A partir de esto podemos definir una nueva unidad de distancia, el *Pársec*⁵ (denotado con la sigla *pc*), como la distancia a la que debe estar un objeto para que el ángulo de paralaje sea de $1''$.

7.5.2. Movimiento Propio

Una fuente de luz a una distancia d con velocidad v_{\perp} perpendicular a la línea de visión⁶ parecerá moverse a través del cielo a una razón μ (en radianes/tiempo) dada por

$$\mu = \frac{v_{\perp}}{d}. \quad (7.41)$$

Esto es conocido como movimiento propio. En general no se mide directamente esta cantidad, sino que la componente radial de la velocidad v_r a través del efecto Doppler que genera el desplazamiento.

Últimamente casi todas las mediciones de objetos dentro de nuestra galaxia se han efectuado usando alguno de estos dos métodos clásicos. Pero si se desean medir la distancia a objetos mucho más lejanos dejan de ser adecuados, pues se basan en una visión clásica de un universo euclíadiano.

7.5.3. Luminosidad Aparente

Este es el método más usado para determinar distancias en Cosmología. Se basa en medir la potencia de luz emitida por un objeto, cuya *luminosidad absoluta* es conocida. La luminosidad absoluta L se define como la potencia total radiada por el objeto (en todas direcciones).

⁴1 AU = 1.496×10^8 km.

⁵1 pc = $206,264.8$ AU = 3.0856×10^{13} km = 3.2616 años luz.

⁶Línea recta imaginaria que une al observador con la estrella.

Entonces, asumiendo que la potencia radiada es la misma en todas direcciones podemos encontrar una simple relación entre la potencia radiada total y la que recibiría un observador a una distancia d del objeto.

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (7.42)$$

donde l es la *luminosidad aparente* recibida por el observador. Cabe señalar que hemos considerado en esta expresión que el espacio es euclídeo. La expresión (7.42) puede ser mejorada tomando en cuenta los efectos de la expansión del universo en la definición de d .

Otro efecto importante a considerar es que un observador en la Tierra percibirá una luminosidad aparente menor a la esperada por causa de la atmósfera terrestre que absorbe parte de la luz recibida. Se define la *Magnitud Bolométrica* como la magnitud aparente que tendría una estrella si la radiación emitida por ella pudiera medirse en ausencia de la atmósfera. Se representa por M la magnitud absoluta y m la aparente.

El astrónomo británico Norman Pogson en 1856 definió la escala moderna de magnitudes con base en la comparación de luminosidades entre estrellas, de la cual se encuentra la relación $l \propto 10^{2m/5}$. La constante de proporcionalidad pudo ser fijada en la década de 1930 con la llegada de las fotoceldas [?]. De esta manera se obtuvo

$$l = 10^{-2m/5} \times 2.52 \times 10^{-5} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{s}} \right], \quad (7.43)$$

y la *Magnitud bolométrica absoluta* M

$$L = 10^{-2M/5} \times 3.02 \times 10^{35} \left[\frac{\text{erg}}{\text{s}} \right]. \quad (7.44)$$

Ambas expresiones son válidas para cualquier longitud de onda. Usando estas dos expresiones podemos reescribir (7.42) como:

$$d = 10^{1+(m-M)/5} \text{pc}. \quad (7.45)$$

Hay muchos tipos de estrellas que son usadas para medir distancias a través de la observación de su luminosidad aparente.

7.5.4. Velas Estandar

Éstos son objetos estelares que pertenecen a una clase particular cuya luminosidad absoluta es conocida. Luego, por comparación de luminosidades pueden ser calculadas las distancias a otros objetos de la misma clase que se encuentren más lejanos a nuestra galaxia.

Cefeidas Variables: Si se monitorea el brillo de ciertas estrellas, veremos que éste oscila en el tiempo. Éstas son conocidas como *Estrellas variables*. El periodo de luminosidad puede variar desde minutos a meses o incluso años. Dentro de este tipo de estrellas se encuentran las Cefeidas variables, cuyos periodos de luminosidad varían entre 1 a 100 días y en nuestra galaxia se han encontrado más de 1000.

Cuando se estudian las líneas espectrales en Cefeidas, se detectan corrimientos que varían con el mismo periodo que el de su luminosidad. Esto nos indica que la superficie de esta estrella se mueve, es decir, la luminosidad cambia como cambia la superficie de la estrella.

Para entender esto consideremos una estrella común y corriente de radio R_0 y supongamos que ésta es perturbada cambiando su radio a R , tal que $R < R_0$, entonces debido a esta perturbación su densidad y presión aumentarán. El exceso en la presión hará que se expanda sobre pasando el radio de *equilibrio* R_0 . La disminución en la presión generará que se vuelva a

comprimir, repitiéndose este proceso sucesivas veces.

En el análisis anterior dejamos de lado efectos importantes como la Opacidad⁷. En estrellas normales, la opacidad disminuye al aumentar la temperatura, esto significa, al comprimirse la estrella a causa del aumento de presión también aumentará la temperatura y por lo tanto disminuirá la opacidad. De este modo, cuando la estrella se expande disminuye la presión y la temperatura, provocando un aumento en la opacidad. Esto genera los cambios periódicos en su luminosidad [?].

En particular, las Cefeidas son un tipo de estrella variable con una gran luminosidad y por lo mismo son unas de las más usadas para medir distancias fuera de nuestra galaxia. Además, su periodo de luminosidad tiene una estrecha relación con la misma luminosidad: entre mayor sea el periodo, mayor será su luminosidad. Calibrando la relación entre luminosidad-periodo de Cefeidas cercanas se puede calcular la luminosidad de otras más lejanas a través de su periodo y por lo tanto nos permiten establecer distancias a través de su luminosidad.

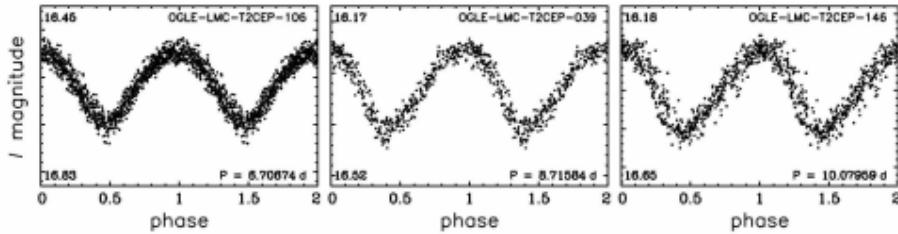


Figura 7.3: Curvas de luz de tres Cefeidas ordinarias tipo II, con periodos similares [?].

Supernova Ia: Se cree que ocurre cuando una enana blanca en un sistema binario aumenta su masa absorbiendo la de su compañera hasta acercarse al límite de Chandrasekhar⁸. Cuando esto ocurre la enana blanca se vuelve inestable, aumentando su temperatura y densidad, generando explosiones termonucleares las cuales pueden abarcar distancias de varios megaparsecs. Como todas estas estrellas explotan en condiciones similares, la luminosidad de sus explosiones variarán muy poco unas de otras, haciendo de las supernovas la un buen indicador de distancias.

7.5.5. Distancia de Luminosidad

Cuando se miden distancias con redshifts considerables ($z > 0.1$) los efectos de la expansión cosmológica no pueden ser despreciados. Anteriormente encontramos una relación entre la luminosidad absoluta y la luminosidad aparente (7.42) a una distancia d , a la cual debemos hacer algunas correcciones.

Imaginemos una estrella con coordenadas $\vec{x}_1 = (ct_1, r_1, 0, 0)$ (en coordenadas esféricas), y que la tierra se encuentra en las coordenadas $\vec{x}_0 = (ct_0, 0, 0, 0)$, considerando (7.18), la métrica inducida por una esfera centrada (para un tiempo fijo) en \vec{x}_1 y que pasa por \vec{x}_0 será

$$dl^2 = a_0^2 r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \text{con} \quad a_0 = a(t_0), \quad (7.46)$$

cuya área es

$$A = 4\pi a_0^2 r_1^2. \quad (7.47)$$

⁷Un material presenta opacidad cuando no deja pasar luz en proporción apreciable.

⁸Es la máxima masa posible de una estrella fría estable. Si la estrella supera este límite colapsa.

Por otro lado, si la estrella emite N fotones, de frecuencia ν_1 , en un intervalo de tiempo δt_1 , la luminosidad absoluta será:

$$L = \frac{N h \nu_1}{\delta t_1} \Rightarrow N = \frac{L \delta t_1}{h \nu_1}, \quad (7.48)$$

con h la constante de Planck. Un observador en \vec{x}_0 detectará n fotones ($n < N$) en un área S con frecuencia ν_0 , a causa del redshift, en un intervalo de tiempo δt_0 . Además, al ser el espacio isótropo cualquier observador que se encuentre en la superficie esférica que encierra a la estrella recibirá los mismos n fotones con la misma frecuencia en el mismo intervalo de tiempo y superficie. Así, asumiendo que no hay pérdida de fotones, por esta superficie esférica deberán pasar en total N fotones en el intervalo de tiempo δt_0 , es decir,

$$\int_A \frac{n}{S} dA = 4\pi a_0^2 r_1^2 \frac{n}{S} = N. \quad (7.49)$$

Entonces, podemos escribir la luminosidad aparente como

$$l = \frac{n h \nu_0}{S \delta t_0} = \frac{N h \nu_0}{4\pi a_0^2 r_1^2 \delta t_0} \Rightarrow N = \frac{4\pi l a_0^2 r_1^2 \delta t_0}{h \nu_0}, \quad (7.50)$$

Igualando (7.48) y (7.50) obtenemos

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{\delta t_1}{\delta t_0} \frac{\nu_0}{\nu_1}. \quad (7.51)$$

Además, podemos relacionar $\delta t_1/\delta t_0$ y ν_0/ν_1 con el redshift cosmológico usando (7.33) y (7.32) respectivamente. Con esto, encontramos la relación

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 r_1^2 (1+z)^2}. \quad (7.52)$$

En base a este resultado, podemos definir la *distancia de luminosidad* como

$$d_L := a_0 r_1 (1+z), \quad (7.53)$$

tal que

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (7.54)$$

Por otro lado, usando (7.53) y (7.45) podemos expresar la distancia de luminosidad en función de las magnitudes absolutas y relativas de las estrellas.

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d_L(z)}{1pc} \right) - 5. \quad (7.55)$$

Esta definición de distancia resulta muy útil para encontrar una relación entre distancia y redshifts. Ahora la utilizaremos en el caso particular en que $z \ll 1$, para expandir en serie de potencias a segundo orden en $(t - t_0)$:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (7.56)$$

$$= a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right]. \quad (7.57)$$

Aquí hemos definido el *parámetro de desaceleración* q_0 como

$$q_0 := -\frac{a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \ddot{a}(t_0). \quad (7.58)$$

Luego,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (7.59)$$

Pero $1 + z = a(t_0)/a(t)$. Entonces, invirtiendo (7.59) encontramos

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right]^{-1} \quad (7.60)$$

$$= 1 + H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t_0 - t)^2 + O[(t - t_0)^3] \quad (7.61)$$

$$\Rightarrow z \approx H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t_0 - t)^2. \quad (7.62)$$

Esta expresión puede ser invertida⁹ expresando t en función de z

$$H_0(t_0 - t) \approx z - \frac{1}{2}(q_0 + 2)z^2. \quad (7.63)$$

Pero lo que deseamos hacer es relacionar la distancia de luminosidad con el redshift, para ello usaremos (7.27), que adopta la forma

$$\frac{c}{a(t_0)} \int_{t_1}^{t_0} \left[H_0t + \frac{1}{2}H_0^2(q_0 + 2)t^2 \right] dt \approx r_1. \quad (7.64)$$

Como aproximamos a segundo orden en $(t - t_0)$, podemos escribir

$$\frac{r_1}{c} \approx \frac{t_0 - t_1}{a(t_0)} + \frac{H_0(t_0 - t_1)^2}{2a(t_0)}. \quad (7.65)$$

$$\frac{r_1}{c}a(t_0)H_0 \approx z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2. \quad (7.66)$$

Manteniendo la aproximación a segundo orden en z y usando la definición de distancia de luminosidad (7.53) encontramos

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 \right]. \quad (7.67)$$

Esta expresión tiene una buena precisión hasta redshifts de 0.2, para mayores valores la expansión en serie de potencias no es útil.

7.5.6. Distancia Angular

Otra noción simple de distancia es la *distancia angular*. Ella requiere conocer el tamaño (lineal) “real” D de un objeto (por ejemplo, una galaxia), entendido como su tamaño medido por un observador que se mueve con el objeto. Si respecto a un observador lejano el objeto subtende un ángulo $\Delta\varphi$ entonces definimos la distancia angular desde el observador al objeto como $d_A := D/\Delta\varphi$.

Un cálculo simple muestra que un objeto ubicado en la coordenada r_1 en el tiempo t_1 tendrá distancia angular dada por

$$d_A = a(t_1)r_1. \quad (7.68)$$

distancia angular

Es claro que tanto d_L como d_A coinciden con la definición usual de distancia si estamos en un universo plano sin expansión. También es importante notar que para determinar tanto d_A como d_L es necesario conocer *propiedades intínsicas* del objeto. Para calcular la distancia angular se requiere conocer el tamaño “real” D del objeto, mientras que para determinar la distancia de luminosidad se requiere la luminosidad absoluta L .

⁹Basta con encontrar las raíces de esta expresión y expandir a segundo orden en potencias de z .

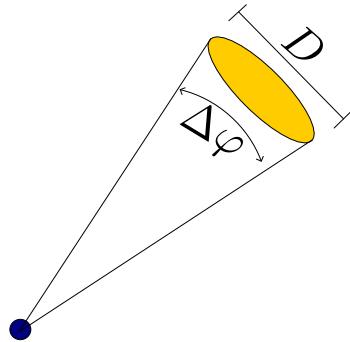


Figura 7.4: El punto azul representa la tierra mientras que el amarillo el objeto en estudio.

7.6. Ecuaciones de Einstein

Como bien dijimos al principio del capítulo, a escalas cosmológicas el universo (visto por observadores comóviles con el fluido cosmológico) luce homogéneo e isótropo. Esto implica que el tensor de energía-moméntum del fluido cosmológico debe poseer estas mismas propiedades. Si suponemos que el fluido cosmológico es un fluido perfecto con presión p y densidad de masa ρ , las componentes de su tensor energía-moméntum, debido a que la métrica de espaciotiempo es diagonal, ver (7.18), serán

$$T^{00} = \rho(t)c^2, \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = -g^{ij}p(t), \quad (7.69)$$

donde p y ρ sólo pueden depender del tiempo (por la isotropía y homogeneidad). $T^{0i} = 0$ también nos indica que el fluido cosmológico está en reposo respecto a observadores comóviles con él ($u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$). De este modelo del universo podemos extraer información interesante. De la ec. de balance de la energía

$$0 = \nabla_\mu T^{0\mu} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu T^{0\nu} \quad (7.70)$$

$$= \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{i0}^i T^{00}, \quad (7.71)$$

(7.72)

obteniendo finalmente¹⁰

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{ac^2}(p + \rho c^2) = 0.} \quad (7.73)$$

Asumiendo la ecuación de estado politrópica

$$p = c^2\omega\rho, \quad (7.74)$$

siendo ω independiente del tiempo, podemos encontrar una relación entre ρ y a a partir de (7.73):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (7.75)$$

En el caso en que el fluido cosmológico está compuesto mayoritariamente por materia no-relativista ($p \ll \rho c^2$), entonces $\omega \ll 1$ y por lo tanto

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (7.76)$$

¹⁰Cabe mencionar que usando (7.81) y (7.85) también se puede obtener (7.73).

o bien si fuese predominante la materia relativista ($p = c^2 \rho / 3$, es decir $\omega = 1/3$)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}. \quad (7.77)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Einstein se puede obtener más información sobre la dinámica de la expansión del universo. De la componente $\mu = \nu = 0$ de (3.32) y usando las conexiones calculadas anteriormente,

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{0\lambda}^\lambda}{\partial x^0} + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0\rho}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\rho, \quad (7.78)$$

se obtiene

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (7.79)$$

Además,

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3p). \quad (7.80)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 + 3p)}. \quad (7.81)$$

Por otro lado, sabemos que $T_{0i} = 0$ y por los mismos motivos de homogeneidad del espacio R_{0i} debe ser 0. Así, sólo falta calcular R_{ij} ,

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{j\lambda}^\lambda}{\partial x^i} + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{ij}^\rho - \Gamma_{i\rho}^\lambda \Gamma_{j\lambda}^\rho, \quad (7.82)$$

$$R_{ij} = \left[2k + \frac{2}{c^2} \dot{a}^2 + \frac{1}{c^2} a \ddot{a} \right] \tilde{g}_{ij}, \quad (7.83)$$

con $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}/a^2$, además

$$T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T = \frac{a^2}{2c^2} (\rho c^2 - p) \tilde{g}_{ij}. \quad (7.84)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{2kc^2}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 - p)}. \quad (7.85)$$

Usando (7.81) y (7.85) se pueden eliminar las segundas derivadas, obteniendo

$$\boxed{\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G \rho a^2}{3}}. \quad (7.86)$$

Ésta es la ecuación fundamental de Friedmann [?] que gobierna la expansión del universo.

De aquí vemos que la expansión sólo puede detenerse en un universo con curvatura positiva, es decir $k = 1$.

En base a (7.86) podemos definir la *densidad de masa crítica* actual como

$$\rho_{0,\text{crit}} := \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3, \quad (7.87)$$

donde h es la constante de Hubble en unidades de $100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Es llamada así pues despejando ρ de (7.86) se obtiene

$$\rho = \frac{3\dot{a}^2}{8\pi Ga^2} + \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2}, \quad (7.88)$$

lo que significa que

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} + \frac{3kc^2}{8\pi Ga_0^2} = \rho_{0,\text{crit}} + \frac{3kc^2}{8\pi Ga_0^2}. \quad (7.89)$$

Si $\rho_0 > \rho_{0,\text{crit}}$ estamos en un universo con curvatura espacial positiva. Si $\rho_0 = \rho_{0,\text{crit}}$ estamos en un universo espacialmente plano. Si $\rho_0 < \rho_{0,\text{crit}}$ estamos en un universo curvatura espacial negativa. Es decir, $\rho_{0,\text{crit}}$ es un *punto de inflección* para el valor de la densidad, entre estos tres posibles casos.

De la definición (7.58) y la ec. (7.81) encontramos la expresión

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3c^2 H_0^2} (\rho_0 c^2 + 3p_0) = \frac{\rho_0 c^2 + 3p_0}{2\rho_{0,\text{crit}}}. \quad (7.90)$$

Por otro lado, analizando (7.81) vemos que este modelo sólo permite una expansión desacelerada, ya que, si $c^2\rho + 3p$ proviene de una mezcla de radiación y materia $q_0 > 0$ y $\ddot{a} < 0$. Esto tiene mucho sentido, pues en ausencia de cualquier otro tipo de fuerzas, la atracción gravitacional será la única que domine el comportamiento del universo a escalas cosmológicas. Otra de las consecuencias de este modelo es que la edad actual del universo es mayor que el tiempo de Hubble. Si graficamos $a(t)/a_0$ vs t entonces H_0 es la pendiente de la curva en t_0 , por lo tanto cualquier modelo del universo debe tener dicha pendiente en t_0 .

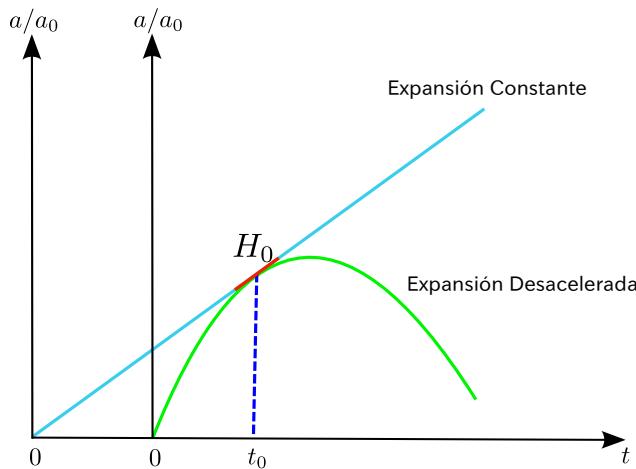


Figura 7.5: Como se puede observar del gráfico, si la expansión es desacelerada el tiempo transcurrido desde $a = 0$ hasta a_0 es menor que el de un modelo de expansión a velocidad constante.

Como ya hemos visto, actualmente se sabe que la expansión del universo no es desacelerada, por el contrario, el universo se expande en forma acelerada, por lo que el modelo propuesto no se ajusta a las observaciones. Esto puede ser solucionado agregando la Constante Cosmológica Λ a las ecuaciones de Einstein¹¹ tal que $\ddot{a} > 0$. Esta constante tiene dos interpretaciones distintas. La primera, es que ésta es una corrección a las ecuaciones de Einstein, la que sólo es significativa a escalas cosmológicas. La segunda, requiere poner esta constante al otro lado de la igualdad,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T'_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T'_{\mu\nu}, \quad (7.91)$$

así $T'_{\mu\nu}$ corresponde al tensor energía-moméntum de la materia que conforma el universo conocido más otro tipo de "materia" con densidad de masa y presión tales que $\ddot{a} > 0$.

¹¹Ver ecuación (3.35).

En ese caso, el tensor de energía-moméntum de este fluido desconocido sería

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (7.92)$$

Puede identificarse este energía-moméntum como el de un fluido perfecto con densidad y presión dadas por,

$$\rho_{\Lambda} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}, \quad p_{\Lambda} = -\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}. \quad (7.93)$$

Por lo que este supuesto fluido satisface una ec. de estado politrópica,

$$p = -\rho c^2, \quad (7.94)$$

es decir, aquí $\omega = -1$.

Entonces, si aparte del fluido cosmológico agregamos este nuevo fluido a (7.81), obtenemos

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2}(\rho c^2 + 3p) + \Lambda c^2. \quad (7.95)$$

Entonces, para que \ddot{a} sea mayor a cero Λ debe satisfacer

$$\Lambda > \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p), \quad (7.96)$$

Esto significa que Λ debe ser una constante positiva, y por consiguiente genera presión efectiva negativa, tal que contrarresta la atracción gravitacional.

Ahora bien, supongamos que el universo está conformado por materia relativista y materia no-relativista las cuales no interactúan en forma significativa entre ellas y además agregamos la constante cosmológica, entonces

$$\rho = \rho_R + \rho_M + \rho_{\Lambda}, \quad (7.97)$$

aquí ρ_R representa la densidad de masa de la materia relativista, ρ_M la densidad de masa de la materia no relativista y ρ_{Λ} representa una densidad de masa efectiva a causa de la constante cosmológica. Reemplazando con (7.76) y (7.77), encontramos

$$\rho = \rho_{0R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \rho_{0M} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{\Lambda}. \quad (7.98)$$

Podemos reescribir la densidad de masa como:

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{\Lambda} \right], \quad (7.99)$$

con

$$\Omega_R := \frac{3H_0^2 \rho_{0R}}{8\pi G}, \quad \Omega_M := \frac{3H_0^2 \rho_{0M}}{8\pi G}, \quad \Omega_{\Lambda} := \frac{3H_0^2 \rho_{0\Lambda}}{8\pi G}, \quad (7.100)$$

tal que al evaluar (7.86) en t_0 obtenemos

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1, \quad \text{con } \Omega_k := -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2}. \quad (7.101)$$

Además, podemos escribir la presión actual como

$$p_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left(-\Omega_\Lambda + \frac{1}{3}\Omega_R \right). \quad (7.102)$$

Reemplazando (7.102) y (7.99) en (7.90), se obtiene que

$$q_0 = \frac{1}{2}(\Omega_M + 2\Omega_R - 2\Omega_\Lambda). \quad (7.103)$$

Por otro lado, usando (7.86) vemos que

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a^2 \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (7.104)$$

Luego, definiendo $x = a/a_0$, podemos escribir

$$\dot{x}^2 = H_0^2 x \left[\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (7.105)$$

Usando (7.33) y despejando t en función de z , obtenemos

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda}}. \quad (7.106)$$

Esta expresión nos permite calcular la edad actual del universo como

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda}}. \quad (7.107)$$

Por otro lado, de (7.27) vemos que

$$f(r(z)) = c \int_{t_0}^{t(z)} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda}}. \quad (7.108)$$

Luego,

$$r(z) = S \left[\frac{c}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda}} \right], \quad (7.109)$$

con

$$S[y] = \begin{cases} \operatorname{sen}(y), & \text{si } k = +1 \\ y, & \text{si } k = 0 \\ \operatorname{senh}(y), & \text{si } k = -1 \end{cases}. \quad (7.110)$$

Entonces, usando la definición de distancia de luminosidad (7.53), encontramos

$$d_L(z) = a_0(1+z)S \left[\frac{c}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_k x^{-2} + \Omega_\Lambda}} \right]. \quad (7.111)$$

En particular para el caso $k = 0$ tenemos que $\Omega_k = 0$ y por lo tanto

$$d_L(z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_R x^{-4} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_\Lambda}}. \quad (7.112)$$

7.7. Datos experimentales, Modelos y Ajustes

Como hemos visto, este modelo cosmológico nos permite obtener mucha información sobre el universo, sobre su curvatura, su edad y tipo de materia que lo compone. Entonces es momento de poner a prueba nuestros modelos del universo, usando los datos experimentales.

El Proyecto Cosmológico de Supernovas (Supernova Cosmology Project¹² o abreviado por

¹²Sitio web: <http://supernova.lbl.gov/>.

sus siglas SCP) es uno de los dos equipos de investigación que determinaron que el universo se expande en forma acelerada. Ellos usaron cientos de datos tomados del redshift de supernovas tipo Ia. El SCP Union2.1 SN Ia¹³ es una compilación de datos obtenidos de las supernovas Ia. Como se puede ver en el link al pie de la página, estos datos están en una tabla donde la primera columna corresponde al nombre de la supernova, la segunda al redshift medido, la tercera columna corresponde a la cantidad $m - M$ y la cuarta columna corresponde al error asociado a la medición de $m - M$.

Nombre	z	$m - M$	Error $m - M$	
1993ah	0.028488	35.3465833928	0.223905932998	
1993ag	0.050043	36.6823679154	0.166828851413	
1993o	0.052926	36.8176912545	0.1557559148	(7.113)
1993b	0.070086	37.4467365424	0.158466934433	
1992bs	0.062668	37.4834093505	0.156099434739	
...	

Estos mismos datos serán los que utilizaremos para ajustar los parámetros de nuestro modelo. Los gráficos de la figura 7.6, corresponden a los datos obtenidos de las supernovas tipo Ia por el SCP.

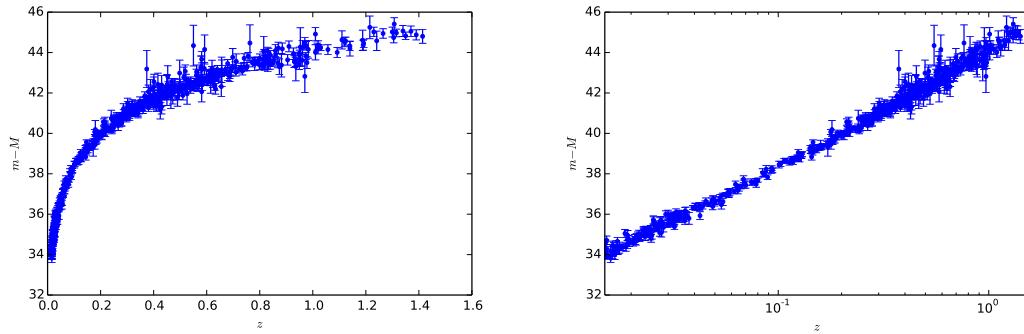


Figura 7.6: El gráfico superior corresponde a $m - M$ versus redshift, mientras que el inferior es una representación semilogarítmica procedentes de supernovas tipo Ia. Ambos con barras de error.

Ahora bien, de (7.55) y (7.67) y usando el método de mínimos cuadrados ponderados podemos en contrar los valores de h y q_0 que se ajustan mejor a los datos (en el apendice se encuentra una sección con los scripts utilizados). Dichos valores resultan ser

$$h = 0.688 \quad ; \quad q_0 = -0.175 . \quad (7.114)$$

Esto significa que el universo debe estar en expansión acelerada pues $q_0 < 0$. Además con el valor de h obtenido y (7.39), tenemos que $H_0 = 68,8 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Se debe mencionar también, que el valor de q_0 no es muy preciso, pues como se ve en los datos, hay redshifts de hasta 1.4 lo que es bastante grande para la aproximación a segundo orden en z .

De la figura (7.7), se ve que la curva se ajusta muy bien a los datos observacionales, pero es conveniente hacer un estudio un poco más profundo para dilucidar si este ajuste es bueno. Con este propocito utilizaremos el diagrama de residuos y su correspondiente histograma. Cómo se puede apreciar de (7.8), el diagrama de residuos muestra una distribución más o menos aleatoria

¹³Dirección web: <http://supernova.lbl.gov/Union/>.

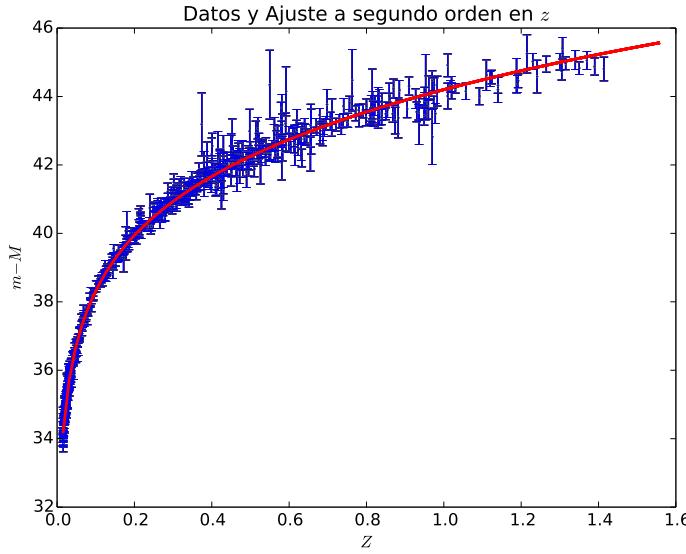


Figura 7.7: Gráfico correspondiente al ajuste de la expresión a segundo orden en z . Con $h = 0.688$ y $q_0 = -0.175$.

en torno a cero, esto significa que el ajuste pasa aproximadamente por en medio de todos los puntos. Esto es corroborado por su histograma, ya que presenta aproximadamente una forma de distribución normal¹⁴.

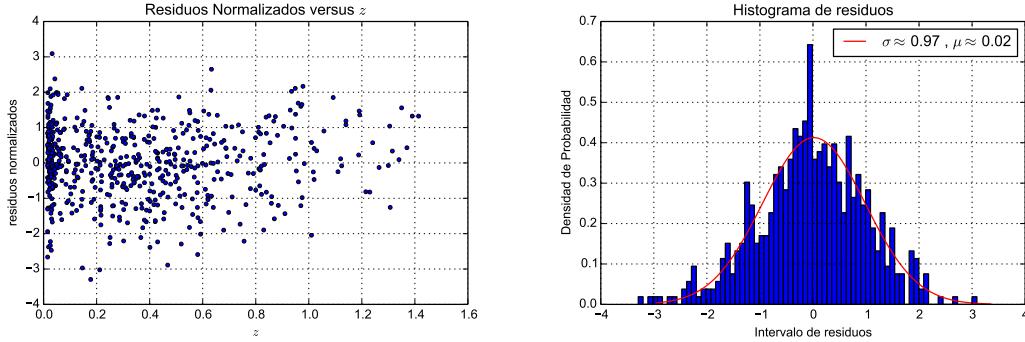


Figura 7.8: El gráfico de la izquierda corresponde al diagrama de residuos del ajuste, mientras que el de la derecha corresponde al histograma de residuos al cual se le ajustó una curva gaussiana, con σ^2 la varianza y μ la media.

Este mismo análisis se puede hacer con los modelos definidos por la relación (7.111), usando mínimos cuadrados ponderados podemos ajustar los parámetros de los 3 modelos ($k = -1, 0, 1$). En la figura 7.9 vemos los 3 modelos. Es difícil discernir entre cuál de los tres es el mejor, ya que en los 3 casos las curvas se ajustan muy bien a los datos y además los valores de los parámetros obtenidos son muy similares. Para el caso $k = -1$ se tiene

$$h = 0.7001, \quad \Omega_\Lambda = 0.7237, \quad \Omega_M = 0.2731, \quad \Omega_R = 0.0024, \quad \Omega_k = 0.0008. \quad (7.115)$$

¹⁴El Teorema del límite central establece que, bajo ciertas condiciones, la suma de un gran número de variables aleatorias se aproxima a una distribución normal.

Para el caso $k = 0$,

$$h = 0.7000, \quad \Omega_\Lambda = 0.7225, \quad \Omega_M = 0.2773, \quad \Omega_R = 0.0002, \quad \Omega_k \equiv 0 \quad (7.116)$$

Para el caso $k = 1$,

$$h = 0.7000, \quad \Omega_\Lambda = 0.7231, \quad \Omega_M = 0.2765, \quad \Omega_R = 0.0005, \quad \Omega_k = -0.0001. \quad (7.117)$$

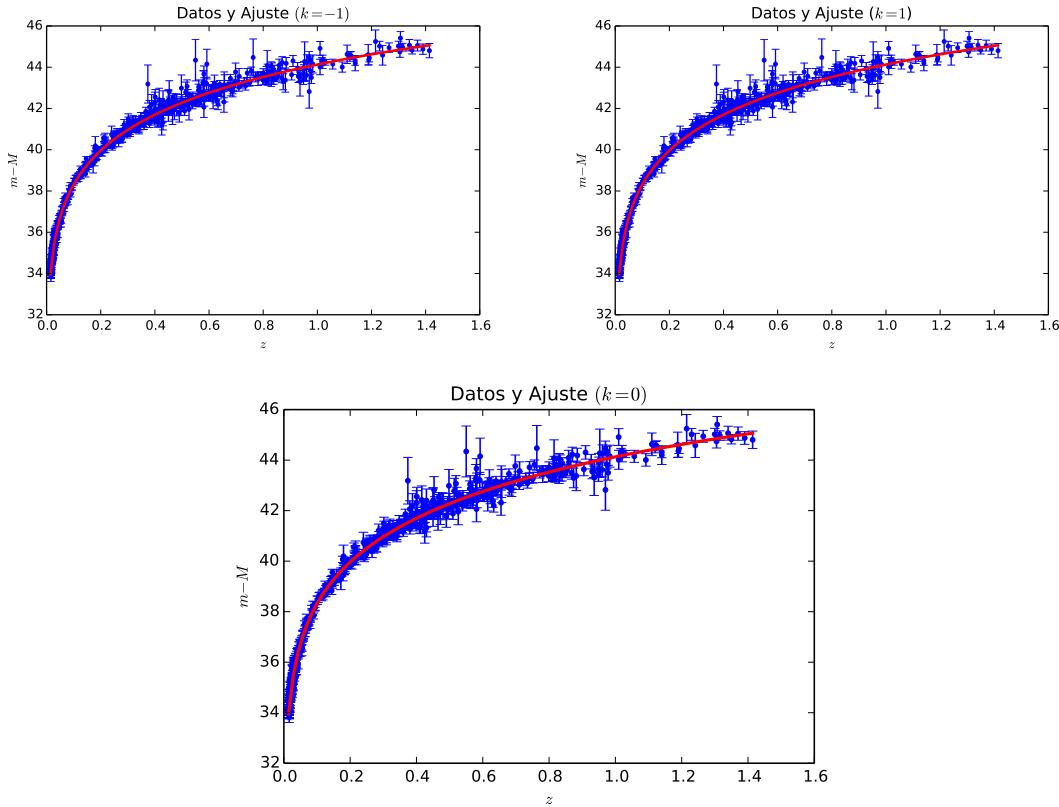


Figura 7.9: El gráfico superior izquierdo corresponde al caso de un universo con curvatura espacial negativa, el superior derecho al caso de un universo con curvatura espacial positiva y el inferior central, al caso de un universo espacialmente plano.

En los tres casos los parámetros toman valores similares, alrededor del 73% de la densidad de masa del universo es contribuida por la constante cosmológica y el 27% restante es contribuido por la materia no-relativista. Por otro lado, la contribución de la materia relativista no alcanza el 1%. Además, reemplazando en (7.107) los valores obtenidos, podemos calcular las correspondientes edades del universo, que nuevamente resultan muy similares para los 3 casos.

$$\begin{aligned} k = -1, & \quad \text{Edad del Universo} \approx 13.66 \text{ miles de Millones de años.} \\ k = 0, & \quad \text{Edad del Universo} \approx 13.75 \text{ miles de Millones de años.} \\ k = 1, & \quad \text{Edad del Universo} \approx 13.73 \text{ miles de Millones de años.} \end{aligned} \quad (7.118)$$

Así mismo, sus respectivos diagramas de residuos e histogramas, como vemos en la figura 7.10, presentan formas muy similares. Por otro lado, con estos valores obtenidos y de (7.103) podemos obtener valores más precisos de q_0 , ya que el obtenido anteriormente proviene de

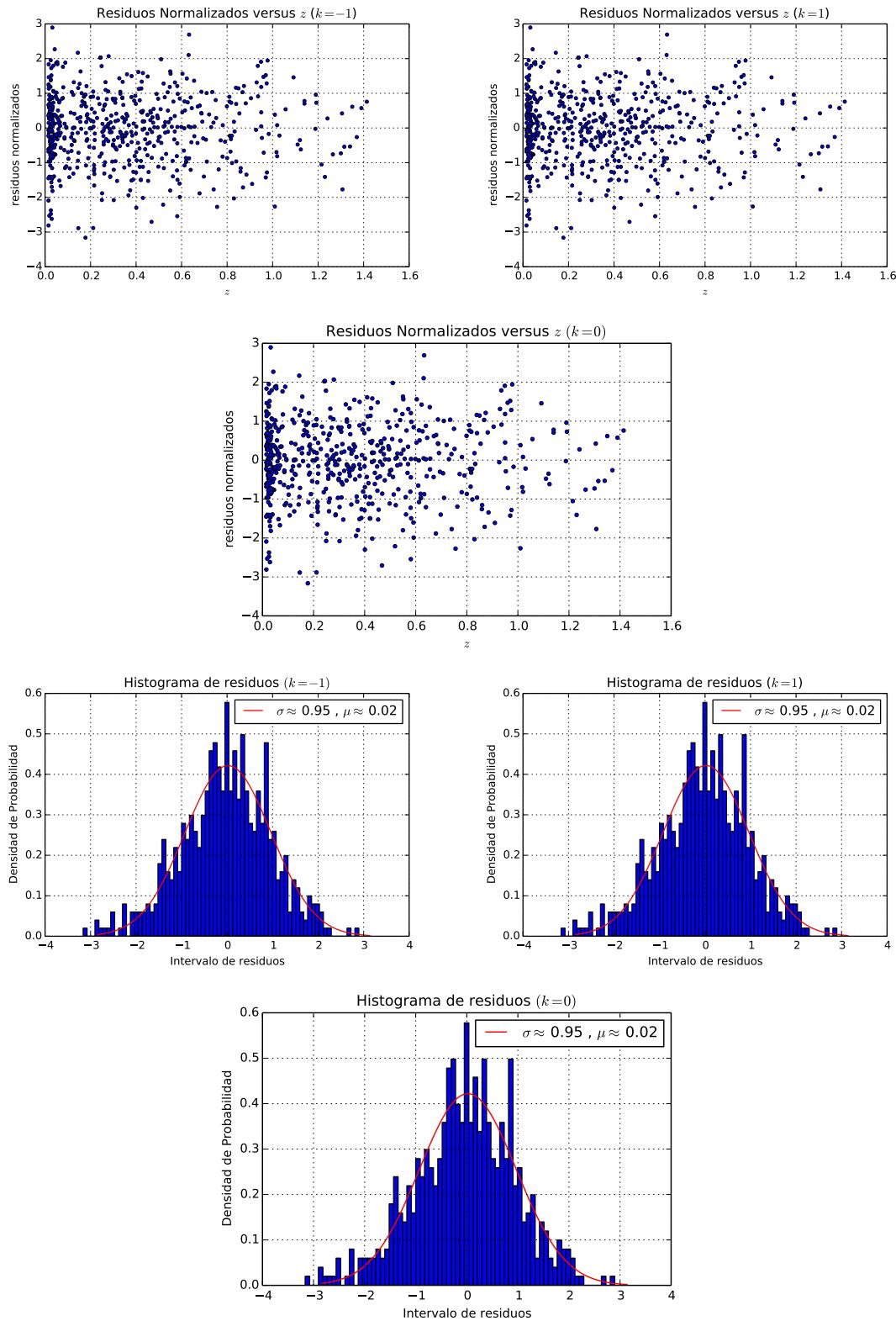


Figura 7.10: Diagrama de residuos correspondientes a los tres distintos valores de k , con sus respectivos histogramas.

una aproximación a segundo orden en z . Para $k = -1$ se tiene que $q_0 = -0.5848$, mientras

que para $k = 0$ se obtiene $q_0 = -0.5836$, por último, en el caso $k = 1$ el valor obtenido es $q_0 = -0.5844$. Estos tres valores de q_0 son aproximadamente tres veces más grandes que el anteriormente calculado.

Por otro lado, podemos calcular el *Coeficiente de determinación* de nuestros ajustes, definido como

$$R^2 := 1 - \frac{\sum_i (y_i - f_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}, \quad (7.119)$$

con y_i los datos utilizados, f_i el ajuste usado y \bar{y} el promedio de todos los datos. Entre más cercano sea R^2 a uno mejor es el ajuste, por el contrario, si R^2 se aproxima a cero entonces el ajuste no es muy confiable.

Los coeficientes de determinación obtenidos fueron:

$$\begin{aligned} \text{Aproximación a segundo orden en } z: & R^2 = 0.992795, \\ \text{Modelo con } k = -1: & R^2 = 0.993036, \\ \text{Modelo con } k = 0: & R^2 = 0.993036, \\ \text{Modelo con } k = 1: & R^2 = 0.993036. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Como es de esperarse, la aproximación a segundo orden en z , no es tan buena como los ajustes de los tres modelos, pues es sólo una aproximación. Por otro lado, el coeficiente de determinación no nos permite distinguir qué modelo del universo es mejor ($k = -1, 0, 1$).

Pero aún no hemos corroborado la importancia de la constante cosmológica. Ya que todos los modelos son muy parecidos, consideraremos $k = 0$ por su simplicidad. En la figura 7.11, hemos graficado nuestro modelo con valores de Ω_Λ , Ω_R y Ω_M asignados por nosotros. Para las tres curvas elegimos $h = 0.7$.

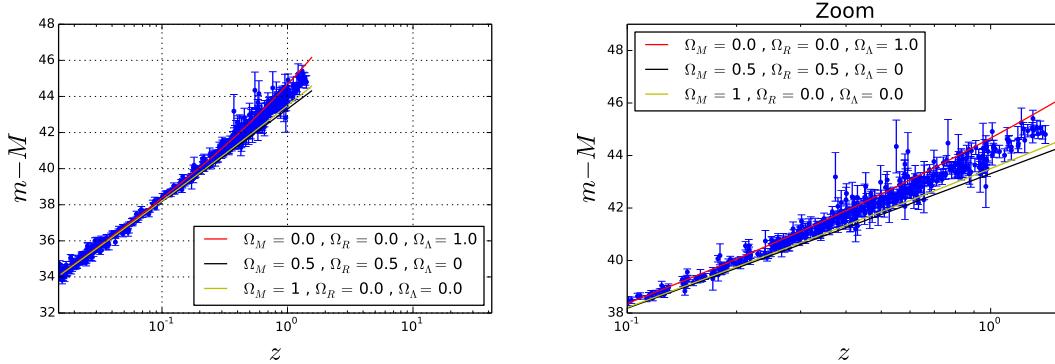
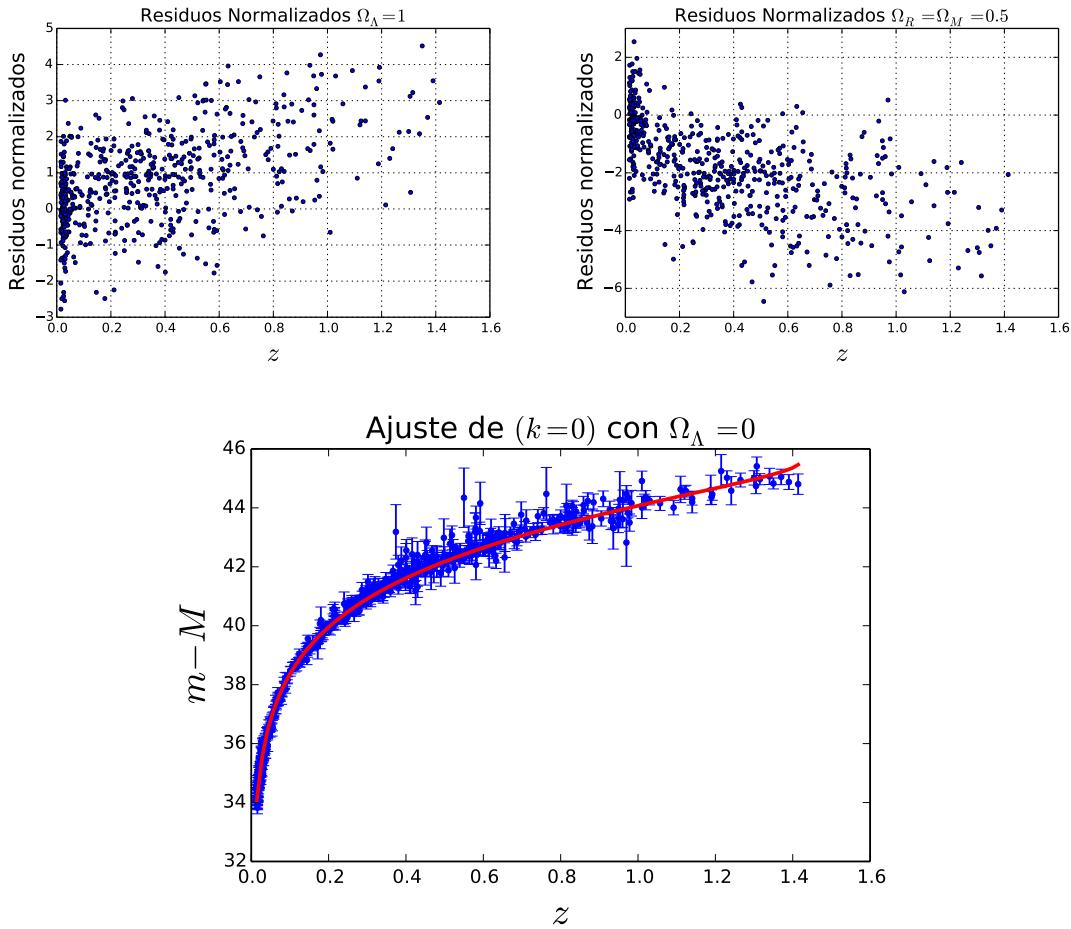


Figura 7.11: El gráfico de la izquierda corresponde a las curvas del modelo con $k = 0$, para algunos valores de los parámetros asignados por nosotros. El gráfico de la derecha corresponde a un zoom de la parte superior del gráfico de la izquierda. Las tres curvas para redshifts pequeños se ajustan bien los datos, pero para redshifts mayores toma mayor importancia el tipo de materia presente en el universo.

En el caso límite de un universo vacío, sólo con constante cosmológica (la curva de color rojo), el modelo predice una expansión mayor a la observada. Por otro lado, en un universo sólo con materia relativista y no-relativista (curva de color negro), predice una expansión menor a la observada. En sus respectivos diagramas de residuos se ve que hay tendencias que se dejan fuera para estos dos casos.

Además, podemos elegir de antemano $\Omega_\Lambda = 0$ y usar el método de mínimos cuadrados para



ajustar (7.111) a los datos.

La curva se ajusta muy bien a los datos, y parece no ser necesaria la constante cosmológica, pero el valor obtenido de los parámetros ajustados son: $h = 0.6645$, $\Omega_M = 1.7057$ y $\Omega_R = -0.7057$. Es claro que esto se aleja de la realidad física del problema, pues $\rho_R > 0$. Por lo que, la constante cosmológica es necesaria en este modelo del universo.

Por otro lado, podemos hacer un análisis estadístico de nuestros ajustes, con los contornos de confianza (confidence contours) de los parámetros ajustados. Esto es un intervalo de números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido con una determinada probabilidad de acierto. Esta probabilidad se calcula a partir de datos de una muestra, y los valores desconocidos son los parámetros a ajustar. La probabilidad de éxito en la estimación se representa con $1 - \alpha$ y se denomina nivel de confianza. Aquí α es el llamado error aleatorio o nivel de significación y es una medida de las posibilidades de fallar en la estimación mediante tal intervalo. El nivel de confianza y la amplitud del intervalo varían conjuntamente, de forma que un intervalo más amplio tendrá más probabilidad de acierto (mayor nivel de confianza). Mientras que, para un intervalo más pequeño, la estimación es más precisa, pero aumenta su probabilidad de error. Es habitual que el parámetro presente una distribución normal.

Los valores mínimos de χ^2 en los cuatro casos son:

$$\text{Aprox. a segundo orden en } z : \quad \chi^2 \approx 581.39, \quad (7.121)$$

$$\text{Expresión completa, caso } k = -1 : \quad \chi^2 \approx 562.23, \quad (7.122)$$

$$\text{Expresión completa, caso } k = 0 : \quad \chi^2 \approx 562.23, \quad (7.123)$$

$$\text{Expresión completa, caso } k = 1 : \quad \chi^2 \approx 562.23. \quad (7.124)$$

Por otro lado, como la estadística de χ^2 es una variable aleatoria, se le puede asignar una distribución de probabilidad, dada por

$$X(\chi^2; \nu) = \frac{(\chi^2)^{(\nu/2)-1} \exp[-\chi^2/2]}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)}, \quad \text{con } \nu = N - N. \quad (7.125)$$

Donde ν son los grados de libertad del ajuste, es decir, es el número de datos usados menos el número de parámetros a ajustar. En la figura 7.13 se muestra el gráfico correspondientes a la densidad de probabilidad de χ^2 .

Con esta expresión podemos calcular la probabilidad de encontrar algún χ^2 entre el valor mínimo de χ^2 (χ_{\min}^2) e ∞ , como:

$$P(\chi_{\min}^2 \leq \chi^2 \leq \infty; \nu) = \int_{\chi_{\min}^2}^{\infty} X(\chi^2; \nu) d\chi^2. \quad (7.126)$$

Pero, por otro lado esta probabilidad está normalizada, entonces

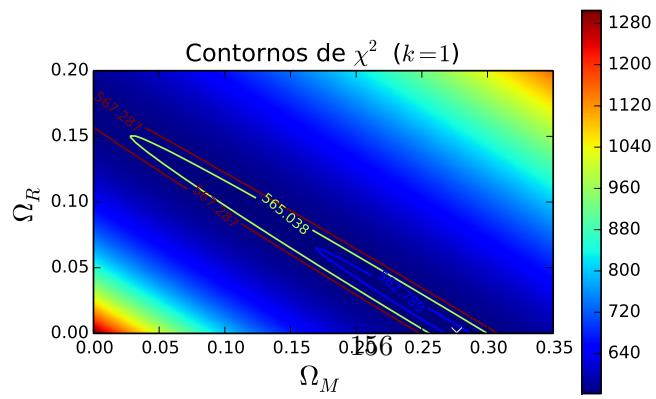
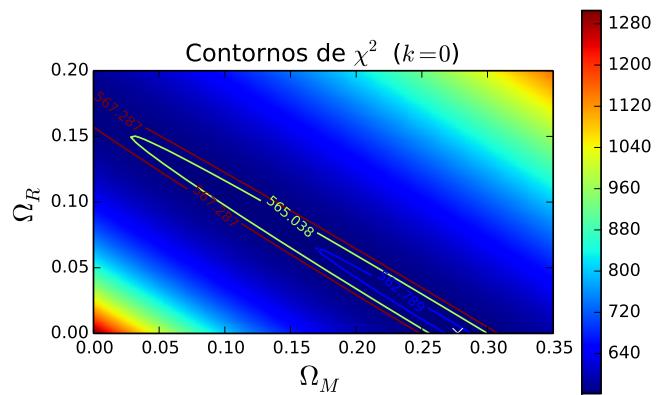
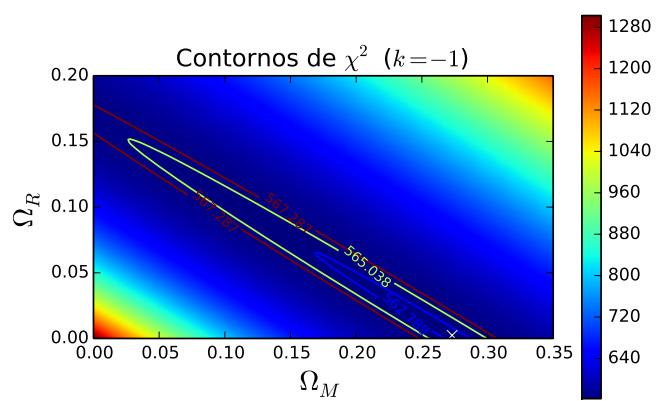
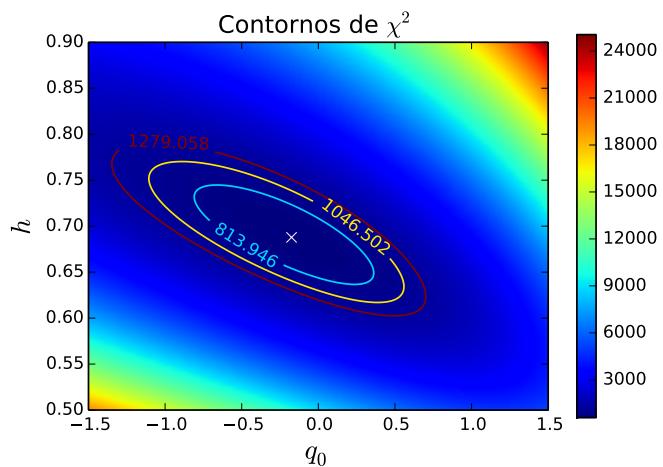
$$1 = \int_0^{\infty} X(\chi^2; \nu) d\chi^2, \quad (7.127)$$

Luego, podemos escribir

$$P(\chi'^2 \leq \chi^2 \leq \infty; \nu) = 1 - \int_0^{\chi'^2} X(\chi^2; \nu) d\chi^2 = 1 - \alpha. \quad (7.128)$$

Éste es el porcentaje de probabilidad de obtener un valor de $\chi^2 \geq \chi'^2$.

Entonces, hemos visto que el universo se está expandiendo y lo hace en forma acelerada. Además, en este modelo del universo es necesaria la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein para poder explicar la expansión acelerada. En los tres modelos del universo, alrededor del 73% de la densidad de masa del universo es contribuida por la constante cosmológica y el 27% restante es contribuido por la materia no-relativista. Con los diagramas de residuos e histogramas pudimos verificar que tan buenos fueron los ajustes, en particular, sólo con los datos de las supernovas no es posible dilucidar cual es el caso que se ajusta mejor a los datos.



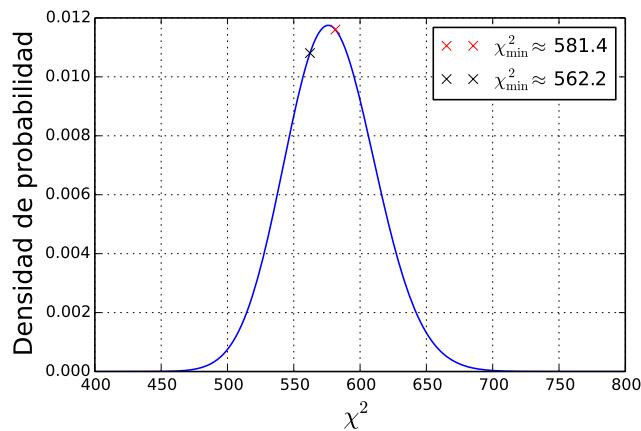


Figura 7.13: Densidad de probabilidad de χ^2 . Ésta se calculó usando 580 datos y usando dos parámetros libres para ajustar. En el caso de la proximación en z los parámetros son h y q_0 . Por otro lado, para la expresión completa, se fijaron h y Ω_k en los valores que minimizan χ^2 , Ω_M y Ω_R fueron los considerados como parámetros a ajustar. La x roja corresponde al valor de χ^2_{\min} con la aproximación a segundo orden en z y la x negra corresponde al valor χ^2_{\min} usando la expresión completa. El valor óptimo de χ^2 según su distribución de probabilidad es de aproximadamente 576.9.

Capítulo 8

Campo Gravitomagnético ***PRELIMINAR***

8.1. Introducción

En RG toda forma de energía y *moméntum* contribuye a modificar la geometría del espacio-tiempo a su alrededor y con ello a producir lo que llamamos campo gravitacional. Así, por ejemplo, el Sol al estar rotando, produce un campo gravitacional diferente en el sistema solar, comparado con el caso en que éste estuviese estático. Esto representa una gran diferencia respecto a la teoría de Newton de la Gravitación, donde sólo la densidad de masa de los cuerpos es fuente de campo gravitacional y por lo tanto el campo gravitacional del Sol es independiente de su rotación.

Sin embargo, y como es de esperar, en regiones con campos gravitacionales débiles los efectos predichos por RG debido al movimiento de las fuentes son en general varios órdenes de magnitud menores que los causados por su densidad de masa (o densidad de energía).

En este capítulo se estudiarán, *dentro de la aproximación de campo débil* (primer orden en la expansión en potencias de G), los efectos gravitacionales causados por el movimiento, y *en especial por la rotación*, de las fuentes. Es interesante comprobar que la descripción resulta ser muy análoga a la de los campos eléctricos y magnéticos en electrodinámica clásica, pues ciertas componentes de la perturbación de la métrica a primer orden dependerán de la densidad y del flujo de masa de la fuente, de forma similar a la que los *potenciales electromagnéticos* dependen de la densidad de carga y corriente. Debido a esto, el análogo gravitacional del campo magnético recibe en ocasiones el nombre de *campo gravitomagnético* y es de especial interés puesto que, a diferencia del “campo gravitoeléctrico”, no tiene contraparte en la teoría gravitacional newtoniana.

8.2. Caso de una distribución de materia no-relativista sin presión

En este caso, podemos usar la expresión para el tensor de energía-moméntum de polvo. En el régimen no-relativista, donde las velocidades de las partículas que constituyen el polvo son muy bajas comparadas con la velocidad de la luz, tenemos que, a primer orden en v^i/c ,

$$(T^{(0)})_{00} \approx \rho c^2, \quad (T^{(0)})_{0i} \approx -\rho c v^i, \quad (T^{(0)})_{ij} \approx 0, \quad (8.1)$$

donde ρ es la densidad (propia) de masa. De este modo (6.45) implica que

$$\bar{h}_{00}(\vec{x}, t) \approx -\frac{4G}{c^2} \int \frac{\rho(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8.2)$$

$$= \frac{4}{c^2} \phi_{\text{ret}}, \quad (8.3)$$

donde

$$\phi_{\text{ret}}(\vec{x}, t) := -G \int \frac{\rho(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8.4)$$

denota el potencial newtoniano *retardado*, ya que $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$. Además,

$$\bar{h}_{0i}(\vec{x}, t) \approx \frac{4G}{c^3} \int \frac{(\rho v^i)(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = -\frac{1}{c^2} A_{\text{ret}}^i, \quad (8.5)$$

con

$$A_{\text{ret}}^i(\vec{x}, t) := -4 \frac{G}{c} \int \frac{(\rho v^i)(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (8.6)$$

Finalmente,

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) \approx 0. \quad (8.7)$$

Usando ahora (6.46) encontramos que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2}{c^2} \phi_{\text{ret}}, \quad g_{0i} \approx -\frac{1}{c^2} A_{\text{ret}}^i, \quad g_{ij} \approx -\delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{c^2} \phi_{\text{ret}} \right). \quad (8.8)$$

Con esto, el elemento de línea adopta la forma

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2}{c^2} \phi_{\text{ret}} \right) c^2 dt^2 - \frac{2}{c} dt \vec{A}_{\text{ret}} \cdot d\vec{x} - \left(1 - \frac{2}{c^2} \phi_{\text{ret}} \right) d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (8.9)$$

Elem. de línea,
fuente
no-relativista

Note la similaridad de ϕ_{ret} y \vec{A}_{ret} con las expresiones para los potenciales escalar y vectorial retardados de la teoría electromagnética clásica, en el gauge de Lorenz. Por esto, algunos autores se refieren a ϕ como el potencial "gravitoeléctrico", mientras que a \vec{A} como el potencial "gravitomagnético". De hecho, *los efectos del campo \vec{A}_{ret} , producido por movimiento de masas, son análogos a los efectos de un campo magnético* (producido por el movimiento de cargas). Note que el factor numérico en la definición (8.6) (elegido como 4 en nuestro caso) es convencional.

En términos de estos potenciales, la condición de gauge de Lorenz (6.37) para $\bar{h}_{\mu\nu}$ se reduce, para $\mu = 0$, a

$$\frac{4}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \partial_i A^i \approx 0, \quad (8.10)$$

mientras que para $\mu = i$, obtenemos que las variaciones temporales de A^i son despreciables:

$$\frac{\partial A^i}{\partial t} \approx 0. \quad (8.11)$$

8.3. Ecuación de la geodésica para un cuerpo masivo en términos de los potenciales gravitomagnéticos.

En el capítulo 3 vimos que en RG la ecuación que gobierna el movimiento de los cuerpos en el espacio-tiempo, bajo la acción exclusiva del campo gravitacional, es la ecuación de la

geodésica que, usando un parámetro arbitrario para describir la línea de mundo, $x^\mu(\lambda)$, adopta la forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (8.12)$$

donde $f(\lambda)$ es una función que depende del parámetro elegido.

Nuestra tarea es evaluar (8.12) para el caso de una partícula masiva que se mueve en el espaciotiempo levemente curvado por la distribución de masa norelativista, descrito por (8.9), y expresarla en términos de sus potenciales gravitacionales ϕ y \vec{A} .

Para esto, consideramos los símbolos de Christoffel a primer orden en G , ya calculados en la sección 6.1.1. Específicamente, a partir de (6.14), junto con las identificaciones (8.3) y (8.5), obtenemos

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{O}(G^2), \quad (8.13)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi + \mathcal{O}(G^2) = \Gamma_{i0}^0, \quad (8.14)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2c^2} (\partial_i A^j + \partial_j A^i) - \frac{1}{c^3} \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{O}(G^2), \quad (8.15)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \partial_i \phi + \mathcal{O}(G^2), \quad (8.16)$$

$$\Gamma_{0j}^i = -\frac{1}{2c^2} (\partial_i A^j - \partial_j A^i) - \frac{1}{c^3} \delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{O}(G^2) = \Gamma_{j0}^i, \quad (8.17)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{c^2} (\delta_{jk} \partial_i \phi - \delta_{ij} \partial_k \phi - \delta_{ik} \partial_j \phi) + \mathcal{O}(G^2), \quad (8.18)$$

donde en (8.16) hemos usado el hecho que $\partial A^i / \partial t$ es despreciable, dada nuestra aproximación, ver (8.11).

Debido a que las coordenadas usadas son “cuasi-inerciales” es conveniente parametrizar las geodésicas usando la coordenada temporal t . Así, eligiendo $\lambda \stackrel{!}{=} t$ en (8.12), encontramos que la componente $\mu = 0$ implica

$$\frac{d^2x^0}{dt^2} + \Gamma_{00}^0 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + 2 \Gamma_{0i}^0 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \Gamma_{ij}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = f(t) \frac{dx^0}{dt}. \quad (8.19)$$

Como $x^0 = ct$, se tiene que $dx^0/dt = c$ y por lo tanto $d^2x^0/dt^2 = 0$. Si reemplazamos esto último en (8.19) y además definimos la velocidad de la partícula $\vec{v}(t)$ en la forma usual,

$$v^i(t) := \frac{dx^i}{dt}(t), \quad (8.20)$$

encontramos una expresión para la función $f(t)$ en términos de los símbolos de Christoffel y la velocidad de la partícula:

$$f(t) = c \Gamma_{00}^0 + 2v^i \Gamma_{0i}^0 + \frac{1}{c} v^i v^j \Gamma_{ij}^0. \quad (8.21)$$

Además, si evaluamos la ecuación (8.12) para las componentes espaciales $\mu = i$, tendremos que

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + 2 \Gamma_{0j}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = f(t) \frac{dx^i}{dt}. \quad (8.22)$$

Por lo tanto, luego de reemplazar la función $f(t)$ encontrada en (8.21), obtenemos

$$\frac{dv^i}{dt} = -c^2 \Gamma_{00}^i - 2cv^j \Gamma_{0j}^i - v^j v^k \Gamma_{jk}^i + cv^i \Gamma_{00}^0 + 2v^i v^j \Gamma_{0j}^0 + \frac{1}{c} v^i v^j v^k \Gamma_{jk}^0, \quad (8.23)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden para $\vec{v}(t)$, dependiente de una combinación de productos de la velocidad del cuerpo de prueba con las componentes de los símbolos de Christoffel.

Finalmente, sustituyendo (8.13)-(8.18) en (8.23), encontramos explícitamente la ecuación de movimiento a primer orden en G , para una partícula masiva en términos su velocidad y de los potenciales gravitacionales:

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} = & -\partial_i\phi + \frac{v^j}{c}(\partial_iA^j - \partial_jA^i) + 3\frac{v^i}{c}\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \\ & + 4\frac{v^i}{c}\frac{v^j}{c}\partial_j\phi - \frac{v^2}{c^2}\partial_i\phi - \frac{v^i}{c}\frac{v^j}{c}\frac{v^k}{c}\partial_jA^k - \frac{v^i}{c}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathcal{O}(G^2). \end{aligned} \quad (8.24)$$

8.3.1. Ecuación del movimiento de una partícula ligada no-relativista y definición de los campos gravitomagnéticos

Para aplicar la ecuación del movimiento (8.24) a una **partícula ligada gravitacionalmente**, como por ejemplo la Tierra en torno al Sol o un satélite en torno a la Tierra, es necesario para la consistencia de nuestra aproximación a primer orden en G , que consideremos el hecho que en este tipo de sistemas, la velocidad con que orbita la partícula *no es independiente de G* .

Tal como puede verificarse con el resumen detallado en el apéndice A, un cuerpo siguiendo una órbita kepleriana ligada se mueve con una rapidez \bar{v} , cuyo orden de magnitud está determinado por

$$\bar{v}^2 \sim \frac{GM}{\bar{r}}, \quad (8.25)$$

donde \bar{r} es la distancia característica del movimiento del cuerpo respecto al centro de fuerzas. Así, las órbitas newtonianas *ligadas* satisfacen que el módulo cuadrado de la velocidad de la partícula depende linealmente de G .

Como nuestro análisis de campo débil a primer orden en G no es más que una corrección en el orden más bajo a la teoría de Newton, al incluir los efectos gravitomagnéticos las órbitas de cuerpos ligados serán levemente distintas a las keplerianas, pero el orden de magnitud seguirá siendo es mismo, es decir, (8.25). De aquí concluimos finalmente que *la velocidad de una partícula ligada es de orden semi-entero en G* , es decir,

$$|v^i| \sim G^{1/2}. \quad (8.26)$$

Este resultado es relevante para la consistencia de nuestro cálculo perturbativo, que ha despreciado todo término cuadrático (y de orden superior) en G . Por lo tanto, no tiene sentido considerar todos los términos en (8.24) en el caso de una partícula ligada, ya que algunos términos serán de orden mayor que cuadrático en G . Más detalladamente, vemos que el primer término en la primera línea de (8.24) es de orden G^1 mientras que aquellos lineales en la velocidad son de orden $G^{3/2}$. Finalmente, los términos de la segunda línea de (8.24) son todos al menos de orden G^2 , y deben por lo tanto ser despreciados. Así obtenemos que para una partícula ligada

$$\frac{dv^i}{dt} = -\partial_i\phi + \frac{v^j}{c}(\partial_iA^j - \partial_jA^i) + 3\frac{v^i}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + O(G^2). \quad (8.27)$$

Podemos expresar el segundo término del lado derecho de (8.27) como

$$\frac{v^j}{c} (\partial_i A^j - \partial_j A^i) = \epsilon_{kij} \epsilon_{kml} \frac{v^j}{c} \partial_m A^l, \quad (8.28)$$

$$= \epsilon_{ijk} \frac{v^j}{c} \epsilon_{kml} \partial_m A^l, \quad (8.29)$$

$$= \left[\frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]^i. \quad (8.30)$$

Luego, reemplazando (8.30) en (8.27), obtenemos en notación vectorial,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + 3 \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + O(G^2). \quad (8.31)$$

Se advierte el gran parecido de (8.31) con la ecuación del movimiento en electrodinámica clásica, es decir, con la determinada por la fuerza de Lorentz para una partícula no-relativista de masa m y carga q , escrita en términos de los potenciales electromagnéticos:

$$\frac{m}{q} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_{\text{em}}}{q} = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{em}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{em}}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{em}}). \quad (8.32)$$

En virtud de esta analogía, la ecuación del movimiento (8.31) nos motiva a definir el *campo gravitoeléctrico* \vec{g} y el *campo gravitomagnético* \vec{H} a partir de los potenciales:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{x}, t) := -\vec{\nabla}\phi,} \quad (8.33)$$

$$\boxed{\vec{H}(\vec{x}, t) := \vec{\nabla} \times \vec{A}.} \quad (8.34)$$

Debido a que \vec{A} satisface $\partial\vec{A}/\partial t \approx 0$, entonces de (8.34) se tiene que \vec{H} también es un campo estacionario dentro del grado de precisión considerado, en el sentido que

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \approx 0. \quad (8.35)$$

Notemos que el campo gravitoeléctrico en (8.33) tiene la misma forma que el campo electroestático, con la diferencia de que en este caso, \vec{g} depende en general del tiempo, pues ϕ no es necesariamente estacionario.

Con las definiciones (8.33) y (8.34), la ecuación del movimiento (8.31) difiere en forma de la ecuación de Lorentz no-relativista, sólo en el último término:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} + 3 \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + O(G^2). \quad (8.36)$$

Esta ecuación del movimiento muestra la gran analogía existente entre esta aproximación de RG a orden $G^{3/2}$ y la electrodinámica clásica, pues no sólo los campos son análogos en forma, sino que también en la manera en que éstos modifican el estado de movimiento de partículas de prueba no-relativistas.

Si además nos restringuimos al caso de *fuentes estacionarias*, donde se cumple idénticamente que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 = \frac{\partial A^i}{\partial t}, \quad (8.37)$$

de modo que lo tanto \vec{g} y \vec{H} serán también campos estacionarios. Entonces, el último término en (8.36) se anula, y la ecuación del movimiento se reduce a

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} + O(G^2),} \quad (8.38)$$

que es válida para describir el movimiento de una partícula masiva, ligada y no-relativista bajo la acción de los campos gravitoeléctrico \vec{g} y gravitomagnético \vec{H} estacionarios, a orden $G^{3/2}$.

8.3.2. Forma de Maxwell de las Ecuaciones del campo gravitacional*

Con el fin de continuar explorando la analogía entre los campos electromagnéticos usuales y los gravitacionales definidos en esta aproximación de RG, calculemos la divergencia y el rotor de los campos \vec{g} y \vec{H} , a partir de sus definiciones, para encontrar un set de ecuaciones análogas a las ecuaciones de Maxwell.

Primero, al calcular directamente el rotor de la ecuación (8.33) y la divergencia de (8.34), vemos claramente que los campos \vec{g} y \vec{H} satisfacen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0, \quad (8.39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0. \quad (8.40)$$

Por otro lado, para calcular el rotor de \vec{H} , usamos

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (8.41)$$

de donde vemos que necesitamos calcular $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ y $\nabla^2 \vec{A}$.

Escribiendo las ecuaciones de Einstein linealizadas (6.43) para la componente \bar{h}_{0i} , obtenemos

$$\square \bar{h}_{0i} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}^{(0)}. \quad (8.42)$$

Si reemplazamos en (8.42) las expresiones para \bar{h}_{0i} y $T_{0i}^{(0)}$, dadas en (8.5) y (8.1), respectivamente, podemos encontrar una ecuación para $\nabla^2 A^i$,

$$\nabla^2 A^i = \frac{16\pi G}{c} \rho v^i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} \right). \quad (8.43)$$

Como $\partial A^i / \partial t \approx 0$, entonces el último término en (8.43) es despreciado bajo nuestra aproximación y entonces,

$$\nabla^2 A^i = \frac{16\pi G}{c} \rho v^i. \quad (8.44)$$

Adicionalmente, del gauge de Lorenz (8.10), vemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{4}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (8.45)$$

Finalmente, sustituyendo (8.44) y (8.45) en (8.41), obtenemos una expresión para $\vec{\nabla} \times \vec{H}$, análoga a la ecuación de Ampere-Maxwell en electrodinámica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4 \left(-\frac{4\pi}{c} G \rho \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right). \quad (8.46)$$

Para completar este análisis, calculamos la divergencia de \vec{g} . De la definición en (8.33), encontramos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\nabla^2 \phi. \quad (8.47)$$

Análogamente al caso anterior, a partir de la ecuación de Einstein linealizada (6.43) para \bar{h}_{00} , además de (8.3) y (8.1), obtenemos

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (8.48)$$

Notemos, sin embargo, que el último término en (8.48) es nulo dentro de nuestra aproximación, pues al calcular la derivada parcial respecto al tiempo de (8.45), se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{4}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (8.49)$$

y como $\partial \vec{A} / \partial t \approx \vec{0}$, entonces

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \approx 0. \quad (8.50)$$

Así, reemplazando (8.48) y (8.50) en (8.47), encontramos que la divergencia de \vec{g} es dada simplemente por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (8.51)$$

en forma análoga a la ley de Gauss para el campo eléctrico.

Ahora que hemos calculado tanto la divergencia como el rotor de los campos \vec{g} y \vec{H} en términos de sus fuentes, la densidad de masa $\rho(\vec{x}, t)$ y la densidad de corriente de masa $\vec{J}_m = \rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)$, podemos afirmar que dentro de nuestra aproximación de RG para campo gravitacional débil y fuentes no-relativistas y sin presión, hemos encontrado un conjunto de cuatro ecuaciones que describen el campo “gravito-electromagnético”, de la misma forma que las ecuaciones de Maxwell lo hacen para el campo electromagnético, dadas en resumen por,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} \approx -4\pi G\rho, \quad (8.52)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{4}\vec{H} \approx 0, \quad (8.53)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} \approx 0, \quad (8.54)$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{4}\vec{H} \approx -\frac{4\pi}{c}G\rho\vec{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}. \quad (8.55)$$

Comparando con las ecuaciones de Maxwell, vemos que el término con $\partial \vec{H} / \partial t$ está ausente en la ecuación análoga a la ley de Faraday, debido que en el grado de aproximación considerado las variaciones temporales de \vec{H} son despreciables. Podríamos hacer que este término apareciera, al incluir términos de orden superior, pero en ese caso también aparecerían términos extra “no-maxwellianos”. El factor 4 que aparece en las ecuaciones puede ser absorbido en la definición de \vec{H} o bien de \vec{A} , pero tarde o temprano vuelve a aparecer en otra ecuación.

8.4. Campo gravitomagnético producido por una distribución de masa esféricamente simétrica y estacionaria que rota lentamente en torno a un eje fijo.

Consideramos el caso simple de una distribución de masa *esféricamente simétrica* con densidad de masa $\rho = \rho(r)$, que rota con un campo de velocidades *estacionario* $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ en torno a un eje con dirección fija $\hat{\omega}$. Ver figura 8.1.

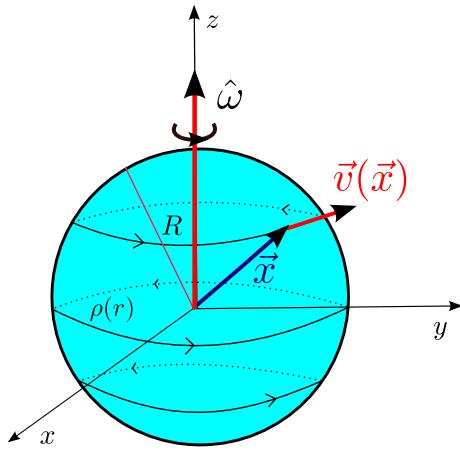


Figura 8.1: Modelo de fuente de campo gravitacional: Una distribución de masa esféricamente simétrica que rota, uniforme- y lentamente, en torno a un eje fijo.

El campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x})$ es entonces

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega}(r) \times \vec{x}, \quad (8.56)$$

donde $\vec{\omega} = \omega(r)\hat{\omega}$ es la velocidad angular de la distribución con respecto a la dirección fija $\hat{\omega}$. Suponemos que la rapidez angular $\omega(r)$ sólo depende de la distancia radial r . El vector \vec{x} puede ser escrito como

$$\vec{x} = r\hat{r} = r(\hat{r}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta), \quad (8.57)$$

con $\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$. Además, podemos elegir la orientación del sistema coordenado de modo que el eje de rotación sea el eje z , es decir, $\hat{\omega} = \hat{z}$, con lo que $\vec{v}(\vec{x})$ se reduce a

$$\vec{v}(\vec{x}) = \omega(r)r(\hat{z} \times \hat{r}) \quad (8.58)$$

$$= \omega(r)r\sin\theta(\hat{z} \times \hat{r}) \quad (8.59)$$

$$= \omega(r)r\sin\theta\hat{\varphi}, \quad (8.60)$$

donde $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{r} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$.

Ahora que ya tenemos una expresión general para el campo de velocidades de la distribución, calculemos su moméntum angular total \vec{J} , dado por

$$\vec{J} = \int_V \vec{x} \times (\rho \vec{v}) d^3x. \quad (8.61)$$

Reemplazando (8.60) en (8.61), podemos escribir

$$\vec{J} = \int_V \rho(r)\omega(r)\sin\theta r^2(\hat{r} \times \hat{\varphi})d^3x \quad (8.62)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr \rho(r)\omega(r)\sin^2\theta r^4 (\sin\theta\hat{z} - \cos\theta\hat{r}) \quad (8.63)$$

$$= \hat{z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^R dr \rho(r)\omega(r)r^4 - \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{r} \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta \int_0^R dr \rho(r)\omega(r)r^4. \quad (8.64)$$

Si además reemplazamos las integrales $\int_0^{2\pi} \hat{r} d\varphi = \vec{0}$, $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 4/3$ en (8.64), obtenemos

$$\boxed{\vec{J} = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r)\vec{\omega}(r)r^4 dr.} \quad (8.65)$$

Calculemos ahora, a partir de la definición (8.6), el potencial gravitomagnético \vec{A} que produce esta distribución de masa:

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4G}{c} \int_V \frac{\rho(r') \vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8.66)$$

$$= -\frac{4G}{c} \int_V \frac{\rho(r') \vec{\omega}(r') \times \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8.67)$$

$$= -\frac{4G}{c} \int_0^R dr' r'^2 \rho(r') \vec{\omega}(r') \times \left[\int_{\Omega} \frac{\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\Omega' \right], \quad (8.68)$$

La integral angular en (8.68) es conocida, y su valor es

$$\int_{\Omega} \frac{\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\Omega' = \frac{4\pi}{3} \frac{r'^2}{r^3} \vec{x}, \quad r' < r. \quad (8.69)$$

Reemplazando (8.69) en (8.68), obtenemos

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{16\pi G}{3cr^3} \int_0^R dr' r'^4 \rho(r') \vec{\omega}(r') \times \vec{x} \quad (8.70)$$

$$= \frac{16\pi G}{3cr^3} \vec{x} \times \int_0^R dr' r'^4 \rho(r') \vec{\omega}(r'). \quad (8.71)$$

La integral en (8.71) es proporcional al moméntum angular total \vec{J} de la distribución, dado por (8.65). De este modo encontramos una expresión para el potencial gravitomagnético $\vec{A}(\vec{x})$ en términos del moméntum angular \vec{J} :

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{2G}{c} \frac{\vec{J} \times \vec{x}}{r^3}, \quad r > R.} \quad (8.72)$$

Note que esta expresión tiene la misma forma (salvo factores que involucran las constantes gravitacionales y electromagnéticas) que el potencial vectorial electromagnético producido por un *dipolo magnético* (ideal) con momento dipolar magnético $\vec{\mu}$.

Calculando el rotor de (8.72) obtenemos la expresión final para el campo gravitomagnético estacionario, producido por la esfera rotante con moméntum angular constante \vec{J} :

$$\boxed{\vec{H}(\vec{x}) = -\frac{2G}{c} \frac{3(\vec{J} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{J}}{r^3}, \quad r > R.} \quad (8.73)$$

Por otro lado, el potencial gravitoeléctrico estacionario producido por la distribución de masa continua siendo el newtoniano, es decir,

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r}, \quad r > R,} \quad (8.74)$$

donde M es la masa total de la distribución definida como es usual por,

$$M := \int_V \rho(\vec{x}) d^3x, \quad (8.75)$$

Finalmente, el campo gravitoeléctrico, de acuerdo a (8.33), es

$$\boxed{\vec{g}(\vec{x}) = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad r > R.} \quad (8.76)$$

Pensando en la analogía con la electrodinámica, este resultado es idéntico en forma al campo electroestático producido por una distribución de carga esféricamente simétrica con carga total Q .

En la figura 8.2 podemos ver un esquema de las líneas de campo gravitoeléctrico y gravitomagnético que produce la distribución de masa rotante. Esta fuente de campo se caracteriza completamente por su moméntum angular total \vec{J} y por su masa total M .

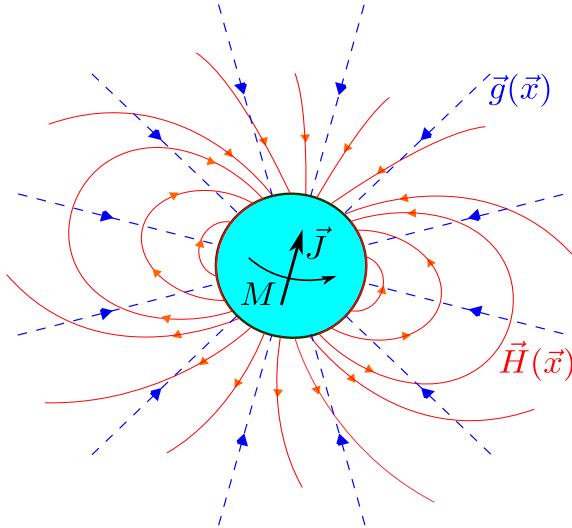


Figura 8.2: Líneas de campo gravitoeléctrico y gravitomagnético, producidas por una distribución esféricamente simétrica de masa total M y que rota con moméntum angular total constante \vec{J} .

Note que las líneas de campo gravitomagnético mostradas en 8.2 tienen sentido opuesto al del campo magnético generado por una distribución rotante de carga (positiva). Esto se suma al conocido hecho que las líneas de campo gravitoeléctrico tienen sentido opuesto a las del campo eléctrico producido por cargas positivas.

Para finalizar el análisis de esta sección, comparemos los órdenes de magnitud de los campos \vec{g} y \vec{H} , producidos por la esfera rotante. De las expresiones (8.73) y (8.76), podemos ver que estos campos son del orden,

$$g \sim \frac{GM}{R^2}, \quad H \sim \frac{GJ}{cR^3}. \quad (8.77)$$

Para estimar el orden de magnitud de J podemos hacer $J \sim I\omega \sim MvR$, con lo que obtenemos

$$\frac{H}{g} \sim \frac{v}{c} \ll 1. \quad (8.78)$$

Vemos que, debido a las velocidades no-relativistas de la fuente, el campo gravitomagnético producido es mucho menor en magnitud que el correspondiente campo gravitoeléctrico. Por ejemplo, para el Sol y la Tierra $v/c \sim 10^{-6}$, por lo que en estos casos \vec{H} es al menos seis órdenes de magnitud menor que \vec{g} .

8.4.1. Geometría del espaciotiempo fuera de la distribución de masa esférica rotante

Retornando a la descripción geométrica de la teoría, podemos determinar la métrica y el elemento de línea del espaciotiempo fuera de la distribución esférica rotante, en términos de los parámetros que caracterizan a la fuente: su masa total M y su moméntum angular total \vec{J} .

El eje fijo de rotación de la distribución rompe la simetría esférica que tendría el espacio-tiempo si la fuente estuviese estática. Sin embargo, persiste una simetría axial remanente en torno a la dirección definida por el eje de rotación del cuerpo. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir un sistema coordenado en que el eje de rotación del cuerpo coincida con el eje z , de tal forma que el moméntum angular de la distribución se pueda expresar en la forma,

$$\vec{J} = J\hat{z}. \quad (8.79)$$

En este caso, se tiene que los potenciales ϕ y \vec{A} toman una forma más simple,

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (8.80)$$

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = -\frac{2GJ}{c} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{2GJ}{c} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\varphi}. \quad (8.81)$$

Si reemplazamos ahora (8.81) en (8.9), obtenemos el elemento de línea:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) d\vec{x}^2 + \frac{4GJ}{c^3 r^2} \sin \theta (\hat{\varphi} \cdot d\vec{x}) cdt + \mathcal{O}(G^2). \quad (8.82)$$

En coordenadas esféricas, sabemos que $\hat{\varphi} \cdot d\vec{x} = r \sin \theta d\varphi$, y por lo tanto la expresión a primer orden en G para el elemento de línea fuera de la distribución esférica rotante, en coordenadas esféricas y en términos de M y J , resulta ser

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] + \frac{4GJ}{c^3 r} \sin^2 \theta d\varphi (cdt) + \mathcal{O}(G^2).$$

(8.83)

Es posible verificar que la solución exacta del agujero negro rotante de Kerr en coordenadas isotrópicas, se reduce a (8.83) en el límite de campo débil. Si adicionalmente hacemos $J = 0$ recobramos la solución de Schwarzschild, a primer orden en G , también en coordenadas isotrópicas.

8.5. Estudio de órbitas y resolución perturbativa de la ecuación del movimiento para una partícula ligada y no-relativista en el espacio-tiempo fuera de una esfera rotante.

8.6. Precesión Relativista de Giróscopos

Una de las formas de testear las predicciones de RG respecto al campo gravitomagnético, es describiendo los efectos que la presencia de éste campo produce sobre *pequeños cuerpos de prueba con movimiento interno de rotación* ("spin"), es decir, sobre lo que llamaremos un *giróscopo*.

8.6.1. Giróscopos y 4-vector de spin

Modelamos un giróscopo como un pequeño cuerpo caracterizado no sólo por su posición $\vec{x}(t)$ y su velocidad $\vec{v}(t)$, sino que además por un *vector de moméntum angular de rotación propia o spin* $\vec{S}(t)$, que describe la rotación en torno a su propio eje. En la práctica se construyen giróscopos mecánicos y ópticos (ver [22] para más detalles.)

La propiedad básica de un giróscopo, es que *en ausencia de fuerzas y torques externos ellos mantienen constante la magnitud y dirección de su spin* \vec{S} , respecto a un SRI, es decir,

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{0}. \quad (8.84)$$

Como sabemos, para describir el movimiento de un cuerpo en la Teoría Especial de la Relatividad, es útil parametrizar las cantidades usando el tiempo propio τ y definir la 4-posición del objeto $x^\mu(\tau)$, además de su 4-velocidad $u^\mu(\tau)$. Por otro lado, para describir el vector de spin \vec{S} , definimos un 4-vector de spin $S^\mu(\tau)$, tal que en el SRI comóvil con el giróscopo sólo tiene componentes espaciales:

$$S^\mu \stackrel{*}{=} (0, \vec{S}). \quad (8.85)$$

Puesto que en este SRI la 4-velocidad del cuerpo es dada por $u^\mu \stackrel{*}{=} (u^0, \vec{0})$, entonces se tiene $S^\mu u_\mu \stackrel{*}{=} 0$. Como consecuencia S^μ es ortogonal a u^μ en todo SRI, ya que $S^\mu u_\mu$ es un escalar:

$$S^\mu u_\mu = 0. \quad (8.86)$$

Además, como la 4-velocidad del giróscopo es un 4-vector tipo tiempo, es decir $u^\mu u_\mu > 0$, entonces de (8.86) se desprende que S^μ es siempre un vector tipo espacio, es decir, $S^\mu S_\mu < 0$.

Así, en Relatividad Especial, un giróscopo será descrito por su 4-posición $x^\mu(\tau)$, su 4-velocidad $u^\mu(\tau)$ y su vector de spin $S^\mu(\tau)$, tal como se ilustra en la figura 8.3. La ecuación que describe la dinámica de S^μ , en ausencia de fuerzas y torques externos, se debe reducir a (8.84), y es dada en cualquier SRI por

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 0. \quad (8.87)$$

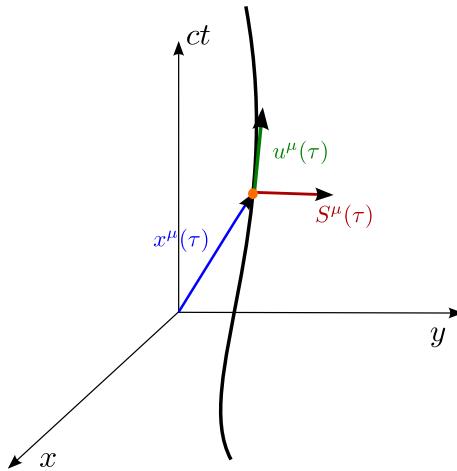


Figura 8.3: Un giróscopo.

8.6.2. Determinación de la velocidad angular de precesión del spin de un giróscopo moviéndose en una geodésica bajo la acción del campo gravitomagnético.

Consideremos un giróscopo que se mueve en el espaciotiempo fuera de una fuente de campo gravitacional, con 4-velocidad

$$u^\mu(\tau) := \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (8.88)$$

Requerimos una ecuación de evolución para el vector S^μ en un campo gravitacional no nulo. Para encontrarla, hacemos uso del principio de equivalencia de Einstein. En ausencia de gravedad (y además de fuerzas y torques netos de otras fuerzas), la dirección y magnitud del vector de spin es constante respecto a un SRI. Por lo tanto, lo mismo debe ocurrir, de acuerdo a este principio, en un SRLI. Si \bar{x}^μ son las coordenadas geodésicas asociadas a un SRLI, entonces (ver (8.87)):

$$\frac{d\bar{S}^\mu}{d\tau} \stackrel{*}{=} 0. \quad (8.89)$$

En coordenadas arbitrarias, tendremos

$$\boxed{\frac{DS^\mu}{D\tau} = 0,} \quad (8.90)$$

donde hemos introducido la *derivada covariante a lo largo de la línea de mundo* $x^\mu(\tau)$:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} := \frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} S^\nu u^\lambda. \quad (8.91)$$

Claramente, la ecuación (8.90) se reduce a (8.89) en coordenadas geodésicas, ya que las componentes de la conexión se anulan¹. Además, (8.91) es un vector bajo TGC's. Esto puede verificarse fácilmente notando que podemos escribir

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} := u^\nu \nabla_\nu S^\mu, \quad (8.92)$$

que es la generalización covariante de la derivada respecto al tiempo propio τ (que mide un observador comóvil con el giróscopo) a lo largo de la trayectoria $x^\mu(\tau)$:

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = u^\nu \partial_\nu S^\mu. \quad (8.93)$$

Si contraemos la ecuación (8.90) con S_μ , completamos la derivada covariante total, parametrizada con respecto a τ , y usamos el hecho que para un escalar la derivada covariante coincide con la derivada parcial, se encuentra que $S^\mu S_\mu$ es una *constante del movimiento*, es decir,

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} (S^\mu S_\mu) = 0.} \quad (8.94)$$

En particular, consideremos el caso de un giróscopo que orbita (dentro de un satélite) una fuente de campo gravitacional (la Tierra, por ejemplo). Supongamos que el satélite está construido de tal forma que es capaz de proteger al giróscopo de toda influencia externa no-gravitacional, haciendo que su 4-aceleración a^μ sea nula y por consiguiente el giróscopo se mueva en una geodésica bajo la acción del campo gravitacional,

$$a^\mu(\tau) := \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (8.95)$$

Bajo estas consideraciones, las ecuaciones (8.90) y (8.94) son válidas para describir la dinámica del 4-vector de spin $S^\mu(\tau)$.

En la figura 8.4 se muestra gráficamente el problema que queremos analizar para el caso particular de un giróscopo dentro de un satélite que orbita la Tierra, como es el caso del proyecto GPB.

¹Note que este resultado es válido para *todo evento sobre la línea de mundo* $x^\mu(\tau)$.

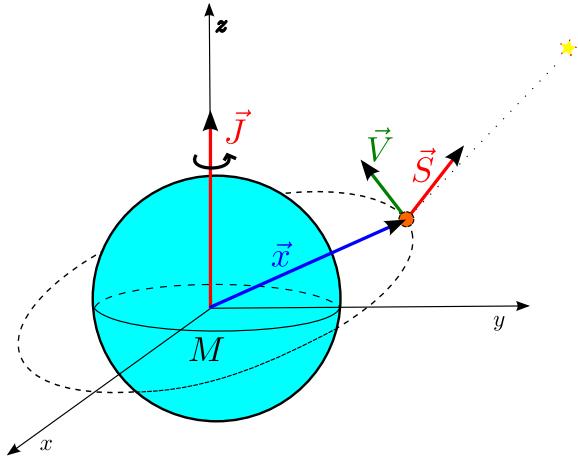


Figura 8.4: Giróscopo que describe una geodésica en torno a la Tierra.

Ahora expresamos las derivadas en (8.86), (8.90) con (8.91) y (8.94) en términos de la coordenada temporal t del observador cuasi-inercial, con lo que obtenemos

$$\frac{dS^\mu}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu S^\nu \frac{dx^\lambda}{dt} = 0, \quad (8.96)$$

$$g_{\mu\nu} S^\mu S^\nu = \text{cte}, \quad (8.97)$$

$$g_{\mu\nu} S^\mu \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (8.98)$$

El paso siguiente es calcular las ecuaciones (8.96)-(8.98), consistentemente hasta orden $G^{3/2}$, reescribiéndolas en términos de la velocidad $v^i = dx^i/dt$ del giróscopo, el vector de spin S^i (componentes espaciales) y los potenciales ϕ y A^i .

Primero, si evaluamos (8.96) para $\mu = i$ y notamos que $dx^0/dt = c$, encontramos

$$\frac{dS^i}{dt} + c\Gamma_{00}^i S^0 + \Gamma_{0j}^i S^0 v^j + c\Gamma_{j0}^i S^j + \Gamma_{jk}^i S^j v^k = 0. \quad (8.99)$$

Luego, si reemplazamos en (8.99), los valores de los símbolos de Christoffel dados en (8.13)-(8.18), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dS^i}{dt} = & -\frac{1}{c}(\partial_i \phi) S^0 + \frac{1}{2c^2}(\partial_i A^j - \partial_j A^i) S^0 v^j + \frac{1}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t} S^0 v^i + \frac{1}{2c}(\partial_i A^j - \partial_j A^i) S^j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} S^i \\ & - \frac{1}{c^2}(\partial_i \phi) S^j v^j + \frac{1}{c^2} v^j (\partial_j \phi) S^i + \frac{1}{c^2} (\partial_j \phi) S^j v^i + \mathcal{O}(G^2). \end{aligned} \quad (8.100)$$

Necesitamos escribir S^0 en términos de las demás cantidades, para lo cual la ecuación (8.98) nos será útil:

$$S^0 + \frac{2\phi}{c^2} S^0 - \frac{1}{c^3} A^i v^i S^0 - \frac{1}{c^2} A^i S^i - \frac{1}{c} S^i v^i + \frac{2\phi}{c^3} S^i v^i + \mathcal{O}(G^2) = 0. \quad (8.101)$$

Podemos despejar S^0 de (8.101). Notamos sin embargo, que para ser reemplazada en (8.100) sólo requerimos conocer S^0 a orden 0 en potencias de G (ya que siempre aparece multiplicada por términos de orden 1). Por lo tanto, nos basta con escribir:

$$S^0 = \frac{1}{c} v^i S^i + \mathcal{O}(G). \quad (8.102)$$

Finalmente, si reemplazamos (8.102) en (8.100), obtenemos dos ecuaciones en que sólo aparecen S^i , v^i , ϕ y A^i , dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dS^i}{dt} = & \frac{1}{2c} (\partial_i A^j - \partial_j A^i) S^j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} S^i \\ & - \frac{2}{c^2} (\partial_i \phi) S^j v^j + \frac{1}{c^2} (\partial_j \phi) v^j S^i + \frac{1}{c^2} (\partial_j \phi) S^j v^i + \mathcal{O}(G^2).\end{aligned}\quad (8.103)$$

En el caso de un campo estacionario, esta ecuación puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\frac{dS^i}{dt} = & \frac{1}{2c} \epsilon_{ijk} S^j (\epsilon_{klm} \partial_l A^m) + \frac{3}{2c^2} \epsilon_{ikj} S^k (\epsilon_{jlm} v^l \partial_m \phi) \\ & + \frac{1}{2c^2} [2(\partial_j \phi) v^j S^i - (\partial_i \phi) v^j S^j - (\partial_j \phi) v^i S^j] + \mathcal{O}(G^2),\end{aligned}\quad (8.104)$$

y en notación vectorial,

$$\boxed{\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[-\frac{1}{2c} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{3}{2c^2} (\vec{v} \times \vec{\nabla} \phi) \right] \times \vec{S} + \frac{1}{2c^2} \left[2\vec{S}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) - (\vec{\nabla} \phi) \vec{v} \cdot \vec{S} - (\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{v} \right] + \mathcal{O}(G^2).}\quad (8.105)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S} + \dots + \mathcal{O}(G^2),\quad (8.106)$$

donde hemos definido,

$$\vec{\Omega} := \vec{\Omega}_{\text{GEO}} + \vec{\Omega}_{\text{LT}},\quad (8.107)$$

con $\vec{\Omega}_{\text{GEO}}$ la velocidad angular de precesión geodésica, dada por

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\text{GEO}} := \frac{3}{2c^2} (\vec{v} \times \vec{g}),}\quad (8.108)$$

y $\vec{\Omega}_{\text{LT}}$ la velocidad angular de precesión de Lense-Thirring,

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\text{LT}} := -\frac{1}{2c} \vec{H},}\quad (8.109)$$

en honor a los dos científicos que en 1918 predijeron este efecto conocido como “frame-dragging”.

8.6.3. Predicción para un giróscopo que orbita la Tierra y que intenta medir el GPB

Evaluemos las expresiones (8.108) y (8.109) para el caso de un giróscopo que orbita la Tierra, con lo que podremos obtener la famosa predicción que recientemente midió con éxito el GPB [44]. Usaremos los campos gravitoeléctrico y gravitomagnético, de una masa esféricamente simétrica rotando respecto a un eje fijo, calculados en (8.73) y (8.76), de modo que en este caso

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r},\quad (8.110)$$

$$\vec{H}(r) = -\frac{2GJ_T}{cr^3} \left[3(\hat{J}_T \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{J}_T \right],\quad (8.111)$$

donde M_T es la masa total de la Tierra, J_T su momento angular total y \hat{J}_T el vector unitario la dirección de rotación.

Por simplicidad, supongamos que el giróscopo gira en una *órbita circular* en torno a la Tierra, por lo que su velocidad se puede escribir en forma compacta por

$$\vec{v} = \left(\frac{M_T G}{R} \right)^{1/2} \hat{h} \times \hat{r}, \quad (8.112)$$

donde R es el radio de la órbita y \hat{h} su vector unitario normal². Ver la figura 8.5. Luego, reemplazando (8.110), (8.111) y (8.112) en (8.108) y (8.109), obtenemos

$$\vec{\Omega}_{\text{GEO}} = \frac{3}{2c^2} \frac{M_T^{3/2} G^{3/2}}{R^{5/2}} \left[\hat{h} - (\hat{h} \cdot \hat{r}) \hat{r} \right], \quad (8.113)$$

$$\vec{\Omega}_{\text{LT}} = \frac{G J_T}{c^2 R^3} \left[3(\hat{J}_T \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{J}_T \right]. \quad (8.114)$$

Consideremos además el caso particular en que el giróscopo se mueve *en una órbita polar alrededor de la Tierra*, es decir, tal que

$$\hat{h} \cdot \hat{J}_T = 0, \quad (8.115)$$

como se muestra en la figura 8.5.

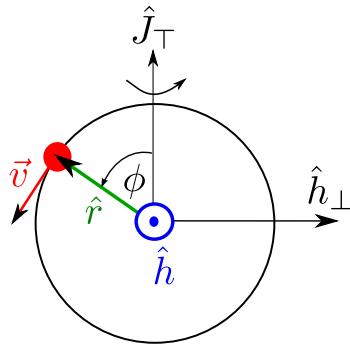


Figura 8.5: Giróscopo en una órbita circular polar en torno a la Tierra.

De la figura vemos que podemos parametrizar la órbita por

$$\hat{r}(\phi) = \hat{J}_T \cos \phi - \hat{h}_\perp \sin \phi, \quad (8.116)$$

donde \hat{h}_\perp es un vector unitario perpendicular a \hat{h} y \hat{J}_T . Si reemplazamos (8.116) en (8.113) y (8.114), y luego promediamos a lo largo de una órbita completa del giróscopo, es decir, $\phi \in [0, 2\pi]$, entonces las *velocidades angulares promedio* de precesión por revolución, quedan dadas finalmente por

$$\langle \vec{\Omega}_{\text{GEO}} \rangle = \frac{3G^{3/2}}{2c^2} \frac{M_T^{3/2}}{R^{5/2}} \hat{h},$$

$$\langle \vec{\Omega}_{\text{LT}} \rangle = \frac{G}{2c^2} \frac{J_T}{R^3} \hat{J}_T.$$

(8.117)

Las expresiones (8.117) son las predicciones de RG para el caso de un giróscopo orbitando una masa rotante en una órbita circular polar. Para obtener un resultado numérico, consideramos a la Tierra como una esfera de radio $R_T = 6.371 \times 10^6$ m (**diferencia con tabla en apéndice!***) y distribución de masa esféricamente simétrica de masa total $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg. Sea la altura

²Esta órbita circular es una geodésica a primer orden en G . Ver por ejemplo (3.141).

de la órbita polar circular de 642 km sobre la superficie de la Tierra, es decir, $h = 6.42 \times 10^5$ m, por lo que se tiene $R = R_T + h = 7.013 \times 10^6$ m. Para calcular el moméntum angular total de rotación de la Tierra, usamos su definición en (8.65), con lo que obtenemos

$$J_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \omega, \quad (8.118)$$

y finalmente considerando que el periodo de rotación de la Tierra es $T = 23.9345$ hr, se tiene $\omega = 2\pi/T = 7.2919 \times 10^{-5}$ rad/s y por consiguiente $J_T = 7.0679 \times 10^{33}$ kg m²/s. Luego, evaluando todos los datos en (8.117), y considerando $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m²/kg², las predicciones numéricas de RG para la precesión del giróscopo que confirmó el satélite GPB son:

$$\langle \vec{\Omega}_{\text{GEO}} \rangle = 6.6 \frac{\text{sec}}{\text{yr}} \hat{h}, \quad (8.119)$$

$$\langle \vec{\Omega}_{\text{LT}} \rangle = 0.049 \frac{\text{sec}}{\text{yr}} \hat{J}_T. \quad (8.120)$$

***No sé por qué la precesión de Lense-Thirring difiere en 0.005 sec/yr con respecto al resultado de la figura 7.6 y en 0.007 sec/yr con respecto al paper oficial del GPB, que es $\langle \Omega_{\text{LT}} \rangle = 0.039$ sec/yr. El resultado experimental medido por GPB fue $\langle \Omega_{\text{LT}} \rangle_{\text{exp}} = (0.0372 \pm 0.0072)$ sec/yr. Para más detalles ver [44]. ***

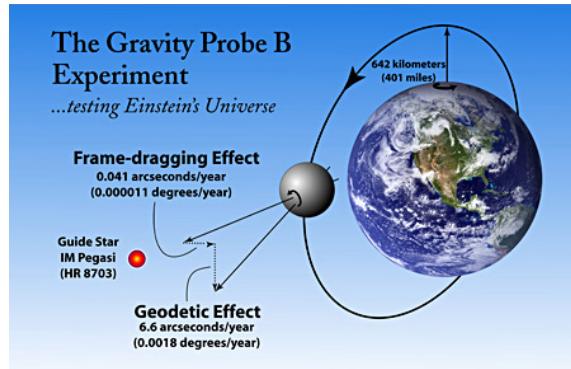


Figura 8.6: Esquema de los ángulos de precesión del giróscopo, medidos por la sonda GPB.

Capítulo 9

Equilibrio Estelar Newtoniano

9.1. Ecuaciones de equilibrio

Consideremos modelar una estrella como una distribución *esférica y estática de un fluido ideal no relativista en equilibrio*, esto es, como aquella situación en la que la presión P_{mat} que ejerce la materia hacia el exterior (debida, por ejemplo, a reacciones termonucleares) es capaz de mantener el equilibrio de la estrella, contrarrestando su propia atracción gravitacional, que tiende a comprimirla.

Como estamos considerando un fluido ideal, sin viscosidad, la ecuación de Euler adopta la siguiente forma para el campo de velocidades \vec{v} :

$$\rho(\vec{r}) \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho(\vec{r}) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P(\vec{r}) + \vec{f}(\vec{r}). \quad (9.1)$$

En el caso estático considerado el campo velocidad será nulo $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0}$. Aquí \vec{f} es la *densidad de fuerza externa* que actúa en cada elemento de volumen. Así, la ec. (9.1) se reducirá a $\vec{\nabla} P = \vec{f}$. Pero en este caso la única fuerza externa considerada es la gravitacional, que actúa sobre un elemento de masa $dm = \rho(\vec{r})dV$ con densidad $\rho(\vec{r})$, y es por lo tanto dado por $d\vec{F}_g = -dm\vec{\nabla}\phi$, donde ϕ es el potencial gravitacional newtoniano. De este modo, la densidad de fuerza será $\vec{f} = -\rho\vec{\nabla}\phi$, y por lo tanto, la condición de equilibrio queda expresada por:

$$\vec{\nabla} P(\vec{r}) = -\rho\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (9.2)$$

Al asumir *simetría esférica*, tenemos que $P = P(r)$ y $\phi = \phi(r)$, entonces

$$\frac{dP(\vec{r})}{dr} = -\rho(\vec{r}) \frac{d\phi}{dr}. \quad (9.3)$$

Por otro lado, el potencial gravitacional ϕ satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi(r) = 4\pi G\rho(r). \quad (9.4)$$

Integrando la ecuación anterior desde el centro de la estrella, $r = 0$, hasta un radio arbitrario r , y denotando la *masa dentro del radio* r de la estrella por

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'), \quad (9.5) \quad \text{Ecuación de masa}$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)}, \quad (9.6) \quad \text{Ecuación de masa como derivada}$$

tenemos luego que (9.4) implica (asumiendo que *no existe* una masa puntual en el centro):

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}. \quad (9.7)$$

Reemplazando la expresión anterior en (9.3), tenemos la condición de equilibrio hidrostático newtoniano:

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\rho(r)}. \quad (9.8)$$

Equilibrio hidrostático newtoniano

Notemos que, debido a que $\rho > 0$, **la presión es una función monótonamente decreciente de la coordenada radial**.

9.2. Resolviendo las ecuaciones de estructura

La ecuación de equilibrio hidrostático (9.8) y la ecuación de masa, (9.5) ó (9.6), conforman un sistema de *dos ecuaciones* en las que hay *tres campos escalares*, dependientes de la coordenada radial, por determinar: la presión $P(r)$, la densidad $\rho(r)$ y la masa $\mathcal{M}(r)$. Por lo tanto, necesitamos otra ecuación que ligue a las variables anteriores para que exista una solución única a una determinada configuración. Usualmente, esta ecuación faltante liga a la presión con la densidad (cuando la entropía s es constante) y se conoce como *ecuación de estado*¹:

$$\boxed{P = P(\rho)}. \quad (9.9)$$

Ecuación de estado

Así, tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales y una ecuación algebraica para la estructura estelar, que adoptan la forma

$$P'(r) = P'(P(r), \mathcal{M}(r)), \quad (9.10)$$

$$\mathcal{M}'(r) = \mathcal{M}(\rho(r)), \quad (9.11)$$

$$P(r) = P(\rho(r)). \quad (9.12)$$

Luego, el sistema físico modelado por el sistema de ecuaciones (9.8), (9.6) y (9.9) quedará completamente determinado imponiendo dos condiciones iniciales apropiadas (tenemos dos ecuaciones diferenciales de primer orden):

1. $\mathcal{M}(r = 0) = 0$. Esto sucederá siempre que $\rho(r = 0)$ sea *finito*, como es razonable suponer.
2. $P(r = 0) = P_0$. Se asigna un valor dado a la presión en el centro de la estrella.

Como la presión es una función monótonamente decreciente (puesto que $\rho(r) \geq 0$), la determinación de un modelo estelar $[P(r), \rho(r), \mathcal{M}(r)]$, dada una ecuación de estado y una cierta presión central, se obtendrá integrando el sistema de ecuaciones antes mencionado desde el centro hacia afuera, hasta llegar a un punto $r = R$ tal que $P(r = R) = 0$. A dicha coordenada R se le denominará *radio de la estrella*. Aquí se debe considerar la imposición física que $(\forall r \geq R) \quad P = 0 \quad y \quad \rho = 0$. Evaluando la ecuación (9.5) en el radio R , definiremos *la masa total M de la estrella* como

$$M := \mathcal{M}(r = R). \quad (9.13)$$

Procedimiento de resolución

¹Para mayores detalles, ver apéndice D.

9.3. Solución: Densidad constante

9.3.1. Obteniendo la presión $P(r)$

El caso más simple de resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio estelar es asumir la ecuación de estado para densidad constante,

$$\rho = \rho_c = cte, \quad r \leq R, \quad (9.14)$$

i.e., considerar materia incompresible. Ésta es una suposición poco realista, pero el modelo estelar así construido ya muestra muchas de las características de otros más complejos.

Con dicha ecuación de estado, es posible integrar directamente la ecuación de masa (9.5):

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho_c = 4\pi \rho_c \int_0^r dr' r'^2 = \frac{4}{3}\pi \rho_c r^3. \quad (9.15)$$

Luego, reemplazando lo anterior en la ecuación de equilibrio hidrostático (9.8) e integrando de $r = 0$ a $r = r$ (recordar que $P(r = 0) = P_0$ es la presión central), obtenemos

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \rho_c = -\frac{4}{3}\pi G \rho_c^2 r,$$

y por lo tanto,

$$P(r) = P_0 - \frac{2}{3}\pi G \rho_c^2 r^2. \quad (9.16)$$

Así, hemos resuelto el problema al obtener la forma explícita de los tres campos escalares involucrados: ver (9.14), (9.15) y (9.16). Ahora podemos encontrar el radio total de la estrella en función de la presión central, de acuerdo a la definición anterior ($P(R) = 0$), evaluando (9.16) en $r = R$:

$$P_0 = \frac{2}{3}\pi G \rho_c^2 R^2. \quad (9.17)$$

Por otra parte, la masa total de la estrella se encuentra, de acuerdo a su definición, evaluando (9.15) en $r = R$ dado por (9.17):

$$M = \mathcal{M}(R) = \frac{4}{3}\pi \rho_c R^3. \quad (9.18)$$

Si se reemplaza (9.18) en (9.17) y se recuerda la definición según Relatividad General del radio de Schwarzschild,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (9.19)$$

tendremos que

$$P_0 = \rho_c c^2 \frac{r_s}{4R},$$

y por lo tanto,

$$P(r) = \rho_c c^2 \left(\frac{r_s}{4R^3} \right) (R^2 - r^2). \quad (9.20)$$

Solución
con $\rho = cte$

9.3.2. Validez de la descripción newtoniana

De las relaciones anteriores es posible establecer la condición:

$$\frac{r_s}{4R} = \frac{P_0}{\rho_c c^2}. \quad (9.21)$$

En general, el cuociente anterior será muy pequeño para materia en estrellas corrientes, indicando que los efectos relativistas son despreciables y por lo tanto imponiendo una condición para la validez de la solución de equilibrio estelar newtoniana presentada. En forma equivalente, podemos decir que la descripción newtoniana desarrollada antes es válida si el radio de la estrella es mucho mayor que el radio de Schwarzschild asociado a su masa. Una estimación de órdenes de magnitud extendido a casos en que ρ no sea constante sería por lo tanto

$$\frac{r_s}{4R} \sim \frac{P_0}{\rho c^2} \ll 1. \quad (9.22)$$

Validez de la descripción no relativista

Efectos relativistas para el Sol

En caso que no se cumpla la desigualdad anterior, es posible anticipar que los efectos relativistas no serán despreciables. Para comprobar esta afirmación, podemos evaluar aproximadamente (9.21) en ciertos casos particulares. Por ejemplo, para una estrella ordinaria de secuencia principal como el Sol, se puede asumir que su materia satisface la ecuación de estado de los gases ideales,

$$P = \frac{\rho k_B T}{m}, \quad (9.23)$$

en donde T es la temperatura, k_B la constante de Boltzmann y m es la masa de cada una de las partículas del gas ideal. Entonces, de (9.22) tenemos que

$$\frac{r_s}{4R} \sim \frac{P}{\rho c^2} = \frac{k_B T}{mc^2}. \quad (9.24)$$

El constituyente principal de estrellas como el Sol son átomos de hidrógeno, que con una masa atómica m_p poseen una energía en reposo

$$mc^2 \approx 1 \text{ GeV}. \quad (9.25)$$

Además, se sabe que en el centro del Sol las reacciones termonucleares producen una temperatura del orden de $T \sim 10^7 \text{ K}$, cuya energía asociada es

$$k_B T \sim 1 \text{ keV}. \quad (9.26)$$

Luego, evaluando (9.22), encontramos que

$$\frac{r_s}{4R} \sim \frac{k_B T}{mc^2} \sim 10^{-6}, \quad (9.27)$$

Efectos relativistas para una estrella "normal"

lo que indica que los efectos relativistas para una estrella "normal" como el Sol son despreciables, y por lo tanto es válido usar la aproximación newtoniana.

9.4. Solución: Estrellas politrópicas

9.4.1. Ecuación de Lane-Emden

En esta sección resolveremos el sistema de ecuaciones de estructura estelar asumiendo una relación $P = P(\rho)$ un poco más realista que la anterior, en la forma de una ecuación de

estado politrópica (D.22). Para determinar las incógnitas P , ρ y \mathcal{M} , se parte de la ecuación de equilibrio hidrostático (9.8), derivándola con respecto a r :

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -G\mathcal{M}, \quad (9.28)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{d\mathcal{M}}{dr} \quad (9.29)$$

$$= -4\pi G \rho r^2, \quad (9.30)$$

en donde en la última igualdad se ha usado la ecuación de masa en forma de derivada (9.6), eliminando así \mathcal{M} y reduciendo el número de incógnitas a 2. Para que la ecuación anterior quede expresada únicamente en la variable ρ , se requiere usar ahora la ecuación de estado politrópica (D.22), notando que $dP/dr = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho/dr$. Así,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = K\gamma \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (9.31)$$

Luego, hemos reducido el sistema a una ecuación diferencial de segundo orden para $\rho(r)$. Como tal, se requieren dos condiciones de borde para encontrar una solución particular:

1. $\rho(0) = \rho_c < \infty$: La densidad debe ser *finita* en el centro de la estrella.
2. $\rho'(0) = 0$: El gradiente de densidad debe ser nulo en el centro de la estrella. Esto implica que la densidad alcanza su máximo en el centro de la estrella (ya que la presión es monótonamente decreciente)².

Ahora bien, para simplificar (9.31), se introducen las variables adimensionales para la coordenada radial x y la densidad $\Theta(x)$, relacionadas con sus respectivas cantidades físicas por:

$$r = ax \quad \Leftrightarrow \quad x := \frac{r}{a}, \quad (9.36)$$

$$\rho = \rho_c \Theta(x)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(x) := \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\gamma-1}, \quad (9.37)$$

en donde $\Theta(x)$ se denomina *función de Lane-Emden*³ ⁴. y a es una escala de longitud. Para

²La justificación de este hecho proviene de derivar explícitamente el lado izquierdo de la ecuación de Lane-Emden (9.31) (denotando $(') := d/dr$)

$$(r^2 \rho^{\gamma-2} \rho')' = -\frac{4\pi G}{K\gamma} \rho r^2, \quad (9.32)$$

$$2r\rho^{\gamma-2} \rho' + r^2(\gamma-2)\rho^{\gamma-3} \rho' + r^2 \rho^{\gamma-2} \rho'' = -\frac{4\pi G}{K\gamma} \rho r^2, \quad (9.33)$$

y para $r \rightarrow 0$:

$$2[\rho(0)]^{\gamma-3} \left(\frac{[\rho(0)]'}{r} \right) + (\gamma-2)[\rho(0)]^{\gamma-4} [\rho(0)]' + [\rho(0)]^{\gamma-3} [\rho(0)]'' = -\frac{4\pi G}{K\gamma} = cte. \quad (9.34)$$

Así, el primer término divergerá a menos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\rho'}{r} \right) < \infty \quad \Rightarrow \quad \rho'(0) = 0. \quad (9.35)$$

³Jonathan Lane (1819-1880): astrofísico e inventor estadounidense.

⁴Jacob Robert Emden (1862-1940): astrofísico y meteorólogo sueco.

determinarla explícitamente, se sustituyen las expresiones anteriores en (9.31), obteniendo:

$$K\gamma \frac{d}{d(ax)} \left((ax)^2 \left(\rho_c \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \right)^{\gamma-2} \frac{d}{d(ax)} \left(\rho_c \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) \right) = -4\pi G \left(\rho_c \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) (ax)^2, \quad (9.38)$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -a^2 \frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma} \frac{1}{\rho_c^{\gamma-2}} \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (9.39)$$

Así, definiendo:

$$a = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{\gamma}{2}-1}, \quad (9.40)$$

obtenemos la llamada *ecuación de Lane-Emden* de índice $1/(\gamma-1)$,

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) + \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.} \quad (9.41) \quad \text{Ecuación de Lane-Emden}$$

Por conveniencia, la relación anterior también puede ser expresada en términos del siguiente parámetro auxiliar:

$$n = \frac{1}{\gamma-1} \quad (9.42)$$

Además, las condiciones de borde antes mencionadas serán:

1.

$$\Theta(0) = \left(\frac{\rho(r=0)}{\rho_c} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_c} \right)^{\gamma-1} = 1, \quad (9.43)$$

2.

$$\Theta'(0) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\gamma-1} \Big|_0 = (\gamma-1) \frac{\rho_c^{\gamma-2}}{\rho_c^{\gamma-1}} \rho' \Big|_0 = (\gamma-1) \frac{1}{\rho_c^{\gamma}} \underbrace{\rho'(0)}_{(9.35)} = 0. \quad (9.44)$$

Esta es la ecuación fundamental que determina la estructura estelar para una estrella newtoniana con ecuación de estado politrópica.

9.4.2. Propiedades físicas de las funciones de Lane-Emden

La propiedad básica que satisfacen las soluciones $\Theta(x)$ de la ecuación de Lane-Emden es $d\Theta(x)/dx < 0$, es decir, son monótonamente decrecientes desde su máximo en el origen $\Theta(x=0) = 1$. Esto equivale físicamente a que la densidad sea máxima en el centro de la estrella: $\rho(r=0) = \rho_c$, y que decrezca conforme la coordenada radial aumenta. Para probar esta propiedad, nos remitimos a la ecuación de equilibrio hidrostático (9.8), la cual simplificamos mediante el uso de la ecuación de estado politrópica (D.22) y la reexpresamos en términos de las variables x (9.36) y Θ (9.37):

$$\gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}}{r^2} \rho \quad (9.45)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{dx} = -\frac{\frac{G\mathcal{M}}{r^2} \rho}{\gamma K \rho^{\gamma-1} \rho_c \frac{1}{a(\gamma-1)} \Theta^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}} \quad (9.46)$$

De donde se observa fácilmente que la propiedad mencionada se satisface, pues todos los factores del lado derecho son definidos positivos por requerimientos físicos. Ahora bien, en base a esta consideración es que podemos hallar las siguientes variables características de una estrella modelada por la ecuación de estructura de Lane-Emden:

Radio estelar politrópico

Por consideraciones físicas, es de esperar que debido al comportamiento decreciente de la densidad mencionado, exista un punto donde se llegue al borde de la estrella y ésta se anule. De hecho, para $\gamma > 6/5^5$, existe una coordenada radial adimensional $x = x_1$ tal que la función de Lane-Emden posee una raíz allí: $\Theta(x_1) = 0$. Esto equivale a decir, por su definición (9.37), que la densidad se anula para el radio correspondiente a dicho punto: $R = ax_1 \Rightarrow \rho(R) = 0$, y por la ecuación de estado (D.22), tenemos que lo anterior también implica que la presión se anula allí: $P(R) = 0$. A la coordenada radial R donde sucede eso, se le define, por las propiedades anteriores, como el radio de la estrella. Por lo tanto, de la definición de x (9.36) y de la escala de longitud a en (9.40), tenemos que el radio estelar será expresable en función de la raíz de la solución de Lane-Emden x_1 para un γ ó n dado como:

$$\boxed{R = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{\gamma}{2}-1} x_1 \\ = \left(\frac{(1+n)K}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} x_1} \quad (9.47) \quad \text{Radio de la estrella}$$

Debido a la dificultad de la resolución analítica de la ecuación de Lane-Emden, las raíces x_1 de $\Theta(x)$ se hallan, en general, mediante métodos numéricos, los que se describirán en la sección 9.4.4. Allí se obtendrá la tabla 9.1 que proporciona dichos valores de x_1 para distintos índices n de la ecuación de Lane-Emden.

Masa estelar politrópica

La masa de la estrella al interior del radio r vendrá dada por la integral (9.5), en donde se integra hasta la coordenada normalizada x usando las definiciones (9.36) y (9.37):

$$\mathcal{M}(x) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'), \quad (9.48)$$

$$= 4\pi \int_0^x (d(ax)') (ax')^2 \left(\rho_c \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \right), \quad (9.49)$$

$$= 4\pi a^3 \rho_c \int_0^x dx' x'^2 \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (9.50)$$

Usando la ecuación de Lane-Emden (9.41), es posible expresar la masa en términos de la derivada de la función de Lane-Emden $\Theta'(x)$, ya que:

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -x^2 \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (9.51)$$

$$\Rightarrow x^2 \Theta'(x) = - \int_0^x dx' x'^2 \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (9.52)$$

y como $\Theta'(x) < 0$, tomando su valor absoluto tenemos para la masa de la estrella al interior de r , usando la definición de la escala de longitud a dada en (9.40):

$$\mathcal{M}(x) = 4\pi a^3 \rho_c x^2 |\Theta'(x)| = 4\pi \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3\gamma-4}{2}} x^2 |\Theta'(x)|. \quad (9.53)$$

⁵Ver subsección 9.4.3 para una justificación

De aquí se puede obtener fácilmente la masa total de la estrella, evaluando la expresión anterior a partir de (9.36) en el radio $r = R = ax_1$:

$$\boxed{M = 4\pi \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma - 1)} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3\gamma-4}{2}} x_1^2 |\Theta'(x_1)| \\ = 4\pi \left(\frac{(1+n)K}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} x_1^2 |\Theta'(x_1)|.} \quad (9.54) \quad \text{Masa de la estrella}$$

Además, notando que de (9.36):

$$a = \frac{r}{x} = \frac{R}{x_1} \Rightarrow x = x_1 \frac{r}{R}, \quad (9.55)$$

podemos expresar la masa parcial (aquella al interior del radio r) en términos de la masa total de la estrella, dividiendo (9.53) entre (9.54):

$$\mathcal{M}(r) = \left\{ \frac{(x_1 \frac{r}{R})^2 |\Theta'(x_1 \frac{r}{R})|}{x_1^2 |\Theta'(x_1)|} \right\} M \quad (9.56)$$

Debido a su aparición explícita en las relaciones anteriores, la cantidad $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$, que es obtenida mediante la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden, también se muestra explícitamente en la tabla 9.1.

Relación Masa-Radio

De este modo, tanto el radio de la estrella dado por (9.47) y su masa dada por (9.54), quedan completamente determinados para una ecuación de estado politrópica con un índice adiabático γ dado, debido a su dependencia en x_1 y $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$, respectivamente. Por lo tanto, el radio y la masa son funciones bien definidas de la densidad central ρ_c :

$$M = cte(\gamma) \cdot \rho_c^{\frac{3\gamma-4}{2}} = cte(n) \cdot \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \quad (9.57)$$

$$R = cte(\gamma) \cdot \rho_c^{\frac{\gamma}{2}-1} = cte(n) \cdot \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \quad (9.58)$$

Además, aún podemos encontrar otra expresión que relacione la masa con el radio de la estrella directamente. Para ello, primero despejamos la densidad central en términos del radio de la estrella mediante (9.47)

$$\rho_c = \left(\frac{R}{x_1} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left(\frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}} = \left(\frac{R}{x_1} \right)^{\frac{2n}{1-n}} \left(\frac{4\pi G}{(1+n)K} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (9.59)$$

Luego, reemplazando en (9.54),

$$M = 4\pi \left[\left(\frac{R}{x_1} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left(\frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-2}} \right]^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta'(x_1)|, \quad (9.60)$$

obtenemos finalmente la relación masa-radio de estrellas politrópicas:

$$\boxed{M = 4\pi R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{2-\gamma}} x_1^{-\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} x_1^2 |\Theta'(x_1)| \\ = 4\pi R^{\frac{n-3}{n-1}} \left(\frac{(1+n)K}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} x_1^{-\frac{n-3}{n-1}} x_1^2 |\Theta'(x_1)|} \quad (9.61)$$

Densidad central y media *

La densidad media de materia $\bar{\rho}(r)$ al interior de la coordenada r de la estrella se define por:

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\mathcal{M}(x)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (9.62)$$

Usando (9.36) y la definición de masa parcial (9.53), expresada en términos de a (9.40), tenemos que:

$$\bar{\rho}(x) = \frac{4\pi\rho_c a^3 x^2 |\Theta'(x)|}{\frac{4}{3}\pi(ax)^3} \quad (9.63)$$

$$= 3\rho_c \left[\frac{x^2 |\Theta'(x)|}{x^3} \right] \quad (9.64)$$

Si evaluamos la expresión anterior en el radio adimensional de la estrella $x = x_1$, encontramos el interesante resultado:

$$\boxed{\bar{\rho} := \bar{\rho}(x_1) = 3\rho_c \frac{x_1^2 |\Theta'(x_1)|}{x_1^3}}, \quad (9.65)$$

es decir, la densidad media total de la estrella es un múltiplo de su densidad central. Pero como $\bar{\rho}$ se puede expresar explícitamente en función de la masa y radio totales de la estrella,

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\rho_c \frac{x_1^2 |\Theta'(x_1)|}{x_1^3}, \quad (9.66)$$

tenemos que la densidad central se puede determinar explícitamente si la masa y radio totales de la estrella son conocidos, además del índice politrópico γ , pues está dada por:

$$\boxed{\rho_c = \frac{1}{4\pi} \frac{x_1^3}{x_1^2 |\Theta'(x_1)|} \frac{M}{R^3}}. \quad (9.67)$$

9.4.3. Soluciones exactas de la ecuación de Lane-Emden

En general, la ecuación de Lane-Emden es difícil de resolver analíticamente, excepto para ciertos casos particulares, los cuales se obtendrán en esta sección. En efecto, según el texto de Chandrasekhar [57], existen tres valores de n para los cuales existe una solución analítica de la ecuación anterior:

Caso $n = 0$

Físicamente, de (9.42), es posible ver que este caso equivale al límite en que el índice adiabático $\gamma \rightarrow \infty$. De la ecuación de estado adiabático (D.22), podemos ver que

$$P = K\rho^\gamma \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (9.68)$$

y para $\gamma \rightarrow \infty$

$$\rho \rightarrow \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^0 = \rho_0 = \text{cte.}, \quad (9.69)$$

es decir, este caso corresponde al de materia incompresible.

Ahora, para resolver (9.41) en este caso $n = 0$, se debe notar que es posible su integración directa:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -1 \quad (9.70)$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d\Theta}{dx} = - \int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} - C \quad (9.71)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{dx} = -\frac{x}{3} - \frac{C}{x^2}, \quad (9.72)$$

con C una constante de integración. Integrando nuevamente, y denotando con D a la nueva constante de integración, notamos que:

$$\Theta(x) = D + \frac{C}{x} - \frac{x^2}{6}. \quad (9.73)$$

Pero de la condición de borde (9.44), que implica en particular que Θ sea finita en el origen, encontramos $C = 0$. Finalmente, aplicando la otra condición de borde (9.43)

$$\Theta(0) = 1 = D - \frac{0}{6} \Rightarrow D = 1, \quad (9.74)$$

tenemos que la solución de Lane-Emden para el caso $n = 0$ será:

$$\boxed{\Theta_0 = 1 - \frac{x^2}{6}}. \quad (9.75)$$

que es monótonamente decreciente, y cuya primera y única raíz para $x > 0$ está en $x_1 = \sqrt{6} \approx 2.44$. También se puede mostrar que este número es el menor entre todas las raíces soluciones de la ecuación de Lane-Emden para un n arbitrario.

Caso $n = 1$

En este caso, con $\gamma = 2$, la ecuación a resolver (9.41) adopta la forma:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) = -\Theta, \quad (9.76)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) + \Theta x^2 = 0, \quad (9.77)$$

que es equivalente a la ecuación esférica de Bessel de orden n :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0 \quad (9.78)$$

en donde, para este caso, $k = 1$ y $n = 0$. Luego, la solución general de (9.77) es conocida y dada por:

$$\Theta = A j_0(x) + B n_0(x), \quad (9.79)$$

en donde $j_0(x) = \operatorname{sen} x/x$ es la función esférica de Bessel del primer tipo de orden $n = 0$, y $n_0(x) = -\cos x/x$ es la función esférica de Bessel del segundo tipo de orden $n = 0$. Pero, para respetar la condición de borde (9.44), se requiere que $B = 0$ pues $n_0(x)$ diverge en el origen. Aplicando la otra condición de borde (9.43), encontramos directamente que $A = 1$, por lo que usando la forma conocida de $j_0(x)$, tenemos que la solución de Lane-Emden para $n = 1$ es:

$$\boxed{\Theta_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \quad (9.80)$$

Esta función también es monótonamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$, y su primera raíz es $x_1 = \pi$. Tal cual se había comentado después de (9.75), se verifica la desigualdad $x_{1,n=0} = \sqrt{6} < \pi = x_{1,n=1}$. (mínimo radio estelar para $n = 0$)

Caso $n = 5$

Para abordar este caso, conviene primero definir una nueva variable para el inverso de la longitud:

$$\xi = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = -\xi^2 \frac{d}{d\xi}. \quad (9.81)$$

Así, Lane-Emden (9.41) en términos de la nueva variable ξ es:

$$\xi^2(-\xi^2) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi^2} (-\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi}) \right) = -\Theta^n, \quad (9.82)$$

$$\xi^4 \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} = -\Theta^n. \quad (9.83)$$

Supongamos que la ecuación anterior tiene una solución de la forma:

$$\Theta(\xi) = a\xi^\omega. \quad (9.84)$$

con a y ω las variables a encontrar. Reemplazando en (9.83), tenemos

$$\xi^4 \omega(\omega - 1) a \xi^{\omega-2} = -a^n \xi^{n\omega}, \quad (9.85)$$

$$\omega(\omega - 1) \xi^{\omega+2} = -a^{n-1} \xi^{n\omega}. \quad (9.86)$$

Igualando el factor y el exponente de la igualdad anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\omega(\omega - 1) = -a^{n-1}, \quad (9.87)$$

$$\omega + 2 = n\omega. \quad (9.88)$$

De la segunda ecuación, se puede despejar ω directamente, y reemplazando en la primera, obtenemos el coeficiente a en términos de n :

$$\omega = \frac{2}{n-1}, \quad (9.89)$$

$$a = \left[2 \frac{(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{1/(n-1)}. \quad (9.90)$$

Ahora bien, como Θ es una densidad normalizada, debe ser una cantidad definida positiva, por lo que $a > 0$. Luego, la solución propuesta (9.84) en la variable original x ,

$$\Theta = \left[2 \frac{n-3}{(n-1)^2} \right]^{1/(n-1)} \left(\frac{1}{x} \right)^{2/(n-1)}, \quad (9.91)$$

es válida sólo para $n > 3$, que equivale por (9.42) a $\gamma < \frac{4}{3}$, y por (9.89) a $\omega < 1$. Debemos notar que esta solución es singular en el origen. Por esta razón, conviene postular, para este caso particular, una solución general de (9.83) en la forma:

$$\Theta(\xi) = a\xi^\omega z(\xi). \quad (9.92)$$

Luego, reemplazando la solución anterior en (9.83), obtendremos una ecuación para z , más simple de resolver:

$$\xi^4 \left[a\xi^\omega \frac{d^2z}{d\xi^2} + 2a\omega\xi^{\omega-1} \frac{dz}{d\xi} + a\omega(\omega-1)\xi^{\omega-2}z \right] = -a^n \xi^{n\omega} z^n \quad (9.93)$$

Pero de (9.89), $n\omega = \omega + 2$, y así

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2\omega\xi \frac{dz}{d\xi} + \omega(\omega - 1)z = -a^{n-1}z^n, \quad (9.94)$$

que es una ecuación tipo Euler-Cauchy, por lo que usando la sustitución estándar:

$$\xi = e^t \Rightarrow \frac{dt}{d\xi} = e^{-t}, \quad (9.95)$$

la ecuación en z toma la forma:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (2\omega - 1) \frac{dz}{dt} + \omega(\omega - 1)z + a^{n-1}z^n = 0. \quad (9.96)$$

Pero de (9.87), se puede reescribir el último término así:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (2\omega - 1) \frac{dz}{dt} - \omega(1 - \omega)z(1 - z^{n-1}) = 0. \quad (9.97)$$

Expresando la ecuación anterior en términos de n mediante (9.89), obtenemos:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{5-n}{n-1} \frac{dz}{dt} + 2 \frac{3-n}{(n-1)^2} z(1 - z^{n-1}) = 0. \quad (9.98)$$

Ahora, podemos reemplazar el caso analizado $n = 5$ (que es consistente con la restricción $n > 3$), de donde vemos que el segundo término de la ecuación de Lane-Emden transformada en z (9.98) se anula, por lo que ésta toma la forma:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{z}{4}(1 - z^4). \quad (9.99)$$

Para resolverla, se puede multiplicar a ambos lados por dz/dt , ya que,

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) \right] \frac{dz}{dt} = \frac{z}{4}(1 - z^4) \frac{dz}{dt}, \quad (9.100)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{z}{4}(1 - z^4) \frac{dz}{dt}. \quad (9.101)$$

Integrando con respecto a t y denotando a la constante de integración como D , obtenemos:

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{z^2}{4} - \frac{z^6}{12} + 2D. \quad (9.102)$$

Notemos que si $z \rightarrow \pm\infty$, entonces $(dz/dt)^2 \rightarrow -\infty$, lo que se contradice con el hecho que $dz/dt \in \mathbb{R}$, y así se deduce que z debe estar acotado. Ahora, la solución a la ecuación anterior se reduce al problema de hallar la integral de:

$$\frac{dz}{(2D + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{12}z^6)^{1/2}} = \pm dt \quad (9.103)$$

Si $D \neq 0$, la integración es complicada al involucrar integrales elípticas. Pero en el caso estudiado, sólo interesa $D = 0$ (?), simplificándose notablemente el problema anterior a:

$$\int \frac{dz}{z(1 - \frac{1}{3}z^4)^{1/2}} = \pm \int \frac{1}{2} dt, \quad (9.104)$$

integral soluble analíticamente en forma simple. En efecto, mediante la sustitución trigonométrica:

$$\frac{1}{3}z^4 = \operatorname{sen}^2 \zeta, \quad (9.105)$$

encontramos que (9.104) equivale a:

$$\int \operatorname{cosec} \zeta d\zeta = \ln \left[\tan \left(\frac{\zeta}{2} \right) \right] = \pm t + C', \quad (9.106)$$

es decir, considerando C' como la constante de integración y $C = e^{C'}$,

$$\tan \left(\frac{\zeta}{2} \right) = Ce^{\pm t} \quad (9.107)$$

Entonces, volviendo a la variable original z , dada por (9.105) y teniendo presente que:

$$\frac{z^4}{3} = \operatorname{sen}^2 \zeta = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \zeta}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \tan^2(\zeta/2)}{2 \tan^2(\zeta/2)} \right)} = \frac{4 \tan^2(\zeta/2)}{(1 + \tan^2(\zeta/2))^2}, \quad (9.108)$$

podemos ver que la solución a (9.99) es:

$$z = \pm \left[\frac{12C^2 e^{\mp 2t}}{(1 + C^2 e^{\mp 2t})^2} \right]^{1/4} \quad (9.109)$$

Expresando la solución anterior en términos de ξ mediante (9.95),

$$z = \pm \left[\frac{12C^2 \xi^{\mp 2}}{(1 + C^2 \xi^{\mp 2})^2} \right]^{1/4}, \quad (9.110)$$

y recordando que tenemos la restricción física $\Theta > 0$, podemos reemplazar la relación hallada para z con signo +, en la solución propuesta de la ecuación de Lane-Emden (9.92) en términos de la variable ξ , y así obtener

$$\Theta = a\xi^\omega \left[\frac{12C^2 \xi^{\mp 2}}{(1 + C^2 \xi^{\mp 2})^2} \right]^{1/4} \quad (9.111)$$

Reemplazando $n = 5$ en las relaciones para ω (9.89) y a (9.90), encontramos que:

$$\Theta = \left(\frac{1}{4} \right)^{1/4} \xi^{2/4} \left[\frac{12C^2 \xi^{\mp 2}}{(1 + C^2 \xi^{\mp 2})^2} \right]^{1/4} = \left[\frac{3C^2}{(1 + C^2 \xi^{-2})^2} \right]^{1/4} \quad (9.112)$$

y retornando a la variable original x dada por (9.81):

$$\theta = \left(\frac{3C^2}{(1 + C^2 x^2)^2} \right)^{1/4} \quad (9.113)$$

Finalmente, aplicando la condición de borde (9.43):

$$\Theta(0) = 1 = (3C^2)^{1/4} \Rightarrow C^2 = \frac{1}{3}, \quad (9.114)$$

de modo que la solución a la ecuación de Lane-Emden para $n = 5$ ó $\gamma = 6/5$ está dada por

$$\Theta_5 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{3}x^2)^{1/2}}$$

(9.115)

Podemos notar que, si bien esta solución es monótonamente decreciente, tiende a 0 conforme $x \rightarrow \infty$. Esto implica que la primera raíz de esta función se puede considerar como $x_1 = \infty$.

9.4.4. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden

La ecuación de Lane-Emden (9.41) para un n dado puede ser resuelta numéricamente mediante el conocido algoritmo de Runge-Kutta de 4º orden. Para ello, primero se debe reducir la ecuación original a un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que se logra definiendo las variables:

$$Y_1 := \Theta(x) \quad \text{y} \quad Y_2 := \frac{d\Theta(x)}{dx}. \quad (9.116)$$

Luego, notando que la ecuación de Lane-Emden se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{x^2} \left(x^2 \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} + 2x \frac{d\Theta(x)}{dx} \right) = -\Theta(x)^n, \quad (9.117)$$

$$\Rightarrow \Theta''(x) = - \left(\frac{2}{x} \Theta'(x) + \Theta(x)^n \right), \quad (9.118)$$

tenemos que el sistema de ecuaciones buscado es:

$$\begin{aligned} Y'_1 &= Y_2, \\ Y'_2 &= - \left(\frac{2}{x} Y_2 + Y_1^n \right), \end{aligned}$$

(9.119)

sujeto a las condiciones iniciales, debido a (9.43) y (9.44):

$$Y_1(0) = 1 \quad \text{y} \quad Y_2(0) = 0. \quad (9.120)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve entonces para Y_1 e Y_2 mediante el método señalado, escogiendo un tamaño de paso apropiado, tal como $\Delta x = 1 \cdot 10^{-3}$. Como Y_1 es decreciente (ver (9.46)), eventualmente llegará hasta un punto (para $\gamma > 6/5$) en donde se anule y posteriormente se vuelva negativo. Pero tenemos la restricción física que $Y_1 > 0$, debido a que está relacionado con la densidad de la estrella mediante (9.37), por lo que la integración se debe detener en el punto $x = x_1$ donde $Y_1(x_1) = 0$. En dicho punto, el método de Runge-Kutta también proporcionará el valor Y_2 , con el cual se podrá determinar la cantidad característica que aparece en las relaciones de masa estelar, $x_1^2 |\Theta'(x_1)| = x_1^2 |Y_2(x_1)|$. De esta forma, tendremos las dos cantidades que nos permiten determinar el radio, masa y densidad central de la estrella por cada valor del índice n de Lane-Emden.

En el gráfico 9.1, se representan los resultados de la integración numérica: las funciones de Lane-Emden $\Theta(x) = Y_1$ para los tres casos analíticamente solubles (ver 9.4.3), además de los casos $\gamma = 4/3 \Leftrightarrow n = 3$ y $\gamma = 5/3 \Leftrightarrow n = 3/2$, que son relevantes como casos límite de la ecuación de estructura de Fermi exacta (ver sección 9.5.3).

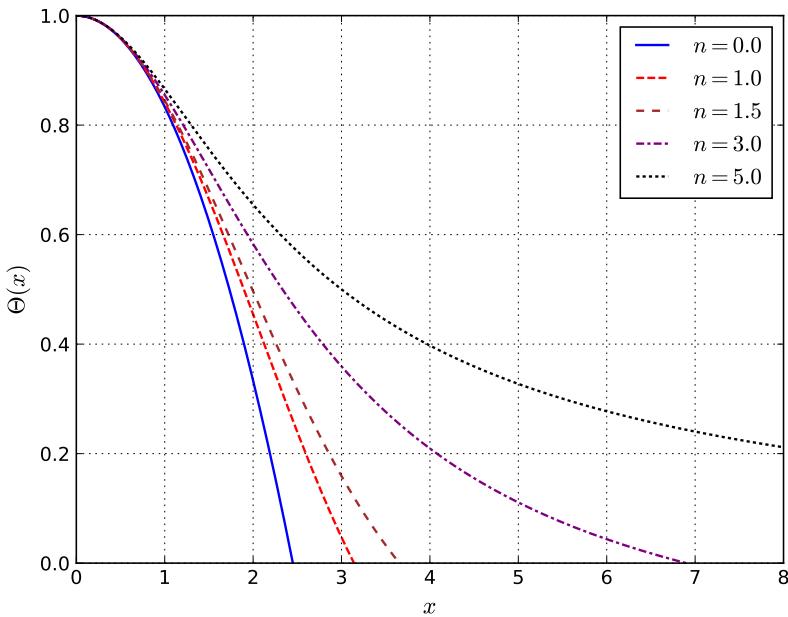


Figura 9.1: Algunas soluciones de la ecuación de Lane-Emden, con $n = 1/(\gamma - 1)$. Código Python [aquí](#) (G. Neumann).

En la tabla 9.1 se resumen los valores⁶ de las raíces x_1 de la función de Lane-Emden $\Theta(x)$, además de las cantidades características $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$, para distintos valores del índice γ ó n . Estos son los valores que se usarán en todas las secciones posteriores que los requieran para la obtención de propiedades físicas estelares.

Cuadro 9.1: Tabla de Raíces de la ecuación de Lane-Emden

n	γ	x_1	$x_1^2 \Theta'(x_1) $
5	6/5	∞	1.73205
9/2	11/9	31.83646	1.73780
4	5/4	14.97155	1.79723
7/2	9/7	9.53581	1.89056
3	4/3	6.89685	2.01824
5/2	7/5	5.35528	2.187(20)
2	3/2	4.35287	2.41105
3/2	5/3	3.65375	2.71406
1	2	π	π
1/2	3	2.75280	3.78710
0	∞	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

9.4.5. Comportamiento físico de algunas soluciones particulares

De las ecuaciones anteriores para la masa y radio de las estrellas surgen varias consecuencias importantes para el comportamiento de un modelo estelar politrópico con determinados valores

⁶Estos valores fueron calculados por el algoritmo de integración usado y corresponden con todos los decimales (a excepción del último, que puede atribuirse a la aproximación o truncamiento utilizado) a los valores dados en el texto de Weinberg [54].

del índice politrópico γ ó n , los que se detallarán a continuación:

- Para $\gamma \rightarrow \infty$ ó $n = 0$, que corresponde a materia incompresible, la solución encontrada analíticamente $\Theta_0(x)$ en (9.75) coincide con la encontrada explícitamente en (9.20), luego de retornar a las variables físicas por medio de las transformaciones (9.37) y (9.36). En efecto, considerando además la ecuación de estado (D.22), (9.75) equivale a (sin considerar aún el límite $\gamma \rightarrow \infty$):

$$\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma-1} = \left(\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi G}{K} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right) \rho_c^{2-\gamma} r^2, \quad (9.121)$$

$$\frac{P}{P_0} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma} = 1 - \frac{1}{6} \left(4\pi G \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right) \frac{1}{K} \rho_c^{2-\gamma} r^2, \quad (9.122)$$

$$P \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma} = P_0 - \frac{2}{3} \pi G \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{P_0}{K \rho_c^\gamma} \cancel{\rho_c^{2-\gamma}} r^2, \quad (9.123)$$

en donde se ha usado nuevamente (D.22) para simplificar el factor del lado derecho. Ahora, para $\gamma \rightarrow \infty$, tendremos que $1/\gamma \rightarrow 0$, por lo que $(P/P_0)^{1/\gamma} \rightarrow 1$ y así recuperamos la ecuación (9.20) que corresponde al caso analizado de materia incompresible:

$$P(r) = P_0 - \frac{2}{3} \pi G \rho^2 r^2 \quad (9.124)$$

Por otra parte, el hecho que la raíz x_1 sea la menor de todas las funciones $\Theta_n(x)$ para un n dado, implica físicamente que una estrella compuesta de materia incompresible ($n = 0$) es la que posee el menor radio de entre todas las estrellas politrópicas con la misma presión (ó densidad) central. Este radio estará dado por la expresión general (9.47) y la ecuación de estado (D.22):

$$R = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{1/2} \rho_c^{\frac{\gamma}{2}-1} x_1 \quad (9.125)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi G}\right)^{1/2} \frac{x_1}{\rho_c} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{1/2} (K\rho_c^\gamma)^{1/2} \quad (9.126)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi G}\right)^{1/2} \frac{P_0^{1/2}}{\rho_c} x_1. \quad (9.127)$$

Pero, como $x_1 = \sqrt{6}$, tendremos que el radio será conocido sólo si se especifica la razón P_0/ρ_c^2 , ya que éste puede expresarse como:

$$R = \sqrt{\frac{3}{2\pi G} \frac{P_0}{\rho_c^2}}. \quad (9.128)$$

Cabe destacar que la relación (9.128) también puede obtenerse imponiendo la condición que $P(R) = 0$ sobre la ecuación (9.20), conduciendo al mismo resultado antes hallado (9.17).

Finalmente, la masa y la relación masa-radio para este caso de materia incompresible, puede obtenerse fácilmente, en vez de usar las ecuaciones (9.54) y (9.61), mediante la

definición de densidad y la relación antes hallada (9.128):

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_c \quad (9.129)$$

$$= \frac{4}{3} \pi \rho_c \left[\frac{3}{2\pi G} \frac{P_0}{\rho_c^2} \right]^{3/2} \quad (9.130)$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \rho_c \left(\frac{P_0}{\rho_c^2} \right)^{3/2}. \quad (9.131)$$

- Para $\gamma = 2$ ó $n = 1$, se obtuvo la solución analítica $\Theta_1(x)$ en (9.80), cuya primera raíz es $x_1 = \pi$. Reemplazando en el radio de la estrella (9.47), se observa de inmediato que éste será independiente de la densidad central, pues

$$R = \left(\frac{2K}{4\pi G(2-1)} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{3}{2}-1} \pi. \quad (9.132)$$

Así, tendremos el radio para una estrella politrópica con $\gamma = 2$:

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}}, \quad (9.133)$$

que depende únicamente de la constante K de la ecuación de estado politrópica.

- Para $\gamma = 6/5$ ó $n = 5$, también se obtuvo una solución analítica $\Theta_5(x)$ en (9.115), en donde la primera raíz sólo se alcanza en $x_1 \rightarrow \infty$. Por (9.47), una estrella con este índice adiabático tendría un radio infinito, para cualquier valor finito de la densidad central ρ_c . Por otra parte, la masa de estas estrellas estaría dada por (9.54), tomando el límite cuando $x_1 \rightarrow \infty$:

$$M = 4\pi \rho_c^{\frac{3 \cdot 6/5 - 4}{2}} \left(\frac{K \cdot 6/5}{4\pi G(6/5 - 1)} \right)^{3/2} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^2 |\Theta'_5(x_1)|. \quad (9.134)$$

El límite anterior se puede calcular en base a (9.115):

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^2 |\Theta'_5(x_1)| = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^2 \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + \frac{x_1^2}{3}} \right)^{1/2} \right|_{x=x_1} \quad (9.135)$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{x_1^3}{\left(1 + \frac{x_1^2}{3} \right)^{3/2}} \quad (9.136)$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} 3^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{3}{x_1^2} + 1 \right)^{3/2}} \quad (9.137)$$

$$= \sqrt{3} \quad (9.138)$$

De esta forma, podemos ver que la masa de una estrella con $\gamma = 6/5$ es finita, aunque su radio sea infinito, estando dada por:

$$M = 36\pi \left(\frac{K}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{-1/5}. \quad (9.139)$$

- De la ecuación de masa (9.54) ó (9.57), se puede ver que la masa de la estrella M es creciente con respecto su densidad central ρ_c para $\gamma > 4/3$ ($n < 3$), mientras que para $\gamma < 4/3$ ($n > 3$) es decreciente. De forma análoga, considerando ahora la relación masa-radio (9.61), podemos ver que el mismo comportamiento existe con respecto al radio: la masa de la estrella M es creciente con respecto a su radio R para $\gamma > 4/3$ ($n < 3$), mientras que para $\gamma < 4/3$ ($n > 3$) es decreciente. Estos hechos tienen importantes consecuencias para la estabilidad estelar.
- Para $\gamma = 4/3$ ó $n = 3$, de acuerdo a la discusión del ítem anterior, la masa de la estrella será independiente de la densidad central y del radio, estando dada por (9.54):

$$M = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta'(x_1)| = 4 \cdot 2.01824 \cdot \pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} =: M_{\text{ch}}, \quad (9.140)$$

en donde se ha usado el valor de $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$ obtenido numéricamente de la función de Lane-Emden $\Theta_3(x)$, recopilado en la tabla 9.1. Esta cantidad se denomina *Masa de Chandrasekhar* M_{ch} , y representa un valor límite que posee una importante interpretación física para ciertos tipos de estrellas, como se mostrará posteriormente. Por completitud, también se dará la expresión explícita para el radio asociado a este índice politrópico usando (9.47), aunque más adelante se verá que esta aproximación carece de valor práctico.

$$R = \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3} x_1 = 6.89685 \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3}, \quad (9.141)$$

en donde se ha usado el valor de x_1 hallado en la tabla 9.1.

- Para $\gamma = 5/3$ ó $n = 3/2$, que corresponde al índice politrópico de un gas ideal (ver justificación en el apéndice D), podemos ver que su radio se obtiene de (9.47) simplemente reemplazando este valor y usando los valores de x_1 de la tabla 9.1:

$$R = \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/6} x_1 = 3.65375 \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/6}. \quad (9.142)$$

Así mismo, podemos encontrar una expresión para la masa a partir de (9.54) y de la tabla 9.1:

$$M = 4\pi \rho_c^{1/2} \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta'(x_1)| = 4 \cdot 2.71406 \cdot \pi \rho_c^{1/2} \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^{3/2}. \quad (9.143)$$

Finalmente, usando la ecuación masa-radio (9.61), podemos ver que:

$$M = 4\pi R^{-3} \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^3 x_1^3 \{ x_1^2 |\Theta'(x_1)| \}, \quad (9.144)$$

$$\Rightarrow M \left[\frac{4\pi}{3} R^3 \right] = \frac{1}{3} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{5K}{2G} \right) x_1^3 \{ x_1^2 |\Theta'(x_1)| \}. \quad (9.145)$$

Identificando el factor en paréntesis cuadrado en el lado izquierdo de la igualdad anterior como el volumen V de la estrella, encontramos que el producto de la masa y volumen para este modelo estelar es constante, estando dado por

$$MV = \frac{1}{3 \cdot 2^5 \pi} \left(\frac{5K}{G} \right)^3 x_1^3 \{ x_1^2 |\Theta'(x_1)| \} = \frac{132.384}{3 \cdot 2^5 \pi} \left(\frac{5K}{G} \right)^3. \quad (9.146)$$

Determinación de parámetros estelares en función de M , R y γ

Para poder contrastar los resultados obtenidos mediante el modelo estelar newtoniano descrito, con respecto a las cantidades físicas directamente provistas por las observaciones, se requiere reescribir las relaciones anteriores y sus soluciones de la forma detallada a continuación. Se supondrá que los parámetros conocidos de una estrella son su *masa* M , su *radio* R y el *índice politrópico* γ del gas que la compone. Luego, el procedimiento para modelar dicha estrella será:

1. Como γ es dado, n será conocido mediante (9.42). Así, por cada $n \in [0, 5]$, la ecuación de Lane-Emden (9.41) tendrá una solución única $\Theta_n(x)$, que en general se encuentra numéricamente. El conocimiento de la función de Lane-Emden anterior también proporciona su primera raíz positiva x_1 (en donde $\Theta(x_1) = 0$), y además $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$.
2. La constante K de la ecuación de estado politrópica (D.22) queda completamente determinada. En efecto, de la relación (9.61), escrita en términos de n , es posible despejar K en términos de las cantidades conocidas M , R , x_1 y $x_1^2 |\Theta'(x_1)|$:

$$M = 4\pi R^{\frac{n-3}{n-1}} \left(\frac{K(1+n)}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} x_1^{-\frac{n-3}{n-1}} x_1^2 |\Theta'(x_1)|, \quad (9.147)$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{n+1} \left(\frac{4\pi}{x_1^{3-n} (x_1^2 |\Theta'(x_1)|)^{n-1}} \right)^{1/n} GM^{1-\frac{1}{n}} R^{\frac{3}{n}-1}. \quad (9.148)$$

3. La densidad central ρ_c presente en la normalización que condujo a la definición de la variable $\Theta(x)$, ya se determinó en términos de las variables conocidas en (9.67).
4. La densidad $\rho(r)$ entonces queda completamente determinada al expresarla en función de la función de Lane-Emden $\Theta(x)$ por medio de (9.37), pues usando ρ_c dado en (9.67) podemos escribir:

$$\rho(r) = \rho_c [\Theta(x)]^n \quad (9.149)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{x_1^3}{x_1^2 |\Theta'(x_1)|} \frac{M}{R^3} [\Theta(x)]^n, \quad (9.150)$$

y considerando (9.55):

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{x_1^3}{x_1^2 |\Theta'(x_1)|} \frac{M}{R^3} \left[\Theta \left(x_1 \frac{r}{R} \right) \right]^n. \quad (9.151)$$

5. Usando la ecuación de estado (D.22), podemos determinar directamente también la presión en el centro de la estrella P_0 , pues evalúandola allí:

$$P_0 = K \rho_c^{1+\frac{1}{n}}. \quad (9.152)$$

Así, reemplazando (9.148) y (9.67), tenemos:

$$P_0 = \frac{1}{4\pi(n+1)} \frac{x_1^4}{(x_1^2 |\Theta'(x_1)|)^2} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (9.153)$$

6. Análogamente, también podemos determinar la dependencia radial de la presión al interior de la estrella, usando (D.22) y (9.149):

$$P(r) = K \rho(r)^{1+\frac{1}{n}} = K (\rho_c [\Theta(x)]^n)^{1+\frac{1}{n}} = P_0 [\Theta(x)]^{1+n}. \quad (9.154)$$

Entonces, reemplazando (9.153), tenemos que la forma explícita del perfil de presión en la estrella vendrá dado por:

$$P(r) = \frac{1}{4\pi(n+1)} \frac{x_1^4}{(x_1^2 |\Theta'(x_1)|)^2} \frac{GM^2}{R^4} \left[\Theta \left(x_1 \frac{r}{R} \right) \right]^{1+n}. \quad (9.155)$$

9.5. Solución exacta para gas de Fermi

Un caso mucho más realista que los tratados anteriormente para resolver el sistema de ecuaciones de estructura estelar, es considerar la ecuación de estado exacta de un gas de Fermi completamente degenerado (a $T = 0$), dada en forma implícita por las ecuaciones (D.74) y (D.44), que se pueden expresar respectivamente como:

$$P = Af(x), \quad \rho = Bx^3, \quad (9.156)$$

en donde x es un parámetro adimensional expresado en función del momentum de Fermi por (D.42), en términos del cual se define:

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2}(2x^2 - 3) + 3\operatorname{senh}^{-1}x. \quad (9.157)$$

Además, A es una constante dada por:

$$A_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3}, \quad (9.158)$$

tanto para electrones (e) como neutrones (n), mientras que B es otra constante que para electrones y neutrones toma respectivamente los valores:

$$B_e = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} m_u \mu_e, \quad B_n = \frac{8\pi m_n^4 c^3}{3h^3} \quad (9.159)$$

9.5.1. Ecuación de estructura de Fermi

En principio tenemos las tres incógnitas, P , ρ y M , por determinar, la última de las cuales se puede despejar siguiendo el procedimiento que condujo a la ecuación diferencial (9.30) de P y ρ en función de la coordenada radial r . Sustituyendo la ecuación de estado (9.156), tenemos:

$$\frac{1}{Br^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{x^3} \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} \right) = -4\pi GBx^3. \quad (9.160)$$

Notando que la derivada de la presión con respecto a x se puede determinar directamente del integrando de (D.47), obtenemos:

$$\frac{1}{Br^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{x^3} \frac{8Ax^4}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{dr} \right) = -4\pi GBx^3, \quad (9.161)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{dr} \right) = -\frac{\pi GB^2}{2A} x^3, \quad (9.162)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \sqrt{1+x^2} \right) = -\frac{\pi GB^2}{2A} x^3. \quad (9.163)$$

Haciendo la sustitución:

$$y := \sqrt{1+x^2}, \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y^2 - 1}, \quad (9.164)$$

tenemos que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) = -\frac{\pi GB^2}{2A} (y^2 - 1)^{3/2}, \quad (9.165)$$

ecuación análoga a la de Lane-Emden (9.41), por lo que podemos usar técnicas similares para encontrar sus soluciones. En primer lugar, se escribe en términos de la coordenada radial adimensional η y de la variable reescalada ϕ , definidas por:

$$r = a\eta, \quad y = y_0\phi, \quad (9.166)$$

con y_0 constante, reminiscente de la densidad central de la estrella ρ_c (comparar con el cambio de variables de Lane-Emden (9.36) y (9.37)). Para encontrar a , reemplazamos en (9.165):

$$\frac{1}{(a\eta)^2} \frac{d}{d(a\eta)} \left((a\eta)^2 \frac{d(y_0\phi)}{d(a\eta)} \right) = -\frac{\pi GB^2}{2A} ((y_0\phi)^2 - 1)^{3/2}, \quad (9.167)$$

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = -a^2 \frac{\pi GB^2 y_0^2}{2A} \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}. \quad (9.168)$$

Así, definiendo:

$$a := \sqrt{\frac{2A}{\pi G}} \frac{1}{By_0} = \frac{l}{y_0}, \quad (9.169)$$

con l una escala de longitud independiente de y_0 , obtenemos *la ecuación de estructura de Fermi*, dependiente del parámetro y_0 (comparar con (9.41) que depende, en cambio, del parámetro n ó γ):

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = - \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}. \quad (9.170)$$

Las condiciones de borde son las mismas de Lane-Emden para la variable Θ , ya que en el centro de la estrella $y(\eta = 0) = y_0$, y así:

$$\phi(\eta = 0) = 1 \quad \text{y} \quad \phi'(\eta = 0) = 0, \quad (9.171)$$

en donde la segunda condición se justifica de la misma forma que en (9.35).

9.5.2. Propiedades físicas de la ecuación de estructura de Fermi

Radio de la estrella

Al igual que en el caso de la ecuación de Lane-Emden, tenemos que las soluciones $\phi = \phi(\eta)$ son monótonamente decrecientes. Como dicha variable está relacionada con y de acuerdo a (9.166), ésta a su vez con x a través de (9.164), que a su vez es parte de la ecuación de estado para la densidad ρ (9.156), vemos que:

$$\begin{aligned} \rho &= Bx^3 = B(y^2 - 1)^{3/2} = B[(y_0\phi)^2 - 1]^{3/2} \\ &= By_0^3 \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (9.172)$$

Luego, es claro que la densidad también será monótonamente decreciente. Por lo tanto, se definirá el radio de la estrella, al igual que para Lane-Emden, como aquella coordenada radial adimensional η_1 en que la densidad se anule: $\rho(\eta_1) = 0$. Como de la ecuación anterior esto

equivale a que $x(\eta_1) = 0$, vemos de (9.156) y (9.157) que la presión de la estrella también se anulará allí: $P(x = 0) = 0$, lo cual es consistente con lo que uno esperaría físicamente para el borde de una estrella. Ahora bien, esta condición implica, por (9.172), que:

$$\phi(\eta_1) = \frac{1}{y_0} \quad (9.173)$$

Consistentemente, tendremos de la definición de la variable η en (9.166), que el radio físico R de la estrella vendrá dado, al considerar (9.169), por:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= a\eta_1 = l \frac{\eta_1}{y_0} \\ &= \sqrt{\frac{2A}{\pi G}} \frac{1}{B} \frac{\eta_1}{y_0}. \end{aligned}} \quad (9.174)$$

Al igual que para el caso de Lane-Emden, el radio adimensional η_1 se obtiene, para cada y_0 , resolviendo la ecuación de estructura de Fermi mediante métodos numéricos, que se describirán en la sección 9.5.4.

Masa de la estrella

La masa de la estrella al interior del radio adimensional η se obtendrá a partir de su definición en (9.5) y de (9.185):

$$\mathcal{M}(\eta) = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi a^3 \int_0^\eta d\eta' \eta'^2 \rho \quad (9.175)$$

$$= 4\pi B y_0^3 a^3 \int_0^\eta \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \eta'^2 d\eta'. \quad (9.176)$$

Pero, al igual que para Lane-Emden, notamos que de la ecuación de estructura de Fermi (9.170):

$$\eta^2 \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} = -\frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right), \quad (9.177)$$

$$\Rightarrow \int_0^\eta \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \eta'^2 d\eta' = \eta^2 \|\phi'(\eta)\|, \quad (9.178)$$

en donde se toma el valor absoluto puesto que $\phi'(\eta) < 0$ (soluciones decrecientes). Luego, la masa al interior de η se podrá expresar usando también la definición de a en (9.169), como:

$$\mathcal{M}(\eta) = 4\pi B y_0^3 a^3 \eta^2 \|\phi'(\eta)\| \quad (9.179)$$

$$= 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \frac{1}{B^2} \eta^2 \|\phi'(\eta)\|. \quad (9.180)$$

La masa total de la estrella será toda aquella al interior de su radio adimensional $M := \mathcal{M}(\eta_1)$, por lo que evaluando la expresión anterior en η_1 , encontramos:

$$\boxed{M = 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \frac{1}{B^2} \eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}. \quad (9.181)$$

Note que aquí el parámetro y_0 de la ecuación de estructura sólo aparece implícitamente, a través de la solución ϕ y la cantidad característica $\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|$, que se encuentran numéricamente (ver sección (9.5.4)).

Densidad central y media

La densidad central de la estrella ρ_c se conseguirá evaluando (9.172) en $\eta = 0$ y aplicando la condición de borde (9.171):

$$\rho_c := \rho(\eta = 0) = B \left[(y_0 \phi(\eta = 0))^2 - 1 \right]^{3/2} \quad (9.182)$$

$$= B (y_0^2 - 1)^{3/2} = B y_0^3 \left(1 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}. \quad (9.183)$$

De esta forma, tendremos que la densidad central es función únicamente del parámetro y_0 de la ecuación de estructura de Fermi:

$$\boxed{\rho_c = B(y_0^2 - 1)^{3/2}} \quad (9.184)$$

Por otra parte, el perfil de densidad de la estrella se puede expresar reescribiendo (9.172) y usando la relación anterior:

$$\rho(r) = B y_0^3 \left(\phi(\eta)^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (9.185)$$

$$= \rho_c \frac{y_0^3}{(y_0^2 - 1)^{3/2}} \left(\phi(\eta)^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (9.186)$$

$$= \rho_c \left(\frac{\phi(\eta)^2 - \frac{1}{y_0^2}}{1 - \frac{1}{y_0^2}} \right)^{3/2}. \quad (9.187)$$

También podemos establecer una relación similar a la de Lane-Emden entre la densidad media $\bar{\rho}$ y la densidad central ρ_c de la estrella. Para ello, notamos que la densidad media de materia dentro del radio η se expresará en función de la masa al interior de dicho radio por medio de (9.179):

$$\bar{\rho}(\eta) = \frac{\mathcal{M}(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}, \quad (9.188)$$

$$= \frac{4\pi B y_0^3 \alpha^3 \eta^2 \|\phi'(\eta)\|}{\frac{4}{3}\pi (d\eta)^3}, \quad (9.189)$$

y expresando B en términos de ρ_c por medio de (9.183), tendremos la siguiente relación entre

la densidad media parcial y la central⁷:

$$\bar{\rho}(\eta) = \frac{3\rho_c}{\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}} \frac{\eta^2 \|\phi'(\eta)\|}{\eta^3}, \quad (9.194)$$

y para la densidad media total $\bar{\rho}$ de la estrella, en $\eta = \eta_1$; obtenemos:

$$\boxed{\bar{\rho} = \frac{3\rho_c}{\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}} \frac{\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}{\eta_1^3}}, \quad (9.195)$$

es decir, la densidad media será proporcional a la densidad central, pues los otros factores dependen sólo de la solución a la ecuación de estructura de Fermi para un y_0 dado (comparar con el resultado de Lane-Emden (9.65)). Y como la densidad media total de una estrella es $\bar{\rho} = M/(4\pi R^3/3)$, tendremos que la densidad central también se puede expresar en función de su radio y masa total:

$$\boxed{\rho_c = \left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \frac{1}{4\pi} \frac{\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}{\eta_1^3} \frac{M}{R^3}.} \quad (9.196)$$

9.5.3. Casos límite de las soluciones

Aproximación de bajas densidades

De la ecuación de estado de Fermi (9.156) para la densidad en términos del parámetro x , notamos que si esta cantidad evaluada en el centro de la estrella es pequeña: $x(\eta = 0) = x_0 \ll 1$, entonces la densidad central de la estrella, $\rho_c = Bx_0^3$, también lo será ($\rho_c \ll B$, en donde los valores numéricos de esta constante están dados en (D.44) y (D.45)). Por lo tanto, en la aproximación de bajas densidades a analizar, se despreciarán términos de orden $\mathcal{O}(x_0^4)$, y así, el lado derecho de la ecuación de estructura de Fermi (9.170) se podrá escribir, al considerar (9.164), como:

$$-\left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} = -\left(\phi^2 - \frac{1}{1+x_0^2}\right)^{3/2} \quad (9.197)$$

$$\approx -\left(\phi^2 - (1-x_0^2)\right)^{3/2}. \quad (9.198)$$

⁷Consistemente, es fácilmente verificable, a partir de la relación mostrada, que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \bar{\rho}(\eta) = \rho_c$. En efecto, usando la regla de L'Hôpital y recordando la condición de borde $\phi'(0) = 0$, vemos que:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \bar{\rho} = \frac{3\rho_c}{\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|\phi'(\eta)\|}{\eta} = \frac{3\rho_c}{\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|\phi''(\eta)\|}{1} \quad (9.190)$$

Luego, despejando $\phi''(\eta)$ de la ecuación de estructura (9.170) (lo que se hará explícitamente en (9.236)), podemos reemplazarlo en el límite anterior y recordando la condición de borde $\phi(0) = 0$, obtenemos la relación:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \phi''(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\phi'(\eta)}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[2 \frac{\phi'(\eta)}{\eta} + \left(\phi(\eta) - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \right] \quad (9.191)$$

$$\Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0} 3 \frac{\phi'(\eta)}{\eta} = -\left(\phi(0) - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (9.192)$$

$$\Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0} \|\phi''(\eta)\| = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (9.193)$$

Así, reemplazando el límite anterior en (9.190), obtenemos finalmente que: $\lim_{\eta \rightarrow 0} \bar{\rho}(\eta) = \rho_c$.

Definiendo

$$\tilde{\Theta} := \phi^2 - (1 - x_0^2), \quad (9.199)$$

podemos expresar ϕ en términos de $\tilde{\Theta}$,

$$\phi = \sqrt{1 + \tilde{\Theta} - x_0^2} \approx 1 - \frac{1}{2} (x_0^2 - \tilde{\Theta}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{d\eta} \approx \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\Theta}}{d\eta}, \quad (9.200)$$

y así, podemos cambiar la variable dependiente en la ecuación de estructura de Fermi (9.170) de ϕ a $\tilde{\Theta}$:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\tilde{\Theta}(\eta)}{d\eta} \right) = - [\tilde{\Theta}(\eta)]^{3/2}, \quad (9.201)$$

por lo que cambiando la variable independiente a $\tilde{x} = \sqrt{2}\eta$, tenemos:

$$\frac{1}{\tilde{x}^2} \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\tilde{x}^2 \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} \right) = - [\tilde{\Theta}(\tilde{x})]^{3/2}, \quad (9.202)$$

es decir, hemos recuperado la ecuación de Lane-Emden (9.41) de índice $n = 3/2$, pero con condiciones de borde distintas, ya que en el origen $\eta = 0$, la variable $\tilde{\Theta}$ definida en (9.199) tomará el valor:

$$\tilde{\Theta}(0) = \underbrace{\phi(0)}_{(9.171)}^2 - (1 - x_0^2) = x_0^2, \quad (9.203)$$

a diferencia de la función de Lane-Emden $\Theta_{3/2}(x)$ que satisface $\Theta_{3/2}(x = 0) = 1$. Pero igualmente se puede aprovechar esta solución conocida, notando que la función definida por:

$$\tilde{\Theta}(\tilde{x}) = x_0^2 \Theta_{3/2}(\sqrt{x_0} \tilde{x}), \quad (9.204)$$

también será una solución de la misma ecuación de Lane-Emden⁸. En efecto, reemplazando $\tilde{\Theta}(x)$ en el lado izquierdo de (9.41) con $n = 3/2$:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\tilde{\Theta}(x)}{dx} \right) = \frac{x_0^2}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \Theta_{3/2}(\sqrt{x_0} x) \right), \quad (9.205)$$

$$= x_0^2 (\sqrt{x_0})^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{x_0} x)^2} \frac{d}{d(\sqrt{x_0} x)} \left((\sqrt{x_0} x)^2 \frac{d}{d(\sqrt{x_0} x)} \Theta_{3/2}(\sqrt{x_0} x) \right) \right] \quad (9.206)$$

$$= -x_0^3 [\Theta_{3/2}(\sqrt{x_0} x)]^{3/2} \quad (9.207)$$

$$= - [\tilde{\Theta}(x)]^{3/2}. \quad (9.208)$$

Luego, $\tilde{\Theta}(\tilde{x})$ también será solución de la ecuación de Lane-Emden (9.202), pero con la condición de borde (9.203) apropiada para este caso. Entonces, podemos volver a la variable independiente η de la ecuación de estructura de Fermi original, y así escribir la solución de ella (en

⁸Esta es una característica general de las soluciones de la ecuación de Lane-Emden, denominada propiedad de *homología*: Si $\Theta_n(x)$ es una solución de la ecuación de Lane-Emden (9.41) de índice n con la condición de borde usual $\Theta_n(0) = 1$, entonces $\tilde{\Theta}(x) = A^{\frac{2}{n-1}} \Theta_n(Ax)$ también será solución de la misma ecuación, pero con condición de borde $\tilde{\Theta}(0) = A^{\frac{2}{n-1}}$.

la aproximación $x_0 \ll 1$) en términos de la función conocida de Lane-Emden $\Theta_{3/2}$ dada en (9.204), al reemplazar en la definición de ϕ (9.200), obteniendo:

$$\phi(\eta) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(x_0^2 - \tilde{\Theta}(\tilde{x}) \right) \quad (9.209)$$

$$\approx 1 - \frac{x_0^2}{2} \left(1 - \Theta_{3/2}(\sqrt{2x_0} \eta) \right). \quad (9.210)$$

El radio adimensional de la estrella η_1 , en esta aproximación, también se puede expresar en términos del radio adimensional correspondiente a la solución de la ecuación de Lane-Emden, dado por la raíz $x_{1_{3/2}}$ de $\Theta_{3/2}$ (dada en la tabla 9.1). Para ello, notamos que el borde de la estrella en las variables de la ecuación de estructura de Fermi está dado por la condición (9.173):

$$\phi(\eta_1) = \frac{1}{y_0} = \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \approx 1 - \frac{x_0^2}{2}. \quad (9.211)$$

Entonces, al igualar con la solución ϕ en (9.210) evaluada en η_1 , obtenemos:

$$\phi(\eta_1) = 1 - \frac{x_0^2}{2} \left(1 - \Theta_{3/2}(2\sqrt{2x_0} \eta_1) \right) \approx 1 - \frac{x_0^2}{2}, \quad (9.212)$$

$$\Rightarrow \Theta_{3/2}(\sqrt{2x_0} \eta_1) = \Theta_{3/2}(x_{1_{3/2}}) = 0. \quad (9.213)$$

Por lo tanto, tendremos que el radio adimensional de la estrella para el caso de la ecuación de estructura de Fermi, en el límite de bajas densidades, vendrá dado por:

$$\eta_1 = \frac{x_{1_{3/2}}}{\sqrt{2x_0}}. \quad (9.214)$$

Ahora podemos verificar que la aproximación realizada es consistente con el obtenido a partir de la ecuación de estado politrópica (D.86) con $\gamma = 5/3$, que se obtiene en la aproximación no relativista (D.42) del parámetro adimensional relativo : $x \ll 1$, y que por (D.76) y (D.77) es equivalente al límite de baja densidad central de la estrella: $\rho_c \ll 10^9 [kg/m^3]$ para electrones ó $\rho_c \ll 6 \cdot 10^{18} [kg/m^3]$ para neutrones. En efecto, de la expresión para el radio físico R de la estrella en el contexto de la ecuación de estructura de Fermi, (9.174), con a dado por (9.169), y usando (9.172) y (9.214), se puede escribir en forma equivalente:

$$R = \sqrt{\frac{2A}{\pi G B}} \frac{\eta_1}{y_0} \quad (9.215)$$

$$= \sqrt{\frac{2A}{\pi G B^{5/6}}} \left(\frac{1}{B^{1/6}} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \quad (9.216)$$

$$= \sqrt{\frac{2A}{\pi G B^{5/3}}} \left(\frac{x_0^3}{\rho_c} \right)^{1/6} \left(\frac{x_{1_{3/2}}}{\sqrt{2x_0}} \right) \left(1 - \frac{x_0^2}{2} \right) \quad (9.217)$$

$$\approx \sqrt{\frac{A}{\pi G B^{5/3}}} \rho_c^{-1/6} x_{1_{3/2}}, \quad (9.218)$$

en donde se han despreciado términos de orden $\mathcal{O}(x_0^2)$. Reemplazando los valores de A y B dados por (9.158) y (9.159), tendremos que si identificamos (tanto para electrones como neutrones):

$$K_{5/3} = \frac{8}{5} \frac{A}{B_{e,n}^{5/3}} = \begin{cases} \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e (m_u \mu_e)^{5/3}} \\ \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \end{cases}, \quad (9.219)$$

entonces recuperamos la expresión ya encontrada para el radio politrópico con $\gamma = 5/3$ (9.142), en donde $K_{5/3}$ son precisamente las constantes politrópicas que surgen de las ecuaciones de estado (D.86) para electrones y (D.87) para neutrones, que corresponden al caso límite de la ecuación de estado de Fermi en la aproximación mencionada.

A la misma conclusión se puede llegar considerando la ecuación para la masa de la estrella (9.181), teniendo presente (9.210):

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{x_0^2}{2} \sqrt{2x_0} \frac{d\Theta_{3/2}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}, \quad (9.220)$$

$$\Rightarrow \|\phi'(\eta_1)\| = \frac{x_0^{3/2}}{\sqrt{2}} \|\Theta'(\sqrt{2x_0}\eta_1)\|, \quad (9.221)$$

y usando (9.214), tendremos la relación entre los parámetros característicos de las soluciones de la ecuación exacta de estructura de Fermi y de Lane-Emden.

$$\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\| = \left(\frac{x_0^2}{2} \right) x_{1_{3/2}}^2 \|\Theta'(x_{1_{3/2}})\|. \quad (9.222)$$

Aproximación de altas densidades: Masa límite

Consideremos ahora el caso en que se tome el límite $y_0 \rightarrow \infty$ del parámetro que determina la ecuación de estructura de Fermi (9.170), con lo cual ésta tomará la forma:

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = -\phi^3, \quad (9.223)$$

cuya solución es la correspondiente a la ecuación de Lane-Emden (9.41) de índice $n = 3$: $\phi = \Theta_3$ (considerando que ambas ecuaciones poseen las mismas condiciones de borde). Esta solución es conocida y ya se discutió en la página 192, donde se dedujo su característica más importante: la masa de una estrella con índice politrópico asociado $n = 3$ ó $\gamma = 4/3$ (por (9.42)) es independiente de su densidad central, así como también del radio de ésta. Estas propiedades las podemos recuperar y ver de forma más clara su procedencia mediante el siguiente análisis: considerando la expresión para el radio físico de la estrella, (9.174), podemos notar que al tomar el límite anterior:

$$\lim_{y_0 \rightarrow \infty} R = \lim_{y_0 \rightarrow \infty} l \frac{\eta_1}{y_0} = 0, \quad (9.224)$$

ya que η_1 es finito. Además, considerando la ecuación (9.181) para la masa total de la estrella, podemos notar que de la correspondencia mencionada con las soluciones Θ_3 de Lane-Emden, tenemos:

$$\lim_{y_0 \rightarrow \infty} M = \lim_{y_0 \rightarrow \infty} 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \frac{1}{B^2} \eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|, \quad (9.225)$$

$$= 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G B^{4/3}} \right)^{3/2} x_1^2 \|\Theta'_3(x_1)\| < \infty, \quad (9.226)$$

es decir, conforme $y_0 \rightarrow \infty$, el radio de la estrella tiende a cero pero su masa se acerca a un límite finito. Si expresamos la siguiente cantidad en términos de variables físicas mediante las definiciones de A y B en (9.158) y (9.159), tanto para electrones como neutrones:

$$K_{4/3} = \frac{2A}{B_{e,n}^{4/3}} = \begin{cases} \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{(m_u \mu_e)^{5/3}} \\ \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_n^{4/3}} \end{cases}, \quad (9.227)$$

podemos notar que $K_{4/3}$ corresponde al índice politrópico para $\gamma = 4/3$ dado en (D.98) y (D.99), de modo tal que obtenemos el mismo resultado para M que el hallado en (9.140), en donde este valor entonces representa la *Masa de Chandrasekhar*:

$$\lim_{y_0 \rightarrow \infty} M = M_{ch} = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} x_1^2 \|\Theta'(x_1)\|, \quad (9.228)$$

con K y Θ los correspondientes a $\gamma = 4/3$ ó $n = 3$.

La predicción de la existencia de una masa límite es el comportamiento que se observa para objetos compactos, tales como enanas blancas y estrellas de neutrones, ya que se pueden considerar compuestos de gases de fermiones (electrones y neutrones, respectivamente) completamente degenerados. Entonces, M_{ch} representa el límite superior que puede tener la masa de estas estrellas en condiciones de equilibrio y sujetas a la ecuación de estado de Fermi, por lo que esta cantidad física se puede expresar de forma conveniente en unidades de esta masa límite al dividir (9.181) por (9.226):

$$M = \frac{\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}{x_1^2 \|\Theta'_3(x_1)\|} M_{ch}. \quad (9.229)$$

También podemos verificar, independientemente del resultado anterior para la masa, que este caso límite es consistente con el obtenido a partir de la ecuación de estado politrópica con $\gamma = 4/3$ (D.98), que se obtiene en la aproximación ultrarelativista del parámetro adimensional relativo (D.42) : $x \gg 1$, y que por (D.76) y (D.77) es equivalente al límite de alta densidad central de la estrella: $\rho_c \gg 10^9 [kg/m^3]$ para electrones ó $\rho_c \gg 6 \cdot 10^{18} [kg/m^3]$ para neutrones. En efecto, tenemos que si y_0 es grande, entonces por (9.164) y (9.166):

$$y_0 \gg 1 \Rightarrow x = \sqrt{(y_0 \phi)^2 - 1} \gg 1, \quad (9.230)$$

ya que ϕ es acotado para todo valor físicamente relevante de y_0 . De esta forma, la función $f(x)$ dada en (9.157) será en este límite:

$$x \gg 1 \Rightarrow f(x) \rightarrow 2Ax^4, \quad (9.231)$$

por lo que la ecuación de estado de Fermi (9.156) en función del parámetro x tendrá la forma asintótica:

$$x \gg 1 \Rightarrow P \rightarrow 2Ax^4 \quad y \quad \rho \rightarrow Bx^3. \quad (9.232)$$

Debe notarse que aquí se observa claramente la equivalencia entre $y_0 \gg 1$ y la aproximación de densidades altas. Finalmente, podemos obtener la ecuación de estado en forma explícita $P = P(\rho)$ combinando las dos expresiones paramétricas anteriores y recordando (9.227):,

$$P = \frac{2A}{B^{4/3}} \rho^{4/3} = K_{4/3} \rho^{4/3}, \quad (9.233)$$

que es una ecuación de estado politrópica (D.22) de índice $\gamma = 4/3$ (por lo que se puede analizar en base a la ecuación de Lane-Emden), que consistentemente coincide con el caso límite de la ecuación de estado de Fermi en la aproximación mencionada: (D.98) y (D.99).

9.5.4. Solución numérica de la ecuación de estructura de Fermi

Al igual que para la solución numérica de Lane-Emden en 9.4.4, se resolverá la ecuación de estructura de Fermi (9.170) mediante el algoritmo de Runge-Kutta de 4º orden. Por lo tanto, definiendo las variables

$$Y_1 = \phi(\eta) \quad \text{y} \quad Y_2 = \frac{d\phi(\eta)}{d\eta}, \quad (9.234)$$

y notando que la ecuación de estructura de Fermi se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{\eta^2} \left(\eta^2 \frac{d^2\phi(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\phi(\eta)}{d\eta} \right) = - \left(\phi(\eta)^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}, \quad (9.235)$$

$$\Rightarrow \phi''(\eta) = - \left[\frac{2}{\eta} \phi'(\eta) + (\phi(\eta)^2 - y_0^{-2})^{3/2} \right], \quad (9.236)$$

tenemos que el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden apropiado para utilizar Runge-Kutta es:

$$\begin{aligned} Y'_1 &= Y_2, \\ Y'_2 &= - \left[\frac{2}{\eta} Y_2 + (Y_1^2 - y_0^{-2})^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (9.237)$$

sujeto a las mismas condiciones iniciales que Lane-Emden:

$$Y_1(0) = 1 \quad \text{y} \quad Y_2(0) = 0. \quad (9.238)$$

Utilizando el mismo tamaño de paso $\Delta\eta = 1 \cdot 10^{-3}$, se procede a la integración obteniendo los valores respectivos de Y_1 e Y_2 . Sin embargo, a diferencia de Lane-Emden, la integración se detendrá en la coordenada η_1 en la que la función decreciente Y_1 alcance el valor $1/y_0$, debido a que allí se alcanza el borde de la estrella (ver (9.173)). En dicho punto, el integrador también proporcionará el valor de Y_2 , con el que se determina la cantidad característica $\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|$, y de este modo tendremos a disposición los parámetros necesarios para especificar la masa, radio y densidad de estrellas modeladas por esta ecuación. Los resultados de la integración numérica para la variable $\phi(\eta)$ se muestran en el siguiente gráfico, para los cinco valores representativos del parámetro $1/y_0$ indicados.

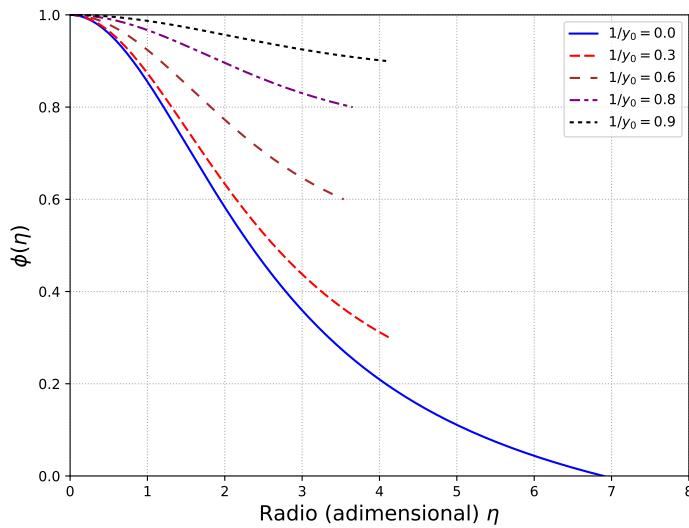


Figura 9.2: Soluciones $\phi(\eta)$ de la ecuación de estructura de Fermi.

Una importante relación física que se mostrará en la siguiente sección es la existente entre las masas y radios de las estrellas que obedecen a esta ecuación de estado. Para obtenerla, notamos que la cota superior de las masas está dada por la de Chandrasekhar (9.229), que corresponde a $y_0 \rightarrow \infty$ ó $1/y_0 = 0$. Debido a esto, seleccionamos un conjunto apropiado de valores para este parámetro, que en nuestro caso son 500 puntos distribuidos uniformemente desde $1/y_0 = 0$ hasta $1/y_0 = 0.94$. Esta elección se justifica si recordamos que la condición mínima admisible sería para $1/y_0 = 1.0$, que correspondería al mismo valor de la condición de borde en el origen $\phi(0) = 1 = 1/y_0$, lo que implicaría que el radio de la estrella sería nulo: $\eta_1 = 0$. Luego, los valores de la solución numérica de la ecuación de estructura por cada uno de estos y_0 nos proporcionará la cantidad $\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|$, que determina el conjunto de masas estelares admisibles a través de (9.229): desde un valor mínimo por conocer, para $y_{0,\min}$, hasta la masa máxima de Chandrasekhar, para $y_0 = \infty$. Por otra parte, del algoritmo de resolución obtendremos también η_1 por cada y_0 , con lo que tendremos los valores del radio de la estrella a través de (9.174) por cada valor dado de la masa. Por lo tanto, por cada integración numérica de la ecuación de estructura de Fermi, obtendremos un sólo punto del diagrama masa-radio, requiriéndose unas 500 en nuestro caso para su determinación con un grado de precisión aceptable.

De forma análoga también se determina otra importante relación física que se mostrará en la siguiente sección: la relación masa-densidad central. En efecto, si mediante el método anterior obtenemos un conjunto de valores para la masa estelar por cada y_0 , entonces podemos asociar a cada uno de dichos puntos una densidad central ρ_c dada por (9.184), puesto que depende únicamente del parámetro y_0 .

9.6. Aplicación: Estrellas degeneradas

En las dos secciones previas se llegó a soluciones explícitas para la masa y radio de estrellas newtonianas que satisfacen tanto la ecuación de estado de Fermi (9.156) como las ecuaciones de estado politrópicas (D.22), que en los casos de $\gamma = 5/3$ y $\gamma = 4/3$ son aproximaciones de la primera. Ahora bien, hay dos casos simples de estrellas que adoptan naturalmente una ecuación de estado de estos tipos, apropiadas para describir materia degenerada en donde la temperatura no juega un rol relevante (se considera $T = 0K$): las enanas blancas y las estrellas de neutrones. En ellas, la presión de materia que contrarresta a la gravitatoria está dada por la presión de degeneración de sus electrones o neutrones, respectivamente.

9.6.1. Enanas blancas

Cuando una estrella agota todo el combustible disponible para la fusión nuclear, entonces comienza a enfriarse y contraerse, debido a que la presión térmica no puede contrarrestar la presión gravitatoria. La contracción tiene como consecuencia que la materia dentro de la estrella se pueda considerar compuesta fundamentalmente de un plasma de núcleos atómicos y electrones degenerados que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac. Este gas será más ideal, es decir, la interacción electromagnética entre los núcleos y los electrones será más despreciable (predominando únicamente la degeneración de electrones), cuanto más alta sea la densidad de la materia considerada. Por lo tanto, cuando la temperatura es suficientemente baja, éstos últimos pueden ser modelados en primera aproximación como un gas ideal de Fermi completamente degenerado, en donde la principal contribución a la densidad de masa proviene de los núcleos atómicos. En estas circunstancias, es válida la ecuación de estado de Fermi exacta y sus aproximaciones politrópicas relativista y ultrarelativista (con índices politrópicos $\gamma = 5/3$ y $\gamma = 4/3$), desarrolladas en el apéndice D.4.

Masas y Radios

Por lo tanto, podemos reemplazar dichas ecuaciones de estado para electrones en las relaciones radio y masa con respecto a la densidad central, y también en la expresión masa-radio de los dos capítulos anteriores, además de los resultados numéricos de Lane-Emden resumidos en las raíces x_1 y $x_1^2 |\Theta(x'_1)|$ de la tabla 9.1, obteniendo las siguientes expresiones que se compararán gráficamente⁹:

1. *Caso no relativista, baja densidad* ($\gamma = 5/3$ y $\rho_c \ll 10^9 [kg/m^3]$). Aquí usamos la constante K para electrones dada en (D.86)

- *Radio:* Reemplazando K en (9.142), tenemos la siguiente relación radio-densidad central:

$$R = \left(\frac{3^{2/3} \cdot \pi^{1/3}}{8} \frac{\hbar^2}{G m_e m_u^{5/3}} \right)^{1/2} x_1 \mu_e^{-5/6} \rho_c^{-1/6} \quad (9.239)$$

$$\approx 1.1216 \cdot 10^4 \left[\frac{\rho_c}{10^9 [kg/m^3]} \right]^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} [km]. \quad (9.240)$$

- *Masa:* Reemplazando K en (9.143), tenemos la siguiente relación masa-densidad central:

$$M = 4\pi \left(\frac{3^{2/3} \pi^{1/3}}{8} \frac{\hbar^2}{G m_e m_u^{5/3}} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta(x'_1)| \mu_e^{-5/2} \rho_c^{1/2} \quad (9.241)$$

$$\approx 1.5687 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/2} \rho_c^{1/2} M_\odot \quad (9.242)$$

$$\approx 0.4961 \cdot \left[\frac{\rho_c}{10^9 [kg/m^3]} \right]^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/2} M_\odot. \quad (9.243)$$

Y reemplazando K en (9.144), obtenemos la siguiente relación masa-radio:

$$M = \frac{3^2 \pi^2}{2^7} \left(\frac{\hbar^2}{G m_e m_u^{5/3}} \right)^3 x_1^3 x_1^2 |\Theta(x'_1)| \mu_e^{-5} R^{-3} \quad (9.244)$$

$$\approx 7.001 \cdot 10^{11} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} \left[\frac{R}{1 [km]} \right]^{-3} M_\odot \quad (9.245)$$

$$\approx 0.7001 \cdot \left[\frac{R}{10^4 [km]} \right]^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} M_\odot. \quad (9.246)$$

Recordemos que debido a la discusión de la sección (9.4.5), en este caso tendremos que $MV = cte$, es decir, el volumen de una enana blanca es inversamente proporcional a su masa. Esta afirmación proviene del hecho que la estrella se soporta contra el colapso gravitatorio debido a la presión de degeneración de los electrones. Éstos deben estar más cercanamente confinados (menor volumen) para generar una presión de degeneración más grande (de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli), necesaria para soportar una estrella más masiva.

2. *Caso ultra-relativista, alta densidad* ($\gamma = 4/3$ y $\rho_c \gg 10^9 [kg/m^3]$). Aquí usamos la constante K para electrones dada en (D.98).

⁹En las relaciones mostradas, se ha usado como normalización el radio solar $R_\odot = 6.955 \cdot 10^8 [m]$ y la masa solar $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30} [kg]$.

- *Radio*: Reemplazando K en (9.141), tenemos la siguiente relación radio-densidad central:

$$R = \left(\frac{3^{1/3}}{4\pi^{1/3}} \frac{\hbar c}{G m_u^{4/3}} \right)^{1/2} x_1 \mu_e^{-2/3} \rho_c^{-1/3} \quad (9.247)$$

$$\approx 3.3461 \cdot 10^4 \left[\frac{\rho_c}{10^9 [kg/m^3]} \right]^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} [km], \quad (9.248)$$

- *Masa*: Para este valor del índice politrópico, tenemos que la masa, denominada de Chandrasekhar, representa un valor límite (ver sección (9.5.3)), es independiente tanto de la densidad central como del radio de la estrella, y su valor se obtendrá reemplazando K en (9.228) ó (9.140):

$$M_{ch} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G m_u^{4/3}} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta(x'_1)| \mu_e^{-2} \quad (9.249)$$

$$\approx 1.4562 \cdot \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} M_\odot, \quad (9.250)$$

de donde vemos que la masa de Chandrasekhar depende únicamente de la composición de la enana blanca a través del peso molecular medio por electrón μ_e . Para estrellas compuestas de helio o carbono, donde $\mu_e = 2$, su valor es $M_{ch} \approx 1.45 M_\odot$.

3. *Ec. de estado de Fermi exacta*. En este caso usamos los resultados obtenidos en la sección (9.5).

- *Radio*: Reemplazando las constantes A (9.158) y B (9.159) para el caso de electrones en la definición de a (9.169), y ésta en la expresión para el radio (9.174), tenemos la siguiente relación del radio con el parámetro y_0 y el radio adimensional η_1 :

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{cG}} \frac{\hbar^{3/2}}{m_e m_u \mu_e} \left(\frac{\eta_1}{y_0} \right) \quad (9.251)$$

$$= 3.8849 \cdot 10^3 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-1} \left(\frac{\eta_1}{y_0} \right) [km]. \quad (9.252)$$

- *Masa*: Podemos expresar la masa de las enanas blancas en términos de la masa límite de Chandrasekhar (9.250) mediante la relación (9.229). Al reemplazar los valores correspondientes de la tabla 9.1, obtenemos la siguiente relación de la masa con el valor característico $\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|$:

$$M = \frac{\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}{x_1^2 \|\Theta'_3(x_1)\|} M_{ch} \quad (9.253)$$

$$\approx 0.72122 \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} \eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\| M_\odot. \quad (9.254)$$

- *Densidad central*: Reemplazando el valor de B dado por (9.159) (para electrones) en (9.184), obtenemos la siguiente relación de la densidad central con el parámetro y_0 :

$$\rho_c = \frac{m_e^3 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} m_u \mu_e (y_0^2 - 1)^{3/2} \quad (9.255)$$

$$\approx 1.9478 \cdot 10^9 \left(\frac{\mu_e}{2} \right) (y_0^2 - 1)^{3/2} [kg/m^3]. \quad (9.256)$$

Gráficos y comparación entre modelos exactos y aproximados

A continuación, puede apreciarse el gráfico 9.3, donde se muestra la relación masa-radio para enanas blancas (con el valor característico para el peso molecular medio por electrón $\mu_e = 2$), obtenida directamente por las relaciones provenientes de las ecuaciones de estado aproximadas (9.245) y (9.250), además de la hallada a partir de la solución numérica de la ecuación de estado de Fermi exacta por medio del método descrito en la subsección 9.5.4, donde se usan los valores de (9.254) y (9.252).

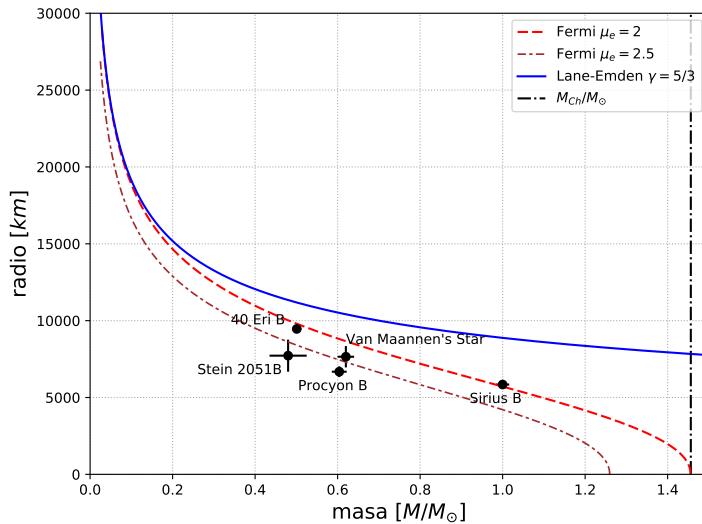


Figura 9.3: Relación masa-radio para enanas blancas compuestas un gas de electrones completamente degenerado en los casos límite no relativista ($\gamma = 5/3$) y ultra relativista ($\gamma = 4/3$).

En primer lugar se debe notar que la masa y el radio obtenidas de la relación exacta para enanas blancas, son inversamente proporcional para todo valor del radio. Además, en la región de radios grandes, la curva exacta se superpone a la correspondiente al caso no relativista, por lo que ésta es una buena aproximación para radios de enanas blancas mayores a unos 15000 km. (2 % del radio solar), que corresponden a masas del orden de un 20 % de la correspondiente al Sol. Estos cantidades representan entonces los valores típicos para estos parámetros en este tipo de estrellas.

Por otra parte, cuando el radio de una enana blanca comienza a disminuir por debajo de unos 10000 km (1.5 % del radio solar), la curva no relativista comienza a diferenciarse notoriamente del resultado exacto, indicando que se está entrando en el rango de validez de la aproximación ultra relativista. Ésta es una buena aproximación para radios menores que unos 5000 km. (similar al radio de la Tierra), pues predice que la masa tiende al valor límite de la masa de Chandrasekhar M_{ch} dado en (9.250). Nótese que, mediante la curva exacta, se observa claramente lo mencionado en la sección 9.5.3: la masa de Chandrasekhar sólo se alcanza cuando el radio estelar tiende a cero, que es cuando el parámetro y_0 de la ecuación de estructura de Fermi tiende a infinito.

La última afirmación del párrafo anterior implica que la densidad media de la estrella, y por ende la densidad central, (recordar que debido a (9.195) ambas cantidades son proporcionales) tenderán a infinito, por lo que es relevante conocer qué relación existe entre la masa y densidad central de las enanas blancas. Esto se representa en el gráfico (9.4), donde se muestra dicha

relación obtenida directamente por las relaciones provenientes de las ecuaciones de estado aproximadas (9.242) y (9.250), además de la hallada a partir de la solución numérica de la ecuación de estado de Fermi exacta por medio del método descrito en la subsección 9.5.4, donde se usan los valores (9.254) y (9.256).

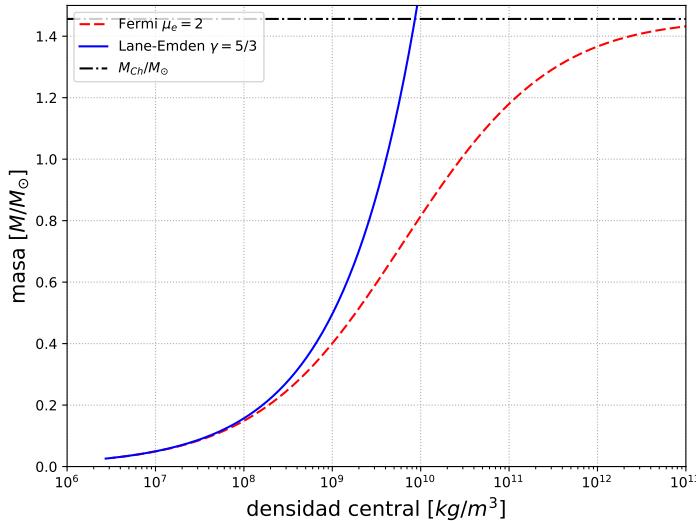


Figura 9.4: Relación masa-densidad central para enanas blancas compuestas un gas de electrones completamente degenerado en los casos límite no relativista ($\gamma = 5/3$) y ultra relativista ($\gamma = 4/3$).

La primera característica relevante que se observa de la curva exacta es que la masa es monótonamente creciente con respecto a la densidad central. Aún más importante es el hecho que aquí se pueden ver claramente los rangos de validez de las aproximaciones efectuadas: el caso no relativista se determinó haciendo la aproximación $\rho_c \ll 10^9 [kg/m^3]$, mientras que el ultra relativista se obtuvo para $\rho_c \gg 10^9 [kg/m^3]$, y consistemente, ambos casos límite se superponen a la curva exacta en sus dominios correspondientes. Sin embargo, la curva de la aproximación no relativista es ya muy cercana a la exacta tan sólo para un orden de magnitud menor de densidades centrales que la densidad crítica, mientras que la aproximación ultra relativista posee el mismo margen de exactitud para más de tres órdenes de magnitud por encima del mismo valor.

La razón física del comportamiento anterior se puede entender del siguiente modo: en el rango no relativista, es válida la relación masa volumen $MV = \text{cte}$ ((9.146)), por lo que agregando cada vez más masa a enanas blancas de baja densidad, dichos astros se encogerían proporcionalmente, pero sin límite: eventualmente alcanzarían $R \rightarrow 0$ y $M \rightarrow \infty$ (ver gráfico 9.3), resultando por tanto en una densidad central claramente divergente (ver gráfico 9.4). Pero este comportamiento no ocurre debido a que cuando las densidades en el interior de estas estrellas exceden los $10^9 [kg/m^3]$, los electrones se encuentran tan cercanamente confinados que, debido al principio de exclusión de Pauli, estos obtendrían un momentum tal que daría como resultado velocidades cercanas a las de la luz. Por esta razón es que se entra en el rango relativista para densidades mayores que la crítica, en donde se observa (ver gráfico 9.4) que la masa se aproxima asintóticamente a la de Chandrasekhar sólo cuando $\rho_c \rightarrow \infty$, que es consistente con el hecho antes mencionado que el radio debe ser nulo para que se logre dicha condición.

9.6.2. Estrellas de neutrones

Según el argumento de la sección previa, a medida que la densidad de una enana blanca se incrementa en el dominio relativista, se debería obtener la masa límite de Chandrasekhar. Pero ésta nunca se alcanza, pues antes de ello las extremas densidades presentes en el núcleo estelar producen un tipo de reacción nuclear conocido como decaimiento beta inverso¹⁰:



lo que cambia la composición de la enana blanca antes de su colapso total a una compuesta fundamentalmente por neutrones, donde el nuevo estado de equilibrio se alcanza debido a la presión de degeneración de estos fermiones, formándose así las estrellas de neutrones. Por lo tanto, éstas se pueden modelar en primera aproximación como un gas ideal de neutrones completamente degenerado, donde la masa total se debe únicamente sólo a ellos. En estas circunstancias, es válida la misma ecuación de estado de Fermi exacta y sus aproximaciones politrópicas no relativista ($\gamma = 4/3$) y ultra relativista ($\gamma = 5/3$), en donde sólo cambian las constantes referidas a neutrones en vez de a electrones.

Masas y Radios

Siguiendo el mismo desarrollo que para enanas blancas, podemos obtener las siguientes relaciones para los radios y masas de estrellas de neutrones, en sus dos aproximaciones características delimitadas por el valor de x_F en (D.77):

1. *Caso no relativista, baja densidad* ($\gamma = 5/3$ y $\rho_c \ll 6 \cdot 10^{18} [kg/m^3]$). Aquí usamos la constante K para neutrones dada en (D.87).

- *Radio:* Reemplazando K en (9.142), tenemos la siguiente relación radio-densidad central:

$$R = \left(\frac{3^{2/3} \cdot \pi^{1/3}}{8} \frac{\hbar^2}{G m_n^{5/3}} \right)^{1/2} x_1 \rho_c^{-1/6} \quad (9.258)$$

$$\approx 14.633 \left[\frac{\rho_c}{10^{18} [kg/m^3]} \right]^{-1/6} [km]. \quad (9.259)$$

- *Masa:* Reemplazando K en (9.143), tenemos la siguiente relación masa-densidad central:

$$M = 4\pi \left(\frac{3^{2/3} \pi^{1/3}}{8} \frac{\hbar^2}{G m_n^{8/3}} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta(x'_1)| \rho_c^{1/2} \quad (9.260)$$

$$\approx 1.1015 \cdot 10^{-9} \rho_c^{1/2} M_\odot \quad (9.261)$$

$$\approx 1.1015 \cdot \left[\frac{\rho_c}{10^{18} [kg/m^3]} \right]^{1/2} M_\odot. \quad (9.262)$$

Y reemplazando K en (9.144), obtenemos la siguiente relación masa-radio:

$$M = \frac{3^2 \pi^2}{2^7} \left(\frac{\hbar^2}{G m_n^{8/3}} \right)^3 x_1^3 x_1^2 |\Theta(x'_1)| R^{-3} \quad (9.263)$$

$$\approx 3.4518 \cdot \left[\frac{R}{10 [km]} \right]^{-3} M_\odot. \quad (9.264)$$

¹⁰Esta reacción nuclear es predominante cuando las densidades centrales de las enanas blancas superan los $4 \cdot 10^{14} [kg/m^3]$, mientras que la presión de degeneración es dominada por neutrones para densidades mayores a $4 \cdot 10^{15} [kg/m^3]$. Para detalles, ver capítulo 3 del texto de Shapiro [55].

2. *Caso ultra-relativista, alta densidad* ($\gamma = 4/3$ y $\rho_c \gg 6 \cdot 10^{18} [kg/m^3]$). Aquí usamos la constante K para neutrones dada en (D.99)

- *Radio:* Reemplazando K en (9.141), tenemos la siguiente relación radio-densidad central:

$$R = \left(\frac{3^{1/3}}{4\pi^{1/3}} \frac{\hbar c}{G m_n^{4/3}} \right)^{1/2} x_1 \rho_c^{-1/3} \quad (9.265)$$

$$\approx 52.813 \left[\frac{\rho_c}{10^{18} [kg/m^3]} \right]^{-1/3} [km]. \quad (9.266)$$

- *Masa:* La masa de este caso límite, denominada de Chandrasekhar, se obtendrá reemplazando K en (9.228) ó (9.140):

$$M_{ch} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G m_n^{4/3}} \right)^{3/2} x_1^2 |\Theta(x'_1)| \mu_e^{-2} \quad (9.267)$$

$$\approx 5.7252 M_\odot, \quad (9.268)$$

de donde vemos que es aproximadamente 4 veces mayor que la correspondiente masa de Chandrasekhar para enanas blancas (9.250), considerando $\mu_e = 2$.

3. *Ec. de estado de Fermi exacta.* Aquí usamos los resultados obtenidos en la sección (9.5).

- *Radio:* Reemplazando las constantes A (9.158) y B (9.159) para el caso de neutrones en la definición de a (9.169), y ésta en la expresión para el radio (9.174), tenemos la siguiente relación del radio con el parámetro y_0 y el radio adimensional η_1 :

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{cG}} \frac{\hbar^{3/2}}{m_n^2} \left(\frac{\eta_1}{y_0} \right) \quad (9.269)$$

$$= 4.18945 \left(\frac{\eta_1}{y_0} \right) [km]. \quad (9.270)$$

- *Masa:* Notando que aquí también es válido (9.254), pero usando el límite de Chandrasekhar para neutrones (9.268), podemos encontrar que:

$$M = \frac{\eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\|}{x_1^2 \|\Theta'_3(x_1)\|} M_{ch}. \quad (9.271)$$

$$= 2.83673 \eta_1^2 \|\phi'(\eta_1)\| M_\odot. \quad (9.272)$$

- *Densidad central:* Reemplazando el valor de B dado en (9.159) para neutrones, en (9.184), obtenemos la siguiente relación de la densidad central con el parámetro y_0 :

$$\rho_c = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} (y_0^2 - 1)^{3/2} \quad (9.273)$$

$$= 6.10656 \cdot 10^{18} (y_0^2 - 1)^{3/2} [kg/m^3]. \quad (9.274)$$

Gráficos

En el gráfico siguiente se muestra la relación masa-radio para estrellas de neutrones, obtenida directamente por las relaciones provenientes de las ecuaciones de estado aproximadas (9.264) y (9.268), además de la hallada a partir de la solución numérica de la ecuación de estado de Fermi exacta por medio del método descrito en la subsección 9.5.4, donde se usan los valores (9.272) y (9.270).

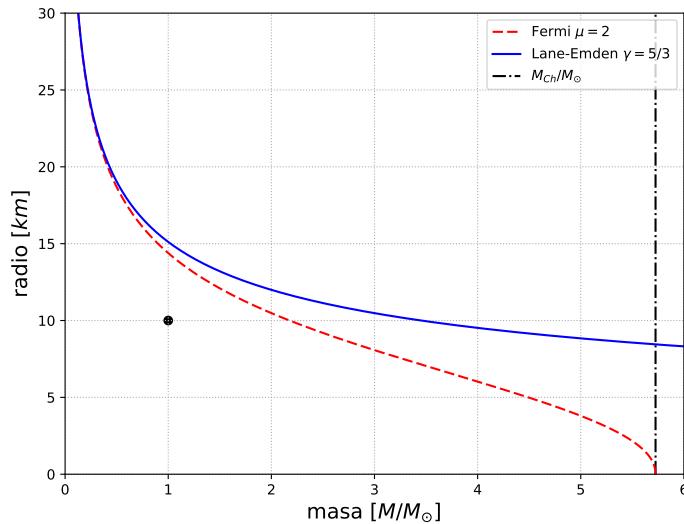


Figura 9.5: Relación masa-radio para estrellas de neutrones compuestas un gas de neutrones completamente degenerado en los casos límite no relativista ($\gamma = 5/3$) y ultra relativista ($\gamma = 4/3$). Se destaca, además, el valor más nombrado en la literatura para la masa y el radio de estas estrellas ($1 M_\odot$, 10[km]).

Evidentemente, este gráfico corresponde sólo a un reescalamiento del correspondiente a enanas blancas 9.3, siendo válidos los mismos comentarios hechos allí. Por tanto, lo único digno de mencionar es que, si bien las masas típicas de las estrellas de neutrones están en torno a una masa solar, sus radios típicos son unas 1000 veces menores que los correspondientes a las enanas blancas, siendo tan sólo de algunas decenas de kilómetros.

Por otra parte, en el siguiente gráfico, se muestra la relación masa-densidad obtenida directamente por las relaciones provenientes de las ecuaciones de estado aproximadas (9.261) y (9.268), además de la hallada a partir de la solución numérica de la ecuación de estado de Fermi exacta por medio del método descrito en la subsección 9.5.4, donde se usan los valores de (9.272) y (9.274).

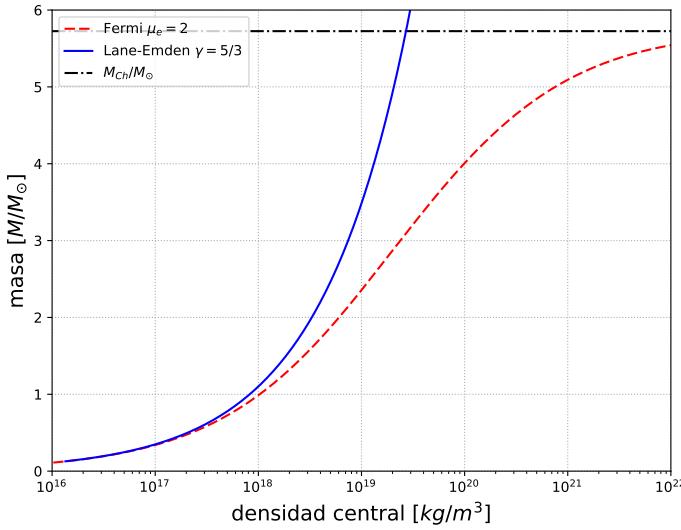


Figura 9.6: Relación masa-densidad central estrellas de neutrones compuestas un gas de neutrones completamente degenerado en los casos límite no relativista ($\gamma = 5/3$) y ultra relativista ($\gamma = 4/3$)

Obviamente, este gráfico también corresponde a un reescalamiento del correspondiente al de las enanas blancas (ver figura 9.4). Los radios extremadamente pequeños que exhiben las estrellas de neutrones mostrados en la figura 9.5, implican necesariamente que su densidad debe ser gigantesca: aquí se puede ver claramente que sus densidades centrales típicas son del orden de $\rho_c \approx 10^{18} [\text{kg}/\text{m}^3]$, que corresponden al orden de magnitud de las densidades de los núcleos atómicos. Esto se puede entender al pensar que estos astros están compuestos prácticamente sólo de neutrones, tan cercanamente confinados que prácticamente no hay espacio entre ellos: es en este sentido que las estrellas de neutrones son como un n\'ucleo at\'omico gigante.

Capítulo 10

Equilibrio Estelar Relativista

10.1. Métrica de Schwarzschild interna

10.1.1. Ecuaciones de Einstein para un fluido ideal

En el presente capítulo, se estudiará una solución para las ecuaciones de campo de Einstein (3.28) dentro de una estrella esférica y estática en equilibrio hidrostático, extendiendo el análisis del capítulo anterior para incluir los efectos de Relatividad General. Esto complementa la solución en el vacío de Schwarzschild encontrada en la sección (3.5), pues a diferencia de ella, que describe el campo gravitacional *fuera* de una masa esférica y simétrica, ahora podremos describir el espacio-tiempo *dentro* de dicha distribución de materia, a través de la *métrica de Schwarzschild interna*.

Tensor energía-momentum de un fluido ideal

Para encontrar la solución interna se supondrá, al igual que en el caso de Schwarzschild, que la métrica para un espaciotiempo esférico y estático está dada por (3.45), pero sin la dependencia temporal. Además, se modelará la materia dentro de la estrella como un fluido ideal. De este modo, el lado derecho de las ecuaciones de campo (3.28) estará descrito por la distribución de energía dentro de la estrella, dada a través del tensor de energía-momentum de un fluido ideal:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (10.1)$$

Tensor de
energía-
momentum de
un fluido ideal

La principal diferencia entre (10.1) y (1.31) es la generalización de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, usada en Relatividad Especial, a la métrica general del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, usada en Relatividad General. Adicionalmente, consideramos que la presión y densidad propia de masa dependen sólo de la coordenada r , es decir, $P = P(r)$ y $\rho = \rho(r)$, ya que la distribución es esféricamente simétrica y estática.

Ahora bien, como estamos considerando el caso estático, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad de cada elemento del fluido, en coordenadas de curvatura, se anulan:

$$u^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (u^0, 0, 0, 0). \quad (10.2)$$

Dado que el elemento de línea se escribe en función de la métrica de acuerdo a (3.1), es posible obtener la siguiente identidad para la cuadrivelocidad:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \equiv c^2 = g_{00}(u^0)^2 \quad \Rightarrow \quad u^0 = c \exp^{-\frac{1}{2}\alpha(r)}. \quad (10.3)$$

Bajando el índice con la métrica (3.45), obtenemos

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu = g_{00} u^0 = c e^{\frac{1}{2}\alpha(r)}. \quad (10.4)$$

Por lo tanto, reemplazando la métrica y las componentes de la cuadrvíelocidad (10.2) y (10.4) en el tensor energía-momentum (10.1), tenemos que sólo sus cuatro elementos diagonales serán no nulos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2 e^\alpha, \\ T_{11} &= P e^\beta, \\ T_{22} &= P r^2, \\ T_{33} &= T_{22} \operatorname{sen}^2 \theta = P r^2 \operatorname{sen}^2 \theta, \end{aligned} \quad (10.5)$$

es decir,

$$T_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(\rho c^2 e^\alpha, P e^\beta, P r^2, P r^2 \operatorname{sen}^2 \theta). \quad (10.6)$$

Tensor de
energía-
momentum de
un fluido ideal
estático

De aquí se observa que la cuarta componente sólo difiere en un factor de la tercera, $T_{33} = T_{22} \operatorname{sen}^2 \theta$. Además, tomando la traza de (10.1), usando (10.3), y la definición de métrica inversa, tenemos que

$$T := T_\mu^\mu = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu g^{\mu\nu} - P g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (10.7)$$

$$= \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) c^2 - P \delta_\mu^\mu \quad (10.8)$$

$$= \rho c^2 - 3P. \quad (10.9)$$

Ecuaciones a resolver y procedimiento

Tenemos todos los elementos necesarios para determinar el lado derecho de las ecuaciones de campo (3.28). Reemplazando el tensor energía-momentum de las ecs. (10.5), su traza de (10.7), y la métrica de (3.45), notamos primero que $R_{\mu\nu} = 0, \forall \mu \neq \nu$. Luego, las ecuaciones no nulas serán las componentes diagonales:

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) e^\alpha, \quad (10.10)$$

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T \right) = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) e^\beta, \quad (10.11)$$

$$R_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T \right) = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) r^2 \quad (10.12)$$

$$R_{33} = R_{22} \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (10.13)$$

Ahora, el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores se calcula a partir a partir de las componentes de la métrica (3.45). Esto ya se hizo en las ecuaciones (3.53)-(3.56), por lo que aplicándolas al caso estático aquí considerado, todas las derivadas temporales se anulan. Entonces, tendremos 3 ecuaciones de campo relevantes (ya que R_{33} sólo difiere en un factor

$\operatorname{sen}^2 \theta$ de R_{22}):

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{\alpha-\beta} \left[\alpha'' - \frac{\beta' \alpha'}{2} + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right] = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) e^\alpha, \quad (10.14)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \left[\alpha'' - \frac{\beta' \alpha'}{2} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right] = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) e^\beta, \quad (10.15)$$

$$R_{22} = 1 - e^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{2} r \beta' + \frac{1}{2} r \alpha' \right] = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) r^2. \quad (10.16)$$

Obtención del coeficiente métrico β

Ahora resolveremos el sistema de ecuaciones anterior. Primero despejaremos el coeficiente de la métrica $\beta(r)$ realizando la siguiente operación sobre los coeficientes métricos:

$$\frac{1}{2} e^{-\alpha} R_{00} + \frac{1}{2} e^{-\beta} R_{11} + r^{-2} R_{22} = e^{-\beta} \left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho. \quad (10.17)$$

La relación anterior implica, multiplicándola por r^2 , para después integrar de $r' = 0$ a $r' = r$, que

$$e^{-\beta} \beta' r - e^{-\beta} + 1 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2, \quad (10.18)$$

$$\frac{d}{dr} (e^{-\beta} r) = 1 - \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2, \quad (10.19)$$

$$\int_0^r \frac{d}{dr'} \left(e^{-\beta(r')} r' \right) dr' = \int_0^r \left(1 - \frac{8\pi G}{c^2} \rho(r') r'^2 \right) dr', \quad (10.20)$$

$$r e^{-\beta(r)} - \lim_{r \rightarrow 0} r e^{-\beta(r)} = r - \int_0^r \frac{8\pi G}{c^2} \rho(r') r'^2 dr', \quad (10.21)$$

$$e^{-\beta(r)} = 1 + \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow 0} r e^{-\beta(r)} - \frac{1}{r} \int_0^r \frac{8\pi G}{c^2} \rho(r') r'^2 dr', \quad (10.22)$$

$$e^{\beta(r)} = \left(1 + \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow 0} r e^{-\beta(r)} - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r} \right)^{-1}. \quad (10.23)$$

En el último paso se ha usado la misma definición de la función de masa $\mathcal{M}(r)$ que en caso newtoniano, es decir, (9.5).

Asumimos que el coeficiente métrico $g_{11} = -B = -e^\beta$ es *no singular* en $r = 0$, de modo que $\lim_{r \rightarrow 0} r e^{-\beta(r)} = 0$, y así, el segundo coeficiente métrico será finalmente:

$$B(r) = e^{\beta(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r}}. \quad (10.24)$$

Obtención del coeficiente métrico α'

Para hallar el otro coeficiente métrico $\alpha(r)$, es útil usar el hecho que la derivada covariante del tensor energía-momentum es idénticamente nula (ver (3.34)):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} = 0. \quad (10.25)$$

La relación anterior es la generalización a campos gravitacionales no nulos de la ley de conservación de energía y momentum de un sistema. Es consecuencia directa de las ecuaciones de campo (3.28) y representa la versión relativista de las ecuaciones de continuidad y de Euler para un fluido ideal. Para evaluar las ecuaciones contenidas en la relación anterior, se necesitan los símbolos de Christoffel, que fueron determinados en (3.50)-(3.52). Además, se requiere el tensor de energía-momentum con los dos índices contravariantes, subiendo los índices de (10.6):

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}T_{\lambda\rho} = \text{diag}\left(\rho c^2 e^{-\alpha}, Pe^{-\beta}, \frac{P}{r^2}, \frac{P}{r^2 \sin^2 \theta}\right). \quad (10.26)$$

Entonces, de los símbolos de Christoffel no nulos se pueden determinar los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación de conservación (10.25):

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\lambda\mu} = \Gamma_{01}^0 T^{1\mu} + \Gamma_{11}^1 T^{1\mu} + \Gamma_{21}^2 T^{1\mu} + \Gamma_{31}^3 T^{1\mu} + \Gamma_{32}^3 T^{2\mu} \quad (10.27)$$

$$= T^{1\mu} \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2} + \frac{2}{r} \right) + T^{2\mu} (\cot \theta), \quad (10.28)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} = \Gamma_{00}^\mu T^{00} + \Gamma_{11}^\mu T^{11} + \Gamma_{22}^\mu T^{22} + \Gamma_{33}^\mu T^{33} \quad (10.29)$$

$$= \rho c^2 e^{-\alpha} \Gamma_{00}^\mu + Pe^{-\beta} \Gamma_{11}^\mu + \frac{P}{r^2} \Gamma_{22}^\mu + \frac{P}{r^2 \sin^2 \theta} \Gamma_{33}^\mu. \quad (10.30)$$

Reemplazando lo anterior en (10.25), es posible evaluar la componente $\mu = 1$:

$$0 = \nabla_\nu T^{1\nu} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \cancel{\frac{\partial T^{12}}{\partial x^2}}^0 + \cancel{\frac{\partial T^{13}}{\partial x^3}}^0 + \Gamma_{v\lambda}^\nu T^{\lambda 1} + \Gamma_{v\lambda}^1 T^{\lambda 1} \quad (10.31)$$

$$= \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \left\{ T^{11} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{2} + \frac{2}{r} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \rho c^2 e^{-\alpha} \Gamma_{00}^1 + Pe^{-\beta} \Gamma_{11}^1 + \frac{P}{r^2} \Gamma_{22}^1 + \frac{P}{r^2 \sin^2 \theta} \Gamma_{33}^1 \right\} \quad (10.32)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (Pe^{-\beta}) + Pe^{-\beta} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{2} + \frac{2}{r} \right)$$

$$+ \rho c^2 e^{-\alpha} \left(\frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \right) + Pe^{-\beta} \left(\frac{\beta'}{2} \right)$$

$$+ \frac{P}{r^2} (-re^{-\beta}) + \frac{P}{r^2 \sin^2 \theta} (-r^2 \sin^2 \theta e^{-\beta}) \quad (10.33)$$

$$= e^{-\beta} \left[P' + \frac{P\alpha'}{2} + \frac{\rho c^2 \alpha'}{2} \right]. \quad (10.34)$$

Por lo tanto, al despejar α' se obtiene¹:

$$\alpha' = -2 \frac{P'}{P + \rho c^2} = -2 \frac{dP/dr}{P + \rho c^2}. \quad (10.35)$$

Obtención de la ecuación T.O.V. para P'

A continuación, reemplazando la ecuación (10.24) para β , y la recién obtenida (10.35) para α' , en la componente R_{22} del tensor de Ricci, ec. (10.16), podemos notar que obtenemos una ecuación sin ambos coeficientes métricos, pudiendo determinar así $P' := dP/dr$:

¹Es posible mostrar que esta expresión se reduce, en el caso no relativista, a la ecuación de equilibrio hidrostático en un potencial gravitacional ϕ . Ver la sección (10.2.2) para más detalles.

$$R_{22} = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) r^2 \quad (10.36)$$

$$= 1 - e^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{2} r \beta' + \frac{1}{2} r \alpha' \right] \quad (10.37)$$

$$= 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right)}_{\text{ec. (10.24)}} \left[1 - \frac{1}{2} r \underbrace{\frac{d}{dr} \left\{ -\ln \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \right\}}_{\text{ec. (10.24)}} + \frac{1}{2} r \underbrace{\left(\frac{-2P'}{P + \rho c^2} \right)}_{\text{ec. (10.35)}} \right] \quad (10.38)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \left[1 + \frac{1}{2} r \left\{ \frac{1}{1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r}} \left(\frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r^2} - \frac{2G\mathcal{M}'}{c^2 r} \right) \right\} - \frac{r}{P + \rho c^2} P' \right] \quad (10.39)$$

$$= \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} - \frac{1}{2} r \left(\frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r^2} - \frac{2G}{c^2 r} \underbrace{\frac{4\pi r^2 \rho}{c^2}}_{\text{ec. (9.6)}} \right) + \left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \frac{r}{P + \rho c^2} P'. \quad (10.40)$$

De este modo, despejando P' , podemos escribir

$$\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \frac{r}{P + \rho c^2} P' = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) r^2 - \frac{G\mathcal{M}}{c^2 r} - \cancel{\frac{4\pi G r^2 \rho}{c^2}}, \quad (10.41)$$

$$\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \frac{P'}{1 + \frac{P}{\rho c^2}} \frac{r}{\rho c^2} = -\frac{G\mathcal{M}}{c^2} \left(4\pi \frac{Pr^2}{c^2 \mathcal{M}} + \frac{1}{r} \right), \quad (10.42)$$

$$\left(1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right) \frac{P'}{1 + \frac{P}{\rho c^2}} = -\frac{G\mathcal{M}\rho}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3}{c^2 \mathcal{M}} P \right). \quad (10.43)$$

Así, hemos hallado P' en función de tres campos escalares conocidos: la presión $P(r)$, la densidad propia de masa $\rho(r)$ y la cantidad (sin interpretación de momento) $\mathcal{M}(r)$, llegando a la famosa *ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*²:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\rho c^2} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (10.44)$$

Ecuación de
T.O.V.

Obtención del coeficiente métrico α

Notemos ahora que podemos reemplazar la ecuación (10.44) en la expresión para α' (10.35), y así obtener la forma explícita del coeficiente α , integrando desde $r' = r$ a $r' \rightarrow \infty$:

$$\alpha' = -\frac{2}{\rho c^2} \frac{1}{1 + \frac{P}{\rho c^2}} \frac{dP}{dr} \quad (10.45)$$

$$= \frac{2}{\rho(r)c^2} \frac{1}{1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}} \frac{G\mathcal{M}(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\rho c^2} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \quad (10.46)$$

$$= \frac{2}{c^2} \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \left[\frac{\mathcal{M}(r)c^2 + 4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (10.47)$$

²Esta expresión fue derivada por Oppenheimer y Volkoff en 1939 (ver [48]), en base a trabajos anteriores de R. Tolman de los años 1934 y 1939.

Equivalentemente, (10.47) puede encontrarse considerando la combinación $e^{-\alpha}R_{00}/2+e^{-\beta}R_{11}/2-R_{22}/r^2$ a partir de (10.14)-(10.16) y luego usando (10.24). Por lo tanto,

$$\int_r^\infty \alpha'(r') dr' = \int_r^\infty \frac{2G}{c^2 r'^2} \left[\mathcal{M}(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r')}{c^2 r'} \right]^{-1} dr'. \quad (10.48)$$

Imponiendo la condición de borde: $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 0$, que es equivalente a $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = 1$ (pues $g_{00} = A = e^\alpha$), es decir, suponer que la métrica tiende asintóticamente a la métrica plana de Minkowski en el infinito, obtenemos finalmente³:

$$\boxed{\alpha(r) = -\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \left[\mathcal{M}(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r')}{c^2 r'} \right]^{-1}}, \quad (10.49)$$

$$\boxed{A(r) = \exp \left[-\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \left[\mathcal{M}(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r')}{c^2 r'} \right]^{-1} \right].} \quad (10.50)$$

10.1.2. Métrica de Schwarzschild interior

En resumen, a partir de las ecuaciones de Einstein (3.28) en un espacio tiempo esféricamente simétrico y estático, con un tensor de energía-momentum correspondiente a un fluido ideal de presión $P(r)$ y densidad $\rho(r)$ distribuido en una región $r < R$ (estrella), se han hallado los coeficientes de la métrica (3.45) α y β (dados por (10.49) y (10.24), respectivamente) en el interior de una estrella compuesta de dicho fluido, que es lo que se conoce como *métrica de Schwarzschild interior*, determinando la geometría del espacio-tiempo.

Nótese que para poder determinar completamente la métrica, se requiere conocer previamente, $\forall r < R$, los tres campos escalares que describen la estructura de la estrella: $\rho(r)$, $P(r)$, $\mathcal{M}(r)$. Para ello, se debe resolver en primer lugar las ecuaciones de estructura estelar que las determina, lo que analizaremos en la siguiente sección.

Schwarzschild interior y exterior

Un primer test de consistencia para los coeficientes métricos hallados, es la verificación que la solución (métrica) de Schwarzschild interior se reduce a la conocida solución de Schwarzschild exterior (3.76). Para ello, se debe notar que la distribución de masa caracterizada por $\rho(r)$, $P(r)$ y $\mathcal{M}(r)$ está limitada a un cierto rango $r < R$ (con R definida como el radio de la estrella, de la misma forma que en el caso newtoniano). En cambio, el exterior de la estrella $r > R$ estará caracterizado por

$$\rho(r) = 0, \quad P(r) = 0, \quad \mathcal{M}(r) = \mathcal{M}(R) = M, \quad (10.51)$$

en donde M sería el análogo relativista de la masa total de la estrella. Luego, el primer coeficiente métrico g_{00} queda determinado al imponer las condiciones (10.51) en (10.49):

$$A(r) = e^{\alpha(r)} = \exp \left[-\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{M}{1 - \frac{2GM}{c^2 r'}} \right], \quad r > R. \quad (10.52)$$

³Note que esta condición no restringe la generalidad de la solución, puesto que se puede implementar por medio de un simple reescalamiento de la coordenada temporal t , de modo tal que ésta coincida con el tiempo propio medido por observadores estáticos en el infinito.

Mediante la sustitución

$$x = 1 - \frac{2GM}{c^2r} \Rightarrow dx = \frac{2GM}{c^2r^2} dr, \quad (10.53)$$

y dado que $r \rightarrow \infty \Rightarrow x = 1$, obtenemos:

$$A(x) = \exp \left[- \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \right] = \exp [\ln x - \ln 1] = x. \quad (10.54)$$

Volviendo a la variable original r , encontramos:

$$A(r) = e^{\alpha(r)} = 1 - \frac{2GM}{c^2r} \quad r > R. \quad (10.55)$$

De forma análoga, el segundo coeficiente métrico g_{11} se determina al imponer (10.51) en (10.24):

$$B(r) = e^{\beta(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2r}}, \quad r > R. \quad (10.56)$$

Por lo tanto, el elemento de línea de la métrica de Schwarzschild interior se reduce a:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r > R. \quad (10.57)$$

Esta solución es precisamente la solución (métrica) de Schwarzschild en el vacío (solución exterior) (3.76), verificando así que la cantidad $M := \mathcal{M}(R)$ es la masa total de la estrella.

10.2. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

10.2.1. Ecuaciones de Estructura Estelar

Mientras se resolvían las ecuaciones de Einstein para hallar la solución de Schwarzschild exterior (antes de obtener la forma explícita de α), se obtuvo la ecuación (10.44), que determinaba el gradiente de presión en el interior de la estrella, en función de la coordenada radial r y los campos $\rho(r)$ y $\mathcal{M}(r)$. Esta ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff es de importancia fundamental para determinar un modelo estelar análogo al caso newtoniano descrito en el capítulo 9, pues representa una generalización de la ecuación (9.8) de equilibrio hidrostático newtoniano en Relatividad General. En efecto, en el límite no relativista, $P/\rho c^2 \ll 1$ y $G\mathcal{M}/rc^2 \ll 1$, por lo que (10.44) se reduce a (9.8), puesto que cada uno de los factores en paréntesis cuadrados se aproxima a 1.

Entonces, es posible determinar un modelo estelar siguiendo la analogía con el capítulo 9 (ver sección 9.2), a partir de las ecuaciones de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (10.44), ecuación de estado (9.9) y de masa (9.6):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\rho c^2} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{\mathcal{M}(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2r} \right]^{-1}, \quad (10.58)$$

Ecs. de
estructura
estelar

$$\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (10.59)$$

$$P(r) = P(\rho(r)). \quad (10.60)$$

Notemos que estas ecuaciones presentan la siguiente estructura:

$$P'(r) = P'(P(r), \rho(r), \mathcal{M}(r)), \quad (10.61)$$

$$\mathcal{M}'(r) = \mathcal{M}(\rho(r)), \quad (10.62)$$

$$P(r) = P(\rho(r)). \quad (10.63)$$

Así, de forma muy similar a la presentada en el caso newtoniano de la sección 9.2, tenemos tres ecuaciones para los campos escalares que determinan la estructura de la estrella (y a partir de las cuales es posible determinar la métrica). De ellas, dos son ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo cual se requerirán dos condiciones iniciales, dadas por las mismas expresiones que en la sección 9.2, aunque la interpretación de la primera de ellas (para \mathcal{M}) será diferente ahora (ya no es la “masa” dentro del radio r de la estrella, sino una magnitud que incluye tanto su masa-energía en reposo, como también a la energía del campo gravitacional que produce). Y al igual que en el capítulo 9, integraremos las tres ecuaciones simultáneamente desde el centro de la estrella hasta el sitio en que la presión y la densidad se anulen, definiendo así el radio de la estrella.

10.2.2. Propiedades de la ecuación TOV

Una propiedad que comparte la ec. (10.44) con su análogo newtoniano (9.8) es que también es monótonamente decreciente, pues la densidad también es definida positiva en este caso. Sin embargo, el gradiente de presión en la ecuación relativista es mayor que en la expresión newtoniana, pues el denominador es más pequeño, $(1 - 2G\mathcal{M}(r)/c^2 r) < 1$, y cada factor en el numerador es más grande: $(1 + P(r)/\rho c^2) > 1$ y $1 + 4\pi r^3 P(r)/\mathcal{M}(r)c^2 > 1$. Entonces, conforme $r \rightarrow 0$, la presión relativista crece más rápido que la newtoniana. Y dado que esto contribuye a incrementar los términos de la presión en el denominador, el gradiente de ésta será aún más grande conforme se vaya acercando al centro de la estrella. Podemos decir entonces que **la teoría de Relatividad General requiere (para mantener el equilibrio) campos más intensos que en la teoría de Newton, en el interior de una estrella**.

Este hecho también puede deducirse a partir de una ecuación derivada antes de llegar a la ecuación TOV: la expresión para α' (10.35). Primero, notemos que dicha ecuación se reduce a la expresión newtoniana de equilibrio hidrostático newtoniano en un potencial gravitacional ϕ . En efecto, en el límite no relativista, $\rho c^2 \gg P$. Luego, la ec. (10.35) se reduce a

$$\alpha' = (\ln A)' = \frac{A'}{A} \approx -2 \frac{dP/dr}{\rho c^2}. \quad (10.64)$$

Por otra parte, en el límite newtoniano, ver la ec. (3.19), el primer coeficiente métrico es

$$g_{00} = A = e^\alpha \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (10.65)$$

De este modo, dado que $A' = (2/c^2)d\phi/dr$, es posible comparar con la ecuación anterior y obtener

$$\alpha' = \frac{A'}{A} \approx 2 \frac{d\phi/dr}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \approx -2 \frac{dP/dr}{\rho c^2}.$$

Pero $2\phi/c^2 \ll 1$, y por lo tanto

$$\frac{dP}{dr} \approx -\rho \frac{d\phi}{dr},$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostática newtoniana (9.3).

Otro hecho digno de ser destacado es que la ecuación (10.44) predice que las mayores fuerzas gravitacionales presentes dentro de una estrella, cuando se modela con Relatividad General, tienen como consecuencias que, dadas ciertas condiciones, algunas enanas blancas y estrellas supermasivas colapsan gravitacionalmente en circunstancias que la teoría de gravitación newtoniana predeciría equilibrio hidrostático estable. Una de estas condiciones de estabilidad proviene de la simple inspección de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, pues como el gradiente de presión debe ser siempre finito, se debe tener necesariamente que el último término debe ser definido positivo:

$$\boxed{\frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2 r} < 1.} \quad (10.66)$$

Condición de estabilidad relativista

Esta condición es intrínsecamente relativista y no está presente en la teoría de Newton. En la siguiente sección se resolverán, para el caso particular más simple posible, las ecuaciones de estructura estelar y se encontrarán otras condiciones de estabilidad.

10.3. Solución: Densidad constante

10.3.1. Obteniendo la presión $P(r)$ relativista

Ahora, análogamente al caso newtoniano, determinaremos la solución de las ecuaciones de estructura estelar relativista para una estrella con distribución de masa homogénea de la forma:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_c = \text{cte.}, & r < R \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (10.67)$$

Esta ecuación de estado es independiente de la presión, así que estamos considerando materia incompresible. Esto corresponde al límite $\gamma \rightarrow \infty$ en la ecuación de estado politrópica (D.22). Reemplazando en la ecuación de definición de $\mathcal{M}(r)$ (9.5) obtenemos entonces:

$$\boxed{\mathcal{M}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_c r^3 = M \frac{r^3}{R^3}, & r < R, \\ \frac{4\pi}{3}\rho_c R^3 = M, & r > R. \end{cases}} \quad (10.68)$$

Insertando (10.67) y (10.68) en la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (10.44), dentro del rango $r \leq R$ obtenemos:

$$P' = -\frac{4\pi G}{c^4}r [P + \rho_c c^2] \left[P + \frac{1}{3}\rho_c c^2 \right] \left[1 - \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} r^2 \right]^{-1} \quad (10.69)$$

Luego,

$$\frac{P'}{(P + \rho_c c^2)(P + \rho_c c^2/3)} = -\frac{4\pi G}{c^4}r \left[1 - \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} r^2 \right]^{-1}. \quad (10.70)$$

Introduciendo el radio adimensional $x := \sqrt{8\pi G \rho_c / 3c^2} r$ tendremos:

$$\frac{-2\rho_c c^2 dP}{(P + \rho_c c^2)(3P + \rho_c c^2)} = \frac{x dx}{1 - x^2}. \quad (10.71)$$

La integral indefinida de esta ecuación resulta ser (por ejemplo, usando el método de fracciones parciales):

$$\ln \left(\frac{P + \rho_c c^2}{3P + \rho_c c^2} \right) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + \text{cte.} = \ln [a (1 - x^2)]^{-1/2} \quad (10.72)$$

La constante de integración a que hemos introducido puede encontrarse al considerar que la presión se anula en la superficie de la estrella, es decir $P(R) = 0$. Con esto, obtenemos:

$$a = \frac{1}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c R^2}. \quad (10.73)$$

Entonces (10.72) se puede escribir como:

$$\frac{P(r) + \rho_c c^2}{3P(r) + \rho_c c^2} = \left[\frac{1 - 8\pi G \rho_c R^2 / 3c^2}{1 - 8\pi G \rho_c r^2 / 3c^2} \right]^{1/2}, \quad r \leq R. \quad (10.74)$$

Introduciendo el radio de Schwarzschild: $r_S = 2GM/c^2 = 8\pi G \rho_c R^3 / 3c^2$, y despejando $P(r)$, tenemos:

$$P(r) = \rho_c c^2 \frac{\sqrt{\frac{1-r_s/R}{1-r_s r^2/R^3}} - 1}{1 - 3\sqrt{\frac{1-r_s/R}{1-r_s r^2/R^3}}}. \quad (10.75)$$

Simplificando, obtenemos que la solución exacta y explícita para la presión en función de la coordenada radial r es dada por:

$$\boxed{P(r) = \rho_c c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}}}, \quad r \leq R.} \quad (10.76)$$

Límite newtoniano

Podemos verificar que la expresión (10.76) se reduce a la presión calculada según la teoría newtoniana, es decir a (9.20). Para ello, notamos que de acuerdo a lo discutido en referencia a la ecuación (9.22), la aproximación newtoniana se conseguirá cuando el radio de Schwarzschild r_S de la estrella sea mucho menor que su radio R , por lo que, expandiendo (10.76) a primer orden en r_S/R , obtenemos:

$$P(r) = \rho_c c^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_S}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{R}\right)^2\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_S}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{R}\right)^2\right)}{3\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_S}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{R}\right)^2\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_S}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r_S}{R}\right)^2\right)} \quad (10.77)$$

$$\approx \rho_c c^2 \frac{\frac{1}{2} \frac{r_S}{R} \left(\frac{-r^2+R^2}{R^2}\right)}{2 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{r_S}{R} \frac{(-3R^2+r^2)}{R^2}\right]} \quad (10.78)$$

$$= \rho_c c^2 \frac{1}{4} \frac{r_S}{R} \left(\frac{R^2-r^2}{R^2}\right) \left[1 - \frac{1}{4} \frac{r_S}{R} \frac{(r^2-3R^2)}{R^2}\right] \quad (10.79)$$

$$\approx \rho_c c^2 \frac{r_S}{4R^3} (R^2 - r^2), \quad (10.80)$$

que coincide con la expresión newtoniana (9.20) para $P(r)$.

10.3.2. Obteniendo los coeficientes métricos

Resumiendo, hemos hallado las tres variables de estructura de la estrella: la densidad (10.67), la función de masa (10.68) y la presión en (10.76). A continuación, para determinar el coeficiente métrico α se recurre a (10.49). En este caso, debemos separar la integral en

dos contribuciones, una interior ($r < r' < R$) y otra exterior $R < r' < \infty$. Entonces,

$$\alpha(r) = -\frac{2G}{c^2} \int_r^R \frac{dr'}{r'^2} \frac{\left[\mathcal{M}(r') + \frac{4\pi r'^3 P(r')}{c^2} \right]}{\left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r')}{c^2 r'} \right]} - \frac{2G}{c^2} \int_R^\infty \frac{dr'}{r'^2} \frac{M}{1 - \frac{2GM}{c^2 r'}} =: I_1 + I_2. \quad (10.81)$$

Calculemos la primera integral:

$$I_1 = -\frac{2G}{c^2} \int_r^R \frac{dr'}{r'^2} \left[\frac{M}{R^3} r'^3 + 4\pi r'^3 \rho_c \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}}} \right) \right] \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R^3} r'^2 \right]^{-1} \quad (10.82)$$

$$= -\frac{r_S}{R^3} \int_r^R dr' r' \left[1 + 3 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}}} \right) \right] \left[1 - \frac{r_S r'^2}{R^3} \right]^{-1} \quad (10.83)$$

$$= -\frac{2r_S}{R^3} \int_r^R dr' r' \frac{\left[1 - \frac{r_S r'^2}{R^3} \right]^{-1/2}}{\left[3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}} \right]}. \quad (10.84)$$

Esta integral puede ser calculada mediante la sustitución:

$$x := \sqrt{1 - \frac{r_S}{R^3} r'^2} \Rightarrow dx = -\frac{r_S}{R^3} r' \left[1 - \frac{r_S}{R^3} r'^2 \right]^{-1/2} dr. \quad (10.85)$$

Luego,

$$I_1 = 2 \int_x^{\sqrt{1-r_S/R}} \frac{dx'}{3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - x'} \quad (10.86)$$

$$= -2 \ln \left(3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - x' \right) \Big|_x^{\sqrt{1-r_S/R}} \quad (10.87)$$

$$= -2 \left[\ln \left(2\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \right) - \ln \left(3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S}{R^3} r'^2} \right) \right]. \quad (10.88)$$

Por otro lado, la integral es de la misma forma que aquella ya resuelta en la sección 10.1.2 para el cálculo de la solución exterior. De las expresiones (10.52) y (10.55) encontramos (para $r = R$) que

$$I_2 = \ln \left(1 - \frac{r_S}{R} \right) = 2 \ln \left(\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \right). \quad (10.89)$$

Así, el primer coeficiente métrico será, para el caso del interior de la estrella:

$$A(r) = e^{\alpha(r)} = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r'^2}{R^3}} \right)^2, \quad r \leq R. \quad (10.90)$$

Por otra parte, el segundo coeficiente métrico provendrá de reemplazar (10.68) en su definición (10.24), y usando la definición del radio de Schwarzschild. Así encontramos que

$$B(r) = e^{\beta(r)} = \left[1 - \frac{r_S}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-1}, \quad r \leq R \quad (10.91)$$

10.3.3. Estabilidad de la solución

Como ya se había mencionado, si el radio R de la estrella se aproxima al radio de Schwarzschild, los efectos relativistas se incrementan. Esto puede verse en forma más precisa usando la expresión (10.76) para la presión $P(r)$, en este caso de densidad constante. La presión siempre es máxima en el centro de la estrella, y en este caso asume el valor:

$$P_0 := P(0) = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_s}{R} - 1}}. \quad (10.92)$$

Esta presión central máxima divergerá si su denominador se anula, lo que ocurre si

$$3\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{9}{8}r_s. \quad (10.93)$$

Sin embargo, no es posible que una fuente produzca una presión infinita, que sería la requerida de acuerdo a nuestro modelo para poder sustentar el equilibrio. Esto significa que es imposible que pueda existir una configuración de equilibrio para la estrella. Luego, es necesario para la estabilidad que el radio de la estrella sea mayor a:

$$R > \frac{9}{8}r_s = \frac{9GM}{4c^2}, \quad (10.94)$$

Condición de estabilidad para $\rho = cte$

es decir, existe un límite inferior para el radio R de una estrella de masa dada M . Nótese que esta inestabilidad es de naturaleza fundamental (se da para cualquier ecuación de estado físicamente razonable) e intrínsecamente relativista, pues en el caso newtoniano para materia incompresible, la presión máxima dada por (9.17) será siempre finita.

La condición anterior impone un límite superior para el redshift z máximo observable debido a efectos gravitatorios en una estrella. En efecto, de la discusión en la sección 3.5.6, sabemos que si A es el lugar de emisión de un fotón en la superficie de la estrella, con coordenada radial $r_A = R$ y métrica correspondiente a la solución de Schwarzschild exterior ($g_{\mu\nu}(r_A)$); mientras que la luz es recibida en un sitio B muy lejos de la estrella, en donde sea válida la métrica plana de Minkowski; tendremos que la expresión para el corrimiento al rojo de la luz emitida por la estrella debido a efectos de Relatividad General estará dada por (ver (3.193)):

$$z = \sqrt{\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}} - 1 \quad (10.95)$$

Efectos de la estabilidad sobre el redshift

Ahora, ya que R tiene un mínimo dado por (10.94), entonces z poseerá un máximo, por lo que el redshift máximo observable para luz estelar obedecerá a la relación:

$$z < 2. \quad (10.96)$$

10.4. Solución numérica para gas ideal de Fermi

10.4.1. Reducción de las ecuaciones a la forma de OV

En esta sección, se desarrollará una solución numérica a las ecuaciones de estructura estelar relativista basadas en la ecuación TOV para estrellas de neutrones, reproduciendo los resultados originales publicados en el artículo de Oppenheimer y Volkoff de 1939 [48]. Para ello, en primer

lugar se reescribe la ecuación (10.44) en la forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}\phi}{r^2} \left[\frac{\rho c^2 + P}{\rho c^2} \right] \left[\frac{\mathcal{M} + 4\pi r^3 P/c^2}{\mathcal{M}} \right] \frac{1}{r^{2G\mathcal{M}/(c^2)}} \quad (10.97)$$

$$= -\frac{G}{c^2 r} \frac{\rho c^2 + P}{\left(r - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2}\right)} [\mathcal{M} + 4\pi r^3 P/c^2]. \quad (10.98)$$

Entonces, podemos reemplazar las ecuaciones de estado exactas para un gas ideal de Fermi completamente degenerado (en la forma paramétrica para la presión $P = P(t)$ (D.65) y la densidad de masa propia ρ en términos de la densidad de energía $\epsilon(t) = \rho(t)c^2$ (D.70)) directamente en la expresión (10.98). En efecto, definiendo la constante

$$K := \frac{\pi m_n^4 c^5}{4h^3}, \quad (10.99)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{K}{3} \frac{d}{dr} \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t \right) &= \\ -\frac{G}{c^2 r} \frac{K(\operatorname{senh} t - t) + \frac{K}{3} (\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t)}{\left(r - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} \right)} [\mathcal{M} + 4\pi r^3 P/c^2], \end{aligned} \quad (10.100)$$

$$\left(\cosh t - 4 \cosh \left(\frac{t}{2} \right) + 3 \right) \frac{dt}{dr} = \quad (10.101)$$

$$-\frac{G}{c^2 r} \frac{4 \operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right)}{\left(r - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} \right)} \left[\frac{4\pi K}{3c^2} r^3 \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t \right) + \mathcal{M} \right]. \quad (10.102)$$

Con esto, encontramos la ecuación para dt/dr :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= -\frac{4G/c^2}{r \left(r - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} \right)} \left[\frac{\operatorname{senh} t - 2 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right)}{\cosh t - 4 \cosh \left(\frac{t}{2} \right) + 3} \right] \\ &\times \left[\frac{4\pi K}{3c^2} r^3 \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t \right) + \mathcal{M} \right] \end{aligned} \quad (10.103)$$

De acuerdo a la discusión de la sección (10.2.1), ahora sólo falta encontrar la ecuación para \mathcal{M} , para lo cual se reemplazan las ecuaciones de estado en (9.6), obteniendo:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \frac{K}{c^2} (\operatorname{senh} t - t). \quad (10.104)$$

De este modo, tendremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a resolver, de la forma

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = \frac{d\mathcal{M}}{dr}(t), \quad \frac{dt}{dr} = \frac{dt}{dr}(t, \mathcal{M}) \quad (10.105)$$

Ahora bien, es conveniente adimensionalizar las variables anteriores, para lo cual se definen la coordenada radial x y la masa adimensional m , dadas por

$$r =: ax, \quad \mathcal{M} =: bm, \quad (10.106)$$

con a y b constantes. Para determinarlas, se reemplazan sus definiciones en (10.104) y (10.103):

$$\frac{dm}{dx} = \left(\frac{4\pi K a^3}{c^2 b} \right) x^2 (\operatorname{senh} t - t), \quad (10.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= -\frac{4G/c^2}{ax \left[x - 2m \left(\frac{bG}{ac^2} \right) \right]} \frac{\operatorname{senh} t - 2 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right)}{\cosh t - 4 \cosh \left(\frac{t}{2} \right) + 3} \left(\frac{4\pi K a^3}{c^2} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{x^3}{3} \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t \right) + \left(\frac{c^2 b}{4\pi K a^3} \right) m \right]. \end{aligned} \quad (10.108)$$

De aquí vemos que es conveniente escoger a y b tales que:

$$\frac{4\pi K}{c^2} \frac{a^3}{b} \stackrel{!}{=} 1, \quad \frac{bG}{ac^2} \stackrel{!}{=} 1. \quad (10.109)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y utilizando la definición (10.99) de K , tenemos que la escala de longitud a es dada por

$$a = \left(\frac{c^4}{4\pi G K} \right)^{1/2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{mc} \right)^{3/2} \left(\frac{c^2}{mG} \right)^{1/2}, \quad (10.110)$$

y la escala de masas b resulta ser

$$b = \frac{c^2}{G} a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{mc} \right)^{3/2} \frac{c^3}{(mG^3)^{1/2}}. \quad (10.111)$$

Con esto, hemos reducido las ecuaciones de estructura relativista al siguiente sistema de ecuaciones adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dx} &= x^2 (\operatorname{senh} t - t), \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{-4}{x(x-2m)} \frac{\operatorname{senh} t - 2 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right)}{\cosh t - 4 \cosh \left(\frac{t}{2} \right) + 3} \left[\frac{x^3}{3} \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh} \left(\frac{t}{2} \right) + 3t \right) + m \right], \end{aligned} \quad (10.112)$$

Las condiciones de borde correspondientes son:

$$m(x=0) = 0, \quad (10.113)$$

$$t(x=0) = t_0, \quad (10.114)$$

en donde la segunda es la condición inicial para el parámetro t en el centro de la estrella ($x = 0$), que está relacionada directamente con el valor de la presión central de la estrella $P_0 = P(t_0)$ a través de (D.65).

Al igual que en el caso de las soluciones de la ecuaciones de equilibrio estelar newtoniano desarrollada en el capítulo 9, tendremos que como la presión es monótonamente decreciente desde su valor máximo en el centro de la estrella P_0 , existirá un punto $x = x_1$ tal que $P(x_1) = 0$, y éste será el radio (más precisamente, la coordenada radial) de la estrella, que en variables dimensionales y evaluando la constante a en (10.110) es:

$$R = a x_1 = 13.683 \cdot x_1 [\text{km}]. \quad (10.115)$$

Además, la masa de la estrella se obtendrá evaluando b en (10.111):

$$\mathcal{M} = b m(x_1) = 9.2648 \cdot m(x_1) M_\odot. \quad (10.116)$$

10.4.2. Método y Gráficos

Para efectos de la integración numérica, se resuelve el sistema (10.112) mediante el método de Runge-Kutta con el mismo tamaño de paso señalado en el capítulo previo, para valores dados de t_0 . Así, los resultados para las variables dependientes t y m en función de x con los valores indicados de t_0 se muestran en los siguientes gráficos:

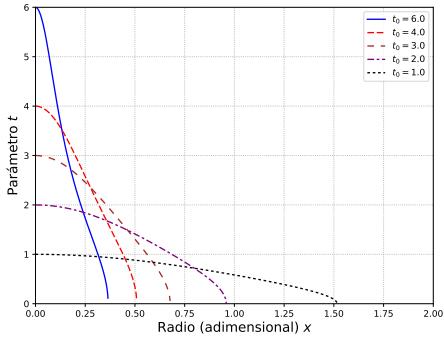


Figura 10.1: Solución de ec. TOV: t v/s x .

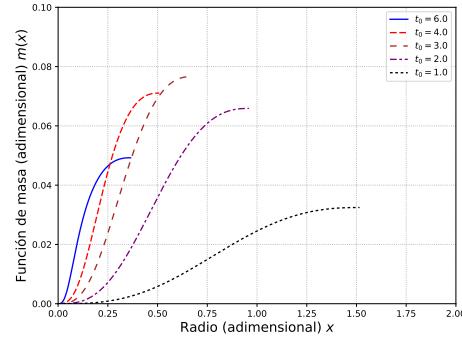


Figura 10.2: Solución de ec. TOV: m v/s x .

Una característica que llama en seguida la atención del gráfico m v/s x es que la masa m se incremente con t_0 hasta un cierto valor máximo, tras el cual disminuye. En variables físicas, esto significa que existe un máximo de la masa M con respecto a la densidad central de una estrella de neutrones $\rho_c = \rho(t_0)$. Podemos representar esta relación resolviendo el sistema de ecuaciones un número suficiente de veces (500 en nuestro caso), con los valores de la condición inicial entre $t_0 = 0.1$ a $t_0 = 7$, obteniendo así los valores de x_1 necesarios para determinar la masa M según (10.116). Por otra parte, por cada valor de t_0 tendremos que la densidad central estará dada al evaluar ϵ dado por (D.70) en dicho punto (dividido por c^2):

$$\rho_c = \frac{\epsilon_n}{c^2} = \frac{\pi m_n^4 c^3}{4 h^3} (\operatorname{senh} t_0 - t_0) \quad (10.117)$$

$$\approx 5.725 \cdot 10^{17} (\operatorname{senh} t_0 - t_0) [\text{kg}/\text{m}^3]. \quad (10.118)$$

Así, se obtiene el siguiente gráfico:

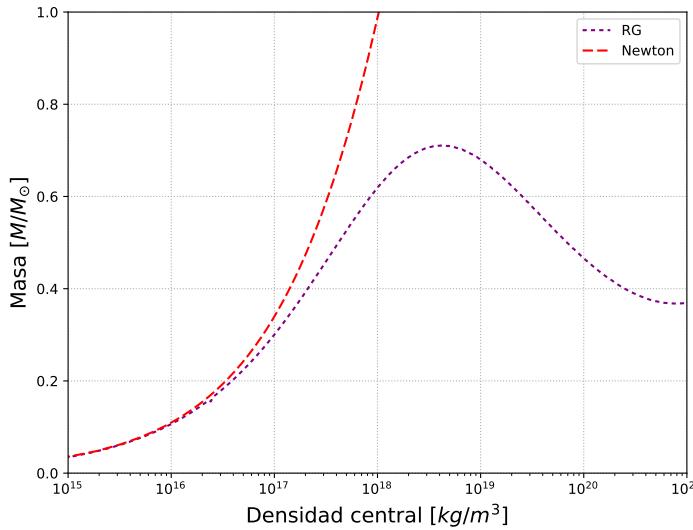


Figura 10.3: Relación masa-densidad central para estrellas de neutrones con las ecuaciones TOV y newtonianas

También podemos representar la relación masa radio que resulta de la ecuación TOV, para la cual simplemente graficamos los valores de R y M que entregan las relaciones (10.115) y (10.116) por cada x_1 correspondiente a un t_0 dado. Esto se muestra en la siguiente figura, en donde además se grafican los correspondientes resultados newtonianos y el radio de Schwarzschild R_S correspondiente por cada M :

$$R_S = \frac{2G}{c^2} M \quad (10.119)$$

$$\approx 2.954 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [km] \quad (10.120)$$

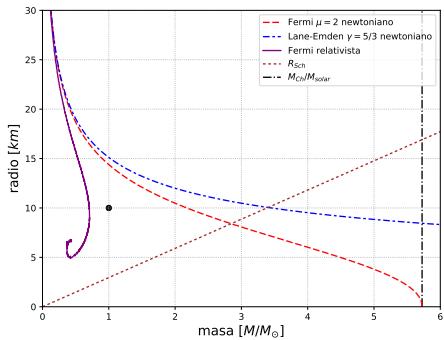


Figura 10.4: Relación Masa-Radio para estrellas de neutrones con las ecuaciones TOV y newtonianas

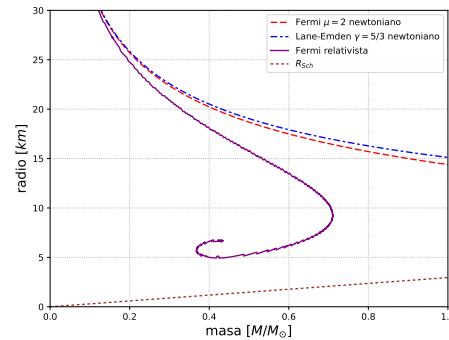


Figura 10.5: Relación Masa-Radio para estrellas de neutrones con las ecuaciones TOV y newtonianas

Apéndice A

Problema de Kepler Newtoniano

Aquí reproduciremos el análisis newtoniano de las órbitas de un sistema binario, modelado como dos masas puntuales m_1 y m_2 , moviéndose bajo la acción de su atracción mutua. Si \vec{x}_1 y \vec{x}_2 son las coordenadas de m_1 y m_2 respecto a un SRI, respectivamente, entonces las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad (\text{A.1})$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \quad (\text{A.2})$$

Es conveniente definir la coordenada del *centro de masa* \vec{x}_{cm} por

$$\vec{x}_{\text{cm}} := \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M}, \quad M := m_1 + m_2. \quad (\text{A.3})$$

Es directo comprobar a partir de (A.1) y (A.2) que

$$\ddot{\vec{x}}_{\text{cm}} = \vec{0}. \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, la coordenada del centro de masa se mueve a velocidad constante. Esto permite simplificar el problema describiendo el movimiento desde el SRI en el que el centro de masa del sistema está en reposo y ubicado en el origen¹, es decir,

$$\vec{x}_{\text{cm}} \stackrel{!}{=} \vec{0}. \quad (\text{A.5})$$

La condición (A.5) implica que, en el *SRI del centro de masa* las coordenadas de m_1 y m_2 están relacionadas por

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{x}_1. \quad (\text{A.6})$$

Definiendo además la *coordenada relativa*

$$\vec{r} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \quad (\text{A.7})$$

podemos escribir, usando (A.6),

$$\vec{x}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (\text{A.8})$$

¹Más generalmente, es posible *separar* el movimiento en el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo

Usando estas relaciones podemos transformar las ecuaciones de movimiento (A.1) y (A.2) en ecuaciones para la coordenada relativa:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (\text{A.9})$$

Por otro lado, la energía total del sistema,

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad (\text{A.10})$$

y el momentum angular total respecto al origen,

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2, \quad (\text{A.11})$$

pueden reescribirse en términos de la coordenada relativa, resultando

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 - \frac{G\mu M}{r}, \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}, \quad (\text{A.13})$$

donde $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ y $\mu := m_1m_2/M$ es llamada la *masa reducida* del sistema.

Los resultados (A.9), (A.12) y (A.13) muestran que el movimiento relativo es equivalente al de un cuerpo de masa μ moviéndose en el potencial central *fijo* generado por una masa M situada en el origen, $\phi = -GM/r$. Como este potencial es central, el momentum angular total del sistema es constante a lo largo de la trayectoria. Como consecuencia, el movimiento está confinado al plano perpendicular a \vec{L} (eclíptica). Podemos elegir el eje z normal a este plano, de modo que la trayectoria del planeta satisface $\theta = \pi/2$, y entonces

$$x = r \cos \varphi, \quad (\text{A.14})$$

$$y = r \sin \varphi, \quad (\text{A.15})$$

$$z = 0. \quad (\text{A.16})$$

Usando $\vec{r} = r\hat{r}$ podemos escribir la velocidad y la aceleración como

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}, \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}. \quad (\text{A.18})$$

Reemplazando (A.18) en (A.9) obtenemos

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \quad (\text{A.19})$$

De aquí, encontramos

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (\text{A.20})$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Multiplicando la segunda ecuación por r , se encuentra que $r^2\dot{\varphi}$ es constante sobre la trayectoria,

$$0 = r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \quad (\text{A.23})$$

que expresa la conservación del momento angular, ya que

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{A.24})$$

$$= \mu r \hat{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}) \quad (\text{A.25})$$

$$= \mu r^2 \dot{\varphi} (\hat{r} \times \hat{\varphi}) \quad (\text{A.26})$$

$$= \mu r^2 \dot{\varphi} \hat{z}. \quad (\text{A.27})$$

Otra cantidad conservada sobre la órbita es la energía mecánica,

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM\mu}{r} \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \quad (\text{A.29})$$

Despejando $\dot{\varphi}$ de (A.27) podemos escribir la energía mecánica sólo en términos de la variable r y constantes del movimiento:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \quad (\text{A.30})$$

Es tradicional definir el potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (\text{A.31})$$

de modo que (A.30) puede ser escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \quad (\text{A.32})$$

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ posee un cero en

$$r_c = \frac{L^2}{2GM\mu^2}, \quad (\text{A.33})$$

y además posee un mínimo en

$$r_{\min} = \frac{L^2}{GM\mu^2} = 2r_c, \quad (\text{A.34})$$

tal que

$$V_{\text{ef},\min} = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2L^2} < 0. \quad (\text{A.35})$$

Además, el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}}(r) \approx -\frac{GMm}{r} \rightarrow 0, \quad (\text{A.36})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{ef}}(r) \approx \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.37})$$

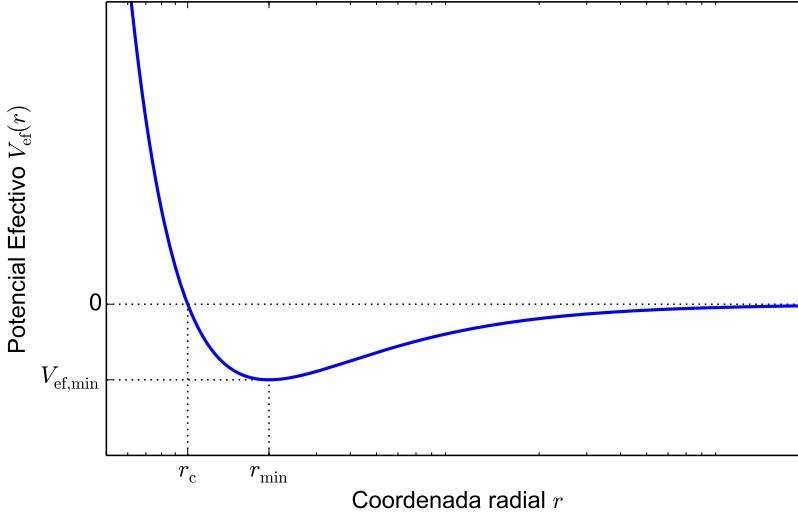


Figura A.1: Potencial newtoniano efectivo. Coordenada radial graficada en escala logarítmica.

Así, para un valor L dado, tenemos que

1. Si $E_1 > 0$, una partícula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo r_1 , donde $\dot{r}^2 = 0$, y luego vuelve a infinito.
2. Si $V_{\text{ef},\text{min}} < E_2 < 0$ la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno r_2 y r_3 , de modo que $r_2 < r < r_3$.
3. Si $E_3 = V_{\text{ef},\text{min}}$ la partícula describe un movimiento circular de radio dado por (A.34). Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.
4. Finalmente, no existen trayectorias con $E < V_{\text{ef},\text{min}}$ ya que (A.32) requiere que $E \geq V_{\text{ef}}$.

Determinaremos ahora la forma de la trayectoria, descrita por la dependencia de la coordenada radial r en términos de la coordenada angular φ . Asumiendo $r = r(\varphi)$ podemos escribir

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (\text{A.38})$$

Reemplazando esto en (A.30) obtenemos

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \quad (\text{A.39})$$

Realizamos ahora el cambio de variable $u := 1/r$, y entonces

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2} u - u^2, \quad (\text{A.40})$$

donde $u' := du/d\varphi$. Derivando la expresión anterior se encuentra la ecuación de movimiento para u en función de φ (para órbitas no circulares $u' \neq 0$):

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}. \quad (\text{A.41})$$

La integración de la ecuación (A.41) es directa ya que corresponde a un oscilador armónico con un término forzante constante:

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) \quad (\text{A.42})$$

donde (luego de reemplazar esta solución en (A.40))

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \quad (\text{A.43})$$

es la *excentricidad* de la órbita y φ_0 es una constante de integración correspondiente a la orientación inicial relativa al eje x . Si $-G^2 M^2 \mu^3 / 2L^2 < E < 0$ entonces $0 < e < 1$, y la cónica es una elipse.

El semieje mayor de la órbita,

$$a = \frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}), \quad (\text{A.44})$$

puede ser escrito en términos de las constantes del movimiento, a partir de (A.42) y (A.43), ya que

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{\min}} + \frac{1}{u_{\max}} \right) \quad (\text{A.45})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{GM\mu^2 (1+e)} + \frac{L^2}{GM\mu^2 (1-e)} \right) \quad (\text{A.46})$$

$$= \frac{L^2}{GM\mu^2 (1-e^2)} \quad (\text{A.47})$$

$$= -\frac{GM\mu}{2E}. \quad (\text{A.48})$$

Con esto, podemos escribir la solución (A.42) como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (\text{A.49})$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{A.50})$$

La evolución temporal de la órbita puede ser determinada implícitamente de la forma siguiente. Definamos la variable auxiliar s por

$$r =: a(1 - e \cos s). \quad (\text{A.51})$$

A partir de esto podemos, usando (A.50), encontrar una relación entre φ y s sobre la órbita. De esta forma, obtenemos

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e \cos s}, \quad (\text{A.52})$$

y a partir de aquí,

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin s}{1 - e \cos s}. \quad (\text{A.53})$$

Derivando (A.52) respecto a s y usando (A.53) obtenemos

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos s}. \quad (\text{A.54})$$

Con esto, podemos expresar el momentum angular (A.27) en términos de s :

$$L = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{A.55})$$

$$= \mu r^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (\text{A.56})$$

$$= \mu a^2 (1 - e \cos s)^2 \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (\text{A.57})$$

$$= \mu a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos s) \frac{ds}{dt}. \quad (\text{A.58})$$

Por lo tanto,

$$1 - e \cos s = \frac{L}{\mu a^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{dt}{ds} \quad (\text{A.59})$$

$$=: \omega_0 \frac{dt}{ds}, \quad (\text{A.60})$$

donde hemos introducido ω_0 , con unidades de frecuencia, que satisface (usando (A.43)),

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3}}. \quad (\text{A.61})$$

La relación (A.60) puede integrarse directamente respecto a s . Eligiendo la condición inicial $s = 0$ para $t = t_0$ obtenemos

$$\boxed{\omega_0(t - t_0) = s - e \sin s.} \quad (\text{A.62})$$

La expresión (A.62), junto con (A.51) y (A.52) (y/o (A.53)) suministra una *solución paramétrica* para la órbita. A partir de (A.50) vemos que $r(\varphi)$ es periódica con periodo $\Delta\varphi = 2\pi$. Además, de (A.51) y/o (A.52) vemos que este periodo corresponde a un cambio en 2π en la variable auxiliar s . Finalmente, la relación (A.51) implica que esta periodicidad corresponde a un intervalo de tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (\text{A.63})$$

que es entonces el *periodo orbital*. Con esto (A.61) implica la *tercera ley de Kepler*.

Apéndice B

Constantes Físicas (S.I.)

Nombre	Símbolo	Valor	Unidad
Número π	π	3.1415926535...	
Número e	e	2.7182818284...	
Carga elemental	e	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	G	$6.67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Constante de Estructura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.99792458 \cdot 10^8$	m/s (def)
Permitividad del vacío	ε_0	$8.854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Permeabilidad del vacío $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ $8.9876 \cdot 10^9$	H/m (def) Nm ² C ⁻²
Constante de Planck	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2741 \cdot 10^{-24}$	Am ²
Radio de Bohr	a_0	0.52918	Å
Constante de Rydberg	Ry	13.595	eV
Longitud de Compton del electrón	$\lambda_{Ce} = h/m_ec$	$2.2463 \cdot 10^{-12}$	m
Longitud de Compton del protón	$\lambda_{Cp} = h/m_pc$	$1.3214 \cdot 10^{-15}$	m
Masa del electrón	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa de protón	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa de neutrón	m_n	$1.674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Diámetro del Sol	D_\odot	$1392 \cdot 10^6$	m
Masa del Sol	M_\odot	$1.989 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo de rotación del Sol	T_\odot	25.38	días
Radio medio (volumétrico) de la Tierra	R_A	$6371.0 \cdot 10^3$	m
Masa de la Tierra	M_A	$5.976 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo de rotación de la Tierra	T_A	23.96	hours
Periodo orbital Terrestre	A no tropical	365.24219879	días
Unidad Astronómica	AU	$1.4959787066 \cdot 10^{11}$	m
A no Luz	ly	$9.4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3.0857 \cdot 10^{16}$	m

Apéndice C

Enanas Blancas y Estrellas de Neutrones: Reseña Histórica

- *1844, Friedrich Wilhem Bessel:* Usó la técnica de paralaje estelar, diseñada por él, para encontrar la distancia a Sirius. Pero también descubrió perturbaciones en su órbita, por lo que dedujo que Sirius es un sistema binario, con periodo 50 años.
- *1862, Alvan Graham Clark:* Con el telescopio más potente de su época, logró observar la estrella compañera de Sirius A, ahora llamada Sirius B (se encontraba en su apoastro). Determinó sus parámetros: $L_A = 23.5L_\odot$ y $L_B = 0.03L_\odot$. $M_A = 2.3M_\odot$ y $M_B = 1.0M_\odot$.
- *1915, Walter Adams:* Mediante técnicas espectroscópicas, descubrió que Sirius B es una estrella blanca-azulada muy caliente, $T_B = 27000\text{ K}$, mientras que $T_A = 9910\text{ K}$. Usando la ley de Stefan-Boltzmann, $R_B = 5.5 \cdot 10^6 \approx 0.008R_\odot$. ¡Sirius B es una estrella con la masa del Sol confinada a un volumen más pequeño que la Tierra!.. $\Rightarrow \rho_B = 3.0 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$! Los demás astrónomos los consideran resultados “absurdos”.
- *1926, W.S. Adams:* Midió los redshifts gravitacionales de las líneas espectrales emitidas por Sirius B, determinando en forma independiente el radio de la estrella, sirviendo de comprobación de la naturaleza compacta de este objeto y también como un test para la teoría de relatividad general.
- *Agosto 1926, Dirac formula la estadística de Fermi-Dirac.*
- *Diciembre 1926, R.H. Fowler:* Usó la estadística de Fermi-Dirac para explicar las enanas blancas: la presión de degeneración de los electrones mantiene el equilibrio en contra de la gravedad.
- *1930, S. Chandrasekhar:* Calculó modelos de enanas blancas tomando en cuenta efectos relativistas en la ecuación de estado degenerada de los electrones, descubriendo que ninguna enana blanca puede ser más masiva que $\sim 1.2M_\odot$ (conocida como Masa de Chandrasekhar)
- *1932, L.D. Landau* Dió una explicación elemental del límite de Chandrasekhar.
- *1932, James Chadwick:* Descubre el neutrón.
- *1934, Waalter Baade y Fritz Zwicky:* Proponen la existencia de estrellas de neutrones. Identifican una nueva clase de objetos astronómicos denominados supernovas. Sugieren que una supernova puede ser creada por el colapso de una estrella normal a una estrella de neutrones.

- 1939, *Oppenheimer y Volkoff*: Realizan los primeros cálculos detallados de la estructura de estrellas de neutrones usando la teoría general de la relatividad. Proponen la idea que los núcleos de neutrones en estrellas normales pueden ser fuente de energía estelar (la fusión termonuclear aún no era entendida).
- 1939, *Oppenheimer y Snyder*: Calculan el colapso de una esfera homogénea de un fluido sin presión usando relatividad general, y descubren cómo la esfera pierde comunicación con el resto del universo. Es el primer cálculo de cómo un agujero negro se puede formar.
- 1942, *Duyvendak, Mayall, Oort, Baade y Minkowskii*: Deducen que la nebulosa del Cangrejo es el remanente de la supernova observada por astrónomos chinos en 1054. Observan en el centro de ella una estrella que identifican como el remanente de la estrella que explotó en dicho año.
- 1949, *Kaplan*: Deriva los efectos de la teoría general de la relatividad sobre las curvas masa-radio para enanas blancas masivas. Deduce que la teoría de relatividad general induce una inestabilidad para un radio menor de $\sim 1.1 \cdot 10^3 \text{ km}$.
- 1958, *Schatzman, Wakano, Harrison y Wheeler*: Incorporan el decaimiento beta inverso para la ecuación de estado para la materia de enanas blancas. Muestran que este efecto induce una inestabilidad dinámica para enanas blancas con masa de $\sim M_\odot$ y radio menor a $\sim 4 \cdot 10^3 \text{ km}$.
- 1963, *Hoyle and Fowler*: Proponen la idea de estrellas supermasivas, calcularon sus propiedades, y sugirieron que podrían estar asociadas con núcleos galácticos activos y quásars.
- 1963-1964, *Chandrasekhar y Feynman*: Desarrollan la teoría general relativista de las pulsaciones estelares, y Feynman la usó para mostrar que estrellas supermasivas, aunque newtonianas en su estructura, están sujetas a una inestabilidad debida a Relatividad General.
- 1967, *Hewish et al.*: Descubrimientos de los pulsares.
- 1968, *Gold*: Propone que los pulsares son estrellas de neutrones rotantes.
- 1968-1969 varios: Descubrimientos casi simultáneos de los pulsares del Cangrejo (la misma estrella identificada en 1942) y Vela en remanentes conocidos de supernovas. Proveen evidencia para la formación de estrellas de neutrones y pulsares en explosiones de supernovas.
- 1975, *Hulse y Taylor*: Descubrimiento del primer pulsar binario. Miden la masa de una estrella de neutrones y, a la vez, proveen de un test para la teoría general de la relatividad.

Apéndice D

Nociones básicas de Termodinámica relativista

D.1. Primera ley de la Termodinámica

El primer objetivo de esta sección será escribir la generalización relativista de la primera ley de la termodinámica newtoniana (en equilibrio),

$$dU = -PdV + TdS, \quad (\text{D.1})$$

en el contexto de Relatividad General. Aquí, dU es la *energía interna* total en el elemento de volumen dV conteniendo un número (constante) \mathcal{N} bariones, P es la presión, T la temperatura y S la entropía total en dicho elemento de volumen. Para escribir la generalización apropiada de (D.1) referimos las cantidades a un *SR comóvil* con el elemento de fluido dV . Con este objetivo, definimos la *densidad numérica propia de bariones* (los que contribuyen principalmente a la masa total de una estrella, por ejemplo) definida en este sistema de referencia:

$$n = \frac{d\mathcal{N}}{dV}. \quad (\text{D.2})$$

Si la *densidad de energía interna* total es ϵ , entonces es conveniente escribir todas las cantidades que aparecen en la ley de conservación de energía (D.1) en función de n , ya que es una cantidad conservada. Es decir, en términos de la *densidad de energía interna por barión* ϵ/n , el inverso de densidad de bariones n^{-1} (volumen por barión), y la entropía por barión $s = S/\mathcal{N}$, tendremos que (D.1) se generaliza a:

$$\boxed{d\left(\frac{\epsilon}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + Tds.} \quad (\text{D.3})$$

Si separamos explícitamente los diferenciales y agrupamos, notamos que

$$\frac{d\epsilon}{n} + \epsilon d\left(\frac{1}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right) = Tds \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{d\epsilon}{n} + (\epsilon + P)\left(-\frac{1}{n^2}dn\right) = Tds. \quad (\text{D.5})$$

Así, encontramos la siguiente relación proveniente de la primera ley de la Termodinámica relativista:

$$\boxed{d\epsilon = \frac{\epsilon + P}{n}dn + nTds.} \quad (\text{D.6})$$

La ecuación (D.3) también se puede reescribir en términos de la densidad de energía interna u . Para ello, primero definimos la *densidad de masa en reposo* ρ en términos de la densidad numérica de bariones:

$$\rho_0 = m_B n \quad (\text{D.7})$$

en donde m_B es la masa en reposo característica de un barión. De este modo, dado que la densidad de masa total ρ incluye tanto la energía interna como la energía en reposo, tendremos:

$$u = \rho_0 c^2 + \epsilon \Leftrightarrow \epsilon = u - \rho_0 c^2 = u - m_B n c^2 \quad (\text{D.8})$$

Entonces, dado que

$$d\left(\frac{\epsilon}{n}\right) = d\left(\frac{u - m_B n c^2}{n}\right) = d\left(\frac{u}{n}\right) - \cancel{d(m_B c^2)}, \quad (\text{D.9})$$

tendremos que la ley (D.3) equivale a:

$$d\left(\frac{u}{n}\right) = -P d\left(\frac{1}{n}\right) + T ds. \quad (\text{D.10})$$

De lo anterior es posible encontrar el análogo de (D.6), pero usando u en lugar de ρ :

$$du = \frac{u + P}{n} dn + nT ds. \quad (\text{D.11})$$

También podemos notar de las dos formas de la primera ley en (D.10) y (D.3), que la presión y temperatura se pueden expresar como:

$$P := -\frac{\partial(\epsilon/n)}{\partial(1/n)} = -\frac{\partial(u/n)}{\partial(1/n)}, \quad (\text{D.12})$$

$$T := \frac{\partial(\epsilon/n)}{\partial s} = \frac{\partial(u/n)}{\partial s}. \quad (\text{D.13})$$

D.2. Ecuación de estado adiabática o politrópica

Una ecuación de estado adiabática o politrópica es aquella en que la presión P y la densidad numérica de bariones n (ó la densidad de masa en reposo ρ_0) se relacionan a través de

$$P = K'n^\gamma \Leftrightarrow P = K\rho_0^\gamma, \quad (\text{D.14})$$

en donde K y γ son constantes, siendo esta última el *índice adiabático ó politrópico*. Si f es el número de grados de libertad de las partículas constituyentes del fluido del que se compone la estrella, entonces $\gamma = (f + 2)/f$.

Es posible mostrar que esta relación equivale a una ecuación de estado que relate la energía interna u con la presión P , sólo suponiendo que sean proporcionales en la forma

$$u = \frac{P}{\gamma - 1}, \quad (\text{D.15})$$

y además, que la entropía por barión s sea constante. En efecto, consideremos la primera ley de la termodinámica en la forma (D.10) y reemplacemos la relación anterior:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[d\left(\frac{P}{n}\right) \right] + P d\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{n}\right) dP + P d\left(\frac{1}{n}\right) \right] + P d\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{1}{n}\right) dP + \gamma P d\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 0. \quad (\text{D.18})$$

Multiplicando por $1/n^{\gamma-1}$, podemos escribir

$$\frac{1}{n^\gamma} dP + \frac{\gamma P}{n^{\gamma-1}} d\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad (\text{D.19})$$

$$d\left(\frac{P}{n^\gamma}\right) = 0, \quad (\text{D.20})$$

que, tal como se quería probar, equivale a (D.14). En el caso newtoniano, se tiene que la energía interna es mucho menor que la densidad de masa en reposo $\epsilon \ll \rho_0 c^2$, por lo que de (D.8) tendremos

$$u \approx \rho_0 c^2 = m_B n c^2, \quad (\text{D.21})$$

de donde recuperamos la forma usual de la ecuación de estado politrópica

$$P = K \rho^\gamma. \quad (\text{D.22})$$

D.3. Involucrando la Temperatura y Entropía

En principio, el requisito mínimo necesario para una ecuación de estado del tipo $P = P(\rho)$ (usada para resolver el sistema de ecuaciones de estructura estelar), se basa en conocer cómo se relacionan la presión y la densidad a partir de un parámetro, que por simplicidad se escoge como la densidad numérica de bariones n , pues en dicho caso recuperamos (9.9):

$$P = P(n), \quad \rho = \rho(n) \Rightarrow n = n(\rho) \Rightarrow P = P(n(\rho)) = P(\rho).$$

Sin embargo, no se puede deducir en general P ni ρ a partir únicamente de un conocimiento de n , sino que se requiere además la temperatura, T , o la entropía por barión, s . De este modo, de las leyes de la termodinámica es posible determinar todas las cantidades termodinámicas restantes, a través de las ecuaciones de estado más generales:

$$P = P(n, s), \quad \rho = \rho(n, s) \quad \text{o} \quad (\text{D.23})$$

$$P = P(n, T), \quad \rho = \rho(n, T). \quad (\text{D.24})$$

Sin embargo, para poder pasar de las ecuaciones anteriores, que involucran cantidades desconocidas como la temperatura y la entropía, a la ecuación estándar (9.9), se necesita información sobre las propiedades térmicas de la estrella. Por ejemplo, se puede considerar los efectos térmicos en la ecuación de estado, al no despreciar la temperatura de una estrella, de modo que:

$$P(r) = P(\rho(r), T(r)). \quad (\text{D.25})$$

Efectos de la temperatura

Pero ahora necesitamos otra ecuación adicional que ligue el campo escalar temperatura en función del resto de las variables. Usualmente, se escoge para este propósito la ecuación de energía E , de modo de obtener la relación deseada entre P y ρ ,

$$E(r) = E(\rho(r), T(r)), \quad (\text{D.26})$$

con E conocida. Entonces, podemos escribir:

$$T(r) = T(E(r), \rho(r)) = T(\rho(r)), \quad (\text{D.27})$$

$$P(r) = P(\rho(r), T(\rho(r))) = P(\rho(r)). \quad (\text{D.28})$$

Pero esta última ecuación de estado también será útil para modelar estrellas que están en la aproximación del cero absoluto, en las cuales la temperatura no juega ningún rol relevante,

Tipos de estrellas donde es válido $P = P(\rho)$

tales como enanas blancas o estrellas de neutrones. Para este caso, de acuerdo al *teorema de Nernst*, la entropía por nucleón s será constante por toda la estrella, lo que es consistente con la reducción de las ecuaciones de estado generales (D.23) a (9.9):

$$P = P(n, s = cte) = P(n), \quad \rho = \rho(n, s = cte) = \rho(n) \quad \Rightarrow P = P(\rho). \quad (\text{D.29})$$

Puede probarse¹ también que la condición de entropía constante, que según la relación anterior siempre conducirá a una ecuación de estado que relacione la presión y la densidad, se da también en estrellas en *equilibrio convectivo*, en las cuales el mecanismo más eficiente para transferencia de energía al interior de la estrella es convección. Generalmente, esta condición se produce en estrellas supermasivas.

D.4. Ecuaciones de estado para un gas de Fermi completamente degenerado

D.4.1. Definiciones estadísticas

En esta sección se usarán resultados de la teoría cinética para encontrar ecuaciones de estado apropiadas para modelar dos tipos de estrellas en las etapas finales de su evolución: *enanas blancas* y *estrellas de neutrones*.

Consideremos en primer lugar la *densidad numérica en el espacio fase* 6-D para cada especie de partícula:

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} = \frac{g}{h^3} f(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (\text{D.30})$$

en donde $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ es la *función de distribución adimensional en el espacio fase* que da el número de ocupación promedio en una celda de dicho espacio, h es la constante de Planck de modo que h^3 sea el volumen de una celda en el espacio fase, y g es el peso estadístico (número de estados de una partícula con un valor dado de momentum \vec{p}). Para partículas masivas, $g = 2S + 1$ (S es el spin), para fotones $g = 2$ y para neutrinos $g = 1$.

Con esta definición, la densidad numérica n de cada especie de partículas será:

$$n = \int \frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g}{h^3} \int f d^3p, \quad (\text{D.31})$$

en donde la integral es sobre todo el espacio de los momenta \vec{p} . Por otra parte, la densidad de energía ϵ estará dada por

$$u = \int E \frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g}{h^3} \int (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} f d^3p, \quad (\text{D.32})$$

en donde $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ es la energía relativista de las partículas con masa en reposo m . Por otra parte, la presión P para una *distribución isotrópica de momenta* será:

$$P = \frac{1}{3} \int p v \left(\frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} \right) d^3p = \frac{g}{3h^3} \int \frac{p^2 c^2}{E} f d^3p = \frac{g}{3h^3} \int p \frac{dE}{dp} f d^3p \quad (\text{D.33})$$

en donde $v = pc^2/E$ y el factor $\frac{1}{3}$ proviene de la isotropía considerada y el principio de equipartición. Finalmente, la densidad de masa en reposo ρ se puede definir de dos formas para los casos de interés tratados:

¹Ver Weinberg [54].

1. *Electrones (en enanas blancas):*

$$\rho_0 = \mu_e m_u n_e, \quad (\text{D.34})$$

en donde $n = n_e$ es la *densidad numérica de electrones*, $m_u = 1.66 \cdot 10^{-27} [\text{kg}]$ es la unidad de masa atómica (e.d., de protones y de neutrones, ver apéndice B), y μ_e es el *peso molecular medio por electrón*. La expresión (D.34) considera que la masa y por tanto la densidad del fluido considerado se debe a los bariones de los núcleos atómicos, despreciándose la contribución de los electrones:

$$\mu_e = \frac{\text{masa total}}{m_u} \frac{1}{N^{\circ} \text{ total de electrones}}, \quad (\text{D.35})$$

$$\approx \frac{1}{Y_e} = \frac{N^{\circ} \text{ total de bariones}}{N^{\circ} \text{ total de electrones}} = \frac{Z}{A}, \quad (\text{D.36})$$

en donde $m_B \approx m_u$ es la *masa media de bariones*, Y_e es el *número medio de electrones por barión*, A es el peso atómico y Z el número atómico de la especie considerada (e igual al número de protones en el núcleo). Para muchos de los elementos de los que usualmente está compuesta una enana blanca, en donde esta relación es válida, tal como ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ y ${}^{24}\text{Mg}$, el peso molecular medio por electrón es $\mu_e = 2$. Una excepción es ${}^{56}\text{Fe}$, que tiene $\mu_e \approx 2.15$.

2. *Neutrones (en estrellas de neutrones):*

$$\rho_0 = m_n n_n, \quad (\text{D.37})$$

en donde $n = n_n$ es la densidad numérica de neutrones y m_n es la masa de un neutrón. Esto se debe a que en las estrellas de neutrones existen prácticamente sólo estos bariones, por lo que la masa total será debido únicamente a ellos.

D.4.2. Función de distribución de Fermi

En general, de la estadística de Fermi-Dirac, sabemos que la función de distribución de un gas ideal de Fermi (describiendo fermiones, partículas de spin semi-entero) estará dada, como función de la energía, por:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}, \quad (\text{D.38})$$

en donde μ es el *potencial químico*. Es posible probar que la relación anterior se reduce a la conocida función de distribución de Maxwell-Boltzmann para densidades bajas y temperaturas altas. Por otra parte, cuando las temperaturas son bajas, como ocurre con la materia presente en las estrellas analizadas, los fermiones se irán a los niveles de energía más bajos disponibles, denominándose *gas de Fermi completamente degenerado* en el límite $T \rightarrow 0$. Para este caso, el potencial químico $\mu = E_f$ pasa a denominarse *energía de Fermi*, y la función de distribución se convierte en una función escalón:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \leq E_F, \\ 0 & \text{si } E > E_F. \end{cases} \quad (\text{D.39})$$

En esta situación, todos los fermiones al estar ocupando el nivel más bajo, tendrán $|\vec{p}| \leq p_F$, en donde p_F se denomina *momentum de Fermi*, estando relacionados con la energía de Fermi mediante la relación

$$E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4}. \quad (\text{D.40})$$

D.4.3. Ecuación de estado de Fermi exacta

Densidad numérica y densidad propia de masa

Usando la función de distribución para un gas ideal de Fermi completamente degenerado (D.39) de electrones (con subíndice e) o neutrones (con subíndice n) en la definición (D.31), obtenemos para la densidad numérica de las partículas.

$$n_{e,n} = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (\text{D.41})$$

en donde se ha considerado $g = 2$ debido a que el spin de los fermiones considerados, electrones y neutrones, es $S = 1/2$. Definiendo el *parámetro adimensional de momentum relativo* x :

$$x := \frac{p}{m_{e,n}c} \quad \Rightarrow \quad x_F = \frac{p_F}{m_{e,n}c}, \quad (\text{D.42})$$

podemos escribir la relación anterior como:

$$n_{e,n} = \frac{8\pi c^3}{3h^3} m_{e,n}^3 x_F^3. \quad (\text{D.43})$$

De este modo, podemos expresar la densidad propia de masa para el caso de electrones usando (D.34) como:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{8\pi c^3}{3h^3} \mu_e m_u m_e^3 x_F^3 \approx 9.7393 \cdot 10^8 \mu_e x_F^3 [\text{kg/m}^3]}, \quad (\text{D.44})$$

mientras que para neutrones usamos (D.37), obteniendo:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{8\pi c^3}{3h^3} m_n^4 x_F^3 \approx 6.1066 \cdot 10^{18} x_F^3 [\text{kg/m}^3].} \quad (\text{D.45})$$

Calculando la presión y densidad de energía

Por otra parte, para la presión usamos la definición (D.33), obteniendo la integral

$$P_{e,n} = \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_{e,n}^2 c^4)^{1/2}} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi c^2}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 dp}{(p^2 c^2 + m_{e,n}^2 c^4)^{1/2}}, \quad (\text{D.46})$$

y en función del parámetro relativo x (D.42), podemos escribir la integral de presión en la forma:

$$\boxed{P_{e,n} = \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^{1/2}}.} \quad (\text{D.47})$$

Además, la segunda forma en que se ha escrito la integral de presión (D.33) permite encontrar una relación directa con la integral de energía (D.32), puesto que integrando por partes con la

función de distribución considerada (D.39), podemos escribir:

$$P = \frac{2}{3h^3} \int_0^{p_F} p \frac{dE}{dp} d^3p = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{dE}{dp} dp \quad (\text{D.48})$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} \left\{ \int_0^{p_F} \frac{d}{dp} (p^3 E) dp - \int_0^{p_F} 3p^2 E dp \right\} \quad (\text{D.49})$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 E \Big|_0^{p_F} - \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} E p^2 dp \quad (\text{D.50})$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 E_F - u. \quad (\text{D.51})$$

En términos del parámetro relativo x_F , tenemos para la densidad de energía, que:

$$u_{e,n} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 E_F - P_{e,n} \quad (\text{D.52})$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} \left(\frac{p_F}{m_{e,n}c} \right)^3 (m_{e,n}c)^3 \sqrt{p_F^2 c^2 + m_{e,n}^2 c^4} - P_{e,n} \quad (\text{D.53})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} - P_{e,n}. \quad (\text{D.54})$$

Por lo tanto, sólo basta determinar la integral de presión (D.47) para obtener de la expresión anterior la densidad de energía ϵ , no requiriendo calcular directamente (D.32). Entonces, para calcular (D.47), conviene efectuar la sustitución hiperbólica,

$$x =: \operatorname{senh} \theta \Rightarrow dx = \cosh \theta d\theta, \quad (1 + x^2)^{1/2} = \cosh \theta, \quad (\text{D.55})$$

$$\theta_F = \operatorname{senh}^{-1} x_F = \ln \left| x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right|, \quad (\text{D.56})$$

con la cual la integral de presión queda

$$P_{e,n} = \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} \operatorname{senh}^4 \theta d\theta. \quad (\text{D.57})$$

Para determinarla, usamos algunas identidades hiperbólicas² de modo que el integrando se pueda reescribir como:

$$\operatorname{senh}^4 \theta = \operatorname{senh}^2 \theta (\cosh^2 \theta - 1) = \left(\frac{\operatorname{senh}^2 2\theta}{2} \right)^2 - \operatorname{senh}^2 \theta, \quad (\text{D.58})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\cosh 4\theta - 1}{2} \right) - \left(\frac{\cosh 2\theta - 1}{2} \right), \quad (\text{D.59})$$

$$= \frac{1}{8} (\cosh 4\theta - 4 \cosh 2\theta + 3), \quad (\text{D.60})$$

² $\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta \equiv 1$, $\operatorname{senh} 2\theta \equiv 2 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta$, $\cosh 2\theta \equiv \operatorname{senh}^2 \theta + \cosh^2 \theta \equiv 1 + 2 \operatorname{senh}^2 \theta$, $\operatorname{senh}^2 \theta \equiv (\cosh 2\theta - 1)/2$.

con lo cual se puede calcular directamente la integral (D.57), ya que al reemplazar allí (D.60), obtenemos:

$$P_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} (\cosh 4\theta - 4 \cosh 2\theta + 3) d\theta \quad (\text{D.61})$$

$$= \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left(\frac{1}{4} \operatorname{senh} 4\theta_F - 2 \operatorname{senh} 2\theta_F + 3\theta_F \right). \quad (\text{D.62})$$

Esta expresión se puede escribir de varias formas equivalentes, las que serán útiles según las circunstancias:

- Factorizando directamente (D.62) por $1/4$,

$$P_{e,n} = \frac{1}{3} \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{4h^3} \left[\operatorname{senh}(4\theta_F) - 8 \operatorname{senh}\left(\frac{4\theta_F}{2}\right) + 3(4\theta_F) \right], \quad (\text{D.63})$$

e introduciendo el parámetro t definido por

$$t := 4\theta_F = 4 \operatorname{senh}^{-1} x_F = 4 \ln \left| x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right|, \quad (\text{D.64})$$

obtenemos la forma paramétrica para la presión dada por Oppenheimer [48]:

$$\boxed{P_{e,n} = \frac{1}{3} \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{4h^3} \left(\operatorname{senh} t - 8 \operatorname{senh}\left(\frac{t}{2}\right) + 3t \right)}. \quad (\text{D.65})$$

Para encontrar la densidad de energía, usamos la relación (D.54), notando que de la sustitución (D.55) podemos escribir

$$x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} = \operatorname{senh}^3 \theta_F \cosh \theta_F = (\operatorname{senh}^2 \theta_F) (\operatorname{senh} \theta_F \cosh \theta_F) \quad (\text{D.66})$$

$$= \left(\frac{\cosh 2\theta_F - 1}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{senh} 2\theta_F}{2} \right) = \frac{1}{8} \operatorname{senh} 4\theta_F - \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2\theta_F. \quad (\text{D.67})$$

Luego, obtenemos que:

$$u_{e,n} = \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[\frac{1}{8} \operatorname{senh} 4\theta_F - \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2\theta_F \right] - \frac{1}{3} \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{4h^3} \left[\operatorname{senh}(4\theta_F) - 8 \operatorname{senh}\left(\frac{4\theta_F}{2}\right) + 3(4\theta_F) \right], \quad (\text{D.68})$$

$$= \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[\frac{3}{4} \operatorname{senh} 4\theta_F - 3\theta_F \right], \quad (\text{D.69})$$

y en términos del parámetro t (D.64):

$$\boxed{u_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{4h^3} (\operatorname{senh} t - t)}. \quad (\text{D.70})$$

- También podemos expresar (D.62) directamente en términos del parámetro x_F , para lo cual se reescribe dicha expresión en la forma:

$$P_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left(\frac{1}{2} \operatorname{senh} 2\theta_F \cosh 2\theta_F - 2 \operatorname{senh} 2\theta_F + 3\theta_F \right), \quad (\text{D.71})$$

$$= \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left(\frac{1}{2} \operatorname{senh} 2\theta_F (1 + 2 \operatorname{senh}^2 \theta_F) - 2 \operatorname{senh} 2\theta_F + 3\theta_F \right), \quad (\text{D.72})$$

$$= \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} (\operatorname{senh} \theta_F \cosh \theta_F (2 \operatorname{senh}^2 \theta_F - 3) + 3\theta_F), \quad (\text{D.73})$$

y reexpresando en términos de x_F mediante (D.55), obtenemos para la presión

$$P_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[x_F \sqrt{1+x_F^2} (2x_F^2 - 3) + 3 \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| \right], \quad (\text{D.74})$$

y mediante (D.54), obtenemos directamente para la densidad de energía la siguiente relación:

$$u_{e,n} = \frac{\pi m_{e,n}^4 c^5}{h^3} \left[x_F \sqrt{1+x_F^2} (1+2x_F^2) - \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| \right], \quad (\text{D.75})$$

que son las formas para estas variables dadas por Chandrasekhar [57] y Shapiro [55].

Obtención de la ecuación de estado explícita

De esta forma, las ecuaciones (D.34) ó (D.37), (D.74) y (D.75) proporcionarán una forma paramétrica para la ecuación de estado de Fermi completamente degenerada (y exacta) en función de x_F : $\rho_0 = \rho_0(x_F)$, $P = P(x_F)$ y $u = u(x_F)$.

Ahora bien, para determinar una ecuación de estado del tipo (9.9), se despeja x_F de (D.44), de modo de obtener una dependencia con la densidad propia de masa del tipo $x_F = x_F(\rho)$, que para el caso de electrones es:

$$x_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi c^3 m_u m_e^3} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{\rho_0 / \mu_e}{9.7393 \cdot 10^8 [\text{kg}/\text{m}^3]} \right)^{1/3}, \quad (\text{D.76})$$

y para neutrones sería:

$$x_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi c^3 m_n^4} \right)^{1/3} (\rho_0)^{1/3} \approx \left(\frac{\rho_0 / \mu_e}{6.1066 \cdot 10^{18} [\text{kg}/\text{m}^3]} \right)^{1/3}. \quad (\text{D.77})$$

Luego, una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad de masa se obtendrá sustituyendo lo anterior en (D.74), obteniendo $P = P(x_F) = P(x_F(\rho_0)) = P(\rho_0)$. Del mismo modo, se puede encontrar la densidad de energía en función de la densidad propia de masa, usando (D.75): $u = \epsilon(x_F) = u(x_F(\rho_0)) = u(\rho_0)$.

D.4.4. Ecuaciones de estado de Fermi aproximadas

Las expresiones resultantes para las ecuaciones de estado de Fermi exactas son poco manejables analíticamente, por lo que su solución recae en métodos numéricos, tal como se hizo para las ecuaciones de estructura estelar en la sección 9.5. Por esta razón, y con el objetivo de simplificar la ecuación de estado obtenida, consideraremos dos casos extremos para el parámetro x_F dado por (D.42):

1. $x_F \ll 1$. Es posible encontrar directamente una serie de potencias para la presión (D.74) y densidad de energía (D.75) a partir de dichas expresiones. Sin embargo, es más fácil expandir primero el integrando de (D.47), ya que en este límite:

$$P_{e,n} \approx \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} x^4 \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2!} \right) x^4 + \dots \right] dx, \quad (\text{D.78})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[\frac{x_F^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{x_F^7}{7} + \frac{3}{8} \frac{x_F^9}{9} + \dots \right], \quad (\text{D.79})$$

y también, usando (D.54) y expandiendo:

$$u_{e,n} \approx \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[x_F^3 \left(1 + \frac{1}{2}x_F^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2!}\right) x_F^4 + \dots \right) \right] - P_{e,n} \quad (\text{D.80})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left\{ \left[x_F^3 + \frac{1}{2}x_F^5 - \frac{1}{8}x_F^7 + \dots \right] - \left[\frac{x_F^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{x_F^7}{7} + \frac{3}{8} \frac{x_F^9}{9} + \dots \right] \right\} \quad (\text{D.81})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[x_F^3 + \frac{3}{10}x_F^5 - \frac{3}{56}x_F^7 + \dots \right] \quad (\text{D.82})$$

De este modo³, dejando sólo el primer término en la expresión para la presión:

$$P_{e,n} = \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \frac{x_F^5}{5} \quad (\text{D.85})$$

obtenemos una ecuación de estado politrópica (D.22) con índice $\gamma = 5/3$, ya que x_F es proporcional a $\rho_0^{1/3}$. Su expresión explícita dependerá del tipo de partícula involucrada:

- a) *Electrones no relativistas* ($p_F \ll m_e c$). Equivale por (D.76) a que las densidades típicas de las enanas blancas sean bajas, del orden de $\rho_0 \ll 10^9 [\text{kg/m}^3]$. Reemplazando dicho x_F en la expansión asintótica de la presión (D.85), tenemos:

$$\boxed{P_e = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e (m_u \mu_e)^{5/3}} \rho_0^{5/3} \approx 1.00359 \cdot 10^7 \left(\frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{5/3} \text{ MKS.}} \quad (\text{D.86})$$

- b) *Neutrones no relativistas* ($p_F \ll m_n c$). Equivale por (D.77) a que las densidades típicas de las estrellas de neutrones sean bajas, del orden de $\rho \ll 6 \cdot 10^{18} [\text{kg/m}^3]$. Reemplazando dicho x_F en la expansión asintótica de la presión (D.85), tenemos:

$$\boxed{P_n = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \rho_0^{5/3} \approx 5.3803 \cdot 10^3 (\rho_0)^{5/3} \text{ MKS.}} \quad (\text{D.87})$$

2. $x_F \gg 1$. Al igual que para el caso anterior, en vez de expandir directamente la serie de potencias para la presión (D.74) y densidad de energía (D.75), es más conveniente desarrollar primero el integrando de (D.47), que en este límite es:

$$P_{e,n} \approx \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1/2}} \quad (\text{D.88})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} x^3 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2!} \right) \frac{1}{x^4} + \dots \right] dx, \quad (\text{D.89})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[\frac{x_F^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{x_F^2}{2} + \frac{3}{8} \ln(x_F) + \dots \right], \quad (\text{D.90})$$

³Note que comparando ambas expansiones con (D.74) y (D.75), es posible encontrar las siguientes relaciones válidas para $x_F \ll 1$:

$$x_F \sqrt{1+x_F^2} (2x_F^2 - 3) + 3 \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| = \frac{8}{5} \left(x_F^5 - \frac{5}{14} x_F^7 + \frac{5}{24} x_F^9 + \dots \right), \quad (\text{D.83})$$

$$x_F \sqrt{1+x_F^2} (1+2x_F^2) - \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| = \frac{8}{3} \left(x_F^3 + \frac{3}{10} x_F^5 - \frac{3}{56} x_F^7 + \dots \right). \quad (\text{D.84})$$

y también, usando (D.54) y expandiendo:

$$u_{e,n} \approx \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} \right)^{1/2} \right] - P_{e,n} \quad (\text{D.91})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[x_F^4 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x_F^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2!} \right) \frac{1}{x_F^4} + \dots \right) \right. \quad (\text{D.92})$$

$$\left. - \left(\frac{x_F^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{x_F^2}{2} + \frac{3}{8} \ln(x_F) + \dots \right) \right] \quad (\text{D.93})$$

$$= \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \left[\frac{3}{4} x_F^4 + \frac{3}{4} x_F^2 - \frac{3}{8} \ln(x_F) + \dots \right] \quad (\text{D.94})$$

De este modo⁴, dejando sólo el primer término en la expresión para la presión:

$$P_{e,n} = \frac{8\pi m_{e,n}^4 c^5}{3h^3} \frac{x_F^4}{4} \quad (\text{D.97})$$

obtenemos una ecuación de estado politrópica (D.22) con índice $\gamma = 4/3$, ya que x_F es proporcional a $\rho_0^{1/3}$. Su expresión explícita dependerá del tipo de partícula involucrada:

- a) *Electrones ultra-relativistas* ($p_F \gg m_e c$). Equivale por (D.76) a que las densidades típicas de las enanas blancas sean altas, del orden de $\rho_0 \gg 10^9 \text{ [kg/m}^3]$. Reemplazando dicho x_F en la expansión asintótica de la presión (D.97), tenemos:

$$P_e = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{(m_u \mu_e)^{4/3} \rho_0^{4/3}} \approx 1.2435 \cdot 10^{10} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{4/3} MKS. \quad (\text{D.98})$$

- b) *Neutrones ultra-relativistas* ($p_F \gg m_n c$). Equivale por (D.77) a que las densidades típicas de las estrellas de neutrones sean altas, del orden de $\rho_0 \gg 6 \cdot 10^{18} \text{ [kg/m}^3]$. Reemplazando dicho x_F en la expansión asintótica de la presión (D.97), tenemos:

$$P_e = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_n^{4/3} \rho_0^{4/3}} \approx 1.2293 \cdot 10^{10} (\rho_0)^{4/3} MKS. \quad (\text{D.99})$$

La diferencia en el exponente (índice politrópico γ) de las ecuaciones de estado obtenidas tiene importancia fundamental en la estabilidad de enanas blancas y estrellas de neutrones, tanto aplicando la teoría newtoniana de gravitación como Relatividad General.

Notar que en las aplicaciones del texto principal en que se usen resultados de este apéndice, se omitirá el subíndice F en el parámetro relativo x_F , a fin de no recargar la notación.

⁴Note que comparando ambas expansiones con (D.74) y (D.75), es posible encontrar las siguientes relaciones válidas para $x_F \gg 1$:

$$x_F \sqrt{1+x_F^2} (2x_F^2 - 3) + 3 \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| = 2 \left(x_F^4 - x_F^2 + \frac{3}{2} \ln(x_F) + \dots \right), \quad (\text{D.95})$$

$$x_F \sqrt{1+x_F^2} (1+2x_F^2) - \ln \left| x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right| = 2 \left(x_F^4 + x_F^2 - \frac{1}{2} \ln(x_F) + \dots \right). \quad (\text{D.96})$$

Bibliografía

- [1] Guillermo F. Rubilar, *Apuntes Curso Electrodinámica*, Universidad de Concepción. Última versión y código fuente disponible en <https://github.com/gfrubi/electrodinamica>.
- [2] C.M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Relativity **9** (2006) 3. [Online Article]: cited [2012/01/17].
- [3] S.G. Turyshev, *Experimental Tests of General Relativity: Recent Progress and Future Directions*, Phys. Usp. **52** (2009) 1-27. <http://arxiv.org/abs/0809.3730>.
- [4] S.G. Turyshev, *Experimental Tests of General Relativity*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **58** (2008) 207-248.
- [5] L. Koester, *Verification of the equivalence of gravitational and inertial mass for the neutron*, Phys. Rev. **D 14** (1976) 907-909.
- [6] L. Zhou et al., *Test of Equivalence Principle at 10^{-8} Level by a Dual-Species Double-Diffraction Raman Atom Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **115** (2015) 013004.
- [7] X. Duan et al., *Test of the Universality of Free Fall with Atoms in Different Spin Orientations*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 023001.
- [8] Zentrum für Angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (Center of Applied Space Technology and Microgravity), <http://www.zarm.uni-bremen.de>.
- [9] <http://einstein.stanford.edu/STEP>.
- [10] A. Einstein, *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen*, Jahrbuch der Radioaktivitaet und Elektronik **4** (1907) 411-492.
- [11] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, (Fifth Edition), Princeton University Press (1956).
- [12] A. Einstein, *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Annalen der Physik **35** (1911) 898-908.
- [13] R.V. Pound and G.A. Rebka, *Apparent weight of photons*, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 337-341.
- [14] R.V. Pound and J.L. Snider, *Effect of Gravity on nuclear resonance*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 539-540.
- [15] R.V. Pound and J.L. Snider, *Effect of Gravity on Gamma radiation*, Phys. Rev. **140** (1965) B778.
- [16] J.L. Snider, *New measurement of the solar gravitational redshift*, Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 853.

- [17] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband and D. J. Wineland, *Optical Clocks and Relativity*, *Science* **329** (2010) 1630. <http://www.sciencemag.org/content/329/5999/1630.full.html>.
- [18] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitsttheorie*, *Annalen der Physik*, Band **49** (1916). Traducción al inglés [aquí](#).
- [19] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativittstheorie*, *Sitzung der physikalisch mathematischen Klasse* (1917) 142.
- [20] A. Einstein, *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Sitzungsberichte der koeniglich preussischen Akademie der Wissenschaften* (1915) 831.
- [21] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity* (1997). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019v1>.
- [22] Ignazio Ciufolini and John A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*, Princeton University Press, New Jersey, 1st Edition (1995) ISBN 0-691-03323-4.
- [23] F. de Felice and C.J.S. Clarke, *Relativity on curved manifolds*, Cambridge University Press (1990).
- [24] R. D' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, (1992).
- [25] U.J. Le Verrier, *Theorie du mouvement de Mercure*, *Annales de l' Observatoire imperial de Paris* (1859). <http://adsabs.harvard.edu/abs/1859AnPar...5....1L>.
- [26] G.M. Clemence, *The relativity effect in planetary motions*, *Rev. Mod. Phys.* **19** (1947) 361-364.
- [27] A.M. Nobili and C.M. Will, *The real value of Mercury's perihelion advance*, *Nature* **320** (1986) 39-41. <http://www.nature.com/nature/journal/v320/n6057/abs/320039a0.html>.
- [28] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*. Second Edition. W.W. Norton & Company, New York, (1994).
- [29] J.H. Taylor, *Pulsar timing and relativistic gravity*, *Class. Quantum. Grav.* **10** (1993) S167.
- [30] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, (1973).
- [31] P.J. Mohr and B.N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998**, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 351.
- [32] C.M. Will, *Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light*, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 413–415. <http://dx.doi.org/10.1119/1.15622>.
- [33] F. W. Dyson, A. S. Eddington and C. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **220** (1920) 291-333.
- [34] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach and J. S. Gregory, *Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 121101.

- [35] I. I. Shapiro, *Fourth test of General Relativity*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 789-791.
- [36] I. I. Shapiro, et al. *Fourth test of General Relativity: New Radar Result*, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1132-1135.
- [37] M. Schneider, *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie*, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg (1996).
- [38] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago Univ. Press (1984).
- [39] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, (1972).
- [40] J.P. Luminet, *Black Holes : A General Introduction*, DOI 10.1007/978-3-540-49535-2_1, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9801252>.
- [41] James B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, 1st Edition (2003) ISBN 0-8053-8662-9.
- [42] Kip S. Thorne, *Gravitomagnetism, Jets in Quasars and the Stanford Gyroscope Experiment; del libro: "Near Zero: New Frontiers of Physics"*, W.H. Freeman and Company, New York, 1st Edition (1988).
- [43] L.I. Schiff, *Motion of a Gyroscope according to Einstein's Theory of Gravitation*, Institute of Theoretical Physics, Stanford University, Communicated in April 19, 1960.
- [44] C. W. F. Everitt et al., *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 221101 (2011).
- [45] M. Maggiore, *Gravitational waves. Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford, New York (2008).
- [46] P. Peters and J. Mathews, *Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit*, *Phys. Rev.* **131** (1963), 435-440. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [47] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, *Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis*, *ASP Conf. Ser.* **328**, 25 (2005). [[astro-ph/0407149](#)].
- [48] J.R. Oppenheimer y G.M. Volkoff *On Massive Neutron Cores*, *Physical Review* **55**, 374 (1939).
- [49] J.R. Oppenheimer y H.Snyder *On Continued Gravitational Contraction*, *Physical Review* **56**, 455 (1939).
- [50] S. Chandrasekhar *The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity*, *Astrophysical Journal* **140**, 417 (1964).
- [51] J.M. Bardeen, K.S. Thorne y D.W. Meltzer *A Catalogue of Methods for Studying the Normal Modes of Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models*, *Astrophysical Journal* **145**, 505 (1966).
- [52] T. Fließbach *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Lehrbuch, (2006).
- [53] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, (1973).
- [54] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, (1972).

- [55] S.L. Shapiro y S.A. Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, John Wiley & Sons, New York, (1983).
- [56] R.C. Tolman *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, (1934).
- [57] S. Chandrasekhar *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications, New York, (1939).
- [58] Y.B. Zel'dovich y I.D. Novikov *Stars and Relativity*, Dover Publications, New York, (1971).
- [59] J. Mathews y R.L. Walker *Mathematical Method of Physics, 2nd edition*, Addison-Wesley, (1971).
- [60] P.M. Morse y H. Feshbach *Methods of Theoretical Physics, part I*, McGraw-Hil Book Company, (1953).
- [61] R.P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, *Physical Review Letters* **11**, 237 (1963).
- [62] R.P. Kerr and A. Schild, *A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations*. In: Atti del Convegno sulla Relativita Generale: Problemi dell'Energia e Onde Gravitazionali. G. Barbra Editore, Firenze 1965, pp. 112. Reprinted in *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 2485–2499.
- [63] N. Straumann *General Relativity With Applications to Astrophysics*, Springer, (2004)
- [64] R. Penrose y R. M. Floyd *Extraction of Energy Rotational from a Black Hole*, *Nature Physical Sciences* **229**, 177-179 (1971)
- [65] James M. Bardeen, William H. Press and Saul A. Teukolsky *Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation*, *The Astrophysical Journal* **178**, 347-369 (1972)