

---

# Mecánica Cuántica

---

Versión del 1 de mayo de 2018

# Prefacio

*Este apunte se confeccionó a partir de las notas de M. Alid, F. Arévalo, A. Delgado, F. Izaurieta, C. Paiva, E. Rodriguez, G. Rubilar, O. Valdivia, A. Zapata.*

Esta obra ha sido publicada bajo una [licencia GPL v3](#). El código fuente (pdf) $\text{\LaTeX}$ , así como las figuras en formato editable están disponibles en el [repositorio GitHub del proyecto](#).

*“...Así, nosotros los mortales, somos inmortales en lo que creamos en común.”*

Albert Einstein.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>I Cuantización del campo electromagnético</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Cuantizando el campo electromagnético . . . . .	1
<b>2. Sistemas continuos</b>	<b>3</b>
2.1. Cadena lineal clásica . . . . .	3
2.1.1. Modelo discreto . . . . .	3
2.1.2. Ecuaciones de movimiento y solución . . . . .	4
2.2. Límite continuo . . . . .	5
2.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	6
2.2.2. Formalismo Hamiltoniano . . . . .	7
2.2.3. Cadena Lineal: Modelo continuo (el elástico!) . . . . .	8
2.2.4. Cadena Lineal Cuántica . . . . .	10
2.2.5. Ecuación de movimiento para el operador $\hat{\phi}(x)$ . . . . .	12
2.2.6. Cantidades Importantes . . . . .	13
2.3. Modelo continuo con condiciones de borde periódicas: Discretización de los estados de momentum . . . . .	21
2.3.1. Cuantización . . . . .	22
2.3.2. Interpretación: creación y aniquilación de partículas . . . . .	23
2.3.3. Propiedades del vacío . . . . .	26
2.3.4. Estados de una partícula . . . . .	26
2.3.5. Estados coherentes . . . . .	27
<b>3. Cuantización del Campo Electromagnético libre</b>	<b>29</b>
3.1. Teoría clásica: Ecuaciones de Maxwell . . . . .	29
3.1.1. Solución clásica para el campo de radiación en el gauge de Coulomb . . . . .	32
3.1.2. Densidad lagrangeana, energía y momentum lineal. . . . .	34
3.2. Cuantización . . . . .	35
3.2.1. Operadores de creación y destrucción . . . . .	37
3.2.2. Vectores de Estado del Campo Electromagnético. . . . .	38
<b>4. Interacción del campo electromagnético cuantizado con la materia.</b>	<b>41</b>
4.1. Interacción del campo electromagnético clásico con la materia . . . . .	41
4.1.1. Lagrangeano clásico . . . . .	41
4.1.2. Hamiltoniano clásico . . . . .	42

4.1.3. Interacción de una partícula no-relativista con el campo electromagnético cuántico . . . . .	43
4.1.4. Teoría de Perturbaciones y regla de oro de Fermi . . . . .	44
4.2. Absorción de fotones por un electrón: Contribución de primer orden en $\hat{H}'$ . . . . .	45
4.3. Scattering entre fotones y electrones libres. . . . .	46
4.3.1. Contribución de primer orden en $\hat{H}''$ . . . . .	47
4.4. Emisión de radiación por un átomo excitado . . . . .	51
4.5. Absorción de fotones . . . . .	53
4.6. Espectro de radiación de cuerpo negro . . . . .	53
4.7. Vida media de un estado excitado . . . . .	55
4.7.1. Reglas de selección para transiciones eléctricas dipolares . . . . .	56
4.8. Vida media del estado $2p$ con $m = 0$ del átomo de Hidrógeno respecto a decaimientos al estado fundamental . . . . .	57
4.9. Ancho natural de líneas espectrales y auto-energía . . . . .	58
4.10. Efecto Casimir . . . . .	58
<b>5. El campo de Schrödinger</b> . . . . .	<b>60</b>
5.1. Teoría Clásica de Campos para el Campo de Schrödinger . . . . .	60
5.2. Cuantización del Campo de Schrödinger. . . . .	62
<b>II Mecánica Cuántica Relativista</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>6. La ecuación de Dirac</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1. Cuadricorriente conservada . . . . .	69
6.2. Soluciones de la ecuación de Dirac libre . . . . .	70
6.3. Helicidad . . . . .	72
6.4. Campo de Dirac interactuando con el campo electromagnético . . . . .	73
6.5. Límite no-relativista de la Ecuación de Dirac. . . . .	73
6.6. Formulación covariante de la Ecuación de Dirac. . . . .	75
6.6.1. La transformación $\hat{S}$ . . . . .	76
6.6.2. Construcción de $\hat{S}$ para transformaciones de Lorentz infinitesimales. . . . .	77
6.6.3. El Operador $\hat{S}$ para transformaciones de Lorentz propias . . . . .	78
6.6.4. Spinor adjunto . . . . .	79
6.6.5. Spinores bajo Reflexiones Espaciales: Paridad . . . . .	79
6.6.6. Construcción de soluciones de la ecuación libre de Dirac mediante transformaciones de Lorentz. . . . .	80
6.6.7. Covariantes Bilineares de los Spinores de Dirac. . . . .	82
6.7. Partículas de Dirac en campos externos: Ejemplos y problemas . . . . .	85
6.8. Densidad Lagrangeana y Tensor de Momentum-Energía de la ecuación libre de Dirac . . . . .	85
6.9. Partículas de Dirac en campos externos: Ejemplos y problemas . . . . .	87
<b>III Apéndice</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>A. Teoría de Campos Clásica</b> . . . . .	<b>89</b>
A.1. Formulación Funcional . . . . .	89

<b>B. Cuantización del oscilador armónico unidimensional.</b>	<b>96</b>
B.1. Energía mínima y niveles de energía. . . . .	96
B.1.1. Principio de Indeterminación. . . . .	96
B.2. Niveles de energía y estados cuánticos de energía. . . . .	99
B.2.1. Operadores de Creación y de Destrucción. . . . .	99
B.2.2. Eigenestados y Eigenenergías. . . . .	102
B.3. Estados Coherentes . . . . .	105
B.4. Problemas. . . . .	105
B.4.1. Estados de Glauber: Estados Coherentes del Campo Electromagnético. .	117

## Parte I

# Cuantización del campo electromagnético

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Cuantizando el campo electromagnético

Queremos cuantizar el campo electromagnético. ¿Por qué?. Básicamente, porque la teoría clásica de Maxwell no describe “fotones”, sino “ondas electromagnéticas”. Por otro lado, desde el descubrimiento del efecto fotoeléctrico se tiene evidencia de las propiedades corpusculares de la luz. Estas propiedades no son descritas por la teoría clásica. Así que hay que “parchar” la teoría de Maxwell para incluir aspectos corpusculares (cuánticos!) de la luz. Tenemos, por tanto, que “cuantizar”, de algún modo, la teoría de Maxwell....

Einstein fue el primero que reconoció la impotencia de las propiedades cuánticas de la radiación. En 1905 (en el mismo número de la revista *Annalen der Physik* en el que publicó su trabajo fundamental sobre la teoría de la relatividad especial) Einstein propone una explicación para el efecto fotoeléctrico (descubierto en 1887 por Heinrich Hertz). Philipp Lenard (inesperadamente) descubrió en 1902 que la energía de los electrones liberados de una placa metálica irradiada por luz (ultravioleta) *no depende* de la intensidad de la luz, como se esperaba a partir de la teoría electromagnética clásica (recuerde,  $E_{em} \propto \int dV (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ ), sino que *depende de la frecuencia* (e.d., del color) de la luz. La intensidad de la luz determina sólo el *número* de electrones emitidos. Einstein asumió que la luz está compuesta de *cuantos* de energía  $h\nu$  ( $= \hbar\omega$ ), es decir, de *fotones*, y que la emisión de un electrón era producida por su interacción con el fotón, proceso en el cual el primero absorbía la energía del segundo. Con estos supuestos es fácil explicar que la energía de los electrones emitidos aumenta con la frecuencia de los fotones.

Otra evidencia de la necesidad de modificar la teoría electromagnética clásica puede encontrarse en el *efecto Compton*. Cuando rayos X son dispersados por electrones, se observa un corrimiento de frecuencia de la radiación. Además, la magnitud del corrimiento depende del ángulo de scattering. Este efecto fue descubierto por Compton en 1923 y explicado (por Compton y Debye) sobre la base de los supuestos de Einstein sobre el fotón. La electrodinámica clásica, por otro lado, no predice alteración alguna de la frecuencia de las ondas electromagnéticas dispersadas: sólo fotones con energía  $\hbar\omega$  y momentum  $\hbar k$  posibilitan este corrimiento.

Ya en los primeros años del desarrollo de la mecánica cuántica se intentó extender el método de cuantización a sistemas con infinitos grados de libertad para obtener así reglas de cuantización para *campos*. En el caso de sistemas descritos por campos, es posible definir cantidades análogas a las conocidas coordenadas de posición y momentum canónico usadas en la cuantización de sistemas con finitos grados de libertad. Estas cantidades satisfacen ecuaciones que son análogas a aquellas de la mecánica clásica. Las reglas de cuantización para los campos son entonces análogas a aquellas usadas para sistemas mecánicos. Al aplicar este procedimiento de cuantización al campo electromagnético es posible fundamentar el supuesto usado por Einstein

de que los cuantos del campos electromagnético (fotones) poseen energía  $\hbar\omega$ , además de la propiedad (asumida por de Broglie) que los fotones poseen un impulso  $h/\lambda$  ( $= \hbar k$ ). Naturalmente, de la cuantización del campo electromagnético se desprenden muchos nuevos fenómenos como, por ejemplo, que los correspondientes operadores que describen el campo electromagnético (en general) no conmutan, por lo que no es posible medirlos simultáneamente con infinita precisión. En particular, un estado con  $\vec{E} = \vec{0}$  y  $\vec{B} = \vec{0}$  no es permitido. Como consecuencia, incluso una región sin radiación electromagnética (vacío fotónico) posee propiedades no triviales. En particular, éste posee una energía, la energía del vacío, o energía del punto cero.

La teoría del campo electromagnético cuantizado, la *electrodinámica cuántica* (QED) constituye el más exitoso ejemplo de una *teoría cuántica de campos*. En el formalismo de la QED fue necesario por primera vez la introducción de operadores que describen la creación (emisión) y destrucción (absorción) de partículas. En forma análoga a QED, posteriormente fue desarrollada la teoría del campo electrón-positrón (campo de Dirac). Los cuantos de este campo describen electrones y sus anti-partículas los positrones, tal como los fotones son los cuantos del campo electromagnético. Actualmente, todas las teoría que describen las interacciones fundamentales conocidas, con excepción de la gravedad, son teorías cuánticas de campos.



## Capítulo 2

# Sistemas continuos

En este capítulo aprenderemos cómo cuantizar un sistema con un continuo de grados de libertad, tal como el campo electromagnético. Para tal efecto comenzaremos recordando algunos aspectos de las formulaciones Lagrangeana y Hamiltoniana de la Mecánica. En particular, estudiaremos un sistema físico compuesto de un número finito de partículas que interactúan por medio de un potencial armónico y que están restringidas a moverse en una línea recta. Luego, investigaremos las expresiones obtenidas en este estudio en el límite de un número infinito de partículas, para llegar así al concepto de campo.

### 2.1. Cadena lineal clásica

#### 2.1.1. Modelo discreto

Consideremos un sistema físico constituido por partículas de igual masa que interactúan sólo con sus primeros vecinos por medio de una fuerza armónica. Este sistema se denomina “Cadena lineal clásica”. Este sistema puede ser considerado como un modelo (muy) simplificado de un sólido (unidimensional), donde las masas representan átomos de la red que forman el sólido y los resortes modelan las interacciones entre los átomos individuales.

En condiciones de equilibrio las partículas se encuentran separadas por una distancia  $\Delta x^l$ , donde  $l = 1, \dots, N$  es el índice que individualiza a cada una de las partículas. La fuerza armónica está caracterizada por una constante  $k$ . Denotaremos con  $q^l$  al desplazamiento de la partícula  $l$ -ésima con respecto a su posición de equilibrio. La energía cinética  $T$  de este sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m(\dot{q}^l)^2(t). \quad (2.1)$$

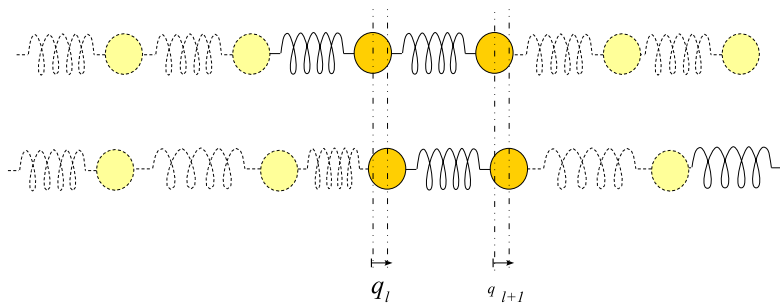


Figura 2.1: Cadena lineal.

La energía potencial  $V$ , que corresponde a la suma de las energías potenciales asociadas a cada una de las fuerzas armónicas, es

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N k \left\{ q^{l+1}(t) - q^l(t) \right\}^2. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, el Lagrangeano del sistema es

$$L = T - V \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m (\dot{q}^l)^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N k \left\{ q^{l+1}(t) - q^l(t) \right\}^2 \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left[ m (\dot{q}^l)^2(t) - k \left\{ q^{l+1}(t) - q^l(t) \right\}^2 \right]. \quad (2.5)$$

### 2.1.2. Ecuaciones de movimiento y solución

Las ecuaciones de movimiento de un sistema con  $N$  grados de libertad pueden ser obtenidas a partir de un lagrangeano  $L = L(q^l, \dot{q}^l)$  mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, esto es

$$\frac{\delta L}{\delta q^l} = \frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \right) = 0, \quad (2.6)$$

donde hay una ecuación para cada coordenada generalizada (o grado de libertad)  $q^l$ , con  $l = 1, 2, \dots, N$ .

Considerando que para el Lagrangeano de la cadena lineal clásica tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} = m \dot{q}^l, \quad \frac{\partial L}{\partial q^l} = k(q^{l+1} - q^l) - k(q^l - q^{l-1}) = k(q^{l+1} - 2q^l + q^{l-1}), \quad (2.7)$$

obtenemos que las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{q}^l = g(q^{l+1} - 2q^l + q^{l-1}). \quad (2.8)$$

Notese que hemos definido  $g := k/m$ .

Para encontrar la solución de las ecuaciones (2.8) es conveniente suponer que los modos de vibración de la cadena pueden ser descritos por una onda plana. Esto está sugerido por la forma de la ecuación (2.8), puesto que si omitimos el primer y tercer término del miembro derecho obtenemos la ecuación del oscilador armónico. Además, siempre podemos considerar una expansión en serie de Fourier de las coordenadas generalizadas. Luego, asumiremos una solución de la forma

$$q^l(t) = B_\kappa(t) e^{i\kappa l}, \quad (2.9)$$

donde  $\kappa$  es análogo al número de onda.

Reemplazando (2.9) en (2.8) obtenemos una ecuación para los coeficientes  $B_\kappa(t)$ . Esta es:

$$\ddot{B}_\kappa(t) = g(e^{i\kappa} + e^{-i\kappa} - 2) B_\kappa(t) = -\omega_\kappa^2 B_\kappa(t), \quad (2.10)$$

es decir, una ecuación tipo oscilador armónico para cada  $\kappa$  dado, donde la frecuencia del oscilador es

$$\omega_\kappa := \sqrt{g(2 - e^{i\kappa} - e^{-i\kappa})} = 2\sqrt{g} \left| \sin \frac{\kappa}{2} \right|. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la solución para  $B_\kappa(t)$  es del tipo

$$B_\kappa(t) = A_\kappa e^{-i\omega_\kappa t}, \quad (2.12)$$

de modo que (2.9) toma la forma

$$q^l(t) = A_\kappa e^{i\kappa l} e^{-i\omega_\kappa t}. \quad (2.13)$$

Finalmente, tomando en cuenta que la ecuación (2.8) es lineal en  $q^l$  y que  $q^l$  es real, encontramos que la solución más general de (2.8) es de la forma

$$q^l(t) = \sum_\kappa \left[ A_\kappa e^{i\kappa l} e^{-i\omega_\kappa t} + A_\kappa^* e^{-i\kappa l} e^{i\omega_\kappa t} \right], \quad (2.14)$$

donde  $\sum_\kappa$  denota una suma o una integral sobre  $\kappa$ , dependiendo de si existen otras condiciones adicionales impuestas, como por ejemplo, condiciones de frontera periódicas (cadena circular).

## 2.2. Límite continuo

Reordenamos la expresión anterior de modo que sea más útil para nuestros propósitos posteriores de efectuar el límite al continuo. Encontramos:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left[ \Delta x^l \frac{m}{\Delta x^l} (\dot{q}^l)^2(t) - \left( \Delta x^l \right)^2 k \left\{ \frac{q^{l+1}(t) - q^l(t)}{\Delta x^l} \right\}^2 \right] \quad (2.15)$$

$$= \sum_{l=1}^N \Delta x^l \left[ \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x^l} (\dot{q}^l)^2(t) - \frac{1}{2} \left( \Delta x^l k \right) \left\{ (\partial q)^l \right\}^2 \right], \quad (2.16)$$

con

$$(\partial q)^l = \frac{q^{l+1} - q^l}{\Delta x^l}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto, el lagrangiano de la cadena lineal clásica puede considerarse como un caso particular de lagrangianos de la forma

$$L = \sum_{l=1}^N \Delta x^l \mathcal{L}_l \left( q^l, \dot{q}^l, (\partial q)^l \right). \quad (2.18)$$

Queremos encontrar la ecuación de movimiento para un sistema cuyas coordenadas generalizadas forman un sólo conjunto de valores continuos, es decir, el sistema posee grados de libertad continuos. Para motivar nuestros resultados, consideraremos el sistema continuo como límite de un sistema de un gran número de grados de libertad.

Consideraremos un sistema discreto con interacciones "locales", es decir, que involucren interacción sólo a través de pares del tipo  $(q^l, q^{l+1})$ . Este sistema puede ser entonces descrito por un lagrangiano de la forma:

$$L = \sum_l \Delta x^l \mathcal{L}_l \left( q^l, q^{l+1}, \dot{q}^l \right) = \sum_l \Delta x^l \mathcal{L}_l \left( q^l, \dot{q}^l, (\partial q)^l \right), \quad (2.19)$$

donde  $\mathcal{L}_l \left( q^l, \dot{q}^l, (\partial q)^l \right)$  es una cantidad que corresponde, en el límite continuo, a lo que denominaremos "Densidad Lagrangeana", que incluye la información acerca de la interacción entre vecinos cercanos a través de su dependencia del término  $(\partial q)^l$ .

### 2.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

La ecuación de movimiento se encuentra fácilmente reemplazando el Lagrangeano dado por la ecuación (2.18) en la ecuación de movimiento (2.6). En efecto:

$$\frac{\delta L}{\delta q^l} = \frac{\partial}{\partial q^l} \left[ \sum_m \Delta x^m \mathcal{L}_m(q^m, \dot{q}^m, (\partial q)^m; t) \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} \left[ \sum_m \Delta x^m \mathcal{L}_m(q^m, \dot{q}^m, (\partial q)^m; t) \right] \right) \quad (2.20)$$

$$= \sum_m \Delta x^m \frac{\partial}{\partial q^l} [\mathcal{L}_m(q^m, \dot{q}^m, (\partial q)^m; t)] - \sum_m \Delta x^m \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} [\mathcal{L}_m(q^m, \dot{q}^m, (\partial q)^m; t)] \right) \quad (2.21)$$

$$= \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial q^l} + \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial (\partial q)^l} \frac{\partial (\partial q)^l}{\partial q^l} + \Delta x^{l-1} \frac{\partial \mathcal{L}_{l-1}}{\partial (\partial q)^{l-1}} \frac{\partial (\partial q)^{l-1}}{\partial q^l} - \Delta x^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l} \right) \quad (2.22)$$

$$= \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial q^l} + \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial (\partial q)^l} \left( -\frac{1}{\Delta x^l} \right) + \Delta x^{l-1} \frac{\partial \mathcal{L}_{l-1}}{\partial (\partial q)^{l-1}} \left( \frac{1}{\Delta x^{l-1}} \right) - \Delta x^l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l} \right) \quad (2.23)$$

$$= \Delta x^l \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial q^l} - \frac{1}{\Delta x^l} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial (\partial q)^l} - \frac{\partial \mathcal{L}_{l-1}}{\partial (\partial q)^{l-1}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Consideremos ahora el límite al continuo. En el caso de la cadena lineal, esto significa hacer tender la separación entre partículas a cero, es decir,  $\Delta x^l \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ . El sistema físico resultante puede considerarse como un modelo para un "elástico". En este caso, el índice discreto  $l = 1, \dots, N$  que identifica cada partícula puede ser reemplazado por un índice continuo  $x$ , la posición en equilibrio de un elemento del elástico. El desplazamiento  $q^l(t)$  se transforma entonces en una función de  $x$  y  $t$ , es decir en un *campo*, que denotaremos como  $\phi(x, t)$ . En nuestro ejemplo, entonces,  $\phi(x, t)$  denota el desplazamiento en el instante  $t$  del trozo de elástico que en reposo tiene posición  $x$ . En este límite tendremos que  $(\partial_x q^l) \rightarrow \partial_x \phi$ . Es claro de (2.24) que la ecuación de movimiento para  $\phi(x, t)$ , en el límite continuo, es

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, t)}{\partial \phi(x, t)} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(x, t)}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(x, t)}{\partial \dot{\phi}(x, t)} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Finalmente, de (2.18) vemos que el lagrangiano de nuestro sistema ejemplo es de la forma

$$L = \int dx \mathcal{L}, \quad (2.26)$$

con  $\mathcal{L}$ , la *densidad lagrangeana*, dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi) = \frac{\lambda}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{Y}{2} (\partial_x \phi)^2, \quad (2.27)$$

donde  $\lambda = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta x^l}$  es la *densidad lineal de masa* e  $Y = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} k \Delta x^l$  es el *módulo de Young* del elástico<sup>1</sup>, respectivamente. En principio  $\lambda$  e  $Y$  pueden variar a lo largo del elástico, pero aquí consideraremos sólo el caso en que ellas son constantes, es decir, el caso de un elástico homogéneo. Por otro lado, la ecuación del movimiento para  $\phi$  es

$$\lambda \ddot{\phi} - Y \partial_x^2 \phi = 0, \quad (2.28)$$

como puede ser verificado usando (2.27) y (2.25), o efectuando el límite al continuo de (2.8). La ecuación (2.28) es claramente una ecuación de onda, con velocidad de propagación  $v = \sqrt{Y/\lambda}$ .

<sup>1</sup>Recuerde que para un sistema lineal continuo el módulo de Young se define de modo que  $F = YS$ , donde  $F$  es la fuerza que se ejerce sobre un elemento dado del sistema (la tensión) y  $S$  es el alargamiento por unidad de longitud del sistema. En nuestro caso  $S = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} \frac{q^{l+1}(t) - q^l(t)}{\Delta x^l}$  y la fuerza necesaria para producir ese alargamiento es  $F = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} k (q^{l+1}(t) - q^l(t)) = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} (\Delta x^l k) \left( \frac{q^{l+1}(t) - q^l(t)}{\Delta x^l} \right)$ .

### 2.2.2. Formalismo Hamiltoniano

Es posible obtener una formulación Hamiltoniana de sistemas continuos en base a sistemas discretos en analogía a como se hizo en la formulación Lagrangeana.

Por otro lado, el momentum canónico asociado a la coordenada generalizada  $q^l$  viene dado por

$$p^l := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} = m\dot{q}^l, \quad (2.29)$$

de modo que, en el caso de la cadena lineal clásica, el Hamiltoniano del sistema

$$H = T + V = \sum_l p_l \dot{q}^l - L, \quad (2.30)$$

resulta ser

$$H = \sum_l \frac{1}{2m} (p_l)^2 + \frac{k}{2} \sum_l (q^{l+1} - q^l)^2. \quad (2.31)$$

El Hamiltoniano de un sistema discreto está definido por

$$H := \sum_l p_l \dot{q}^l - L. \quad (2.32)$$

En el caso en que el lagrangeano del sistema discreto es de la forma (2.18), la ecuación anterior puede escribirse como

$$p_l = \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l}, \quad (2.33)$$

y el Hamiltoniano:

$$H = \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l - L \quad (2.34)$$

$$= \sum_l \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l - \sum_l \Delta x^l \mathcal{L}_l \quad (2.35)$$

$$= \sum_l \Delta x^l \left( \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \dot{q}^l} \dot{q}^l - \mathcal{L}_l \right). \quad (2.36)$$

Finalmente, en el límite al continuo  $\Delta x^l \rightarrow 0$ , el Hamiltoniano se transforma en:

$$H = \int dx \mathcal{H}(x, t), \quad (2.37)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{H}(x, t) := \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L}(x, t), \quad (2.38)$$

$$\pi(x, t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (2.39)$$

como la densidad Hamiltoniana y la densidad de momento canónico conjugado, respectivamente. Note que, para un campo  $\phi$  general, el “momentum canónico total”  $P := \int dx \pi$  no coincide necesariamente con el *momentum lineal* del sistema.

### 2.2.3. Cadena Lineal: Modelo continuo (el elástico!)

Si asumimos que nuestro “elástico” tiene extensión infinita (tal como el campo electromagnético que pretendemos cuantizar más adelante), es decir,  $x \in (-\infty, \infty)$ , entonces la solución de (2.28) puede ser expandida en serie de Fourier de la forma

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.40)$$

Para determinar los  $B_k(t)$  podemos reemplazar la ecuación (2.40) en (2.28), teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ -k^2 B_k(t) e^{ikx} + \text{c.c.} \right\}, \quad (2.41)$$

$$\ddot{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \ddot{B}_k(t) e^{ikx} + \text{c.c.} \right\}. \quad (2.42)$$

Aquí c.c. denota el complejo conjugado de la expresión anterior. Luego, obtenemos

$$\frac{1}{v^2} \ddot{B}_k(t) = -k^2 B_k(t), \quad (2.43)$$

que es una ecuación diferencial tipo oscilador armónico para  $B_k(t)$ , cuya solución es de la forma:

$$B_k(t) = \alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{+i\omega_k t}, \quad \omega_k = v|k|, \quad (2.44)$$

que corresponden a ondas que se propagan con frecuencia  $\omega_k$ . De este modo, la solución es

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ (\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{+i\omega_k t}) e^{ikx} + (\alpha_k^* e^{+i\omega_k t} + \beta_k^* e^{-i\omega_k t}) e^{-ikx} \right\} \quad (2.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ (\alpha_k e^{ikx} + \beta_k^* e^{-ikx}) e^{-i\omega_k t} + (\alpha_k^* e^{-ikx} + \beta_k e^{ikx}) e^{+i\omega_k t} \right\} \quad (2.46)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ (\alpha_k e^{ikx} + \beta_{-k}^* e^{ikx}) e^{-i\omega_k t} + (\alpha_k^* e^{-ikx} + \beta_{-k} e^{-ikx}) e^{+i\omega_k t} \right\} \quad (2.47)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ (\alpha_k + \beta_{-k}^*) e^{-i\omega_k t} e^{ikx} + (\alpha_k^* + \beta_{-k}) e^{+i\omega_k t} e^{-ikx} \right\} \quad (2.48)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \gamma_k e^{-i\omega_k t} e^{ikx} + \gamma_k^* e^{+i\omega_k t} e^{-ikx} \right\} \quad (2.49)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.50)$$

donde  $B_k(t) := \gamma_k e^{-i\omega_k t}$  con las constantes arbitrarias  $\gamma_k := \alpha_k^* + \beta_{-k}$ . La densidad de momento canónico la podemos calcular mediante su definición (??):

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(x, t)}{\partial \dot{\phi}(x, t)} \quad (2.51)$$

$$= \lambda \dot{\phi}(x, t) \quad (2.52)$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \dot{B}_k(t) e^{ikx} + \dot{B}_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.53)$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ -i\omega_k B_k(t) e^{ikx} + i\omega_k B_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.54)$$

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \omega_k \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.55)$$

Por lo tanto, el momento canónico total es

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \pi(x, t) \quad (2.56)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ i\lambda \int dk \omega_k \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \right] \quad (2.57)$$

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \omega_k \left\{ -B_k(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \right) + B_k^*(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \right) \right\} \quad (2.58)$$

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \omega_k \left\{ -B_k(t) 2\pi\delta(k) + B_k^*(t) 2\pi\delta(k) \right\} \quad (2.59)$$

$$= 2\pi i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk \omega_k \left\{ -B_k(t) + B_k^*(t) \right\} \delta(k) \quad (2.60)$$

$$= 2\pi i\lambda \omega_0 \left\{ -B_0(t) + B_0^*(t) \right\} \quad (2.61)$$

$$= 0. \quad (2.62)$$

En el cálculo anterior, hemos usado  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ikx} = 2\pi\delta(k)$  y  $\omega_0 = 0$ . Por otro lado, evaluamos la densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L}(x, t) \quad (2.63)$$

$$= \left\{ \lambda \dot{\phi} \right\} \dot{\phi} - \left\{ \frac{1}{2} \lambda \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 \right\} \quad (2.64)$$

$$= \lambda \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \lambda \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 \quad (2.65)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 \quad (2.66)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \lambda \left\{ i \int dk \omega_k \left( -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right) \right\} \left\{ i \int dk' \omega_{k'} \left( -B_{k'}(t) e^{ik'x} + B_{k'}^*(t) e^{-ik'x} \right) \right\} \right. \\ \left. + Y \left\{ i \int dk \left( B_k(t) e^{ikx} - B_k^*(t) e^{-ikx} \right) k \right\} \left\{ i \int dk' \left( B_{k'}(t) e^{ik'x} - B_{k'}^*(t) e^{-ik'x} \right) k' \right\} \right] \quad (2.67)$$

$$= -\frac{1}{2} \iint dk dk' (\lambda \omega_k \omega_{k'} + Y k k') \left[ e^{i(k+k')x} B_k(t) B_{k'}(t) + e^{-i(k+k')x} B_k^*(t) B_{k'}^*(t) \right. \\ \left. - e^{i(k-k')x} B_k(t) B_{k'}^*(t) - e^{-i(k-k')x} B_k^*(t) B_{k'}(t) \right], \quad (2.68)$$

entonces el Hamiltoniano total es

$$H = \int dx \mathcal{H}(x, t) \quad (2.69)$$

$$= -\frac{1}{2} \iiint dx dk dk' (\lambda \omega_k \omega_{k'} + g k k') \left[ e^{i(k+k')x} B_k(t) B_{k'}(t) \right. \\ \left. + e^{-i(k+k')x} B_k^*(t) B_{k'}^*(t) - e^{i(k-k')x} B_k(t) B_{k'}^*(t) - e^{-i(k-k')x} B_k^*(t) B_{k'}(t) \right] \quad (2.70)$$

$$= -\pi \int dk \left[ (\lambda \omega_k \omega_{-k} + Y k(-k)) (B_k(t) B_{-k}(t) + B_k^*(t) B_{-k}^*(t)) \right. \\ \left. - (\lambda \omega_k \omega_k + Y k k) (B_k(t) B_k^*(t) + B_k^*(t) B_k(t)) \right] \quad (2.71)$$

$$= -\pi \int dk \left[ (\lambda \omega_k^2 - Y k^2) (B_k(t) B_{-k}(t) + B_k^*(t) B_{-k}^*(t)) \right. \\ \left. - (\lambda \omega_k^2 + Y k^2) (B_k(t) B_k^*(t) + B_k^*(t) B_k(t)) \right] \quad (2.72)$$

$$= +4\pi\lambda \int dk \omega_k^2 B_k(t) B_k^*(t), \quad (2.73)$$

donde hemos usado  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm i(k-k')x} = 2\pi\delta(k-k')$  y  $\lambda\omega_k^2 = Yk^2$ .

Por otro lado, la densidad de momentum lineal del sistema es

$$p^x = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial_x \phi \quad (2.74)$$

$$= -\left[ i\lambda \int dk \omega_k \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \right] \left[ i \int dk' k' \left\{ B_{k'}(t) e^{ik'x} - B_{k'}^*(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \quad (2.75)$$

$$= \lambda \int \int dk dk' \omega_k k' \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \left\{ B_{k'}(t) e^{ik'x} - B_{k'}^*(t) e^{-ik'x} \right\} \quad (2.76)$$

$$= \lambda \int \int dk dk' \omega_k k' \left\{ -B_k B_{k'} e^{i(k+k')x} + B_k B_{k'}^* e^{i(k-k')x} \right. \quad (2.77)$$

$$\left. + B_k^* B_{k'} e^{-i(k-k')x} - B_k^* B_{k'}^* e^{-i(k+k')x} \right\} \quad (2.78)$$

$$= -\lambda \int \int dk dk' \omega_k k' \left\{ B_k B_{k'} e^{i(k+k')x} - B_k B_{k'}^* e^{i(k-k')x} \right. \quad (2.79)$$

$$\left. - B_k^* B_{k'} e^{-i(k-k')x} + B_k^* B_{k'}^* e^{-i(k+k')x} \right\}, \quad (2.80)$$

de modo que el momentum lineal total es

$$P^x = \int dx p_x \quad (2.81)$$

$$= -\lambda \int \int \int dx dk dk' \omega_k k' \left\{ B_k B_{k'} e^{i(k+k')x} - B_k B_{k'}^* e^{i(k-k')x} \right. \quad (2.82)$$

$$\left. - B_k^* B_{k'} e^{-i(k-k')x} + B_k^* B_{k'}^* e^{-i(k+k')x} \right\} \quad (2.83)$$

$$= -2\pi\lambda \int \int dk dk' \omega_k k' \left\{ B_k B_{k'} \delta(k+k') - B_k B_{k'}^* \delta(k-k') \right. \quad (2.84)$$

$$\left. - B_k^* B_{k'} \delta(k-k') + B_k^* B_{k'}^* \delta(k+k') \right\} \quad (2.85)$$

$$= 2\pi\lambda \left\{ \int dk \omega_k k (B_k B_{-k} + B_k^* B_{-k}^*) + \int dk \omega_k k (B_k B_k^* + B_k^* B_k) \right\} \quad (2.86)$$

$$= 4\pi\lambda \int dk \omega_k k B_k B_k^*. \quad (2.87)$$

#### 2.2.4. Cadena Lineal Cuántica

Para cuantizar el sistema,  $q(x, t)$  y  $\pi(x, t)$  deben ser operadores (de campo), que satisfagan relaciones de conmutación no triviales. Pero, ¿qué forma deben tener estas relaciones?. Para resolver esta pregunta, consideraremos el límite continuo de las (conocidas) relaciones de conmutación que se aplican a un sistema discreto.

Un sistema discreto, como el descrito por un lagrangiano de la forma (2.18), es cuantizado usualmente elevando las variables de configuración  $q^l$  y sus momenta canónicos  $p_l$  a la calidad de operadores  $\hat{q}^l$  y  $\hat{p}_l$ , que actúan sobre un espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\{q\}} := \mathcal{H}_{q^1} \otimes \mathcal{H}_{q^2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{q^N} = \prod_l \mathcal{H}_{q^l}, \quad (2.88)$$



y que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{q}^l, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_m^l \hat{1}, \quad (2.89)$$

$$[\hat{q}^l, \hat{q}^m] = 0, \quad (2.90)$$

$$[\hat{p}_l, \hat{p}_m] = 0. \quad (2.91)$$

Para los modelos descritos por (2.18),  $p_l = \Delta x^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^l}$  ( $l$  fijo), de modo que

$$\left[ \hat{q}^l, \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_m}{\partial \dot{q}^m} \right] = i\hbar \frac{\delta_m^l}{\Delta x^m} \hat{1}. \quad (2.92)$$

En el límite continuo que estamos considerando ( $\Delta x^l \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow x$ ,  $m \rightarrow x'$ ), vemos que la relación de conmutación (2.92) tiende a

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\hbar \delta(x - x') \hat{1}. \quad (2.93)$$

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t)] = 0, \quad (2.94)$$

$$[\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0. \quad (2.95)$$

Donde ahora  $\hat{\phi}(x)$  y  $\hat{\pi}(x')$  son *operadores de campo* (es decir, un campo de operadores, u operadores distintos definidos en cada punto del espacio) que actúan sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_\phi$  que, formalmente, es un producto infinito y continuo de los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_{\phi(x)}$  asociados a cada grado de libertad  $\phi(x)$  ( $x$  fijo) del campo:

$$\mathcal{H}_\phi := \prod_x \mathcal{H}_{\phi(x)} = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\{q\}}. \quad (2.96)$$

Que el lado derecho de (2.92) tiende efectivamente a una delta de Dirac puede verificarse considerando que

$$\begin{aligned} \int dx' \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} \left( \frac{\delta_m^l}{\Delta x^m} \right) f(x') &= \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} \sum_m \Delta x^m \left( \frac{\delta_m^l}{\Delta x^m} \right) f(m) \\ &= \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} \sum_m \delta_m^l f(m) = \lim_{\Delta x^l \rightarrow 0} f(l) \\ &= f(x), \end{aligned} \quad (2.97)$$

para una función arbitraria  $f$ .

Las relaciones de conmutación (2.93)-(2.95) serán entonces las relaciones de conmutación canónicas para un sistema descrito por un campo  $\phi$ . No es difícil verificar que en el caso más general de un sistema con más campos definidos en un espacio tridimensional, ver (??), las relaciones de conmutación canónicas a usar para los operadores de campo son

$$[\hat{\phi}^A(\vec{x}, t), \hat{\pi}^B(\vec{x}', t)] = i\hbar \delta^{AB} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \hat{1}, \quad (2.98)$$

$$[\hat{\phi}^A(\vec{x}, t), \hat{\phi}^B(\vec{x}', t)] = 0, \quad (2.99)$$

$$[\hat{\pi}^A(\vec{x}, t), \hat{\pi}^B(\vec{x}', t)] = 0. \quad (2.100)$$

donde  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$  es la correspondiente delta de Dirac tridimensional<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Definida de modo que  $\int \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') dV = f(\vec{x})$  para toda función  $f(\vec{x})$ .

Finalmente, la dinámica del sistema está determinada por el operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  a través de la ecuación (cuadro de Schrödinger):

$$i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle \quad (2.101)$$

o, equivalentemente (cuadro de Heisenberg) por la evolución de un operador cualquiera  $\hat{O}$  por medio de

$$i\hbar \partial_t \hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}]. \quad (2.102)$$

### 2.2.5. Ecuación de movimiento para el operador $\hat{\phi}(x)$

Si ahora  $\hat{\phi}(x)$  y  $\hat{\pi}(x)$  son operadores de campo, entonces su dinámica viene dada por la ecuación de movimiento de Heisenberg (cuadro de Heisenberg!):

$$\dot{\hat{\phi}}(x, t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\phi}(x, t), \hat{H}], \quad (2.103)$$

$$\dot{\hat{\pi}}(x, t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\pi}(x, t), \hat{H}]. \quad (2.104)$$

En nuestro sistema ejemplo, el hamiltoniano es  $\hat{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\pi}(x, t)]^2 + \frac{Y}{2} [\partial_x \hat{\phi}(x, t)]^2 \right\}$ .

Así, (2.103) toma la forma

$$\dot{\hat{\phi}}(x, t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\phi}(x, t), \hat{H}] \quad (2.105)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\phi}(x, t), \int dx' \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\pi}(x', t)]^2 + \frac{Y}{2} [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right\} \right] \quad (2.106)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left[ \hat{\phi}(x, t), \frac{1}{2\lambda} [\hat{\pi}(x', t)]^2 + \frac{Y}{2} [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right] \quad (2.107)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\phi}(x, t), [\hat{\pi}(x', t)]^2] + \frac{Y}{2} [\hat{\phi}(x, t), [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2] \right\} \quad (2.108)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\phi}(x, t), [\hat{\pi}(x', t)]^2] + \frac{Y}{2} \partial_{x'} [\hat{\phi}(x, t), [\hat{\phi}(x', t)]^2] \right\} \quad (2.109)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\phi}(x, t), [\hat{\pi}(x', t)]^2] \right\} \quad (2.110)$$

$$= -\frac{i}{2\hbar\lambda} \int dx' \left\{ \hat{\pi}(x', t) [\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] + [\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] \hat{\pi}(x', t) \right\} \quad (2.111)$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \int dx' \{ \hat{\pi}(x', t) \delta(x - x') + \delta(x - x') \hat{\pi}(x', t) \} \quad (2.112)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int dx' \hat{\pi}(x', t) \delta(x - x') \quad (2.113)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \hat{\pi}(x, t). \quad (2.114)$$

Por otro lado, (2.104) implica que

$$\dot{\hat{\pi}}(x) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\pi}(x), \hat{H}] \quad (2.115)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\pi}(x), \int dx' \left\{ \frac{1}{2\lambda} [\hat{\pi}(x', t)]^2 + \frac{Y}{2} [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right\} \right] \quad (2.116)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left[ \hat{\pi}(x), \frac{1}{2\lambda} [\hat{\pi}(x', t)]^2 + \frac{Y}{2} [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right] \quad (2.117)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dx' \left[ \hat{\pi}(x), \frac{Y}{2} [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right] \quad (2.118)$$

$$= -\frac{iY}{2\hbar} \int dx' \left[ \hat{\pi}(x), [\partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)]^2 \right] \quad (2.119)$$

$$= -\frac{iY}{2\hbar} \int dx' \left\{ \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) [\hat{\pi}(x), \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)] + [\hat{\pi}(x), \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t)] \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \right\} \quad (2.120)$$

$$= -\frac{iY}{2\hbar} \int dx' \left\{ \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \partial_{x'} [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x', t)] + \partial_{x'} [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x', t)] \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \right\} \quad (2.121)$$

$$= -\frac{Y}{2} \int dx' \left\{ \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \partial_{x'} \delta(x - x') + \partial_{x'} \delta(x - x') \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \right\} \quad (2.122)$$

$$= -Y \int dx' \partial_{x'} \hat{\phi}(x', t) \partial_{x'} \delta(x - x') \quad (2.123)$$

$$= Y \int dx' \partial_{x'}^2 \hat{\phi}(x', t) \delta(x - x') \quad (2.124)$$

$$= Y \partial_x^2 \hat{\phi}(x, t). \quad (2.125)$$

En resumen, las ecuaciones de evolución para los operadores de campo son:

$$\dot{\hat{\phi}}(x, t) = \frac{1}{\lambda} \hat{\pi}(x, t), \quad (2.126)$$

$$\dot{\hat{\pi}}(x) = Y \partial_x^2 \hat{\phi}(x, t). \quad (2.127)$$

Derivando (2.126) con respecto al tiempo y usando (2.127) encontramos

$$\ddot{\hat{\phi}}(x, t) = \frac{1}{\lambda} \dot{\hat{\pi}}(x, t) = \frac{Y}{\lambda} \partial_x^2 \hat{\phi}(x, t), \quad (2.128)$$

es decir, el operador de campo  $\hat{\phi}$  satisface la misma ecuación de onda que su análogo clásico, ver (2.28). Como consecuencia, la mismas expansiones clásicas (2.40) y (2.55) son válidas en el caso cuantizado, sólo que ahora  $\phi$  y  $\pi$  y por lo tanto  $B_k(t)$  y  $B_k^*(t)$  deben ser operadores.

### 2.2.6. Cantidades Importantes

De la sección anterior vemos que podemos escribir (2.40) como el operador:

$$\hat{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.129)$$

con  $\dot{\hat{B}}_k(t) = -i\omega_k \hat{B}_k(t)$ ,  $\omega_k = v|k|$ , que nos dice que nuestro campo está constituido por una superposición infinita de ondas planas, cada una para un valor distinto del número de onda  $k$ . También se tiene que la densidad de momento conjugado (2.55) se puede escribir como

$$\hat{\pi}(x, t) = i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \left\{ -\hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.130)$$

Debido a que los operadores de campo satisfacen las relaciones de conmutación (2.93), los operadores  $\hat{B}_k(t)$  y  $\hat{B}_k^\dagger(t)$  también satisfacen relaciones de conmutación no triviales.

Para determinar estas relaciones, escribiremos primero  $\hat{B}_k(t)$  y  $\hat{B}_k^\dagger(t)$  en función de  $\hat{\phi}(x, t)$  y  $\hat{\pi}(x, t)$ . En efecto, reescribiendo  $\hat{\phi}(x, t)$  de la siguiente forma:

$$\hat{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.131)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \quad (2.132)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \int_{\infty}^{-\infty} (-dk) \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{-i(-k)x} \quad (2.133)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k(t) e^{ikx} - \int_{\infty}^{-\infty} dk \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \quad (2.134)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k(t) e^{ikx} - \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \right) \quad (2.135)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \quad (2.136)$$

$$= \int dk \left\{ \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \right\} \quad (2.137)$$

$$= \int dk e^{ikx} \left\{ \hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\}, \quad (2.138)$$

obtenemos:

$$\int dx e^{-ik'x} \hat{\phi}(x, t) = \iint dk dx e^{i(k-k')x} \left\{ \hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\} \quad (2.139)$$

$$= 2\pi \int dk \left\{ \hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\} \delta(k - k') \quad (2.140)$$

$$= 2\pi \left\{ \hat{B}_{k'}(t) + \hat{B}_{-k'}^\dagger(t) \right\}. \quad (2.141)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\hat{B}_{k'}(t) + \hat{B}_{-k'}^\dagger(t) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ik'x} \hat{\phi}(x, t). \quad (2.142)$$

De igual manera con (2.130):

$$\hat{\pi}(x, t) = i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \left\{ -\hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.143)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k(t) e^{ikx} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \quad (2.144)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k(t) e^{ikx} + i\lambda \int_{\infty}^{-\infty} (-dk) \omega_{-k} \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{-i(-k)x} \quad (2.145)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k(t) e^{ikx} - i\lambda \int_{\infty}^{-\infty} dk \omega_k \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \quad (2.146)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k(t) e^{ikx} - i\lambda \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \right) \quad (2.147)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_k(t) e^{ikx} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dk \omega_k \hat{B}_{-k}^\dagger(t) e^{ikx} \quad (2.148)$$

$$= i\lambda \int dk \omega_k e^{ikx} \left\{ -\hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\}, \quad (2.149)$$

encontramos

$$\int dx e^{-ik'x} \hat{\pi}(x, t) = i\lambda \int dk \omega_k \int dx e^{i(k-k')x} \left\{ -\hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\} \quad (2.150)$$

$$= 2\pi i\lambda \int dk \omega_k \left\{ -\hat{B}_k(t) + \hat{B}_{-k}^\dagger(t) \right\} \delta(k - k') \quad (2.151)$$

$$= 2\pi i\lambda \omega_{k'} \left\{ -\hat{B}_{k'}(t) + \hat{B}_{-k'}^\dagger(t) \right\}. \quad (2.152)$$

De aquí encontramos que

$$\hat{B}_{k'}(t) - \hat{B}_{-k'}^\dagger(t) = \frac{i}{2\pi\lambda\omega_{k'}} \int dx e^{-ik'x} \hat{\pi}(x, t). \quad (2.153)$$

Sumando (2.142) y (2.153) podemos despejar el operador  $\hat{B}_{k'}$ :

$$\hat{B}_{k'}(t) = \frac{1}{4\pi} \int dx e^{-ik'x} \left( \hat{\phi}(x, t) + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\pi}(x, t) \right), \quad (2.154)$$

y además

$$\hat{B}_{k'}^\dagger(t) = \frac{1}{4\pi} \int dx e^{ik'x} \left( \hat{\phi}(x, t) - \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\pi}(x, t) \right). \quad (2.155)$$

Así, la información del sistema que nos proporcionaban  $\hat{\phi}(x, t)$  y  $\hat{\pi}(x, t)$ , está también condensada en el conjunto de los  $\infty$ 's operadores  $\hat{B}_k(t)$ .

Ahora estamos en condiciones de calcular los conmutadores deseados. Vamos con el primero:

$$\begin{aligned} [\hat{B}_k(t), \hat{B}_{k'}(t)] &= \left[ \frac{1}{4\pi} \int dx e^{-ikx} \left( \hat{\phi}(x) + \frac{i}{\lambda\omega_k} \hat{\pi}(x) \right), \frac{1}{4\pi} \int dx' e^{-ik'x'} \left( \hat{\phi}(x') + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\pi}(x') \right) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx+k'x')} \left\{ [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\lambda\omega_k} [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')] + \frac{1}{\lambda^2\omega_{k'}\omega_k} [\hat{\pi}(x'), \hat{\pi}(x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx+k'x')} \left\{ \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')] + \frac{i}{\lambda\omega_k} [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')] \right\} \quad (2.158)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx+k'x')} \left\{ \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} i\hbar\delta(x-x') - \frac{i}{\lambda\omega_k} i\hbar\delta(x-x') \right\} \quad (2.159)$$

$$= \frac{\hbar}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} - \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \iint dx dx' e^{-i(kx+k'x')} \delta(x-x') \quad (2.160)$$

$$= \frac{\hbar}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} - \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \int dx e^{-i(k+k')x} \quad (2.161)$$

$$= \frac{\hbar}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} - \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} [2\pi\delta(k+k')] \quad (2.162)$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_{-k'}} - \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \quad (2.163)$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} - \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \quad (2.164)$$

$$= 0. \quad (2.165)$$

Calculando el segundo vemos:

$$\begin{aligned}
[\hat{B}_k(t), \hat{B}_{k'}^\dagger(t)] &= \left[ \frac{1}{4\pi} \int dx e^{-ikx} \left( \hat{\phi}(x) + \frac{i}{\lambda\omega_k} \hat{\Pi} \right), \frac{1}{4\pi} \int dx' e^{ik'x'} \left( \hat{\phi}(x') - \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\Pi}(x') \right) \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx-k'x')} \left\{ [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] + \frac{i}{\lambda\omega_k} [\hat{\Pi}(x), \hat{\phi}(x')] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda^2\omega_{k'}\omega_k} [\hat{\Pi}, \hat{\Pi}(x')] + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} [\hat{\Pi}(x'), \hat{\phi}(x)] \right\} \quad (2.167)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx-k'x')} \left\{ \frac{i}{\lambda\omega_k} [\hat{\Pi}, \hat{\phi}(x')] + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} [\hat{\Pi}(x'), \hat{\phi}(x)] \right\} \quad (2.168)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint dx dx' e^{-i(kx-k'x')} \left\{ \frac{i}{\lambda\omega_k} (-i\hbar\delta(x-x')) + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} (-i\hbar\delta(x-x')) \right\} \quad (2.169)$$

$$= \frac{\hbar}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} + \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \iint dx dx' e^{-i(kx-k'x')} \delta(x-x') \quad (2.170)$$

$$= \frac{\hbar}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} + \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \int dx e^{-i(k-k')x} \quad (2.171)$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda\omega_k} + \frac{1}{\lambda\omega_{k'}} \right\} \delta(k-k') \quad (2.172)$$

$$= \frac{\hbar}{4\pi\lambda\omega_k} \delta(k-k'). \quad (2.173)$$

Ahora, podemos definir convenientemente los *operadores normalizados*

$$\hat{b}_k(t) := \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} \hat{B}_k(t) = \sqrt{\frac{\lambda\omega_k}{4\pi\hbar}} \int dx e^{-ikx} \left( \hat{\phi}(x, t) + \frac{i}{\lambda\omega_k} \hat{\Pi}(x, t) \right), \quad (2.174)$$

$$\hat{b}_k^\dagger(t) = \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} \hat{B}_k^\dagger(t) = \sqrt{\frac{\lambda\omega_k}{4\pi\hbar}} \int dx e^{ikx} \left( \hat{\phi}(x, t) - \frac{i}{\lambda\omega_k} \hat{\Pi}(x, t) \right), \quad (2.175)$$

de manera que

$$[\hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t)] = \left[ \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} \hat{B}_k(t), \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_{k'}}{\hbar}} \hat{B}_{k'}^\dagger(t) \right] \quad (2.176)$$

$$= \frac{4\pi\lambda\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}{\hbar} [\hat{B}_k(t), \hat{B}_{k'}^\dagger(t)] \quad (2.177)$$

$$= \frac{\omega_{k'}}{\omega_k} \delta(k-k') \quad (2.178)$$

y así,

$$[\hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t)] = \delta(k-k'). \quad (2.179)$$

Resumiendo, las relaciones de conmutación para los nuevos operadores normalizados son:

$$[\hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t)] = \delta(k-k'), \quad (2.180)$$

$$[\hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}(t)] = [\hat{b}_k^\dagger(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t)] = 0, \quad (2.181)$$

mientras que los operadores de campo  $\hat{\phi}(x, t)$  y  $\hat{\Pi}(x, t)$  se escriben en función de los nuevos operadores adimensionales  $\hat{b}_k(t)$  y  $\hat{b}_{k'}^\dagger(t)$  como

$$\hat{\phi}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.182)$$

$$\hat{\Pi}(x, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\lambda}{4\pi}} \int dk (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.183)$$

## Hamiltoniano en función de $\hat{b}_k$ y $\hat{b}_k^\dagger$

Considerando que:

$$\hat{\phi}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.184)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ (-i\omega_k) \hat{b}_k(t) e^{ikx} + i\omega_k \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.185)$$

$$= i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \omega_k \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.186)$$

$$= i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.187)$$

y

$$\partial_x \hat{\phi}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ ik \hat{b}_k(t) e^{ikx} + (-ik) \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.188)$$

$$= i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} k \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} - \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \quad (2.189)$$

tenemos que el hamiltoniano cuántico viene dado por

$$\hat{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \lambda \dot{\phi}^2(x, t) + \frac{1}{2} Y \left( \partial_x \phi \right)^2 \right\} \quad (2.190)$$

$$= \int dx \frac{1}{2} \lambda \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \right] \times \quad (2.191)$$

$$\left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk' (\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \quad (2.192)$$

$$+ \frac{1}{2} Y \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} k \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} - \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \right] \times \quad (2.193)$$

$$\left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \int dk' (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} k' \left\{ \hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} - \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \quad (2.194)$$

$$= \int dx \left[ -\frac{\hbar}{8\pi} \iint dk dk' \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \left\{ -\hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right. \\ \left. - \frac{\hbar Y}{8\pi\lambda} \iint dk dk' \frac{kk'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} - \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \left\{ \hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} - \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \quad (2.195)$$

$$= -\frac{\hbar}{8\pi} \iiint dx dk dk' \left[ \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) e^{i(k+k')x} - \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{i(k-k')x} \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) e^{-i(k-k')x} + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-i(k+k')x} \right\} \right. \\ \left. + v^2 \frac{kk'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) e^{i(k+k')x} - \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{i(k-k')x} - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) e^{-i(k-k')x} \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-i(k+k')x} \right\} \right] \quad (2.196)$$

$$= -\frac{\hbar}{8\pi} \iint dk dk' \left[ \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k+k') - \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-k') \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k-k') + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k+k') \right\} \right. \\ \left. + v^2 \frac{kk'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k+k') - \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-k') - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k-k') \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k+k') \right\} \right], \quad (2.197)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{4} \int dk \left[ \left\{ \sqrt{\omega_k \omega_{-k}} \hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) - \sqrt{\omega_k \omega_k} \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) - \sqrt{\omega_k \omega_k} \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\omega_k \omega_{-k}} \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} + v^2 \left\{ \frac{k(-k)}{\sqrt{\omega_k \omega_{-k}}} \hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) - \frac{k^2}{\sqrt{\omega_k \omega_k}} \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{kk'}{\sqrt{\omega_k \omega_k}} \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \frac{k(-k)}{\sqrt{\omega_k \omega_{-k}}} \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} \right] \quad (2.198)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \int dk \omega_k \left[ \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) \right]. \quad (2.199)$$

En resumen

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \int dk \omega_k \left[ \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) \right], \quad (2.200)$$

que no es más que el hamiltoniano de un sistema formado por la superposición de infinitos osciladores desacoplados (uno para cada valor de  $k$ ).



## Momentum Lineal en función de $\hat{b}_k$ y $\hat{b}_k^\dagger$

Puesto que nuestros campos son ahora operadores, también las cantidades que definimos en función de los campos clásicos corresponderán a operadores en el caso cuantizado. En particular, el hamiltoniano  $H$  y el momentum  $\vec{P}$  son ahora operadores que dependen los operadores de campo  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\pi}$ . Sin embargo, al considerar el momentum lineal  $\vec{P}$  como operador,  $\hat{\vec{P}}$ , debemos asegurar la hermiticidad de éste<sup>3</sup>. Por otro lado, la aplicación directa de (??) suministra un operador  $\hat{\pi}$  no hermítico. Esto es debido a que los operadores de campo  $\hat{\pi}(x, t)$  y  $\hat{\phi}(x, t)$  no conmutan. Por lo tanto, debemos construir un operador densidad de momentum lineal que sea hermítico. Definimos:

$$\hat{\vec{p}}(x, t) := -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\pi}(x, t) \vec{\nabla} \hat{\phi}(x, t) + \left( \vec{\nabla} \hat{\phi}(x, t) \right) \hat{\pi}(x, t) \right\}. \quad (2.201)$$

Por supuesto, esta (re-)definición no afecta el límite clásico donde  $\pi(x, t)$  y  $\phi(x, t)$  conmutan. Por lo tanto,

$$\hat{\vec{P}} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \hat{\pi}(x, t) \vec{\nabla} \hat{\phi}(x, t) + \left( \vec{\nabla} \hat{\phi}(x, t) \right) \hat{\pi}(x, t) \right\} \quad (2.202)$$

es el operador momentum lineal buscado.

---

<sup>3</sup>De manera que al hacer una medición, obtengamos eigenvalores reales.

Calculamos ahora el operador momentum lineal en función de  $\hat{b}_k$  y  $\hat{b}_k^\dagger$ :

$$\hat{P}^x = -\frac{1}{2} \int dx \left\{ \hat{\pi}(x, t) \partial_x \hat{\phi}(x, t) + \partial_x \hat{\phi}(x, t) \hat{\pi}(x, t) \right\} \quad (2.203)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int dx \left\{ \left[ i \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{4\pi}} \int dk (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \right] \right. \\ &\quad \times \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi \lambda}} \int dk' (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} k' \left\{ \hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} - \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \\ &\quad + \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi \lambda}} \int dk (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} k \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} - \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \right] \\ &\quad \times \left. \left[ i \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{4\pi}} \int dk' (\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar}{8\pi} \iiint dx dk dk' \left\{ \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}} k' \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \right. \\ &\quad \left\{ \hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} - \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} + \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} k \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} - \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\} \left\{ -\hat{b}_{k'}(t) e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger(t) e^{-ik'x} \right\} \Big\} \\ &= \frac{\hbar}{8\pi} \iint dk dk' \left\{ \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}} k' \left\{ -\hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) \int dx e^{i(k+k')x} + \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \int dx e^{i(k-k')x} \right. \right. \\ &\quad + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) \int dx e^{-i(k-k')x} - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \int dx e^{-i(k+k')x} \Big\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} k \left\{ -\hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) \int dx e^{i(k+k')x} + \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \int dx e^{i(k-k')x} \right. \\ &\quad + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) \int dx e^{-i(k-k')x} - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \int dx e^{-i(k+k')x} \Big\} \Big\} \end{aligned} \quad (2.206)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar}{8\pi} \iint dk dk' \left\{ \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}} k' \left\{ -\hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k+k') + \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-k') \right. \right. \\ &\quad + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k-k') - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-(-k')) \Big\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} k \left\{ -\hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k+k') + \hat{b}_k(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-k') + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}(t) 2\pi \delta(k-k') \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{k'}^\dagger(t) 2\pi \delta(k-(-k')) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.207)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar}{4} \int dk \left\{ \left\{ -\sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{-k}}} (-k) \hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) + \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) + \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) \right. \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{-k}}} (-k) \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} + \left\{ -\sqrt{\frac{\omega_{-k}}{\omega_k}} k \hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) + \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) - \sqrt{\frac{\omega_{-k}}{\omega_k}} k \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} \Big\} \end{aligned} \quad (2.208)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar}{4} \int dk \left\{ \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) + \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k}} k \left\{ -\hat{b}_k(t) \hat{b}_{-k}(t) + \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) - \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.209)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \int dk k \left\{ \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) \right\} \quad (2.210)$$

Hemos así cuantizado el campo  $\phi$ . Vemos que en el caso en que no se imponen condiciones

de borde adicionales para el campo, obtenemos básicamente un sistema descrito por un conjunto *continuo* de osciladores armónicos (uno para cada  $k$ ). El hecho que el conjunto de osciladores sea continuo dificulta, sin embargo, la interpretación en función de operadores de creación y destrucción de cuantos del campo. Esto se realiza más fácilmente imponiendo condiciones de contorno periódicas sobre el campo, de modo de discretizar sus modos permitidos.

### 2.3. Modelo continuo con condiciones de borde periódicas: Discretización de los estados de momentum

Para discretizar el campo *en el espacio*  $k$ , consideramos que el sistema tiene una extensión finita e imponemos condiciones de borde periódicas.

En el caso del campo escalar unidimensional  $\phi$ , consideraremos que éste está confinado a una región de largo  $L$ , de modo que  $x \in [0, L]$ . Además, impondremos las siguientes condiciones de borde:

$$\phi(0, t) = \phi(L, t), \quad (2.211)$$

que pueden corresponder al caso en que se imponen valores fijos del campo en las fronteras de la región donde éste está definido, por ejemplo

$$\phi(0, t) = 0, \quad \phi(L, t) = 0 \quad (2.212)$$

(elástico fijo en sus extremos), o al caso en que el campo está definido sobre una región con la topología de un anillo (elástico unido en sus extremos). En ambos casos es claro que la solución general (2.40) debe ser reemplazada por una solución de la forma

$$\phi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.213)$$

donde ahora el número de onda  $k$  puede adoptar sólo algunos valores permitidos por las condiciones de borde, a saber,

$$k = k_n = \frac{2\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.214)$$

con  $B_k(t) := \gamma_k e^{-i\omega_k t}$ ,  $\omega_k = |k|v$ . Es decir, la imposición de condiciones de contorno periódicas implica una discretización de los modos del campo. Esta discretización es, sin embargo, de naturaleza claramente distinta a la discretización “espacial” (el modelo discreto de partículas puntuales) sobre la que hemos basado nuestro límite al continuo.

Nuestra intención es estudiar las consecuencias de esta discretización de modos del campo en la descripción cuántica del sistema.

Repetiendo el procedimiento aplicado en la sección 2.2.4, encontramos que el momento canónico conjugado está dado por

$$\pi(x, t) = i\lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_k \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.215)$$

Por lo tanto, el momento canónico total es, tal como antes, cero:

$$\Pi = \int_0^L dx \pi(x, t) \quad (2.216)$$

$$= \int_0^L dx \left[ i\lambda \sum_k \omega_k \left\{ -B_k(t) e^{ikx} + B_k^*(t) e^{-ikx} \right\} \right] \quad (2.217)$$

$$= i\lambda \sum_k \omega_k \left\{ -B_k(t) \left( \int_0^L dx e^{ikx} \right) + B_k^*(t) \left( \int_0^L dx e^{-ikx} \right) \right\} \quad (2.218)$$

$$= i\lambda \sum_k \omega_k \left\{ -B_k(t) L\delta_{k,0} + B_k^*(t) L\delta_{k,0} \right\} \quad (2.219)$$

$$= i\lambda L \sum_k \omega_k \left\{ -B_k(t) + B_k^*(t) \right\} \delta_{k,0} \quad (2.220)$$

$$= \lambda L \omega_0 \left\{ -B_0(t) + B_0^*(t) \right\} \quad (2.221)$$

$$= 0. \quad (2.222)$$

En el cálculo anterior, hemos usado  $\int_0^L dx e^{-ikx} = L\delta_{k,0}$  y  $\omega_0 = 0$ .

### 2.3.1. Cuantización

Procedemos ahora a cuantizar el sistema, promoviendo los campos a operadores de campo:

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_k \left\{ \hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.223)$$

$$\hat{\pi}(x, t) = i\lambda \sum_k \omega_k \left\{ -\hat{B}_k(t) e^{ikx} + \hat{B}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.224)$$

e imponiendo las relaciones de conmutación canónicas (2.93)-(2.95). De estas relaciones de conmutación y de

$$\hat{B}_{k'}(t) = \frac{1}{2L} \int_0^L dx e^{-ik'x} \left( \hat{\phi}(x, t) + \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\pi}(x, t) \right), \quad (2.225)$$

$$\hat{B}_{k'}^\dagger(t) = \frac{1}{2L} \int_0^L dx e^{ik'x} \left( \hat{\phi}(x, t) - \frac{i}{\lambda\omega_{k'}} \hat{\pi}(x, t) \right), \quad (2.226)$$

obtenemos ahora

$$\left[ \hat{B}_k(t), \hat{B}_{k'}(t) \right] = 0, \quad (2.227)$$

$$\left[ \hat{B}_k(t), \hat{B}_{k'}^\dagger(t) \right] = \frac{\hbar}{2\lambda L \omega_k} \delta_{k,k'}. \quad (2.228)$$

Estas relaciones nos motivan a definir los *operadores adimensionales*  $\hat{b}_k$  como<sup>4</sup>:

$$\hat{b}_k(t) := \sqrt{\frac{2\lambda L \omega_k}{\hbar}} \hat{B}_k(t). \quad (2.229)$$

Resumiendo, las relaciones de conmutación para los nuevos operadores son:

$$\left[ \hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \right] = \delta_{k,k'}, \quad (2.230)$$

$$\left[ \hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}(t) \right] = \left[ \hat{b}_k^\dagger(t), \hat{b}_{k'}^\dagger(t) \right] = 0, \quad (2.231)$$

---

<sup>4</sup>Note que estos operadores no coinciden exactamente a aquellos definidos en el caso del campo con extensión infinita.

mientras que los operadores de campo  $\hat{\phi}(x, t)$  y  $\hat{\pi}(x, t)$  se escriben en función de los nuevos operadores adimensionales  $\hat{b}_k(t)$  y  $\hat{b}_k^\dagger(t)$  como<sup>5</sup>

$$\hat{\phi}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\lambda L}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}, \quad (2.232)$$

$$\hat{\pi}(x, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2L}} \sum_k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\hat{b}_k(t) e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right\}. \quad (2.233)$$

Por último, los operadores hamiltoniano (energía) y el momentum lineal del campo cuántico quedan dados por:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k \left[ \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) \right], \quad (2.234)$$

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{2} \sum_k k \left[ \hat{b}_k(t) \hat{b}_k^\dagger(t) + \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) \right]. \quad (2.235)$$

### 2.3.2. Interpretación: creación y aniquilación de partículas

Usando las relaciones de conmutación para los operadores  $\hat{b}_k$  y  $\hat{b}_k^\dagger$  podemos escribir el operador energía como

$$\hat{H} = \hbar \sum_k \omega_k \left\{ \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.236)$$

En el caso del operador momentum, tendremos que

$$\hat{P} = \hbar \sum_k k \left\{ \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.237)$$

El segundo término de esta suma pareciera hacer diverger al operador momentum lineal, pero en realidad ésta se anula debido a que el integrando es impar en  $k$  y la suma se extiende  $-\infty$  a  $+\infty$ . Por lo tanto,

$$\hat{P} = \hbar \sum_k k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (2.238)$$

Definamos un “operador número” asociado a cada modo  $k$  (en analogía con el caso del oscilador armónico) como:

$$\hat{N}_k := \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (2.239)$$

Así tenemos que el Hamiltoniano y el momentum se escriben como:

$$\hat{H} = \hbar \sum_k \omega_k \hat{N}_k + \frac{1}{2} \hbar \sum_k \omega_k, \quad (2.240)$$

$$\hat{P} = \hbar \sum_k k \hat{N}_k. \quad (2.241)$$

Ahora estamos en condiciones de encontrar, o más bien, de construir los estados cuánticos del sistema. Notemos primero que los operadores definidos satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{N}_k, \hat{b}_{k'}] = -\delta_{k,k'} \hat{b}_k, \quad (2.242)$$

$$[\hat{N}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \hat{b}_k^\dagger, \quad (2.243)$$

---

<sup>5</sup>Note que las expresiones del caso de extensión infinita del campo se pueden obtener a partir de las del caso discreto a través de la correspondencia  $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$ ,  $b_k \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{L}} b(k)$ .

de modo que

$$[\hat{H}, \hat{b}_k] = -\hbar\omega_k \hat{b}_k, \quad (2.244)$$

$$[\hat{H}, \hat{b}_k^\dagger] = \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger, \quad (2.245)$$

y

$$[\hat{P}, \hat{b}_k] = -\hbar k \hat{b}_k, \quad (2.246)$$

$$[\hat{P}, \hat{b}_k^\dagger] = \hbar k \hat{b}_k^\dagger. \quad (2.247)$$

Consideremos un estado  $|E, P\rangle$  (aún desconocido) de energía  $E$  y momentum  $P$  definidos, es decir, que satisface

$$\hat{H} |E, P\rangle = E |E, P\rangle, \quad (2.248)$$

$$\hat{P} |E, P\rangle = P |E, P\rangle. \quad (2.249)$$

Entonces podemos probar a partir de las relaciones (2.244)-(2.247) que el nuevo estado  $\hat{b}_k |E, P\rangle$  tiene eigenvalores de energía y momentum  $E - \hbar\omega_k$  y  $P - \hbar k$ , respectivamente. En efecto

$$\hat{H} (\hat{b}_k |E, P\rangle) = (\hat{H} \hat{b}_k) |E, P\rangle \quad (2.250)$$

$$= ([\hat{H}, \hat{b}_k] + \hat{b}_k \hat{H}) |E, P\rangle \quad (2.251)$$

$$= -\hbar\omega_k \hat{b}_k |E, P\rangle + \hat{b}_k (\hat{H} |E, P\rangle) \quad (2.252)$$

$$= -\hbar\omega_k \hat{b}_k |E, P\rangle + \hat{b}_k E |E, P\rangle \quad (2.253)$$

$$= (E - \hbar\omega_k) (\hat{b}_k |E, P\rangle). \quad (2.254)$$

Análogamente,

$$\hat{P} (\hat{b}_k |E, P\rangle) = (\hat{P} \hat{b}_k) |E, P\rangle \quad (2.255)$$

$$= ([\hat{P}, \hat{b}_k] + \hat{b}_k \hat{P}) |E, P\rangle \quad (2.256)$$

$$= -\hbar k \hat{b}_k |E, P\rangle + \hat{b}_k (\hat{P} |E, P\rangle) \quad (2.257)$$

$$= -\hbar k \hat{b}_k |E, P\rangle + \hat{b}_k P |E, P\rangle \quad (2.258)$$

$$= (P - \hbar k) (\hat{b}_k |E, P\rangle). \quad (2.259)$$

Del mismo modo puede comprobarse que el estado  $\hat{b}_k^\dagger |E, P\rangle$  tiene eigenvalores de energía y momentum  $E + \hbar\omega_k$  y  $P + \hbar k$ , respectivamente. Cada operador  $\hat{b}_k$  y  $\hat{b}_k^\dagger$  es entonces un operador “escalera” (bajada y subida, respectivamente) del oscilador armónico asociado a cada modo posible, caracterizado por el número de onda  $k$ .

Basándonos en estas propiedades, vemos que el espectro de energías y momenta del campo cuántico es discreto. Los correspondientes cuantos de energía y momentum son  $\hbar\omega_k$  y  $\hbar k$ , para un  $k$  dado, respectivamente. El operador  $\hat{b}_k$  (cuando se aplica a un estado dado) disminuye la energía y el momentum del estado del campo y es por esto interpretado como un *operador de destrucción de un cuanto de energía y momentum del campo* (una “partícula”). Análogamente,  $\hat{b}_k^\dagger$  aumenta la energía y el momentum del estado del campo y es por esto interpretado como un *operador de creación de un cuanto de energía y momentum del campo* (una “partícula”).

Para que el sistema descrito por el campo cuántico  $\hat{\phi}$  sea estable, es necesario que exista un estado de energía mínima, que denotaremos por  $|0\rangle$ . Ya que  $\hat{b}_k$  (para cada  $k$ ), al ser aplicado sobre el estado fundamental  $|0\rangle$ , disminuiría en principio su energía, contradiciendo la hipótesis que define a este estado, es necesario que<sup>6</sup>

$$\hat{b}_k |0\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (2.260)$$

Este estado fundamental del campo cuántico tiene momentum cero, ya que

$$\hat{P} |0\rangle = 0. \quad (2.261)$$

Su energía, sin embargo, es infinita:

$$\hat{H} |0\rangle = \left( \frac{1}{2} \hbar \sum_k \omega_k \right) |0\rangle. \quad (2.262)$$

A partir del estado fundamental  $|0\rangle$  es posible construir todo otro estado del campo cuántico. Por ejemplo,

$$|0 \dots 1_k \dots 0\rangle := \hat{b}_k^\dagger |0\rangle, \quad (2.263)$$

es un estado del campo con momentum  $\hbar k$  y energía  $E_0 + \hbar\omega_k$  ( $E_0 := \frac{1}{2} \hbar \sum_k \omega_k$  es la energía del estado fundamental), que interpretamos como el estado en el que el campo contiene una partícula (un cuanto) de vector de onda  $k$ . El estado

$$|0 \dots 1_k \dots 1_{k'} \dots 0\rangle := \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger |0\rangle, \quad (2.264)$$

es un estado del campo con momentum  $\hbar k + \hbar k'$  y energía  $E_0 + \hbar\omega_k + \hbar\omega_{k'}$ . Note que debido a que los operadores de creación conmutan entre si, el orden en que estos se aplican sobre el estado fundamental es irrelevante. Interpretamos este estado como uno conteniendo dos partículas, una con vector de onda  $k$  y (simultaneamente) otra con vector de onda  $k'$ . Como caso particular puede considerarse el caso en que  $k = k'$ .

Vemos entonces que podemos definir los estados<sup>7</sup>

$$|\dots, n_k, \dots, n_{k'}, \dots\rangle := \frac{1}{\sqrt{\dots n_k! \dots n_{k'}! \dots}} \dots \left( \hat{b}_k^\dagger \right)^{n_k} \dots \left( \hat{b}_{k'}^\dagger \right)^{n_{k'}} \dots |0\rangle, \quad (2.265)$$

que interpretamos como un estado del campo con  $n_k$  partículas cada una con energía  $\hbar\omega_k$  y momentum  $\hbar k$ ,  $n_{k'}$  partículas con energía y momentum  $\hbar\omega_{k'}$ ,  $\hbar k'$ , etc, ya que

$$\hat{H} |\dots, n_k, \dots, n_{k'}, \dots\rangle = (E_0 + n_k \hbar\omega_k + n_{k'} \hbar\omega_{k'} + \dots) |\dots, n_k, \dots, n_{k'}, \dots\rangle \quad (2.266)$$

$$\hat{P} |\dots, n_k, \dots, n_{k'}, \dots\rangle = (n_k \hbar k + n_{k'} \hbar k' + \dots) |\dots, n_k, \dots, n_{k'}, \dots\rangle. \quad (2.267)$$

Estos estados son también eigenestados del operador  $\hat{N}_k$  definido en (2.239), que interpretamos como el operador *número de partículas (cuantos) con vector de onda  $k$* . El operador  $\hat{N} := \sum_k \hat{N}_k$  corresponde entonces al *operador número total de partículas*. Los estados  $|\dots, n_k, \dots\rangle$  son llamados *estados de número del campo*.

La acción de los operadores de creación y destrucción sobre un estado  $|\dots, n_k, \dots\rangle$  de número del campo viene dada por

$$\hat{b}_k^\dagger |\dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |\dots, n_k + 1, \dots\rangle, \quad (2.268)$$

$$\hat{b}_k |\dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |\dots, n_k - 1, \dots\rangle. \quad (2.269)$$

<sup>6</sup>Puesto que esta condición debe ser satisfecha para todo  $k$ , una mejor notación para el estado fundamental sería  $|00\dots 00\rangle := |0\rangle \otimes |0\rangle \dots \otimes |0\rangle$ , donde cada subestado  $|0\rangle$  representa el estado fundamental asociado a cada oscilador armónico correspondiente a un  $k$  dado.

<sup>7</sup>Los factores  $\frac{1}{\sqrt{n_k!}}$  en la definición esta definición asegura, tal como en el caso usual de los estados de un oscilador armónico, que los estados serán ortonormales, es decir, ortogonales y de norma uno.

### 2.3.3. Propiedades del vacío

El estado vacío tiene propiedades no triviales. Por ejemplo, el valor medio del campo  $\hat{\phi}(x, t)$  en el estado del vacío es, como podría esperarse, cero:

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{-ikx} \right\} \right] | 0 \rangle \quad (2.270)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left[ \langle 0 | \hat{b}_k | 0 \rangle e^{ikx} + \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{-ikx} \right] \quad (2.271)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left[ \langle 0 | 0, \dots, 1_k, \dots, 0 \rangle e^{-ikx} \right] \quad (2.272)$$

$$= 0. \quad (2.273)$$

Sin embargo, el valor medio de  $\hat{\phi}^2(x, t)$  en el vacío está dado por

$$\langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_k (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k e^{ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{-ikx} \right\} \right] \quad (2.274)$$

$$\left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_{k'} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_{k'} e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger e^{-ik'x} \right\} \right] | 0 \rangle \quad (2.275)$$

$$= \frac{\hbar}{2L\lambda} \sum_{kk'} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'} | 0 \rangle e^{i(k+k')x} + \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger | 0 \rangle e^{i(k-k')x} \right. \\ \left. + \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} | 0 \rangle e^{-i(k-k')x} + \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger | 0 \rangle e^{-i(k+k')x} \right\} \quad (2.276)$$

$$= \frac{\hbar}{2L\lambda} \sum_{kk'} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ 0 + \langle 0 | \left( \delta_{k,k'} + \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k \right) | 0 \rangle e^{i(k-k')x} + 0 + 0 \right\} \quad (2.277)$$

$$= \frac{\hbar}{2L\lambda} \sum_{kk'} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \delta_{k,k'} \langle 0 | 0 \rangle e^{i(k-k')x} + 0 \right\} \quad (2.278)$$

$$= \frac{\hbar}{2L\lambda} \sum_{kk'} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} e^{i(k-k')x} \delta_{k,k'} \quad (2.279)$$

$$= \frac{\hbar}{2L\lambda} \sum_k \frac{1}{\omega_k}. \quad (2.280)$$

Por lo tanto, encontramos que la varianza del campo en un punto  $x$ , en el estado vacío, es proporcional a  $\hbar$  (e.d., es un efecto cuántico) y diverge logarítmicamente con la frecuencia. De este modo, la teoría cuántica del campo  $\phi$  predice que, incluso en el estado fundamental (vacío), existe un campo fluctuante en cada punto, con valor medio nulo y varianza infinita. Recordemos, además, que el estado vacío tiene momentum nulo y energía infinita.

### 2.3.4. Estados de una partícula

Un estado de una partícula del campo  $|1_k\rangle := |0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots, 0\rangle$  tiene, como vimos anteriormente, momentum lineal  $\hbar k$  y energía  $E_0 + \hbar \omega_k$ . Podría esperarse que este estado fuera el análogo cuántico de una onda monocromática de número de onda  $k$ . Sin embargo, el valor



medio del campo  $\hat{\phi}(x, t)$  en este estado es cero:

$$\langle 1_k | \hat{\phi} | 1_k \rangle = \langle 0 | \hat{b}_k \hat{\phi} \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (2.281)$$

$$= \langle 0 | \hat{b}_k \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_{k'} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_{k'} e^{ik'x} + \hat{b}_{k'}^\dagger e^{-ik'x} \right\} \right] \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (2.282)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_{k'} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \langle 0 | \left\{ \hat{b}_k \hat{b}_{k'} \hat{b}_k^\dagger e^{ik'x} + \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger e^{-ik'x} \right\} | 0 \rangle \quad (2.283)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2L\lambda}} \sum_{k'} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'} \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{ik'x} + \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{-ik'x} \right\} \quad (2.284)$$

Usamos las relaciones de conmutación (2.230) podemos calcular que

$$\langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'} \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b}_k \left[ \hat{b}_{k'}, \hat{b}_k^\dagger \right] | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} | 0 \rangle \quad (2.285)$$

$$= \delta_{k,k'} \langle 0 | \hat{b}_k | 0 \rangle + 0 \quad (2.286)$$

$$= 0 \quad (2.287)$$

y además

$$\langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (2.288)$$

$$= \delta_{k,k'} \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (2.289)$$

$$= 0 + \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger \right] | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_k | 0 \rangle \quad (2.290)$$

$$= \delta_{k,k'} \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger | 0 \rangle + 0 \quad (2.291)$$

$$= 0. \quad (2.292)$$

Por lo tanto, obtenemos que el valor medio del campo  $\hat{\phi}(x, t)$  en el estado de una partícula  $|1_k\rangle$  es nulo:

$$\langle 1_k | \hat{\phi} | 1_k \rangle = 0. \quad (2.293)$$

**Tarea: calcular  $\langle 1_k | \hat{\phi}^2 | 1_k \rangle$ .**

No es difícil verificar que, en general, una expresión de la forma  $\langle 0 | \dots \hat{b}_k \dots \hat{b}_{k'}^\dagger \dots | 0 \rangle$  puede ser no nula sólo si contiene igual número de operadores de creación  $\hat{b}_k^\dagger$  y de destrucción  $\hat{b}_k$ .

### 2.3.5. Estados coherentes

Una onda monocromática clásica propagándose por el sistema (elástico) tiene la forma ( $k$  fijo):

$$\phi_{\text{clas}}(x, t) \sim \gamma_k e^{i(kx - \omega_k t)} + \gamma_k^* e^{-i(kx - \omega_k t)}. \quad (2.294)$$

Por lo tanto, los estados cuánticos  $|c_k\rangle$  análogos a este estado clásico deben ser tales que

$$\hat{\phi}(x, t) |c_k\rangle = \phi_{\text{clas}}(x, t) |c_k\rangle. \quad (2.295)$$

Esta condición se satisface si ( $k$  fijo)

$$\hat{b}_k |c_k\rangle = c_k |c_k\rangle, \quad (2.296)$$

para alguna constante (compleja)  $c_k$ . Estos estados son llamados *estados coherentes* del campo. En función de los estados de número  $|k\rangle$  los estados coherentes tienen la forma

$$|c_k\rangle = e^{-\frac{|c_k|^2}{2}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(c_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle. \quad (2.297)$$

Los factores aseguran la normalización del estado, e.d.,  $\langle c_k | c_k \rangle = 1$ . Podemos comprobar entonces que el valor medio del campo  $\hat{\phi}$  en el estado coherente es de la  $\phi_{\text{clas}}$ , donde  $|c_k|$  es proporcional a la amplitud de la onda clásica.

## Capítulo 3

# Cuantización del Campo Electromagnético libre

Después de todo el desarrollo hecho para la cadena lineal, que era un modelo unidimensional escalar, estamos en (mejores) condiciones de abordar la cuantización del campo electromagnético.

Un primer paso para la cuantización es identificar las variables de campo. Como veremos, en el caso del campo electromagnético esto no es trivial...

### 3.1. Teoría clásica: Ecuaciones de Maxwell

Sabemos que las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones que determinan el comportamiento del campo electromagnético clásico. Éstas se dividen en dos grupos: las inhomogéneas<sup>1</sup> que conectan los campos con sus fuentes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \longleftrightarrow \quad \partial_i D_i = 4\pi\rho, \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad \epsilon_{ijk} \partial_j H_k = \frac{4\pi}{c} j_i + \frac{1}{c} \frac{\partial D_i}{\partial t}, \quad (3.2)$$

y las ecuaciones homogéneas<sup>2</sup>, que nos entregan relaciones que ligán al campo eléctrico y magnético, y condiciones que éstos deben cumplir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \epsilon_{ijk} \partial_j E_k + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0, \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_i B_i = 0. \quad (3.4)$$

Por último, tenemos las relaciones constitutivas, que contienen la información sobre las propiedades del medio electromagnético considerado. En el vacío, estas son:

$$\vec{D} = \vec{E} \quad \longleftrightarrow \quad D_i = E_i, \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \vec{H} \quad \longleftrightarrow \quad B_i = H_i. \quad (3.6)$$

Note que aquí hemos escrito las ecuaciones de Maxwell usando el sistema gaussiano de unidades (c.g.s.), que es el que se presta más convenientemente para nuestros fines.

En total, tenemos que las ecuaciones de Maxwell constituyen ocho ecuaciones diferenciales de *primer orden* que describen la evolución de los campos.

<sup>1</sup>Las leyes de Gauss y la ley de Ampère-Maxwell.

<sup>2</sup>Ley de Faraday y Ley de Biot-Savart.

Que las ecuaciones de Maxwell sean de primer orden dificulta la descripción lagrangeana del campo electromagnético, ya que, en general, un lagrangiano que depende de los campos y sus primeras derivadas suministra *ecuaciones de movimiento de segundo orden* en los campos. Más precisamente, no es posible encontrar un lagrangeano dependiendo de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y sus primeras derivadas, que implique las ecuaciones de Maxwell como correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Sin embargo, es posible escribir las ecuaciones de Maxwell como ecuaciones diferenciales de segundo orden si se introducen los campos auxiliares llamados *potenciales electromagnéticos*: uno vectorial  $A_i$  y el otro escalar  $\varphi$ , tal que satisfagan idénticamente las ecuaciones homogéneas (3.3) y (3.4). Esto se consigue, como es sabido, si

$$B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (3.7)$$

$$E_i = -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \partial_t A_i. \quad (3.8)$$

Estas ecuaciones definen los campos eléctrico y magnético en función de los potenciales electromagnéticos.

Pero existe un “problema” con los potenciales introducidos anteriormente: ellos no son únicos. Esto se puede verificar efectuando siguiente cambio:

$$A_i \rightarrow A'_i = A_i + \partial_i \chi, \quad (3.9)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \chi, \quad (3.10)$$

llamado *transformación de gauge*. Los nuevos  $A'_i$  y  $\varphi'$ , que dependen de los antiguos y de una función  $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ , también satisfacen las ecuaciones (3.7) y (3.8), y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell homogéneas.

Por lo tanto, los potenciales poseen información redundante. Esto puede ser un problema grave para la cuantización, puesto que al trabajar con los potenciales electromagnéticos estamos introduciendo grados de libertad superfluos en la teoría. Por otro lado, la *libertad de gauge* nos permite escoger potenciales particulares que sean útiles para simplificar muchos cálculos, sin alterar la física del sistema.

Usando las ecuaciones constitutivas e introduciendo (3.7) y (3.8) en (3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) &= \frac{4\pi}{c} j_i + \frac{1}{c} \partial_t \left( -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \partial_t A_i \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} j_i - \frac{1}{c} \partial_t \partial_i \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t A_i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De este modo, podemos escribir

$$(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m + \frac{1}{c} \partial_i \partial_t \varphi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_i = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (3.12)$$

$$\partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i + \frac{1}{c} \partial_i \partial_t \varphi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_i = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_i - \partial_j \partial_j A_i + \partial_i \left\{ \partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \right\} = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (3.14)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_j \partial_j \right) A_i + \partial_i \left\{ \partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \right\} = \frac{4\pi}{c} j_i \quad (3.15)$$

$$\square A_i + \partial_i \left\{ \partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \right\} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (3.16)$$

Por otro lado, (3.8) en (3.1) suministra:

$$\partial_i \left( -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \partial_t A_i \right) = 4\pi \rho, \quad (3.17)$$

$$\partial_i \partial_i \varphi + \frac{1}{c} \partial_i \partial_t A_i = -4\pi \rho, \quad (3.18)$$

$$\partial_i \partial_i \varphi + \frac{1}{c} \partial_t \{ \partial_i A_i \} = -4\pi \rho. \quad (3.19)$$

Hemos obtenido así dos ecuaciones diferenciales inhomogéneas *de segundo orden*, pero que siguen siendo complicadas de resolver debido a los segundos términos del lado izquierdo. Es ahora donde podemos hacer uso de la libertad de gauge mencionada. Existen dos gauges *comúnmente* usados:

### Gauge de Lorentz

En este caso, se eligen potenciales que satisfagan<sup>3</sup>

$$\partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi = 0. \quad (3.26)$$

Usando el gauge de Lorentz, las ecuaciones para los potenciales (3.16) y (3.19), se reducen a:

$$\square A_i = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (3.27)$$

y

$$\partial_i \partial_i \varphi + \frac{1}{c} \partial_t \left\{ -\frac{1}{c} \partial_t \varphi \right\} = -4\pi \rho, \quad (3.28)$$

$$\partial_i \partial_i \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi = -4\pi \rho, \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi - \partial_i \partial_i \varphi = 4\pi \rho, \quad (3.30)$$

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad (3.31)$$

que son las conocidas ecuaciones de onda inhomogéneas.

---

<sup>3</sup>Esta condición siempre se puede satisfacer aplicando una transformación de Gauge sobre los campos  $A_i$  y  $\varphi$ . Veamos; supongamos que partimos de potenciales que no satisfacen el gauge de Lorentz anterior:

$$\partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \neq 0. \quad (3.20)$$

Ahora, aplicando la transformación de gauge dada por (3.9) y (3.10) donde los nuevos potenciales sí satisfacen el gauge de Lorentz, es decir:

$$0 = \partial_j A'_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi' \quad (3.21)$$

$$= \partial_j (A_j + \partial_j \chi) + \frac{1}{c} \partial_t \left( \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \chi \right) \quad (3.22)$$

$$= \partial_j A_j + \partial_j \partial_j \chi + \frac{1}{c} \partial_t \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \chi \quad (3.23)$$

$$= - \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_j \partial_j \right) \chi + \partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi, \quad (3.24)$$

de modo que

$$\square \chi = \partial_j A_j + \frac{1}{c} \partial_t \varphi, \quad (3.25)$$

lo que nos dice que la función  $\chi$  debe resolver una ecuación de onda inhomogenea, cuya solución siempre existe (aunque no es única).

## Gauge de Coulomb

En este caso, se eligen potenciales que satisfagan<sup>4</sup>

$$\partial_i A_i = 0. \quad (3.36)$$

Así, usando el gauge de Coulomb, obtendremos que las ecuaciones para los potenciales se reducen a las ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\square A_i + \frac{1}{c} \partial_i \partial_t \varphi = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (3.37)$$

$$\partial_i \partial_i \varphi = -4\pi \rho. \quad (3.38)$$

Además, es posible imponer la condición adicional  $\varphi = 0$  siempre y cuando  $j_i = 0$  y  $\rho = 0$ , es decir, en el vacío. De esta manera eliminamos el potencial escalar, mientras que  $A_i$  debe satisfacer la ecuación de onda homogénea

$$\square A_i = 0, \quad (3.39)$$

y el gauge de Coulomb.

Adicionalmente, al usar el Gauge de Coulomb tendremos que los campos eléctrico y magnético estarán completamente definidos una vez conocido el potencial vectorial  $A_i$ , mediante

$$E_i = -\frac{1}{c} \partial_t A_i, \quad (3.40)$$

$$B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (3.41)$$

De esta forma hemos eliminado el potencial escalar  $\varphi$ : los campos  $E_i$  y  $B_i$  sólo dependen del potencial vectorial, que será nuestra única variable de campo.

### 3.1.1. Solución clásica para el campo de radiación en el gauge de Coulomb

Análogamente al caso del campo escalar unidimensional, es conveniente considerar el campo dentro de una caja de volumen  $V = L^3$ , con condiciones de borde periódicas. Con esto se logra discretizar los valores del vector de onda  $\vec{k}$ :

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3), \quad (3.42)$$

con  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, sólo son posibles algunos modos normales para el campo EM, correspondiendo a cada uno de los valores discretos de  $\vec{k}$ .

Considerando esta discretización, podemos escribir una solución general de (3.39) como:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left\{ \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{A}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}, \quad (3.43)$$

---

<sup>4</sup>De igual manera, esta condición siempre puede ser satisfecha. Partiendo de potenciales que no satisfacen el gauge de Coulomb:

$$\partial_i A_i \neq 0, \quad (3.32)$$

y luego aplicando la transformación de Gauge de manera que los nuevos potenciales sí satisfagan (3.36), tenemos:

$$\partial_i A'_i = 0, \quad (3.33)$$

$$\partial_i (A_i + \partial_i \chi) = 0, \quad (3.34)$$

$$\square \chi = -\partial_i A_i, \quad (3.35)$$

lo que nos dice que resolviendo la ecuación anterior, la función  $\chi$  siempre existe.

donde  $A_k(t) = \tilde{A}_k e^{-i\omega_k t}$  y la suma sobre  $\vec{k}$  se extiende sobre todos los valores posibles (3.42), y además

$$\omega_k = c|\vec{k}| \quad (3.44)$$

Adicionalmente, para satisfacer el gauge de Coulomb, ver (3.36), es necesario que

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0, \quad (3.45)$$

es decir,  $\vec{A}_{\vec{k}}$  debe ser perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$ . Decimos entonces que  $\vec{A}(x, t)$  está constituido por *ondas transversales*. Esta condición sobre  $\vec{A}_{\vec{k}}$  reduce su número de posibles componentes independientes de 3 a 2. En otras palabras (y debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell), para cada vector de onda  $\vec{k}$  dado, los posibles vectores  $\vec{A}_{\vec{k}}$  permitidos forman un espacio vectorial bidimensional. Por esto, siempre es posible escribir

$$\vec{A}_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1}^2 \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}, \quad (3.46)$$

donde hemos introducido un factor (aún no definido)  $N_{\vec{k}}$  por conveniencia futura,  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}1}$  y  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}2}$  son dos vectores unitarios ortogonales entre si y con el vector de onda  $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{k}$  y donde  $a_{\vec{k}\sigma}$  representan las amplitudes de cada modo. Más aún, es conveniente elegir los vectores  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}$  de modo que, para cada  $\vec{k}$ , el trio  $(\tilde{\epsilon}_{\vec{k}1}, \tilde{\epsilon}_{\vec{k}2}, \vec{k})$  formen una base ortonormal derecha, es decir:

$$\tilde{\epsilon}_{\vec{k}1} \times \tilde{\epsilon}_{\vec{k}2} = \hat{k}, \quad \tilde{\epsilon}_{\vec{k}2} \times \hat{k} = \tilde{\epsilon}_{\vec{k}1}, \quad \hat{k} \times \tilde{\epsilon}_{\vec{k}1} = \tilde{\epsilon}_{\vec{k}2}. \quad (3.47)$$

Como consecuencia, los vectores  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}$  satisfacen las siguientes propiedades:

$$\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0, \quad (3.48)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sigma = 1, 2, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\epsilon}_{(-\vec{k})\sigma} = -(-1)^\sigma \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}, \quad (3.50)$$

tal como se puede verificar de la figura. En resumen, una solución general de (3.39) y (3.36)

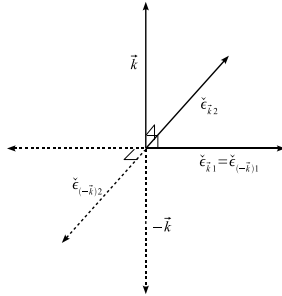


Figura 3.1: Configuración de los vectores  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}$

puede escribirse como

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\sigma, \vec{k}} N_{\vec{k}} \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ a_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}\sigma}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}, \quad (3.51)$$

es decir, como una superposición de ondas planas transversales, con dos modos fundamentales independientes, uno para cada  $\sigma$ , denominadas *polarizaciones*. Es por esto que los vectores  $\tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}$  son llamados *vectores de polarización*.

Como consecuencia, de (3.40) y (3.41) encontramos:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\sigma, \vec{k}} N_k \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \omega_k \left\{ a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.52)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = i \sum_{\sigma, \vec{k}} N_k \left( \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \right) \left\{ a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.53)$$

de modo que tanto el campo eléctrico como el magnético está constituido por ondas transversales. Además la energía total y el momentum lineal total para el campo electromagnético respectivamente son:

$$H = \sum_{\sigma, \vec{k}} \frac{\omega_k^2}{8\pi c^2} N_k^2 L^3 \left( a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* \right) \quad (3.54)$$

$$\vec{P} = \sum_{\sigma, \vec{k}} \frac{\omega_k^2}{8\pi c^2} N_k^2 L^3 \vec{k} a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \quad (3.55)$$

### 3.1.2. Densidad lagrangeana, energía y momentum lineal.

Una densidad Lagrangeana que suministra las ecuaciones de Maxwell para los  $A_i$  es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i - (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \right], \quad (3.56)$$

donde el campo es sujeto adicionalmente a la condición adicional definida por el gauge de Coulomb,

$$\partial_i A_i = 0. \quad (3.57)$$

Usando la densidad lagrangeana (3.56) podemos calcular:

$$\pi_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \dot{A}_i = -\frac{1}{4\pi c} E_i, \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{8\pi c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + \frac{1}{8\pi} (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \\ &= \frac{1}{8\pi c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + \frac{1}{8\pi} (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

con lo que la energía total es

$$H = \frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \right\} \quad (3.60)$$

Usando la identidad

$$B_i B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \epsilon_{ilm} \partial_l A_m \quad (3.61)$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j A_k) (\partial_l A_m) \quad (3.62)$$

$$= (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) - (\partial_j A_k) (\partial_k A_j) \quad (3.63)$$

$$= (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) - \partial_j (A_k \partial_k A_j) + A_k \partial_j \partial_k A_j \quad (3.64)$$

$$= (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) - \partial_j (A_k \partial_k A_j) + A_k \partial_k (\partial_j A_j) \quad (3.65)$$

$$= (\partial_j A_k) (\partial_j A_k) - \partial_j (A_k \partial_k A_j), \quad (3.66)$$



que es válida bajo el supuesto que el potencial vectorial satisface el gauge de Coulomb, podemos escribir

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + (\partial_i A_j) (\partial_i A_j) \right\} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int dV \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{A}_i \dot{A}_i + B_i B_i + \partial_j (A_k \partial_k A_j) \right\} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int dV \{ (E^2 + B^2) + \partial_j (A_k \partial_k A_j) \} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int dV (E^2 + B^2) + \frac{1}{8\pi} \int dV \partial_j (A_k \partial_k A_j) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_V dV (E^2 + B^2) + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial V} dS_j A_k \partial_k A_j \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_V dV (E^2 + B^2), \tag{3.67}
\end{aligned}$$

donde la integral de volumen  $\oint_{\partial V} dS_j A_k \partial_k A_j$  se anula debido a que asumimos el campo se anula suficientemente rápido en el infinito.

Por otro lado, para el momentum lineal total del sistema, obtenemos:

$$p_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c^2} \dot{A}_j \partial_i A_j \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{4\pi c} \left\{ (\vec{E} \times \vec{B})_i - \partial_j \left( \frac{1}{c} \dot{A}_j A_i \right) \right\}, \tag{3.69}$$

ya que, en el gauge de Coulomb,

$$(\vec{E} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} E_j B_k \tag{3.70}$$

$$= \epsilon_{ijk} \left( -\frac{1}{c} \dot{A}_j \right) (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) \tag{3.71}$$

$$= -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \dot{A}_j \partial_l A_m \tag{3.72}$$

$$= -\frac{1}{c} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \dot{A}_j \partial_l A_m \tag{3.73}$$

$$= -\frac{1}{c} \dot{A}_j \partial_i A_j + \frac{1}{c} \dot{A}_j \partial_j A_i \tag{3.74}$$

$$= -\frac{1}{c} \dot{A}_j \partial_i A_j + \frac{1}{c} \partial_j (\dot{A}_j A_i) - \frac{1}{c} A_i \partial_j \dot{A}_j \tag{3.75}$$

$$= -\frac{1}{c} \dot{A}_j \partial_i A_j + \frac{1}{c} \partial_j (\dot{A}_j A_i) - \frac{1}{c} A_i \partial_t (\partial_j A_j) \tag{3.76}$$

$$= -\frac{1}{c} \dot{A}_j \partial_i A_j + \frac{1}{c} \partial_j (\dot{A}_j A_i). \tag{3.77}$$

Usando (3.69), el momentum lineal total almacenado en el campo electromagnético puede escribirse como

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_V dV \vec{E} \times \vec{B}, \tag{3.78}$$

que corresponde al conocido vector de Pointing.

## 3.2. Cuantización

Dentro del gauge Coulomb y en el vacío, donde podemos elegir  $\phi = 0$ , lo natural sería considerar al potencial vectorial  $A_i(\vec{x}, t)$  como nuestra variable de campo, de modo que su

momento canónico asociado sería

$$\pi_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c} E_i(\vec{x}, t). \quad (3.79)$$

Para cuantizar el campo EM libre, debemos entonces promover estas variables de campo a operadores que actúan un espacio Hilbert, y luego conocer sus relaciones de conmutación.

Si consideramos a  $A_i(\vec{x}, t)$  como los campos independientes, entonces esperaríamos, de acuerdo al procedimiento de cuantización canónico, que los operadores de campo  $\hat{A}_i(\vec{x}, t)$  y  $\hat{\pi}_i(\vec{x}, t)$  satisfagan las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{A}_i(\vec{x}', t), \hat{\pi}_j(\vec{x}, t)] = i\hbar \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{1}. \quad (3.80)$$

Sin embargo, puede comprobarse rápidamente que este conmutador es inconsistente con el gauge de Coulomb  $\partial_i \hat{A}_i = \hat{0}$ , ya que esta última condición implica

$$\partial'_j [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t)] = [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \partial'_j \hat{A}_j(\vec{x}', t)] = 0, \quad (3.81)$$

pero, por otro lado, (3.80) requiere que

$$\partial'_j [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t)] = i\hbar \delta_{ij} \partial'_j \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{1} \neq 0. \quad (3.82)$$

Por lo tanto, no podemos usar las relaciones de conmutación canónicas para cuantizar el campo electromagnético en el gauge de Coulomb.

Un camino para poder cuantizar el campo electromagnético de manera lo más similar posible a la cuantización canónica, es intentar modificar el lado derecho de (3.80) de modo que las nuevas relaciones de conmutación para los campos cuánticos sean compatibles con el gauge de Coulomb. No es difícil verificar<sup>5</sup> que la modificación requerida es

$$[\hat{A}_i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_j(\vec{x}', t)] = i\hbar \left\{ \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \hat{1} \quad (3.83)$$

Debido a que el nuevo término no se anula para  $\vec{x} \neq \vec{x}'$ , la interpretación estándar de la teoría cuántica sugeriría que no es posible medir simultáneamente  $\hat{A}_i(\vec{x}, t)$  y  $\hat{\pi}_j(\vec{x}', t)$  en puntos distintos del espacio. Sin embargo, esto no representa necesariamente un problema ya que  $\hat{A}_i$  no es un observable (los observables son el campo eléctrico y el magnético). Podemos comprobar, por otra parte, que las nuevas relaciones de conmutación (3.80) implican relaciones de conmutación entre los campos eléctricos y magnéticos que no presentan este (aparente) problema. En efecto, (3.80) implica

$$[\hat{B}_i(\vec{x}, t), \hat{E}_j(\vec{x}', t)] = 4\pi i\hbar c \epsilon_{ijk} \partial_k \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{1}, \quad (3.84)$$

de modo que es posible medir simultáneamente el campo eléctrico y magnético en puntos distintos del espacio. Sin embargo, estos campos no pueden determinarse simultáneamente con infinita precisión en el mismo punto del espacio. Esto tiene como consecuencia que no puede existir un estado en el que tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{B}$  sean exactamente cero, lo que se manifiesta en así llamadas, fluctuaciones del vacío del campo electromagnético.

Finalmente, las relaciones

$$[\hat{A}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t)] = 0, \quad (3.85)$$

$$[\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_j(\vec{x}', t)] = 0, \quad (3.86)$$

completan las relaciones de conmutación necesarias para la cuantización del campo.

---

<sup>5</sup>Usando  $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}_k - \vec{x}'_k|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ .

### 3.2.1. Operadores de creación y destrucción

Análogamente al caso del campo escalar, puede mostrarse a partir de las relaciones de conmutación que los campos cuánticos satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales que sus análogos clásicos.

Por lo tanto, podemos usar expansiones para los operadores de campo análogos a aquellas del caso clásico, es decir,

$$\hat{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \sigma} N_k \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.87)$$

$$\hat{E}(\vec{x}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\vec{k}, \sigma} N_k \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.88)$$

$$\hat{B}(\vec{x}, t) = i \sum_{\vec{k}, \sigma} N_k \left( \vec{k} \times \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \right) \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.89)$$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} N_k^2 L^3 \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (3.90)$$

$$\hat{P} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\omega_k}{4\pi c^2} N_k^2 L^3 \vec{k} \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right). \quad (3.91)$$

$$(3.92)$$

De estas expresiones podemos obtener las relaciones inversas de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  en función de  $\hat{A}_i$  y  $\hat{\pi}_i$ :

$$\hat{a}_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{2L^3 N_k \omega_k} \int dV \left( \omega_k \hat{A} + 4\pi c^2 i \hat{\pi} \right) \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.93)$$

y, como consecuencia,

$$\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger = \frac{1}{2L^3 N_k \omega_k} \int dV \left( \omega_k \hat{A} - 4\pi c^2 i \hat{\pi} \right) \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (3.94)$$

Con estas expresiones, podemos calcular los conmutadores de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ . Obtenemos:

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger \right] = \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k N_k^2} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (3.95)$$

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} \right] = 0. \quad (3.96)$$

En este momento, elegimos la constante  $N_k$  de modo conveniente. Definimos

$$N_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}}, \quad (3.97)$$

de modo que los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  sean adimensionales y satisfagan relaciones de conmutación tipo operadores “escalera” del oscilador armónico.

En resumen los campos cuánticos que describen el campo electromagnético en el gauge de

Coulomb son:

$$\hat{A}(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.98)$$

$$\hat{E}(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{L^3}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.99)$$

$$\hat{B}(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} (\vec{k} \times \tilde{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}) \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}, \quad (3.100)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \omega_k \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right) \quad (3.101)$$

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right), \quad (3.102)$$

$$(3.103)$$

y satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (3.104)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}] = 0. \quad (3.105)$$

### 3.2.2. Vectores de Estado del Campo Electromagnético.

Procedemos de manera análoga a como lo hicimos en el caso del campo escalar (sección 2.3.2). Usando las relaciones de conmutación (3.104)-(3.105) escribimos el operador energía como

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.106)$$

En el caso del operador momentum, tendremos que

$$\hat{P} = \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \right\} = \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}. \quad (3.107)$$

El “operador número”, asociado a cada modo  $(\vec{k}, \sigma)$  con vector de onda y polarización definidas, se define como:

$$\hat{N}_{\vec{k}, \sigma} := \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}, \quad (3.108)$$

de modo que los operadores Hamiltoniano y el momentum se escriben como:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \omega_k \hat{N}_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \omega_k, \quad (3.109)$$

$$\hat{P} = \hbar \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \hat{N}_{\vec{k}, \sigma}. \quad (3.110)$$

Consecuentemente, encontramos que los conmutadores del operador número con  $\hat{a}_{\vec{k}, \sigma}$  y  $\hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger$  son

$$[\hat{N}_{\vec{k}, \sigma}, \hat{a}_{\vec{k}', \sigma'}] = -\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'} \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}, \quad (3.111)$$

$$[\hat{N}_{\vec{k}, \sigma}, \hat{a}_{\vec{k}', \sigma'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'} \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger, \quad (3.112)$$

de modo que

$$[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{k},\sigma}] = -\hbar\omega_k \hat{a}_{\vec{k},\sigma}, \quad (3.113)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger] = \hbar\omega_k \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger, \quad (3.114)$$

y

$$[\hat{P}, \hat{a}_{\vec{k},\sigma}] = -\hbar\vec{k} \hat{a}_{\vec{k},\sigma}, \quad (3.115)$$

$$[\hat{P}, \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger] = \hbar\vec{k} \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger. \quad (3.116)$$

Análogamente al caso escalar, estas propiedades implican que el espectro de energías y momenta del campo electromagnético cuántico es discreto. Los correspondientes cuantos de energía y momentum son  $\hbar\omega_k$  y  $\hbar\vec{k}$ , para un vector de onda  $\vec{k}$  dado, respectivamente. El operador  $\hat{a}_{\vec{k},\sigma}$  (cuando se aplica a un estado dado) disminuye la energía y el momentum del estado del campo y es por esto interpretado como un *operador de destrucción de un cuanto de energía y momentum del campo electromagnético* (un “fotón”). Análogamente,  $\hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger$  aumenta la energía y el momentum del estado del campo y es por esto interpretado como un *operador de creación de un cuanto de energía y momentum del campo electromagnético* (un “fotón”).

La existencia de un estado de energía mínima, que denotaremos por  $|0\rangle$ , requiere que

$$\hat{a}_{\vec{k},\sigma} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}, \forall \sigma. \quad (3.117)$$

Este estado fundamental del campo cuántico tiene momentum cero,  $\hat{P} |0\rangle = 0$ , pero su energía es infinita, con  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \sum_{\vec{k},\sigma} \omega_k$ .

Un estado de número arbitrario puede entonces escribirse como

$$\begin{aligned} |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots, n_{\vec{k}',\sigma'}, \dots\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{\dots n_{\vec{k},\sigma}! \dots n_{\vec{k}',\sigma'}! \dots}} \dots \\ &\times \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger\right)^{n_{\vec{k},\sigma}} \dots \left(\hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}^\dagger\right)^{n_{\vec{k}',\sigma'}} \dots |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.118)$$

con  $n_{\vec{k},\sigma} \in \mathbb{N}$ , que interpretamos como un estado del campo con  $n_{\vec{k},\sigma}$  fotones cada una con energía  $\hbar\omega_k$  y momentum  $\hbar\vec{k}$ ,  $n_{\vec{k}',\sigma'}$  partículas con energía y momentum  $\hbar\omega_{k'}$ ,  $\hbar\vec{k}'$ , etc, ya que

$$\begin{aligned} \hat{H} |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots, n_{\vec{k}',\sigma'}, \dots\rangle &= \left(E_0 + n_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_k + n_{\vec{k}',\sigma'} \hbar\omega_{k'} + \dots\right) \\ &\times |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots, n_{\vec{k}',\sigma'}, \dots\rangle, \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \hat{P} |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots, n_{\vec{k}',\sigma'}, \dots\rangle &= \left(n_{\vec{k},\sigma} \hbar\vec{k} + n_{\vec{k}',\sigma'} \hbar\vec{k}' + \dots\right) \\ &\times |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots, n_{\vec{k}',\sigma'}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (3.120)$$

La acción de los operadores de creación y destrucción sobre un estado  $|\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots\rangle$  de número del campo viene dada por

$$\hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\sigma} + 1} |\dots, n_{\vec{k},\sigma} + 1, \dots\rangle, \quad (3.121)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},\sigma} |\dots, n_{\vec{k},\sigma}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\sigma}} |\dots, n_{\vec{k},\sigma} - 1, \dots\rangle. \quad (3.122)$$

Estos estados forman una base ortonormal y completa del espacio de Hilbert asociado a los operadores  $\hat{N}_{\vec{k}\sigma}$ ,  $\hat{H}$  y  $\hat{P}$ , es decir:

$$\left\langle \dots, n_{\vec{k}_1, \sigma_1}, \dots, n_{\vec{k}_2, \sigma_2}, \dots \left| \dots, n'_{\vec{k}_1, \sigma_1}, \dots, n'_{\vec{k}_2, \sigma_2}, \dots \right\rangle = \dots \delta_{n_{\vec{k}_1, \sigma_1}, n'_{\vec{k}_1, \sigma_1}} \delta_{n_{\vec{k}_2, \sigma_2}, n'_{\vec{k}_2, \sigma_2}} \dots \quad (3.123)$$

$$\dots \sum_{\vec{k}_1 \sigma_1} \dots \sum_{\vec{k}_2 \sigma_2} \dots \left| \dots, n_{\vec{k}_1, \sigma_1}, \dots, n_{\vec{k}_2, \sigma_2}, \dots \right\rangle \left\langle \dots, n_{\vec{k}_1, \sigma_1}, \dots, n_{\vec{k}_2, \sigma_2}, \dots \right| = \hat{1}. \quad (3.124)$$

Con esto, hemos completado la cuantización del campo electromagnético libre. El próximo paso es estudiar las consecuencias de la cuantización y, en particular, la interacción del campo electromagnético cuántico con la materia.

## Capítulo 4

# Interacción del campo electromagnético cuantizado con la materia.

### 4.1. Interacción del campo electromagnético clásico con la materia

#### 4.1.1. Lagrangeano clásico

El lagrangeano de una partícula (no-relativista) de masa  $m$  y carga  $q$  moviéndose en un campo electromagnético, es dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} - q\varphi, \quad (4.1)$$

donde  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  y  $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$  son el potencial vectorial y escalar del campo electromagnético en la posición  $\vec{x}$  y el instante  $t$ .

El momentum conjugado  $\vec{p}$  es dado por

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}, \quad (4.2)$$

y las ecuaciones de Lagrange nos dirigen a

$$m\ddot{\vec{x}} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right). \quad (4.3)$$

En efecto,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = q \left( \frac{1}{c}\dot{x}_j \partial_i A_j - \partial_i \varphi \right), \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \left( m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i \right), \quad (4.5)$$

de modo que las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - q\partial_i \varphi - \frac{d}{dt} \left( m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - q\partial_i \varphi - m\ddot{x}_i - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_i = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - q\partial_i \varphi - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_i = m\ddot{x}_i, \quad (4.8)$$

pero  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_k \partial_k$ , de modo que obtenemos

$$\frac{q}{c} \partial_i A_j \dot{x}_j - q \partial_i \varphi - \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i - \frac{q}{c} \dot{x}_k \partial_k A_i = m \ddot{x}_i, \quad (4.9)$$

$$\frac{q}{c} (\partial_i A_j \dot{x}_j - \dot{x}_k \partial_k A_i) + q \left( -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i \right) = m \ddot{x}_i. \quad (4.10)$$

Recordando las expresiones del campo eléctrico y magnético en función de los potenciales:

$$E_i = -\partial_i \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad (4.11)$$

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k, \quad (4.12)$$

tenemos

$$\frac{q}{c} \dot{x}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) + q E_i = m \ddot{x}_i, \quad (4.13)$$

$$\frac{q}{c} \dot{x}_j (\delta_{mi} \delta_{jn} - \delta_{mj} \delta_{in}) \partial_m A_n + q E_i = m \ddot{x}_i, \quad (4.14)$$

$$\frac{q}{c} \dot{x}_j \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \partial_m A_n + q E_i = m \ddot{x}_i, \quad (4.15)$$

$$\frac{q}{c} \varepsilon_{kij} \dot{x}_j B_k + q E_i = m \ddot{x}_i, \quad (4.16)$$

$$\frac{q}{c} \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k + q E_i = m \ddot{x}_i. \quad (4.17)$$

De modo que obtenemos finalmente

$$m \ddot{x}_i = q \left( E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k \right). \quad (4.18)$$

#### 4.1.2. Hamiltoniano clásico

El Hamiltoniano está dado por la transformada de Legendre del Lagrangiano:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L. \quad (4.19)$$

Usando (4.1) y (4.2), encontramos

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \left( \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} - q \varphi \right) \quad (4.20)$$

$$= \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} + q \varphi \quad (4.21)$$

$$= \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q \varphi \quad (4.22)$$

$$= \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q \varphi \quad (4.23)$$

$$= \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \varphi \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \varphi \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \varphi. \quad (4.26)$$

Así, finalmente obtenemos

$$H = H_{\text{libre}} + H_{\text{int}}, \quad (4.27)$$



donde  $H_{\text{libre}} := \frac{1}{2m}p^2$  es el hamiltoniano de una partícula (no-relativista) libre, y

$$H_{\text{int}} = -\frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + q\varphi, \quad (4.28)$$

es el hamiltoniano de interacción con el campo electromagnético.

#### 4.1.3. Interacción de una partícula no-relativista con el campo electromagnético cuántico

Describimos las propiedades cuánticas de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  interactuando con el campo electromagnético cuantizado por medio del hamiltoniano total

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{libre}} + \hat{H}' + \hat{H}'' + \hat{H}_{\hat{\varphi}} + \hat{H}_{\text{rad}} \quad (4.29)$$

$$= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 - \frac{q}{2mc} (\hat{p} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{p}) + \frac{q^2}{2mc^2} \hat{A}^2 + q\hat{\varphi} + \frac{1}{8\pi} \int dV (\hat{E}^2 + \hat{B}^2), \quad (4.30)$$

donde  $\hat{p}$  es el operador momentum de la partícula, que satisface las usuales relaciones de conmutación usadas en la mecánica cuántica de una partícula, es decir,  $[\vec{x}_i, \vec{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}\hat{1}$  (en la representación coordenada  $\vec{p}_j = -i\hbar\partial_j$ ), y  $(\hat{\varphi}, \hat{A})$  son los campos cuánticos que describen el campo electromagnético. Además, hemos dividido los términos del hamiltoniano de interacción en

$$\hat{H}' := -\frac{q}{2mc} (\hat{p} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{p}), \quad (4.31)$$

$$\hat{H}'' := \frac{q^2}{2mc^2} \hat{A}^2, \quad (4.32)$$

$$\hat{H}_{\hat{\varphi}} := q\hat{\varphi}. \quad (4.33)$$

En el gauge de Coulomb, sólo  $\hat{H}'$  y  $\hat{H}''$  contribuyen a la interacción. Además,  $\hat{p} \cdot \hat{A} - \hat{A} \cdot \hat{p} = -i\hbar(\vec{\nabla} \cdot \hat{A})\hat{1} = 0$  (cuando actúan sobre un vector del espacio de Hilbert). Finalmente, el operador  $\hat{A}$  que describe el campo electromagnético cuantizado (libre) tiene la forma (3.98), de modo que

$$\hat{H}' = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hat{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}}{\sqrt{\omega_k}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}'' = & \frac{e^2}{2mc^2} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \frac{\vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'}}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right. \\ & \left. + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para la evaluación de los diferentes procesos usaremos teoría de perturbaciones (dependiente del tiempo), tomando como hamiltoniano “modelo” a

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{libre}} + \hat{H}_{\text{rad}}, \quad (4.36)$$

que ya sabemos diagonalizar. Como base del sistema partícula + campo consideraremos a estados de la forma  $|\Psi\rangle = |\dots n_{\vec{k}, \sigma} \dots\rangle$ . Los hamiltonianos de interacción  $\hat{H}'$  y  $\hat{H}''$  son entonces considerados como perturbaciones.

Es ilustrativo preguntarse cuál es el parámetro adimensional (y pequeño) que usaremos para definir la serie perturbativa de un proceso dado. Para esto, reescribiremos  $\hat{H}'$  y  $\hat{H}''$  en función de cantidades adimensionales:

$$\frac{1}{mc^2} \hat{H}' = -\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{c\lambda_c^2}{2\pi L^3 \omega_k}} \left( \frac{\hat{\vec{p}}}{mc} \right) \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{mc^2} \hat{H}'' &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \left( \frac{c\lambda_c^2}{2\pi L^3 \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \right) \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aquí hemos reemplazado  $q = e$  ( $e < 0$  para un electrón). Esta expresión implica que, si medimos momentum en unidades de  $mc$ , frecuencia en unidades de  $\frac{c\lambda_c^2}{2\pi L^3}$  (donde  $\lambda_c := \frac{\hbar}{mc} = \frac{2\pi\hbar}{mc}$  es la longitud de Compton del electrón o, en general, de la partícula) y energía en unidades de  $mc^2$ , entonces la magnitud de la interacción es proporcional a la *constante de estructura fina*  $\alpha := \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ , con  $\hat{H}' \sim O(\sqrt{\alpha})$  y  $\hat{H}'' \sim O(\alpha)$ . Podemos adoptar a  $\alpha$  como el parámetro adimensional ( $\ll 1$ ) con respecto al cual calcularemos nuestra expansión perturbativa. Debido a que  $\alpha \propto e^2$ , la serie perturbativa puede considerarse formalmente en potencias de la carga  $e$ , con  $\hat{H}' \sim O(e)$  y  $\hat{H}'' \sim O(e^2)$ .

#### 4.1.4. Teoría de Perturbaciones y regla de oro de Fermi

Regla de Oro de Fermi: La probabilidad por unidad de tiempo que ocurra la transición entre el estado inicial  $|i\rangle$  y el estado final  $|f\rangle$  de un sistema cuántico, es

$$\left( \frac{P}{t} \right) = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (4.39)$$

donde  $M_{fi}$  es la *matriz de transición* dada por:

$$M_{fi} := \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle + \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}_{int} | I \rangle \langle I | \hat{H}_{int} | i \rangle}{E_i - E_I} + \sum_{I, II} \frac{\langle f | \hat{H}_{int} | I \rangle \langle I | \hat{H}_{int} | II \rangle \langle II | \hat{H}_{int} | i \rangle}{(E_i - E_I)(E_i - E_{II})} + \dots, \quad (4.40)$$

con  $|I\rangle$  y  $|II\rangle$  todos los posibles estados intermedios del sistema.

En nuestro caso tenemos que el hamiltoniano de interacción es de la forma

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}' + \hat{H}''. \quad (4.41)$$

Al reemplazar (4.41) en (4.40), encontramos que la matriz de puede escribirse como:

$$M_{fi} = \langle f | (\hat{H}' + \hat{H}'') | i \rangle + \sum_I \frac{\langle f | (\hat{H}' + \hat{H}'') | I \rangle \langle I | (\hat{H}' + \hat{H}'') | i \rangle}{E_i - E_I} \quad (4.42)$$

$$+ \sum_{I, II} \frac{\langle f | (\hat{H}' + \hat{H}'') | I \rangle \langle I | (\hat{H}' + \hat{H}'') | II \rangle \langle II | (\hat{H}' + \hat{H}'') | i \rangle}{(E_i - E_I)(E_i - E_{II})} + \dots \quad (4.43)$$

$$= \langle f | \hat{H}' | i \rangle + \langle f | \hat{H}'' | i \rangle + \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}' | I \rangle \langle I | \hat{H}' | i \rangle}{E_i - E_I} + \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}' | I \rangle \langle I | \hat{H}'' | i \rangle}{E_i - E_I} \quad (4.44)$$

$$+ \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}'' | I \rangle \langle I | \hat{H}' | i \rangle}{E_i - E_I} + \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}'' | I \rangle \langle I | \hat{H}'' | i \rangle}{E_i - E_I} + \dots \quad (4.45)$$

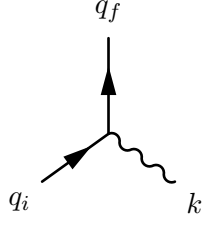


Figura 4.1: Proceso de primer orden en  $\hat{H}'$  para la absorción de un fotón.

## 4.2. Absorción de fotones por un electrón: Contribución de primer orden en $\hat{H}'$ .

Esquemáticamente, la absorción del fotón  $\vec{k}_i \sigma_i$ , a primer orden en  $\hat{H}'$  corresponde al diagrama mostrado en la figura 4.1. En este caso, consideramos los estados iniciales y finales dados por

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle |\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots\rangle, \quad (4.46)$$

$$|f\rangle = |\vec{q}_f\rangle |\dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots\rangle, \quad (4.47)$$

donde  $|\vec{q}\rangle$  es un estado propio de  $\hat{H}_{\text{libre}}$  de momentum definido  $\hbar\vec{q}$ . Tomando en cuenta las condiciones de borde periodicas ("cuantización en la caja"), estos estados, en la representación coordenada, están dados por

$$\psi_{\vec{q}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}, \quad (4.48)$$

con energía:

$$E_q = \frac{(\hbar q)^2}{2m}. \quad (4.49)$$

La matriz de transición  $M_{fi}$  en este caso está dada, a primer orden en  $e$ , por

$$M_{fi} = \langle f | \hat{H}' | i \rangle \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \langle \vec{q}_f | \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \frac{\hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'}}{\omega_{\vec{k}'}^{1/2}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right\} | \dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots \rangle |\vec{q}_i\rangle \\ &= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \left\{ \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | \dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots \rangle \langle \vec{q}_f | \frac{\hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'}}{\omega_{\vec{k}'}^{1/2}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | \dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots \rangle \langle \vec{q}_f | \frac{\hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'}}{\omega_{\vec{k}'}^{1/2}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \left\{ \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | \dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots \rangle \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'} \langle \vec{q}_f | \frac{\hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'}}{\omega_{\vec{k}'}^{1/2}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \right\} \quad (4.52)$$

$$= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}} \left\{ \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | \dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots \rangle \langle \vec{q}_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \right\} \quad (4.53)$$

$$= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}} \left\{ \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots | \dots, n_{\vec{k}\sigma} - 1, \dots \rangle \langle \vec{q}_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \right\} \quad (4.54)$$

$$= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}} \langle \vec{q}_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} |\vec{q}_i\rangle \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}}. \quad (4.55)$$

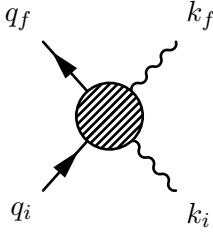


Figura 4.2: Scattering de fotones con electrones libres. Inicialmente un electrón en el estado  $|\vec{q}_i\rangle$  absorbe un fotón  $\vec{k}_i\sigma_i$ . El resultado del proceso es un fotón emitido  $\vec{k}_f\sigma_f$  y el electrón en el estado  $|\vec{q}_f\rangle$ .

Por lo tanto, usando la ecuación (4.48) vemos que:

$$\langle \vec{q}_f | \hat{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \propto \int_V \psi_{\vec{q}_f}^*(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi_{\vec{q}_i}(\vec{x}) dV \quad (4.56)$$

$$= \int_V \left( \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-i\vec{q}_f\cdot\vec{x}} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{q}_i\cdot\vec{x}} \right) dV \quad (4.57)$$

$$= \frac{1}{L^3} \int_{L^3} e^{-i\{\vec{q}_f - (\vec{q}_i + \vec{k})\}\cdot\vec{x}} dV \quad (4.58)$$

$$= \frac{1}{L^3} \left\{ L^3 \delta_{\vec{q}_f, \vec{q}_i + \vec{k}} \right\} \quad (4.59)$$

$$= \delta_{\vec{q}_f, \vec{q}_i + \vec{k}}, \quad (4.60)$$

que expresa la conservación del momentum:

$$\hbar\vec{q}_f = \hbar\vec{q}_i + \hbar\vec{k}, \quad (4.61)$$

mientras que de (4.49) y de la delta en (4.39), obtenemos la condición de conservación de la energía:

$$E_f = E_i, \quad (4.62)$$

$$E_0 + \frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar\omega_k (n_{\vec{k}\sigma} - 1) = E_0 + \hbar\omega_k n_{\vec{k}\sigma} + \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m}, \quad (4.63)$$

$$\frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} = \hbar\omega_k + \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m}. \quad (4.64)$$

Sin embargo, es fácil mostrar que (4.64) y (4.61) no pueden ser satisfechas simultáneamente. Por lo tanto, es imposible que un electrón libre (aislado) absorba un fotón. Este resultado es válido también para ordenes superiores en la teoría de perturbaciones.

### 4.3. Scattering entre fotones y electrones libres.

Consideraremos procesos de scattering del tipo mostrado en la figura 4.2. En este caso, consideraremos que los estados inicial y final están dados por

$$|i\rangle = |\vec{q}_i\rangle \left| \dots, n_{\vec{k}_i\sigma_i}, \dots, n_{\vec{k}_f\sigma_f}, \dots \right\rangle = |\vec{q}_i\rangle |\gamma_i\rangle, \quad (4.65)$$

$$|f\rangle = |\vec{q}_f\rangle \left| \dots, n_{\vec{k}_i\sigma_i} - 1, \dots, n_{\vec{k}_f\sigma_f} + 1, \dots \right\rangle = |\vec{q}_f\rangle |\gamma_f\rangle. \quad (4.66)$$

En la práctica es conveniente describir un proceso de scattering por medio de la correspondiente *sección diferencial de scattering*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{(\text{Número de partículas emitidas por unidad de tiempo y de ángulo sólido})}{(\text{Número de partículas incidentes por unidad de área y de tiempo})}. \quad (4.67)$$

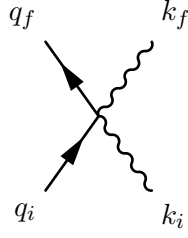


Figura 4.3: Diagrama del término de primer orden en  $\hat{H}''$ .

En el contexto de la teoría cuántica, la sección diferencial puede calcularse dividiendo la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula final (en nuestro caso, el fotón final) sea emitido en el ángulo sólido  $d\Omega$  en la dirección determinada por los ángulos de scattering  $(\vartheta, \phi)$ , por la densidad de flujo de probabilidad del haz incidente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(P/t)(\vartheta, \phi, d\Omega)}{j_0}, \quad (4.68)$$

Note que  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  tiene unidades de área. La densidad de flujo de probabilidad de fotones incidentes está dada por:

$$j_{0,\text{fotones}} = \frac{n_{\vec{k}_i\sigma_i}}{L^3} c, \quad (4.69)$$

De modo que

$$\begin{aligned} d\sigma_{\vec{k},\sigma} &= \frac{\left(\frac{P}{t}\right)_{\text{Scattering}}}{\frac{n_{\vec{k}_i\sigma_i}}{L^3} c} \\ &= \frac{2\pi L^3}{\hbar c n_{\vec{k}_i\sigma_i}} |M_{\text{fi}}|^2 \delta(E_f - E_i). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Para evaluar la matriz de transición, sólo nos interesan los términos que produzcan procesos del tipo mostrado en la figura 4.2. Estos términos están presentes a primer orden en  $\hat{H}''$ , mientras que  $\hat{H}'$  sólo puede contribuir con términos de segundo orden en la serie perturbativa. En consecuencia, a orden  $e^2$ , la matriz  $M_{\text{fi}}$  se reduce a:

$$M_{\text{fi}} = \langle f | \hat{H}'' | i \rangle + \sum_I \frac{\langle f | \hat{H}' | I \rangle \langle I | \hat{H}' | i \rangle}{E_i - E_I}. \quad (4.71)$$

#### 4.3.1. Contribución de primer orden en $\hat{H}''$

El hamiltoniano  $\hat{H}''$  es función de combinaciones del tipo  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}$ ,  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger$ ,  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}$ ,  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger$ , de los operadores de creación y destrucción, los cuales describen procesos de absorción-absorción, emisión-absorción, absorción-emisión y emisión-emisión, respectivamente. De éstos, sólo los términos del tipo absorción-emisión (emisión-absorción), representados por diagramas como el de la figura 4.3, contribuyen al proceso de scattering aquí considerado.

De este modo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}'' | i \rangle &= \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \sum_{\vec{k}, \sigma, \vec{k}', \sigma'} \langle \vec{q}_f | \left\langle \dots, (n_{\vec{k}_i \sigma_i} - 1), \dots, n_{\vec{k}_f \sigma_f} + 1, \dots \right| \frac{\check{\vec{k}}_\sigma \cdot \check{\vec{k}}'_{\sigma'}}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \\
&\quad \times \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} \right\} \left| \dots, n_{\vec{k}_i \sigma_i}, \dots, n_{\vec{k}_f \sigma_f}, \dots \right\rangle | \vec{q}_i \rangle \quad (4.72) \\
&= \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \sum_{\vec{k}, \sigma, \vec{k}', \sigma'} \frac{\check{\vec{k}}_\sigma \cdot \check{\vec{k}}'_{\sigma'}}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | \gamma_i \rangle \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | \gamma_i \rangle \langle \vec{q}_f | e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \right\} \quad (4.73) \\
&= \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \sum_{\vec{k}, \sigma, \vec{k}', \sigma'} \frac{\check{\vec{k}}_\sigma \cdot \check{\vec{k}}'_{\sigma'}}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | \gamma_i \rangle \delta_{\vec{k}, \vec{k}_i} \delta_{\vec{k}', \vec{k}_f} \delta_{\sigma, \sigma_i} \delta_{\sigma', \sigma_f} \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | \gamma_i \rangle \delta_{\vec{k}, \vec{k}_f} \delta_{\vec{k}', \vec{k}_i} \delta_{\sigma, \sigma_f} \delta_{\sigma', \sigma_i} \langle \vec{q}_f | e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \right\} \\
&= \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \frac{\check{\vec{k}}_{k_i \sigma_i} \cdot \check{\vec{k}}_{k_f \sigma_f}}{\sqrt{\omega_{k_i} \omega_{k_f}}} \left\{ \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}_i \sigma_i} \hat{a}_{\vec{k}_f \sigma_f}^\dagger | \gamma_i \rangle \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \right\} \\
&\quad + \langle \gamma_f | \hat{a}_{\vec{k}_f \sigma_f}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_i \sigma_i} | \gamma_i \rangle \langle \vec{q}_f | e^{-i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \left\{ \right. \\
&= 2 \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \frac{\check{\vec{k}}_{k_i \sigma_i} \cdot \check{\vec{k}}_{k_f \sigma_f}}{\sqrt{\omega_{k_i} \omega_{k_f}}} \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \sqrt{n_{\vec{k}_i \sigma_i} (n_{\vec{k}_f \sigma_f} + 1)}. \quad (4.74)
\end{aligned}$$

Usando (4.48), vemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle &= \int_{L^3} \left( \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-i\vec{q}_f \cdot \vec{x}} \right) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} \left( \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{q}_i \cdot \vec{x}} \right) d^3x \\
&= \frac{1}{L^3} \int_{L^3} e^{i\{\vec{q}_i + \vec{k}_i - (\vec{q}_f + \vec{k}_f)\} \cdot \vec{x}} d^3x \\
&= \frac{1}{L^3} \left\{ L^3 \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i} \right\} \\
&= \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i}, \quad (4.75)
\end{aligned}$$

que nuevamente expresa la conservación del momentum en el proceso:

$$\hbar (\vec{q}_f + \vec{k}_f) = \hbar (\vec{q}_i + \vec{k}_i). \quad (4.76)$$

La condición de conservación de la energía impuesta por la delta de Dirac en (4.39) implica que la probabilidad de transición y por tanto la sección diferencial es no nula sólo si:

$$E_f = E_i, \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned}
E_0 + \frac{(\hbar \vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar \omega_{k_i} (n_{\vec{k}_i \sigma_i} - 1) + \hbar \omega_{k_f} (n_{\vec{k}_f \sigma_f} + 1) &= E_0 + \frac{(\hbar \vec{q}_i)^2}{2m} + \hbar \omega_{k_i} n_{\vec{k}_i \sigma_i} + \hbar \omega_{k_f} n_{\vec{k}_f \sigma_f} \quad (4.78) \\
\frac{(\hbar \vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar \omega_{k_f} &= \frac{(\hbar \vec{q}_i)^2}{2m} + \hbar \omega_{k_i}. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Así, reemplazando (4.75) en (4.74), obtenemos:

$$\langle f | \hat{H}'' | i \rangle = 2 \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \frac{\check{\vec{k}}_{k_i \sigma_i} \cdot \check{\vec{k}}_{k_f \sigma_f}}{\sqrt{\omega_{k_i} \omega_{k_f}}} \sqrt{n_{\vec{k}_i \sigma_i} (n_{\vec{k}_f \sigma_f} + 1)} \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i}. \quad (4.80)$$

Usando este resultado, (4.71) implica que

$$|M_{fi}^{(1)}|^2 = |\langle f | \hat{H}'' | i \rangle|^2 \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} &= \left| 2 \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right) \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right) \frac{\tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f}}{\sqrt{\omega_{k_i}\omega_{k_f}}} \langle \vec{q}_f | e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{x}} | \vec{q}_i \rangle \sqrt{n_{\vec{k}_i\sigma_i} (n_{\vec{k}_f\sigma_f} + 1)} \right|^2 \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \frac{n_{\vec{k}_i\sigma_i} (n_{\vec{k}_f\sigma_f} + 1)}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}} \left| \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f} \right|^2 \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Finalmente, (4.39) se reduce a:

$$\begin{aligned} \left( \frac{P}{t} \right)_{\text{Scattering}} &= \frac{8\pi}{\hbar} \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \frac{\left| \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f} \right|^2}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}} n_{\vec{k}_i\sigma_i} (n_{\vec{k}_f\sigma_f} + 1) \\ &\quad \times \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i} \delta \left( \frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar\omega_{k_f} - \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m} - \hbar\omega_{k_i} \right). \end{aligned} \quad (4.84)$$

El término  $(n_{\vec{k}_f\sigma_f} + 1)$  en la expresión anterior es interpretado como *emisión estimulada* por los fotones  $(\vec{k}_f\sigma_f)$  en el estado final. Por lo tanto, el scattering es aumentado si esos fotones en el estado final ya están presentes. A menudo este no es el caso, de modo que consideraremos  $n_{\vec{k}_f\sigma_f} = 0$ . En este subcaso obtenemos que la sección diferencial de scattering es:

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{k}\sigma) &= \frac{8\pi L^3}{\hbar c} \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \frac{\left| \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f} \right|^2}{\omega_{k_i}\omega_{k_f}} \\ &\quad \times \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i} \delta \left( \frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar\omega_{k_f} - \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m} - \hbar\omega_{k_i} \right). \end{aligned} \quad (4.85)$$

La *sección total de scattering* se encuentra sumando sobre todos los estados finales del electrón y del fotón. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{8\pi L^3}{\hbar c} \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \sum_{\vec{k}_f, \sigma_f} \sum_{\vec{q}_f} \frac{\left| \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f} \right|^2}{c^2 k_i k_f} \\ &\quad \times \delta_{\vec{q}_f + \vec{k}_f, \vec{q}_i + \vec{k}_i} \delta \left( \frac{(\hbar\vec{q}_f)^2}{2m} + \hbar\omega_{k_f} - \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m} - \hbar\omega_{k_i} \right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8\pi L^3}{\hbar c^3} \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3} \right)^2 \sum_{\vec{k}_f, \sigma_f} \frac{\left| \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_i\sigma_i} \cdot \tilde{\epsilon}_{\vec{k}_f\sigma_f} \right|^2}{k_i k_f} \\ &\quad \times \delta \left( \frac{\hbar^2 (\vec{q}_i + \vec{k}_i - \vec{k}_f)^2}{2m} + \hbar\omega_{k_f} - \frac{(\hbar\vec{q}_i)^2}{2m} - \hbar\omega_{k_i} \right), \end{aligned} \quad (4.87)$$

donde hemos considerado que  $\omega_k = ck$ . Pasando al continuo en coordenadas esféricas ( $\sum_{\vec{k}_f} \rightarrow$

$\frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k_f = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int k_f^2 dk_f d\Omega_f$ ), obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \hbar c \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{k_f}{k_i} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 \\ &\quad \times \delta \left( \frac{\hbar^2 (\vec{q}_i + \vec{k}_i - \vec{k}_f)^2}{2m} + c\hbar (k_f - k_i) - \frac{(\hbar \vec{q}_i)^2}{2m} \right) dk_f d\Omega_f, \end{aligned} \quad (4.88)$$

y considerando la aproximación  $\vec{k}_i - \vec{k}_f \approx 0$ , tenemos que:

$$\sigma_T = \hbar c \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{k_f}{k_i} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 \delta(c\hbar (k_f - k_i)) dk_f d\Omega_f \quad (4.89)$$

$$= \hbar c \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{k_f}{k_i} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 \frac{1}{c\hbar} \delta(k_f - k_i) dk_f d\Omega_f \quad (4.90)$$

$$= \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sum_{\sigma_f} \int \frac{k_f}{k_i} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 \delta(k_f - k_i) dk_f d\Omega_f \quad (4.91)$$

$$= \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int_{\Omega_f} \sum_{\sigma_f} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 d\Omega_f. \quad (4.92)$$

*Suponiendo* que los fotones incidentes no tienen una polarización (resultante) privilegiada, debemos *promediar* sobre las dos polarizaciones iniciales. Además, sumaremos sobre las polarizaciones finales. \*\*\* explicar + detalladamente \*\*\*

Así, considerando la siguiente configuración geométrica, ver figura 4.4, encontramos que:

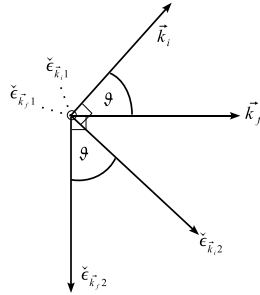


Figura 4.4: Geometría del scattering.

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_f=1}^2 \sum_{\sigma_i=1}^2 \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i \sigma_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_f=1}^2 \left\{ \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 1} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 + \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 2} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f \sigma_f} \right|^2 \right\} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 1} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f 1} \right|^2 + \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 2} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f 1} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 1} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f 2} \right|^2 + \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}_i 2} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}_f 2} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$= \frac{1}{2} \{ 1 + \cos^2 \vartheta \}. \quad (4.95)$$



Finalmente, de estos resultados encontramos que la sección diferencial de scattering de fotones con electrones libres viene dada por:

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega_f} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \{1 + \cos^2 \vartheta\}, \quad (4.96)$$

que coincide con la sección transversal de scattering de Thomson.

#### 4.4. Emisión de radiación por un átomo excitado

Consideraremos ahora el problema de describir la interacción de un electrón ligado a un átomo con el campo cuantizado de radiación. Para esto, modelaremos la interacción entre el electron (o electrones) con el núcleo (y, eventualmente, entre los electrones) usando el potencial coulombiano clásico.

Por simplicidad, nos concentraremos en electrones ligados a un átomo hidrogenoide. Por esto, el hamiltoniano clásico del electrón ligado está dado por

$$\hat{H}_e = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}, \quad (4.97)$$

que reemplazará al hamiltoniano libre  $\hat{H}_{\text{libre}} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  en (4.36). Con esto, los estados que diagonalizan el hamiltoniano libre (4.36) son de la forma  $|a\rangle \otimes |\gamma\rangle$ , donde  $|a\rangle$  es un estado propio del hamiltoniano atómico  $\hat{H}_e$  y  $|\gamma\rangle$  denota estados propios del campo electromagnético cuantizado.

Calcularemos la probabilidad de que un átomo emita un fotón, con momentum  $\vec{k}$  y polarización  $\sigma$  bien definidos, al efectuar una transición desde un nivel superior a un nivel inferior inmediatamente adyacente. Obtendremos el valor de esta probabilidad calculando la probabilidad de transición por unidad de tiempo  $P/t$  dada por la regla de oro de Fermi, la cual establece que:

$$\frac{P}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f), \quad (4.98)$$

donde  $E_i$  y  $E_f$  son las energías asociadas a los niveles involucrados en la transición. Haciendo uso de Teoría de Perturbaciones a primer orden es posible mostrar que el coeficiente  $M_{fi}$  está dado por la expresión:

$$M_{fi} = \langle f | H' | i \rangle, \quad (4.99)$$

donde los estados inicial y final son  $|i\rangle$  y  $|f\rangle$  respectivamente.

En nuestro caso estamos interesados en una transición que involucra los estados

$$|i\rangle = |a_i\rangle \otimes |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad |f\rangle = |a_f\rangle \otimes |n_{\vec{k}\sigma} + 1\rangle \quad (4.100)$$

donde  $|a_i\rangle$  y  $|a_f\rangle$  son los estados atómicos inicial y final respectivamente y la notación  $n_{\vec{k}\sigma}$  indica un estado del campo electromagnético con  $n$  fotones en el modo  $(\vec{k}\sigma)$  y cero fotones en los modos restantes. En ésta transición el átomo decae desde el nivel  $|a_i\rangle$  al nivel  $|a_f\rangle$  emitiendo un fotón de momentum  $\vec{k}$  y polarización  $\sigma$ . Hemos considerado que en este proceso el campo, inicialmente con  $n$  fotones en el modo  $(\vec{k}\sigma)$ , adquiere un nuevo fotón en este modo.

El operador Hamiltoniano relevante en este proceso es:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_{k'}}} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \left( \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right). \quad (4.101)$$

Luego, para el coeficiente  $M_{fi}$  obtenemos:

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_{k'}}} \left( \langle f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | i \rangle + \langle f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | i \rangle \right). \quad (4.102)$$

Ambos términos en la expresión anterior permiten separar las contribuciones provenientes de los estados atómicos de las originadas en los estados del campo:

$$\langle f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | i \rangle = \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle, \quad (4.103)$$

$$\langle f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | i \rangle = \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | n_{\vec{k}\sigma} \rangle. \quad (4.104)$$

Los productos escalares pueden ser evaluados facilmente:

1.

$$\langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle = \langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} | (n-1)_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (4.105)$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | (n-1)_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (4.106)$$

$$= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \delta_{n+1,n-1} \quad (4.107)$$

$$= 0 \quad (4.108)$$

2. Análogamente, tenemos

$$\langle (1+n)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | n_{\vec{k}\sigma} \rangle = \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (4.109)$$

Usando este resultado en la expresión para el coeficiente  $M_{fi}$  obtenemos

$$M_{fi} = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_{k'}}} \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (4.110)$$

$$= -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_k}} \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1}. \quad (4.111)$$

Finalmente, la probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada por

$$\left( \frac{P}{t} \right)_{em} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 L^3 \omega_k} |\langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle|^2 (n_{\vec{k}\sigma} + 1) \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k), \quad (4.112)$$

donde hemos usado  $E_i = E_0 + E_{a_i} + n_{\vec{k}\sigma} \hbar\omega_k$  y  $E_f = E_0 + E_{a_f} + (n_{\vec{k}\sigma} + 1) \hbar\omega_k$ .

De la expresión para la probabilidad de transición por unidad de tiempo vemos que ésta es proporcional al término  $(n+1)$ . Esta dependencia en el número de fotones tiene importantes consecuencias:

1. La existencia de fotones en el campo induce o estimula la emisión, aumentando la probabilidad de transición por unidad de tiempo.
2. La probabilidad de emisión no se anula aún cuando el campo se encuentre en el vacío. A este fenómeno se le denomina *emisión espontánea*. Es consecuencia directa de las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción de fotones y, por lo tanto, de origen puramente cuántico. Notemos que un modelo de la interacción átomo-campo que considere átomos con estructura interna pero un campo electromagnético clásico no predice la existencia de la emisión espontánea.

## 4.5. Absorción de fotones

Haciendo uso de la regla de oro de Fermi podemos también calcular la probabilidad de que un átomo absorba un fotón al pasar de un nivel inferior a otro superior. En este caso los estados iniciales y finales están dados por las expresiones:

$$|i\rangle = |a_i\rangle \otimes |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad |f\rangle = |a_f\rangle \otimes |(n-1)_{\vec{k}\sigma}\rangle. \quad (4.113)$$

Luego, el coeficiente  $M_{fi}$  es, a primer orden en  $\hat{H}'$ ,

$$\begin{aligned} M_{fi} = & - \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_{k'}}} \left( \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \right. \\ & + \left. \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}} | a_i \rangle \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Los términos en esta expresión que involucran operadores de creación y destrucción pueden ser evaluados facilmente, esto es:

1.

$$\begin{aligned} \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle &= \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | \delta_{\vec{k}',\vec{k}} \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{(n)_{\vec{k}\sigma}} | (n-1)_{\vec{k}\sigma} \rangle \\ &= \delta_{\vec{k}',\vec{k}} \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | (n-1)_{\vec{k}\sigma} \rangle \\ &= \delta_{\vec{k}',\vec{k}} \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \end{aligned} \quad (4.115)$$

2.

$$\begin{aligned} \langle (n-1)_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger | n_{\vec{k}\sigma} \rangle &= \delta_{\vec{k}',\vec{k}} \delta_{\sigma',\sigma} \sqrt{(n-1)_{\vec{k}\sigma}} \langle (n-2)_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.116)$$

Vemos entonces que el coeficiente  $M_{fi}$  es

$$M_{fi} = \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_k}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle. \quad (4.117)$$

Considerando que las energías inicial y final involucradas en el proceso están dadas por las expresiones

$$E_f = E_{a_f} + (n-1)_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_k \quad E_i = E_{a_i} + (n)_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_k \quad (4.118)$$

y que

$$\langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle^* = \langle a_i | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_f \rangle, \quad (4.119)$$

obtenemos que la probabilidad de absorber un fotón con momentum  $\hbar\vec{k}$  y polarización  $\sigma$  es

$$\left( \frac{P}{t} \right)_{\text{abs}} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 L^3 \omega_k} |\langle a_i | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_f \rangle|^2 n_{\vec{k}\sigma} \delta(E_{a_i} - E_{a_f} + \hbar\omega_k). \quad (4.120)$$

## 4.6. Espectro de radiación de cuerpo negro

Consideramos una muestra de átomos en equilibrio térmico, es decir, el número total de átomos desexcitados debido a las colisiones térmicas y el número total de átomos que son excitados permanece constante en el tiempo. El número de átomos se denota como:

$$N_i = \text{número de átomos en nivel inicial (excitado)}, \quad (4.121)$$

$$N_f = \text{número de átomos en nivel final (desexcitado)}. \quad (4.122)$$

Transiciones ocurren entre dos estados  $|i\rangle$  y  $|f\rangle$ , es decir, fotones pueden ser absorbidos o emitidos del campo de radiación. La tasa de cambio del número de átomos excitados y desexcitados puede ser descrita con dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \dot{N}_f &= -N_f(P/t)_{\text{abs}} + N_i (P/t)_{\text{em}}, \\ \dot{N}_i &= N_f(P/t)_{\text{abs}} - N_i (P/t)_{\text{em}}. \end{aligned}$$

El punto representa la tasa del número total de átomos que realizan una transición por unidad de tiempo y  $(P/t)_{\text{abs/em}}$  las probabilidades de absorción/emisión por unidad de tiempo.

En equilibrio,  $\dot{N}_f = \dot{N}_i = 0$ , de modo que

$$0 = -N_f(P/t)_{\text{abs}} + N_i (P/t)_{\text{em}}. \quad (4.123)$$

De aquí, y usando los resultados de las secciones anteriores para las probabilidades de absorción/emisión por unidad de tiempo, obtenemos,

$$\frac{N_f}{N_i} = \frac{(P/t)_{\text{em}}}{(P/t)_{\text{abs}}} = \frac{n_{k\sigma} + 1}{n_{k\sigma}} = 1 + \frac{1}{n_{k\sigma}}. \quad (4.124)$$

Por otro lado, de la ecuación de Boltzmann, tenemos que

$$\frac{N_f}{N_i} = \frac{\exp(-E_f/kT)}{\exp(-E_i/kT)} = e^{(E_i - E_f)/kT} = e^{\hbar\omega_k/kT}, \quad (4.125)$$

ya que  $\hbar\omega_k = E_i - E_f$ . Igualando (4.124) con (4.125) y despejando  $n_{k\sigma}$  obtenemos la distribución de Planck para el número de fotones con estado  $k\sigma$  en equilibrio térmico con los átomos del cuerpo negro:

$$n_{k\sigma} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1}. \quad (4.126)$$

A partir de esta distribución, podemos calcular la correspondiente densidad de energía almacenada en el campo de radiación:

$$\rho = \frac{E_T}{V} = \frac{1}{L^3} \sum_{k\sigma} n_{k\sigma} \hbar\omega_k = \frac{2}{L^3} \sum_k n_{k\sigma} \hbar\omega_k = \frac{2}{L^3} \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1}. \quad (4.127)$$

En el límite continuo  $V \rightarrow \infty$  encontramos:

$$\rho = \frac{2}{L^3} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3k \frac{\hbar\omega_k}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^3} \int d^3k \frac{\omega_k}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1}. \quad (4.128)$$

Usando la relación  $\omega = kc$  podemos escribir:

$$d^3k = k^2 dk d\Omega_k = \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d\Omega_k,$$

y entonces

$$\rho = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{\omega_k^3}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1} d\omega_k =: \int_0^\infty u(\omega_k) d\omega_k, \quad (4.129)$$

donde hemos introducido la densidad de energía por unidad de intervalo de frecuencia angular  $u(\omega_k)$ :

$$u(\omega_k) = \frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{\omega_k^3}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1}. \quad (4.130)$$

## 4.7. Vida media de un estado excitado

La cantidad  $P/t$  representa la probabilidad de transición por unidad de tiempo. El inverso de esta cantidad corresponde a la *vida media*  $\tau$  del proceso de desexcitación  $i \rightarrow f$  está dada por<sup>1</sup>

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\sigma} |\langle f | \hat{H}' | i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k), \quad (4.131)$$

expresión en la que la suma considera la emisión de un único fotón con todos los valores posibles de momentum y polarización. Haciendo uso de la probabilidad por unidad de tiempo para la emisión espontanea de un fotón con momentum y polarización definidos, obtenemos para el tiempo  $\tau$

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{2\pi e}{m}\right)^2 \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{1}{L^3 \omega_k} |\langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k). \quad (4.132)$$

Considerando un átomo que se encuentra en el espacio libre, podemos tomar el paso al continuo en la expresión anterior. Luego

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{2\pi e}{m}\right)^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \frac{1}{L^3 \omega_k} \sum_{\sigma} |\langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k). \quad (4.133)$$

Podemos escoger los vectores de polarización  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma}$  de manera que  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}$  esté en el mismo plano que  $\langle a_i | \hat{\vec{p}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_f \rangle$  y  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}1}$  sea perpendicular a ese plano. Eliminamos así la suma sobre la polarización en la expresión para  $\tau$ , esto es

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int d^3k \frac{1}{\omega_k} |\langle a_f | \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} | a_i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k). \quad (4.134)$$

La radiación emitida por átomos tiene típicamente energías cercanas a  $\hbar\omega \approx 10$  eV. Como la integral que contiene  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  se extiende sobre regiones con dimensiones atómicas, entonces

$$\vec{k} \cdot \vec{x} \approx |\vec{k}| a_{\text{Bohr}} = \frac{\omega}{c} a_{\text{Bohr}} = \frac{\hbar\omega}{\hbar c} a_{\text{Bohr}} = \frac{10 \text{ eV} \cdot 0.5 \times 10^{-8} \text{ cm}}{1.97 \times 10^{-5} \text{ eV cm}} \approx 2.7 \times 10^{-3} \ll 1. \quad (4.135)$$

Esto justifica la aproximación  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = 1 - i\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{1}{2}(\vec{k} \cdot \vec{x})^2 + \dots \approx 1$  en la integral (4.134), conocida como *aproximación dipolar*

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int d^3k \frac{1}{\omega_k} |\vec{\epsilon}_{\vec{k}2} \cdot \langle a_f | \hat{\vec{p}} | a_i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k). \quad (4.136)$$

Usando coordenadas esféricas en las cuales el ángulo  $\vartheta$  corresponde al ángulo entre el vector  $\langle a_f | \hat{\vec{p}} | a_i \rangle$  y el vector  $\vec{k}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} &= \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{c^3} \int d\omega_k \omega_k |\langle a_f | \hat{\vec{p}} | a_i \rangle|^2 \delta(E_{a_f} - E_{a_i} + \hbar\omega_k) \int d\vartheta \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{4}{3} \frac{e^2 \omega_{\text{fi}}^2}{\hbar c^3} |\langle a_f | \hat{\vec{p}} | a_i \rangle|^2, \end{aligned} \quad (4.137)$$

<sup>1</sup> Considere un conjunto de  $N \gg 1$  átomos idénticos, todos en el estado excitado  $|a_i\rangle$ . Dado que  $(P/t)_{i \rightarrow f}$  es la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo, entonces  $N \cdot (P/t)_{i \rightarrow f}$  es el número de átomos que decaen por unidad de tiempo. De este modo, la expresión que describe el decaimiento de la población de átomos excitados es:  $\dot{N} = -N \cdot (P/t)_{i \rightarrow f}$ . De aquí obtenemos una ley de decaimiento exponencial de la forma  $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ , donde  $\tau = [(P/t)_{i \rightarrow f}]^{-1}$  es el tiempo característico del decaimiento, llamado *vida media* de la transición  $i \rightarrow f$ .

con

$$\omega_{\text{fi}} := \frac{1}{\hbar}(E_{a_f} - E_{a_i}). \quad (4.138)$$

Podemos usar la ecuación de evolución de Heisenberg, para reescribir  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}$  en  $\langle a_f | \hat{p} | a_i \rangle$ , obteniendo

$$\langle a_f | \hat{p} | a_i \rangle = \langle a_i | m\dot{\vec{x}} | a_f \rangle \quad (4.139)$$

$$= -\frac{im}{\hbar} \langle a_i | [\vec{x}, \hat{H}_a] | a_f \rangle \quad (4.140)$$

$$= -\frac{im}{\hbar} \langle a_i | (\vec{x}\hat{H}_a - \hat{H}_a\vec{x}) | a_f \rangle \quad (4.141)$$

$$= -\frac{im}{\hbar} [\langle a_i | \vec{x}\hat{H}_a | a_f \rangle - \langle a_i | \hat{H}_a\vec{x} | a_f \rangle] \quad (4.142)$$

$$= -\frac{im}{\hbar} [E_{a_f} \langle a_i | \vec{x} | a_f \rangle - E_{a_i} \langle a_i | \vec{x} | a_f \rangle] \quad (4.143)$$

$$= -\frac{im}{\hbar} (E_{a_f} - E_{a_i}) \langle a_i | \vec{x} | a_f \rangle \quad (4.144)$$

$$= -im\omega_{\text{fi}} \langle a_i | \vec{x} | a_f \rangle. \quad (4.145)$$

Con esto, obtenemos

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \frac{4e^2\omega_{\text{fi}}^3}{3\hbar c^3} |\langle a_f | \hat{x} | a_i \rangle|^2. \quad (4.146)$$

Similarmente, podemos escribir

$$\langle a_f | \hat{x} | a_i \rangle = -\omega_{\text{fi}}^2 \langle a_f | \hat{x} | a_i \rangle, \quad (4.147)$$

y, por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \frac{4e^2}{3\hbar c^3 \omega_{\text{fi}}} |\langle a_f | \hat{a} | a_i \rangle|^2. \quad (4.148)$$

Con este resultado, podemos calcular la tasa promedio de emisión de energía de átomos deca-  
yendo desde el estado inicial  $|a_i\rangle$  hasta el final  $|a_f\rangle$ :

$$\langle P \rangle = \left(\frac{\hbar\omega_{\text{fi}}}{\tau}\right)_{i \rightarrow f} = \frac{4e^2}{3c^3} |\langle a_f | \hat{a} | a_i \rangle|^2, \quad (4.149)$$

que puede ser comparada con el resultado de electrodinámica clásica para la potencia promedio  
irradiada por una carga  $e$  con aceleración  $\vec{a}$  (fórmula de Larmor):

$$\langle P \rangle = \frac{4e^2}{3c^3} |\vec{a}|^2. \quad (4.150)$$

#### 4.7.1. Reglas de selección para transiciones electricas dipolares

\*\*\* Ejercicio 2.1, Greiner \*\*\*

Reglas de selección para las transiciones dipolares:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = \pm 1, \quad (4.151)$$

para las componentes  $x$  e  $y$ , y

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \quad (4.152)$$

para la componente  $z$ .

#### 4.8. Vida media del estado $2p$ con $m = 0$ del átomo de Hidrógeno respecto a decaimientos al estado fundamental

Para nuestro caso particular, tenemos que:

$$|a_i\rangle = |1s\rangle, \quad (4.153)$$

$$|a_f\rangle = |2p, m = 0\rangle, \quad (4.154)$$

cuyas funciones de onda en coordenadas esféricas están dadas respectivamente por:

$$\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad (4.155)$$

$$\Psi_{2p, m=0} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \sqrt{2} \cos \theta, \quad (4.156)$$

donde  $a := \frac{\hbar^2}{m e^2}$  es el radio de Bohr.

Por otro lado, la frecuencia de transición para este caso es

$$\omega_{2p,1s} = \frac{E_{2p} - E_{1s}}{\hbar} \quad (4.157)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad (4.158)$$

$$= \frac{3}{8} \frac{e^2}{\hbar a}. \quad (4.159)$$

De las reglas de selección tenemos que la única componente que contribuye a (4.146) es la componente  $z$ , ya que

$$p \rightarrow l = 1, \quad m = 0, \quad (4.160)$$

$$s \rightarrow l = 0, \quad m = 0. \quad (4.161)$$

Luego, la vida media requerida adopta la forma:

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)_{2p \rightarrow 1s} = \frac{4e^2 \omega_{2p,1s}^3}{3\hbar c^3} |\langle a_f | \hat{x} | a_i \rangle|^2 \quad (4.162)$$

$$= \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \left(\frac{3}{8} \frac{e^2}{\hbar a}\right)^3 |\langle 1s | r \cos \theta | 2p, m = 0 \rangle|^2 \quad (4.163)$$

Además, tenemos que

$$\langle 1s | r \cos \theta | 2p, m = 0 \rangle = \int d^3x \Psi_{1s}^* (r \cos \theta) \Psi_{2p, m=0} \quad (4.164)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\pi a^3} \int \left[e^{-\frac{r}{a}}\right] (r \cos \theta) \left[\frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta\right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (4.165)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\pi a^4} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 e^{-\frac{3r}{2a}} \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (4.166)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4\pi a^4} (2\pi) \int_0^\infty \int_0^\pi r^4 e^{-\frac{3r}{2a}} \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta \quad (4.167)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4a^4} \left(\frac{2}{3}\right) \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{3r}{2a}} dr \quad (4.168)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\frac{2}{3}\right)^5 a. \quad (4.169)$$

Usando este resultado, obtenemos

$$\tau_{2p \rightarrow 1s} = \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{a}{c} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^8 \frac{a}{c\alpha^4}. \quad (4.170)$$

Al evaluar esta expresión, obtenemos

$$\tau_{2p \rightarrow 1s} \approx 1,6 \times 10^{-9} \text{s}. \quad (4.171)$$

## 4.9. Ancho natural de líneas espectrales y auto-energía

## 4.10. Efecto Casimir

La energía del vacío o estado fundamental del campo electromagnético cuantizado es infinita y está dada por

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega_{\vec{k}} = \infty. \quad (4.172)$$

En general en las aplicaciones se consideran solo diferencias de energía por lo que no se toma en cuenta la energía infinita del vacío. sin embargo existen efectos medibles que involucran la energía infinita del vacío. (Casimir dijo que existía esa posibilidad y Lifschitz y Fierz investigaron el argumento en mas detalle). La idea es la siguiente:

Las frecuencias  $\omega_n$  ( $n$  reemplaza a  $\vec{k}, \sigma$ ) del campo electromagnético depende de la geometría del volumen en el cual el campo está confinado. Si la forma geométrica cambia, las frecuencias de los modos cambia, y por lo tanto la energía del vacío cambia.

Consideremos una caja rectangular de longitud  $R$  y área basal  $A$ . Esta caja con paredes conductoras representa nuestro volumen de cuantización que determina las frecuencias del campo electromagnético por medio de su geometría.

Introduciremos una segunda placa a una distancia  $d$  con respecto al borde de la caja. Estamos interesados en la energía del sistema dependiendo de la posición de la placa.

Consideraremos además una configuración de referencia en la cual el plato móvil está fijo a una distancia  $\frac{R}{\eta}$  (por ejemplo  $\eta = 2$ , la placa está al medio de la caja). Consideraremos la diferencia de energía entre estas dos configuraciones (ver figura).

La diferencia de energía es:

$$U(d, R, A) = (E_I + E_{II}) - (E_{III} + E_{IV}), \quad (4.173)$$

donde  $E_i$ , ( $i = I, II, III, IV$ ) representa la energía del vacío del campo electromagnético en las correspondientes regiones mostradas en la figura. Notemos que no hay ningún fotón al interior de las regiones, sólo se encuentra el campo electromagnético en su estado fundamental. Luego debemos hacer tender  $R$  al infinito pues en la práctica nos interesa solo la separación  $d$  de las placas y además al hacer tender  $R$  a infinito,  $R/\eta$  tiende a infinito y por lo tanto la diferencia de energía la consideramos con respecto al infinito (La energía es como una energía potencial.).

Debido a que la energía en cada una de las regiones es infinita, no podemos hacer directamente la diferencia de energías. Para solucionar este problema escribiremos la energía del vacío como

$$E_i = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n \exp\left(-\lambda \frac{\omega_n}{c}\right), \quad (4.174)$$

hay que hacer el cálculo con esta definición de energía y después tomar el límite cuando  $\lambda$  tiende a cero. Esta definición hace que la energía del vacío no diverja y que podamos operar con ella.



La energía al interior de una caja de dimensión  $d \times L \times L$  es:

$$U = \hbar c \sum_{l,m,n} k_{lmn} (d, L, L) \exp [-\lambda k_{lmn} (d, L, L)], \quad (4.175)$$

donde

$$k_{lmn} = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}. \quad (4.176)$$

Utilizando esta última expresión podemos tomar la diferencia de energía (4.173). Luego de realizar un tedioso cálculo y tomar los límites correspondientes se obtiene que la diferencia de energía es:

$$U(d, A) = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c A}{d^3},$$

este resultado muestra que la energía es proporcional a  $d^{-3}$ . De este resultado podemos calcular la fuerza por unidad de área que sienten las placas

$$F = -\frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{U(d, A)}{A} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}.$$

Observemos que la fuerza por unidad de área depende solo de constantes universales y de la separación de las placas. La fuerza es atractiva.

La primera medida del efecto Casimir fue hecha por Abrikosova (1957) y también por Sparnaay (1958). Los resultados obtenidos por Sparnaay se muestran en el siguiente gráfico.

Lo que muestra un muy buen ajuste con los valores predichos.

## Capítulo 5

# El campo de Schrödinger

AQUI HAY QUE CORREGIR VARIAS COSAS !!

### 5.1. Teoría Clásica de Campos para el Campo de Schrödinger

El punto de partida es la conocida ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 \varphi + V(x, t) \varphi \quad (5.1)$$

para la función de onda  $\varphi(x, t)$  de una partícula sujeta a un potencial externo arbitrario  $V(x, t)$ . En el contexto de la teoría de campos, podríamos considerar a la función de onda como un campo complejo clásico, mientras que a la ec de Schrödinger como la ecuación clásica de campo<sup>1</sup> que debe satisfacer  $\varphi(x_j, t)$ .

Para poder hacer uso de la maquinaria conocida de la teoría de campos, debemos conocer la densidad Lagrangeana que de origen al campo clásico de Schrödinger dado por la ecuación (5.1).

La densidad Lagrangeana debe ser:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_i^2 \psi, \dot{\psi}) = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \psi^*) (\partial_i \psi) - V(x, t) \psi^* \psi, \quad (5.2)$$

donde  $\psi(x, t)$  y  $\psi^*(x, t)$  son tratados como dos campos independientes.

Para verificar que efectivamente (5.2) es la densidad Lagrangeana buscada, debemos calcular las conocidas ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange<sup>2</sup> para los campos  $\psi(x, t)$  y

---

<sup>1</sup>En analogía con la ecuación de ondas clásica para el campo EM, que al ser cuantizada da origen a los fotones.

<sup>2</sup>Recordemos que la ecuación de Euler-Lagrange para un campo arbitrario  $\varphi(\vec{x}, t)$  está dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0.$$

$\psi^*(x_j, t)$ . En efecto, considerando (5.2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} (-V(x, t) \psi^* \psi) - \partial_i \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi^* \right) - \frac{\partial}{\partial t} (i\hbar \dot{\psi}^*) &= 0 \\
-V(x, t) \psi^* + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 \psi^* - i\hbar \dot{\psi}^* &= 0 \\
i\hbar \dot{\psi}^* + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 \psi^* - V(x, t) \psi^* &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}^*} (i\hbar \dot{\psi}^* \dot{\psi} - V(x, t) \psi^* \psi) - \partial_i \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \psi \right) &= 0 \\
i\hbar \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 \psi - V(x, t) \psi &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

que son las correspondientes ecuación de Schrödinger (5.1) para los campos  $\psi(x, t)$  y  $\psi^*(x, t)$ .

Una vez conocida la densidad Lagrangeana, la densidad de momentum conjugado asociada a cada variable de campo, la calculamos de:

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}, \tag{5.5}$$

y:

$$\Pi^*(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*}. \tag{5.6}$$

Así, de (5.5) y (5.6) obtenemos respectivamente:

$$\Pi(x, t) = i\hbar \dot{\psi}^*(x, t) \tag{5.7}$$

y:

$$\Pi^*(x, t) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos sólo dos variables de campo independientes:  $\psi(x, t)$  y  $\Pi(x, t)$  cuyas ecuaciones de movimiento son respectivamente (5.4) y<sup>3</sup>:

$$\dot{\Pi} - \frac{i\hbar}{2m} \partial_i^2 \Pi + \frac{i}{\hbar} V(x, t) \Pi = 0$$

Otra cantidad importante en la teoría de campos, que se deriva de la Densidad Lagrangeana, es la Densidad Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x, t) &= \Pi(x, t) \dot{\psi}(x, t) - \mathcal{L}(x, t) \\
&= i\hbar \dot{\psi}^* \dot{\psi} - \left( i\hbar \dot{\psi}^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \psi^*) (\partial_i \psi) - V(x, t) \psi^* \psi \right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \psi^*) (\partial_i \psi) + V(x, t) \psi^* \psi,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

---

<sup>3</sup>Para ésta última hemos ocupado la ecuación (5.3).

la cual nos permite calcular el Hamiltoniano del campo. En efecto:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}(x, t) \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \psi^*) (\partial_i \psi) + V(x, t) \psi^* \psi \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes el primer término del lado derecho, obtenemos finalmente que el Hamiltoniano del campo es de la forma:

$$H = \int d^3x \psi^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 + V(x, t) \right\} \psi. \quad (5.9)$$

## 5.2. Cuantización del Campo de Schrödinger.

Para poder cuantizar el campo de Schrödinger, debemos reemplazar las variables clásicas de campo  $\psi(x, t)$  y  $\Pi(x, t)$ , por los operadores  $\hat{\psi}(x, t)$ ,  $\hat{\Pi}(x, t)$ . Y, a su vez, el campo clásico conjugado  $\psi^*(x, t)$ , debe ser reemplazado por el operador hermítico adjunto  $\hat{\psi}^\dagger(x, t)$ . De esta manera, es directo que:

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{\psi}, \partial_i^2, \hat{\psi}) = i\hbar \hat{\psi}^\dagger \dot{\hat{\psi}} - \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \hat{\psi}^\dagger) (\partial_i \hat{\psi}) - V(x, t) \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}, \quad (5.10)$$

$$\hat{\Pi}(x, t) = i\hbar \hat{\psi}^\dagger(x, t), \quad (5.11)$$

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger d \hat{\psi} \quad (5.12)$$

son los operadores de densidad Lagrangeana, densidad de momentum conjugado y Hamiltoniano del campo, respectivamente. El operador:

$$d = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 + V(x, t)$$

es llamado operador diferencial de Schrödinger.

Por otro lado, postulamos que los operadores de campo deben satisfacer las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(x, t), \hat{\Pi}(x'_j, t)] &= \delta^{(3)}(x_j - x'_j), \\ [\hat{\psi}(x, t), \hat{\Pi} \hat{\psi}(x'_j, t)] &= 0, \\ [\hat{\Pi}(x, t), \hat{\Pi}(x'_j, t)] &= 0, \end{aligned}$$

o, alternativamente ocupando (5.11), éstas pueden ser escritas en la forma:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^\dagger(x'_j, t)] &= \delta^{(3)}(x_j - x'_j), \\ [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}(x'_j, t)] &= 0, \\ [\hat{\psi}^\dagger(x, t), \hat{\psi}^\dagger(x'_j, t)] &= 0. \end{aligned}$$

Podemos justificar el reemplazo de las variables de campo clásicas por operadores de campo, que satisfacen las relaciones de conmutación mostradas; demostrando que las ecuaciones de movimiento para los operadores de campo, son las mismas que para sus análogos clásicos.

En efecto, sabemos que la dinámica de los operadores está gobernada por la ecuación de movimiento de Heisenberg, por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\psi}} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{\psi}, \hat{H}], \\ \dot{\hat{\Pi}} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{\Pi}, \hat{H}].\end{aligned}$$

Ocupando el Hamiltoniano (5.12), tenemos de la primera de las ecuaciones anteriores que:

$$\begin{aligned}i\hbar\dot{\hat{\psi}} &= \left[ \hat{\psi}(x_j), \int d^3x' \hat{\psi}^\dagger(x') d' \hat{\psi}(x') \right] \\ &= \int d^3x' [\hat{\psi}(x_j), \hat{\psi}^\dagger(x')] d' \hat{\psi}(x') \\ &= \int d^3x' \left\{ [\hat{\psi}(x_j), \hat{\psi}^\dagger(x')] d' \hat{\psi}(x') + \hat{\psi}^\dagger(x') d' [\hat{\psi}(x_j), \hat{\psi}(x')] \right\} \\ &= \int d^3x' \delta^{(3)}(x_j - x') d' \hat{\psi}(x') \\ &= d\hat{\psi}(x_j) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 \hat{\psi} + V(x, t) \hat{\psi}\end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación de Schrödinger para el operador de campo  $\hat{\psi}(x, t)$ .

La solución para esta ecuación de movimiento sabemos puede ser escrita como una expansión en serie de Fourier de la forma:

$$\hat{\psi}(x, t) = \sum_n \hat{a}_n(t) u_n(x^i), \quad (5.13)$$

de donde es directo que:

$$\hat{\psi}^\dagger(x, t) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) u_n^*(x^i). \quad (5.14)$$

Las funciones  $u_n(x^i)$  forman un conjunto ortogonal completo de funciones complejas, es decir:

$$\int d^3x u_n^*(x^i) u_{n'}(x^i) = \delta_{nn'}, \quad (5.15)$$

$$\sum_n u_n(x^i) u_n^*(x_i') = \delta^{(3)}(x^i - x_i') \quad (5.16)$$

mientras que  $\hat{a}_n(t)$  son los coeficientes de la expansión. Mas tarde, reconoceremos a  $\hat{a}_n^\dagger(t)$  y  $\hat{a}_n(t)$  como los operadores de creación y destrucción respectivamente.

Al realizar la expansión en serie de Fourier, estamos haciendo un cambio de variables de campo que nos permite describir el campo en términos de los operadores  $\hat{a}_n(t)$  y  $\hat{a}_n^\dagger(t)$ , reduciendo así los grados de libertad del sistema. Como ahora tenemos nuevas variables de campo, debemos encontrar las nuevas relaciones de conmutación. Para esto, es necesario invertir las ecuaciones (5.13) y (5.14), y esto lo logramos haciendo uso de las relaciones (5.15) y (5.16). En efecto, multiplicando ambos lados de (5.13) por  $\int d^3x u_n^*(x^i)$ :

$$\begin{aligned}\sum_n \hat{a}_n(t) \int d^3x u_n(x^i) u_{n'}^*(x^i) &= \int d^3x \hat{\psi}(x, t) u_{n'}^*(x^i) \\ \sum_n \hat{a}_n(t) \delta_{nn'} &= \int d^3x \hat{\psi}(x, t) u_{n'}^*(x^i) \\ \hat{a}_{n'}(t) &= \int d^3x u_{n'}^*(x^i) \hat{\psi}(x, t),\end{aligned}$$

y haciendo lo mismo con (5.14):

$$\begin{aligned}\sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) \int d^3x u_n^*(x^i) u_{n'}(x^i) &= \int d^3x u_{n'}(x^i) \hat{\psi}^\dagger(x, t) \\ \sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) \delta_{nn'} &= \int d^3x u_{n'}(x^i) \hat{\psi}^\dagger(x, t) \\ \hat{a}_{n'}^\dagger(t) &= \int d^3x u_{n'}(x^i) \hat{\psi}^\dagger(x, t).\end{aligned}$$

Ahora, podemos calcular:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] &= \hat{a}_n(t) \hat{a}_{n'}^\dagger(t) - \hat{a}_{n'}^\dagger(t) \hat{a}_n(t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) - \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) \hat{\psi}(x, t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) \left\{ \hat{\psi}(x^i, t) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) - \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) \hat{\psi}(x, t) \right\} \\ &= \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) [\hat{\psi}(x^i, t), \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t)] \\ &= \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) \delta^{(3)}(x^i - x'_i) \\ &= \int d^3x u_{n'}(x^i) u_n^*(x^i) \\ &= \delta_{nn'}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Analogamente, los otros conmutadores dan:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_n(t), \hat{a}_{n'}(t)] &= \hat{a}_n(t) \hat{a}_{n'}(t) - \hat{a}_{n'}(t) \hat{a}_n(t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_n^*(x^i) u_{n'}(x'_i) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}(x'_i, t) - \int d^3x d^3x' u_{n'}(x'_i) u_n^*(x^i) \hat{\psi}(x'_i, t) \hat{\psi}(x, t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_n^*(x^i) u_{n'}(x'_i) \left\{ \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}(x'_i, t) - \hat{\psi}(x'_i, t) \hat{\psi}(x, t) \right\} \\ &= \int d^3x d^3x' u_n^*(x^i) u_{n'}(x'_i) [\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}(x'_i, t)] \\ &= 0,\end{aligned}\tag{5.18}$$

y:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_n^\dagger(t), \hat{a}_{n'}^\dagger(t)] &= \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_{n'}^\dagger(t) - \hat{a}_{n'}^\dagger(t) \hat{a}_n^\dagger(t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_n(x^i) u_{n'}(x'_i) \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) - \int d^3x d^3x' u_n(x^i) u_{n'}(x'_i) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) \hat{\psi}^\dagger(x, t) \\ &= \int d^3x d^3x' u_n(x^i) u_{n'}(x'_i) \left\{ \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) - \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t) \hat{\psi}^\dagger(x, t) \right\} \\ &= \int d^3x d^3x' u_n(x^i) u_{n'}(x'_i) [\hat{\psi}^\dagger(x, t), \hat{\psi}^\dagger(x'_i, t)] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Si el sistema no depende explícitamente del tiempo, es decir, el potencial es del tipo  $V = V(x^i)$ , es natural hacer que las funciones  $u_n(x^i)$  que ocupamos como base para expandir el

operador de campo, sean las funciones de onda o eigenfunciones de la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i^2 + V(x_j)\right)u_n(x_j) = E_n u_n(x_j),$$

por lo tanto el Hamiltoniano (5.12) en términos de las nuevas variables de campo se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3x \hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i^2 + V(x_j)\right) \hat{\psi} \\ &= \int d^3x \left(\sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) u_n^*(x_j)\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i^2 + V(x_j)\right) \left(\sum_{n'} \hat{a}_{n'}(t) u_{n'}(x_j)\right) \\ &= \sum_n \sum_{n'} \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_{n'}(t) \int d^3x u_n^*(x_j) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i^2 + V(x_j)\right) u_{n'}(x_j) \\ &= \sum_n \sum_{n'} \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_{n'}(t) E_{n'} \int d^3x u_n^*(x_j) u_{n'}(x_j) \\ &= \sum_n \sum_{n'} E_{n'} \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_{n'}(t) \delta_{nn'} \\ &= \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t) \\ &= \hbar \sum_n \omega_n \hat{N}_n,\end{aligned}\tag{5.20}$$

con  $\hat{N}_n = \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t)$  como el operador de Número.

El Hamiltoniano anterior representa un sistema de infinitos osciladores armónicos desacoplados con energías  $E_n = \hbar\omega_n$ . Es por eso y por las relaciones de conmutación (5.17), (5.18) y (5.19), que, como ya habíamos mencionado, podemos reconocer a  $\hat{a}_n^\dagger(t)$  y  $\hat{a}_n(t)$  como los operadores de creación y destrucción.

## Parte II

# Mecánica Cuántica Relativista



## Capítulo 6

# La ecuación de Dirac

Deseamos obtener una ecuación de onda relativista covariante de la forma de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (6.1)$$

que además tenga densidad de probabilidad definida positiva. Consideraremos una ecuación de la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{\hbar c}{i} \hat{\alpha}^i \partial_i + \hat{\beta} m c^2 \right] \psi \quad (6.2)$$

$$= \left[ \frac{\hbar c}{i} (\hat{\alpha}^1 \partial_1 + \hat{\alpha}^2 \partial_2 + \hat{\alpha}^3 \partial_3) + \hat{\beta} m c^2 \right] \psi \quad (6.3)$$

$$= \hat{H} \psi. \quad (6.4)$$

Dado que la ecuación (6.1) es de primer orden en el tiempo, asumiremos que también lo es en las derivadas espaciales. De esta forma la ecuación (6.4) tiene posibilidades de ser covariante bajo transformaciones de Lorentz, las cuales combinan *linealmente* las coordenadas espacio-temporales al pasar de un sistema de referencia inercial a otro.

Como veremos, los coeficientes (aún desconocidos)  $\hat{\alpha}^i$  no pueden ser simples números. Consideraremos a los  $\hat{\alpha}^i$  como matrices de orden  $N$  arbitrario. Luego, las soluciones  $\psi$  de la ecuación (6.4) serán vectores columna de orden  $N$ , esto es

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi^1(\vec{x}, t) \\ \psi^2(\vec{x}, t) \\ \vdots \\ \psi^N(\vec{x}, t) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Llamaremos a dichas soluciones *spinors*, en alusión directa a las soluciones de la ecuación de Pauli. En notación indicial tenemos  $\psi^\sigma(x)$  con  $\sigma = 1, \dots, N$ , de modo que la ecuación (6.4) adopta la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi^\sigma}{\partial t} = \hat{H}_\tau^\sigma \psi^\tau. \quad (6.6)$$

De esta forma  $\hat{H}_\tau^\sigma$  es una matriz de orden  $N \times N$  cuyos coeficientes son las derivadas con respecto a las coordenadas espaciales.

A continuación buscaremos condiciones que aseguren que las ondas planas de la forma

$$\psi = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (6.7)$$

sean soluciones de la ecuación (6.4) y además satisfagan la relación relativista entre energía y momentum para una partícula libre, esto es

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (6.8)$$

Para determinar dichas condiciones introducimos en la ecuación (6.4) las ondas planas (6.7), obteniendo

$$E\psi = \left[ -c\hat{\alpha}^i p_i + \hat{\beta} m c^2 \right] \psi. \quad (6.9)$$

De este resultado calculamos  $E^2\psi$  encontrando que

$$\begin{aligned} E^2\psi &= \left[ -c\hat{\alpha}^i p_i + \hat{\beta} m c^2 \right] \left[ -c\hat{\alpha}^i p_i + \hat{\beta} m c^2 \right] \psi \\ &= \left[ c^2 \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j p_i p_j - m c^3 \left( \hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \right) p_i + m^2 c^4 \hat{\beta}^2 \right] \psi. \end{aligned} \quad (6.10)$$

De esta relación vemos que es posible que cada una de las componentes del spinor  $\psi$  satisfaga la relación (6.8), bajo la condición que las matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  satisfagan

$$\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2\delta^{ij} \hat{1}, \quad (6.11)$$

$$\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0, \quad (6.12)$$

$$\hat{\beta}^2 = \hat{1}, \quad (6.13)$$

donde  $\hat{1}$  es la matriz identidad de orden  $N$ .

Analizemos las tres condiciones anteriores. La primera de estas relaciones, con  $i = j$ , nos dice que debe cumplirse también

$$(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{1} = \hat{\beta}^2. \quad (6.14)$$

Además, para garantizar que los valores propios del Hamiltoniano  $\hat{H}$  en (6.4) sean reales exigimos que éste sea hermítico. Luego, es necesario que las matrices  $\hat{\alpha}_i$  y  $\hat{\beta}$  también sean hermíticas, esto es

$$\hat{\alpha}^{i\dagger} = \hat{\alpha}^i, \quad \hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}. \quad (6.15)$$

Por lo tanto, los valores propios de estas matrices también deben ser reales. Dado que, de acuerdo a (6.14), tenemos que  $(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{\beta}^2 = \hat{1}$ , se sigue que los respectivos eigenvalores sólo pueden tener los valores  $+1$  y  $-1$ . De las relaciones de anticonmutación (6.11)-(6.13) se sigue que

$$\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}, \quad (6.16)$$

y, por lo tanto,

$$Tr(\hat{\alpha}^i) = -Tr(\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}). \quad (6.17)$$

Utilizando la propiedad cíclica de la traza, esto es,  $Tr(ABC) = Tr(CAB)$ , encontramos que

$$Tr(\hat{\alpha}^i) = -Tr(\hat{\beta} \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) = -Tr(\hat{\beta}^2 \hat{\alpha}^i) = -Tr(\hat{\alpha}^i), \quad (6.18)$$

lo cual nos conduce a

$$Tr(\hat{\alpha}^i) = 0. \quad (6.19)$$

Entonces, la traza de cada una de las matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  debe ser cero. Dado que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios y puesto que como vimos anteriormente los valores propios de  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  son  $\pm 1$ , se sigue que cada una de estas matrices debe poseer tantos valores propios positivos como negativos. Esto implica que las matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  deben, por lo tanto, ser de *dimensión par*. La dimensión par más pequeña,  $N = 2$ , sólo admite una solución

trivial de las condiciones (6.11)-(6.13), dado que sólo existen tres matrices linealmente independientes de orden  $N = 2$  que anticonmutan (las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}^i$ ). Luego, la dimensión más pequeña para la cual las condiciones (6.11)-(6.13) pueden ser satisfechos de forma no trivial es  $N = 4$ .

Una representación explícita de las matrices de Dirac  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  en el caso  $N = 4$  es la siguiente

$$\hat{\alpha}^i = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

donde  $\hat{\sigma}^i$  son las matrices de Pauli de  $2 \times 2$  y  $\hat{1}$  es la matriz identidad de orden 2. Con la forma explícita de las matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

tenemos que las matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\alpha}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\alpha}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Es directo comprobar, usando la propiedad  $\hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j + \hat{\sigma}^j \hat{\sigma}^i = 2\delta^{ij} \hat{1}_2$  de las matrices de Pauli, que todas las condiciones (6.11) se satisfacen para estas cuatro matrices. Esta es una representación particular de las matrices de Dirac. Debemos notar que cualquier set de matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$ , construido unitariamente a partir de las matrices  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$  que satisfacen las condiciones (6.11), también satisface las condiciones (6.11).

## 6.1. Cuadricorriente conservada

Ahora construiremos la densidad de 4-corriente y la ecuación de continuidad para la ecuación de Dirac. Para ello multiplicamos la ecuación de Dirac, por la izquierda por (la “matrix de  $1 \times N$ ”)  $\psi^\dagger = (\psi^{1*}, \dots, \psi^{4*})$ , para obtener

$$i\hbar\psi^\dagger\partial_t\psi = \frac{\hbar c}{i}\psi^\dagger\hat{\alpha}^i\partial_i\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi. \quad (6.23)$$

Aún más, tomando el conjugado hermítico de (6.2) y multiplicando a la derecha por  $\psi$ , obtenemos

$$-i\hbar(\partial_t\psi^\dagger)\psi = -\frac{\hbar c}{i}\partial_i\psi^\dagger\hat{\alpha}^{i\dagger}\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}^\dagger\psi, \quad (6.24)$$

o bien, recordando que las matrices de Dirac son hermíticas,

$$-i\hbar(\partial_t\psi^\dagger)\psi = -\frac{\hbar c}{i}\partial_i\psi^\dagger\hat{\alpha}^i\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi. \quad (6.25)$$

Sustrayendo (6.25) de (6.23) encontramos

$$i\hbar\partial_t(\psi^\dagger\psi) = \frac{\hbar c}{i}\partial_i(\psi^\dagger\hat{\alpha}^i\psi),$$

o bien,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i j^i = 0, \quad (6.26)$$

con

$$\rho := \psi^\dagger \psi. \quad (6.27)$$

Ya que  $\rho$  es una cantidad definida positiva, intentaremos interpretarla interpretaremos como la *densidad de probabilidad*. Como consecuencia,

$$j^i := c\psi^\dagger \hat{\alpha}^i \psi, \quad (6.28)$$

será interpretada como la correspondiente *densidad de corriente de probabilidad*.

Aún tenemos que demostrar que  $(c\rho, j^i)$  forma un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz, y que la ecuación de Dirac es covariante bajo estas transformaciones, antes de aceptarla como una legítima ecuación de onda relativista.

## 6.2. Soluciones de la ecuación de Dirac libre

Consideremos ahora las soluciones de la ecuación de Dirac (6.10) libre, es decir en ausencia de potenciales, para ondas planas de la forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}. \quad (6.29)$$

Insertando ésta en la ecuación de Dirac obtenemos

$$E\psi = \left[ +c \hat{\alpha} \cdot \vec{p} + \hat{\beta} mc^2 \right] \psi, \quad (6.30)$$

donde a continuación consideraremos la representación

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

De esta forma, obtenemos para los vectores  $\varphi_0$  y  $\chi_0$  de dos componentes (o *bi-spinores*) las siguientes ecuaciones

$$E\varphi_0 = c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} \chi_0 + mc^2 \varphi_0, \quad (6.32)$$

$$E\chi_0 = c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} \varphi_0 - mc^2 \chi_0. \quad (6.33)$$

Este es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales para  $\varphi_0$  y  $\chi_0$ , que sólo tiene solución no trivial si el correspondiente determinante es nulo, es decir, si

$$\begin{vmatrix} (E - mc^2) \hat{1} & -c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} \\ -c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p} & (E + mc^2) \hat{1} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.34)$$

Es simple verificar que esta condición es equivalente a

$$(E^2 - m^2 c^4) \hat{1} - c^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = 0. \quad (6.35)$$

Usando la identidad

$$(\hat{\sigma}^i A^i) (\hat{\sigma}^j B^j) = A^i B^i \hat{1} + i \varepsilon^{ijk} \hat{\sigma}^i A^j B^k, \quad (6.36)$$

podemos reescribir las ecuaciones anteriores como

$$(E^2 - m^2 c^4) \hat{1} - c^2 \vec{p}^2 \hat{1} = 0, \quad (6.37)$$

es decir,

$$E = \pm E_p =: \lambda E_p, \quad \lambda = \pm 1, \quad (6.38)$$

con

$$E_p := c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (6.39)$$

De esta forma, hemos recobrado la condición que la relación relativista entre energía y momentum debe ser satisfecha. Además, vemos que la ecuación de Dirac admite dos tipos de soluciones de ondas planas, distinguidas por el valor de  $\lambda$ . Se denomina a dichas soluciones *positivas* y *negativas*.

Volviendo al sistema (6.32)-(6.33), podemos despejar  $\varphi_0$  de (6.33), obteniendo

$$\chi_0 = \left( \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{mc^2 + \lambda E_p} \right) \varphi_0. \quad (6.40)$$

Si consideramos que el bi-spinor  $\varphi_0$  es de la forma

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

con la normalización

$$U^\dagger U = U^{1*} U^1 + U^{2*} U^2 = 1, \quad (6.42)$$

entonces, la solución general de onda plana para la ecuación de Dirac libre puede ser escrita en la forma

$$\psi_{p\lambda}(\vec{x}, t) = N \left( \frac{U}{\frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{mc^2 + \lambda E_p} U} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} (+\lambda E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}) \right), \quad (6.43)$$

con  $\lambda = \pm 1$ . La constante  $N$  puede fijarse imponiendo la condición de normalización

$$\int \psi_{p\lambda}^\dagger(\vec{x}, t) \psi_{p'\lambda'}(\vec{x}, t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (6.44)$$

Para la solución (6.43) esto implica que

$$N^2 \left( U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(mc^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1. \quad (6.45)$$

Usando nuevamente la identidad (6.36), encontramos

$$N = \sqrt{\frac{mc^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}}, \quad (6.46)$$

de modo que nuestra solución tiene la forma

$$\psi_{p\lambda}(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{mc^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \left( \frac{U}{\frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{mc^2 + \lambda E_p} U} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} (+\lambda E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}) \right). \quad (6.47)$$

Es interesante notar que el espectro de la ecuación de Dirac para la partícula libre, como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon, no es acotado. Es decir, tiene energías tanto positivas como negativas que se extienden en ambos sentidos indefinidamente. Existe además un gap en el espectro de energía de valor  $2mc^2$ .

### 6.3. Helicidad

Las soluciones para la partícula libre de la ecuación de Dirac  $\psi_{p\lambda}(\vec{x}, t)$  presentan degeneración con respecto del momentum. Para cada valor de  $\lambda = \pm 1$ , las soluciones  $\psi_{p\lambda}(\vec{x}, t)$  son funciones propias del momentum,

$$\hat{p}^i \psi_{p\lambda}(\vec{x}, t) = p^i \psi_{p\lambda}(\vec{x}, t), \quad (6.48)$$

con  $\hat{p}^i = -\hat{p}_i := -i\hbar\partial_i$ . Ya que  $\psi$  es un spinor de 4 componentes, entonces para cada  $\lambda = \pm 1$  existen dos estados con el mismo momentum. Estos estados degenerados en el momentum pueden ser distinguidos usando otro número cuántico, que llamaremos *helicidad*. Primero, definimos el operador “vectorial” de spin:

$$\hat{S}^i := \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}^i := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

Es fácil verificar que este operador no conmuta con el hamiltoniano de Dirac. Sin embargo,

$$[\hat{H}, \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{p}}] = 0, \quad (6.50)$$

de modo que  $\hat{H}$  y  $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{p}}$  pueden ser diagonalizados en una base común. Lo mismo ocurre para el operador de helicidad (definido para estados de *partícula libre*):

$$\hat{\Lambda}_S := \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{p}}}{|\hat{\vec{p}}|} = \frac{\hbar}{2} \frac{\hat{\vec{S}}}{|\hat{\vec{p}}|} \cdot \frac{\hat{\vec{p}}}{|\hat{\vec{p}}|}. \quad (6.51)$$

Este puede ser entendido como la proyección del spin en la dirección del momentum. Por ejemplo, si tenemos un electrón propagándose en la dirección del eje  $z$ , es decir con un vector momentum dado por

$$\vec{p} = (0, 0, p), \quad (6.52)$$

tenemos que

$$\hat{\Lambda}_S = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

y por lo tanto, los vectores propios de  $\hat{\Lambda}_S$  son, con eigenvalor  $\frac{\hbar}{2}$ ,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad (6.54)$$

y con eigenvalor  $-\frac{\hbar}{2}$ ,

$$\begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

donde

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

Luego, con respecto a la helicidad podemos clasificar las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre propagándose en el eje  $z$  como

$$\psi_{p\lambda, +1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z p}{mc^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)}, \quad (6.57)$$

y

$$\psi_{p\lambda, -1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z p}{mc^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)}. \quad (6.58)$$

Podemos verificar que se cumple la siguiente relación de ortonormalidad

$$\int \psi_{p,\lambda,S_z}^\dagger(\vec{x},t) \psi_{p',\lambda',S'_z}(\vec{x},t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{S_z S'_z} \delta(p_z - p'_z). \quad (6.59)$$

## 6.4. Campo de Dirac interactuando con el campo electromagnético

Para modelar la interacción del electrón, descrito por la ecuación de Dirac, con el campo electromagnético recurrimos al *acoplamiento minimal* del campo de Dirac con el cuadripotencial electromagnético  $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ , que consiste en sustituir  $\partial_t$  por  $\partial_t + (ie/\hbar)\phi$  y  $\vec{\nabla}$  por  $\vec{\nabla} - (ie/\hbar c)\vec{A}$ . En notación relativista, el *acoplamiento minimal* adopta la forma

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu := \partial_\mu + i(e/\hbar c)A_\mu \quad (6.60)$$

o, en términos del operador de momento canónico

$$\hat{\Pi}_\mu := i\hbar \nabla_\mu = i\hbar(\partial_\mu + i(e/\hbar c)A_\mu) = \hat{p}_\mu - (e/c)A_\mu. \quad (6.61)$$

Con esto, la ecuación de Dirac acoplada minimalmente al campo electromagnético adopta la forma

$$(i\hbar\partial_t - e\phi)\psi = \left[-c\hat{\alpha}^i \left(i\hbar\partial_i - \frac{e}{c}A_i\right) + \hat{\beta}mc^2\right]\psi, \quad (6.62)$$

o bien,

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[-c\hat{\alpha}^i \left(i\hbar\partial_i - \frac{e}{c}A_i\right) + \hat{\beta}mc^2 + e\phi\right]\psi \quad (6.63)$$

$$= [\hat{H}_{\text{libre}} + \hat{H}_{\text{int}}]\psi, \quad (6.64)$$

con

$$\hat{H}_{\text{int}} := e\hat{\alpha}^i A_i + e\phi = -e\hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{A} + e\phi \quad (6.65)$$

como hamiltoniano de interacción. Note que este hamiltoniano, a diferencia del análogo no-relativista (4.28), depende *linealmente* de los potenciales electromagnéticos.

## 6.5. Límite no-relativista de la Ecuación de Dirac.

Consideremos las soluciones para partículas en reposo ( $\vec{p} = \vec{0}$ ):

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \quad (6.66)$$

$$\psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \quad (6.67)$$

Las dos primeras funciones corresponden a estados de “energía positiva” y los dos últimos a “energía negativa”. Nos concentraremos en (superposiciones de) los estados de energía positiva  $\psi^{(1)}$  y  $\psi^{(2)}$ . Vemos que en este caso sólo las dos primeras componentes del spinor de Dirac (en la representación standard) son no nulas. En el caso en que el campo de Dirac interactúa con el campo electromagnético, las cuatro componentes están acopladas, por lo que en general son todas no nulas. Sin embargo, podemos considerar consistentemente que, bajo ciertas condiciones, las primeras dos componentes del spinor de Dirac (e.d.,  $\varphi$ ) son mucho mayores que las componentes 3 y 4 (e.d.,  $\chi$ ).

Usando

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (6.68)$$

podemos escribir la ecuación de Dirac como

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \\ \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

$$= c \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \tilde{\chi} \\ \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Si ahora hacemos el anzats

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, \quad (6.71)$$

pues suponemos que la energía predominante del sistema es la energía de reposo, entonces

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} + e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (6.72)$$

Con esto, obtenemos que

$$i\hbar e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \left\{ -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \right\} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \left\{ c \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \chi \\ \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \varphi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \right\}, \quad (6.73)$$

y por lo tanto,

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \chi \\ \hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \varphi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Consideremos por ahora el segundo término de la igualdad anterior:

$$i\hbar\partial_t \chi = c\hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \varphi - 2mc^2 \chi + e\phi \chi. \quad (6.75)$$

Si imponemos las condiciones

$$\left| i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \right| \ll |mc^2 \chi| \quad (\text{energía cinética} \ll \text{energía de reposo}), \quad (6.76)$$

$$|e\phi| \ll |mc^2| \quad (\text{energía potencial} \ll \text{energía de reposo}), \quad (6.77)$$

obtenemos

$$\chi \approx \frac{\hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i}{2mc} \varphi \quad (6.78)$$

Si reemplazamos esto en la ecuación para la primera componente,

$$i\hbar\partial_t \varphi = c\hat{\sigma}^i \hat{\Pi}^i \chi + e\phi \varphi, \quad (6.79)$$



obtenemos

$$i\hbar\partial_t\varphi \approx \frac{1}{2m}\hat{\sigma}^i\hat{\Pi}^i\hat{\sigma}^j\hat{\Pi}^j\varphi + e\phi\varphi. \quad (6.80)$$

Usando las propiedades de las matrices de Pauli, podemos escribir:

$$\left(\hat{\sigma}^i\hat{\Pi}^i\right)\left(\hat{\sigma}^j\hat{\Pi}^j\right) = -\hat{\Pi}^i\hat{\Pi}^i\hat{1} + i\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\hat{\Pi}^j\hat{\Pi}^k \quad (6.81)$$

$$= \hat{\Pi}^2 + i\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\left(i\hbar\partial^j - \frac{e}{c}A^j\right)\left(i\hbar\partial^k - \frac{e}{c}A^k\right) \quad (6.82)$$

$$= \left(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i\right)^2 + i\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\left(i\hbar i\hbar\partial^j\partial^k - \frac{e}{c}i\hbar\partial^jA^k - \frac{e}{c}A^ji\hbar\partial^k - \frac{e}{c}A^j\frac{e}{c}A^k\right) \quad (6.83)$$

$$= \left(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i\right)^2 + i\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\left(-\frac{e}{c}i\hbar\partial^jA^k - \frac{e}{c}A^ji\hbar\partial^k\right) \quad (6.84)$$

$$= \left(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i\right)^2 + \frac{e}{c}\hbar\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\partial^jA^k \quad (6.85)$$

$$= \left(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\hat{\sigma}^i\varepsilon^{ijk}\partial^jA^k \quad (6.86)$$

$$= \left(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\hat{\sigma}^iB^i. \quad (6.87)$$

De esta forma, obtenemos que la ecuación que gobierna las componentes de “energía positiva”, e.d. el 2-spinor  $\varphi$ , en el límite no relativista es:

$$i\hbar\partial_t\varphi = \frac{1}{2m}\left(\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\hat{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\varphi + e\phi\varphi. \quad (6.88)$$

Vemos entonces que en el límite no relativista la ecuación de Dirac acoplada minimalmente al campo electromagnético reproduce la ecuación de Pauli, que describe la interacción de una partícula no-relativista de spín 1/2 con un campo electromagnético externo.

AGREGAR CASO  $\vec{B} = \text{cte}$

## 6.6. Formulación covariante de la Ecuación de Dirac.

Comenzemos escribiendo la ecuación de Dirac en una forma más compacta. Si multiplicamos la ecuación de Dirac (6.2) por la izquierda con la matriz de Dirac  $\hat{\beta}$ , y usando (6.14), obtenemos

$$i\hbar\left(\hat{\beta}\partial_0\psi + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i\psi\right) - mc\psi = 0. \quad (6.89)$$

Definiendo las matrices  $\gamma^\mu$  como

$$\gamma^0 := \hat{\beta}, \quad (6.90)$$

$$\gamma^i := \hat{\alpha}^i, \quad (6.91)$$

la ecuación de Dirac puede ser escrita en la forma:

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc]\psi = 0. \quad (6.92)$$

La propiedad fundamental de las matrices  $\gamma^\mu$  es

$$\gamma^\mu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\hat{1}, \quad (6.93)$$

que puede ser derivada del álgebra de las matrices de Dirac  $\hat{\alpha}^i$  y  $\hat{\beta}$ . Las matrices  $\gamma^i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) son unitarias y antihermíticas,

$$(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1}, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad (6.94)$$

en tanto que  $\gamma^0$  es unitaria y hermítica:

$$(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^{-1}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0. \quad (6.95)$$

La covariancia de la ecuación de Dirac significa dos cosas diferentes:

1. Debe haber una regla explícita que permita a un observador  $B$  calcular su  $\psi'(x')$  si  $\psi(x)$  de un observador  $A$  es dada. Así,  $\psi'(x')$  de  $B$  describe el mismo estado físico que  $\psi(x)$  de  $A$ .
2. De acuerdo al Principio de la Relatividad, el cual establece que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes (indistinguibles) y, como consecuencia, las ecuaciones que gobiernan un sistema físico deben tener la misma forma en todos los sistemas inerciales. En nuestro caso, esto implica que el 2-spinor  $\psi'(x')$ , en el sistema  $B$ , debe ser una solución de una ecuación de Dirac que tiene la forma

$$(i\hbar\gamma'^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0. \quad (6.96)$$

Adicionalmente los  $\gamma'^\mu$  deben también tener los mismos valores (constantes) que en el sistema  $A$ , e.d.  $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$ . Este también es un requerimiento del Principio de Relatividad, ya que de otro modo observadores podrían distinguir si se encuentran en los sistemas inerciales  $A$  o  $B$ . Por lo tanto, en el sistema inercial  $B$  debemos tener:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0. \quad (6.97)$$

### 6.6.1. La transformación $\hat{S}$

Ahora construiremos explícitamente la transformación entre  $\psi(x)$  y  $\psi'(x')$ . Asumiremos que esta transformación sea lineal, dado que tanto la ecuación de Dirac como la transformación de Lorentz  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  son lineales. Con esto, consideraremos que existe una matriz  $(4 \times 4)$   $\hat{S}(\Lambda)$ , asociada a cada transformación de Lorentz  $\Lambda$ , tal que

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = \hat{S}(\Lambda)\psi(x) = \hat{S}(\hat{a})\psi(\Lambda^{-1}x'). \quad (6.98)$$

Considere ahora un nuevo sistema de referencia inercial,  $C$ . En este sistema la partícula es descrita por un spinor de Dirac  $\psi''$ . Si la transformación de Lorentz que relaciona  $B$  con  $C$  es  $\Lambda'$ , entonces

$$\psi'' = \hat{S}(\Lambda')\psi'. \quad (6.99)$$

Usando (6.98) podemos escribir

$$\psi'' = \hat{S}(\Lambda')\hat{S}(\Lambda)\psi. \quad (6.100)$$

Por otro lado, los sistemas  $A$  y  $C$  pueden ser directamente conectados por la transformación de Lorentz  $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$ , y por lo tanto debemos tener adicionalment que

$$\psi'' = \hat{S}(\Lambda'')\psi. \quad (6.101)$$

Comparando (6.101) y (6.100) obtenemos que las matrices de transformación  $\hat{S}$  deben satisfacer la siguiente condición:

$$\hat{S}(\Lambda'\Lambda) = \hat{S}(\Lambda')\hat{S}(\Lambda). \quad (6.102)$$

Adicionalmente, es natural requerir que la matrix  $\hat{S}$  correspondiente a la transformación de Lorentz trivial ( $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ) sea la matriz identidad (de  $4 \times 4$ ), de modo que el spinor de Dirac no sea transformado en este caso. Esta condición, junto con (6.102) requieren que el conjunto de todas las matrices  $\hat{S}(\Lambda)$  constituya una *representación del grupo de Lorentz*<sup>1</sup>

En particular, si elegimos  $\Lambda' = \Lambda^{-1}$  en (6.102), obtenemos

$$\hat{S}(\Lambda^{-1}) = \hat{S}^{-1}(\Lambda). \quad (6.103)$$

Ahora impondremos la condición que la ecuación de Dirac sea covariante bajo transformaciones de Lorentz. A partir de (6.96), (6.98) y (6.103) podemos escribir

$$0 = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi \quad (6.104)$$

$$= [i\hbar\gamma^\mu((\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial'_\nu) - mc] (\hat{S}^{-1}\psi') \quad (6.105)$$

$$= \hat{S}^{-1} [i\hbar(\hat{S}\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\Lambda^{-1})^\nu_\mu)\partial'_\nu - mc] \psi'. \quad (6.106)$$

Queremos  $\psi'$  satisfaga la ecuación (6.97), de modo que podemos reemplazar  $mc\psi' = i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'$  en (6.106). Con esto, obtenemos

$$0 = \hat{S}^{-1} [i\hbar(\hat{S}\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\Lambda^{-1})^\nu_\mu)\partial'_\nu - mc] \psi' \quad (6.107)$$

$$= \hat{S}^{-1} [i\hbar(\hat{S}\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\Lambda^{-1})^\nu_\mu - \gamma^\nu)\partial'_\nu] \psi'. \quad (6.108)$$

Vemos entonces que la condición de covariancia será satisfecha si

$$\hat{S}(\Lambda)\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \gamma^\nu, \quad (6.109)$$

o equivalentemente,

$$\hat{S}(\Lambda)\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda)^\mu_\nu\gamma^\nu. \quad (6.110)$$

Esta es la relación fundamental para determinar el operador  $\hat{S}$ : encontrar  $\hat{S}$  significa resolver (6.110). Una vez que hallamos demostrado que existe una solución  $\hat{S}(\Lambda)$  de (6.110) y la hallamos encontrado, habremos probado la covariancia de la ecuación de Dirac. Podemos ahora especificar más precisamente la definición de un spinor: en general, una función de onda es llamada un spinor de Lorentz de 4 componentes si transforma de acuerdo a (6.98) por medio de la relación fundamental (6.110).

Usando las leyes de transformación (6.98) y la condición (6.110) es posible verificar que  $J^\mu := (c\rho, j^i)$ , con  $\rho$  y  $j^i$  definidos en (6.27) y (6.28), transforma efectivamente como un vector bajo transformaciones de Lorentz.

### 6.6.2. Construcción de $\hat{S}$ para transformaciones de Lorentz infinitesimales.

En general es más fácil generar una transformación de un grupo continuo construyendo los operadores del grupo para transformaciones infinitesimales y luego componiendo estas transformaciones infinitesimales. Siguiendo el mismo patrón en nuestro caso de transformaciones de Lorentz, primero construimos el operador  $\hat{S}(\Lambda)$  para *transformaciones de Lorentz propias infinitesimales* dadas por

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu. \quad (6.111)$$

<sup>1</sup>En rigor, debido a que dos spinores son equivalentes si se diferencian sólo por una fase global, en suficiente que las matrices  $\hat{S}(\Lambda)$  definan una *representación proyectiva* del grupo de Lorentz, e.d. que satisfagan  $\hat{S}(\Lambda')\hat{S}(\Lambda) = e^{i\varphi}\hat{S}(\Lambda'\Lambda)$ , donde  $e^{i\varphi}$  es una fase arbitraria.

Aquí los parámetros infinitesimales  $\Delta\omega^{\mu\nu} := \Delta\omega^\mu_\lambda \eta^{\lambda\nu}$  son antisimétricos,  $\Delta\omega^{\nu\mu} = -\Delta\omega^{\mu\nu}$  y hay, por lo tanto, seis de ellos.

Determinaremos ahora el operador  $\hat{S}(\Lambda) = \hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu})$  expandiendo  $\hat{S}$  en potencias de  $\Delta\omega^{\mu\nu}$  y manteniendo sólo los términos lineales de los generadores infinitesimales; así escribimos

$$\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \hat{1} - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}, \quad (6.112)$$

$$\hat{S}^{-1}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \hat{1} + \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}. \quad (6.113)$$

Cada uno de los seis ( $\hat{\sigma}_{\mu\nu} = -\hat{\sigma}_{\nu\mu}$ ) coeficientes  $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$  es una matriz de  $4 \times 4$ . Encontrando los  $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ , podemos determinar el operador  $\hat{S}$ . Insertando (6.112), (6.113) y (6.111) en (6.110), encontramos

$$\left( \hat{1} - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right) \gamma^\mu \left( \hat{1} + \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\rho\sigma} \Delta\omega^{\rho\sigma} \right) = (\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu) \gamma^\nu. \quad (6.114)$$

Desarrollando y omitiendo términos cuadráticos en  $\Delta\omega^{\alpha\beta}$ , obtenemos

$$(\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{\sigma}_{\alpha\beta}) = -2i (\delta^\nu_\alpha \gamma_\beta - \delta^\nu_\beta \gamma_\alpha), \quad (6.115)$$

es decir,

$$[\hat{\sigma}_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] = -2i (\delta^\nu_\alpha \gamma_\beta - \delta^\nu_\beta \gamma_\alpha). \quad (6.116)$$

El problema de construir  $\hat{S}$  de acuerdo a la relación fundamental (6.110) se reduce a hora a determinar las seis matrices  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ . Dado que  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$  tiene que ser antisimétrico en ambos índices, es natural tratar con un producto antisimétrico de matrices:

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]. \quad (6.117)$$

Esta forma cumple con el requerimiento (6.116), lo que puede ser verificado tomando en consideración las relaciones de conmutación (6.93).

Con esta solución, el operador  $\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu})$  para transformaciones de Lorentz propias infinitesimales viene dado por

$$\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = \hat{1} - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} = \hat{1} + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \Delta\omega^{\mu\nu}. \quad (6.118)$$

### 6.6.3. El Operador $\hat{S}$ para transformaciones de Lorentz propias

A partir de las matrices  $\hat{S}(\Lambda)$  correspondientes a transformaciones de Lorentz infinitesimales podemos construir las matrices finitas. Para esto, consideramos la composición de  $N$  transformaciones infinitesimales, cada una con parámetros  $\Delta\omega^{\mu\nu}/N$ , donde ahora  $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$  son 6 parámetros *finitos*, y  $N \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\hat{S}(\Lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \hat{1} - \frac{i}{4N} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \right]^N = \exp \left[ -\frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \right]. \quad (6.119)$$

Esta matriz  $\hat{S}$  corresponde a la transformación de Lorentz dada por

$$\Lambda^\mu_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{N} \right)^N \right]^\mu_\nu = [\exp(-\Delta\omega)]^\mu_\nu. \quad (6.120)$$

#### 6.6.4. Spinor adjunto

Para consideraciones posteriores es útil introducir la abreviación

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0. \quad (6.121)$$

Las cuatro componentes de  $\bar{\psi} = (\bar{\psi}^0, \dots, \bar{\psi}^4)$  forman el llamado *spinor adjunto*. Éste transforma, bajo transformación de Lorentz, de acuerdo a

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'^\dagger(x') \gamma^0 \\ &= [\hat{S}\psi(x)]^\dagger \gamma^0 \\ &= \psi^\dagger(x) \hat{S}^\dagger \gamma^0 \\ &= \psi^\dagger(x) \gamma^0 \hat{S}^{-1}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \hat{S}^{-1}. \quad (6.122)$$

Aquí hemos usado la identidad

$$\gamma^0 \hat{S}^\dagger \gamma^0 = \hat{S}^{-1}, \quad (6.123)$$

que puede ser verificada a partir de (6.119).

#### 6.6.5. Spinors bajo Reflexiones Espaciales: Paridad

La transformación de paridad  $t \rightarrow t, \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  corresponde a la transformación de Lorentz

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.124)$$

En este caso, la correspondiente matriz  $\hat{S}$  que opera sobre un spinor es denotada por  $\hat{P}$ .

De la condición (6.110) obtenemos que  $\hat{P}$  debe satisfacer

$$\hat{P} \gamma^\lambda \hat{P}^{-1} = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu, \quad (6.125)$$

que, para  $\mu = 0$  implica

$$[\hat{P}, \gamma^0] = 0 \quad (6.126)$$

y, para  $\mu = i$ ,

$$\{\hat{P}, \gamma^i\} = 0 \quad (6.127)$$

De las relaciones (6.93) vemos que estas condiciones son satisfechas si

$$\hat{P} = \alpha \gamma^0. \quad (6.128)$$

Para que  $\hat{P}$  satisfaga la ley de composición es necesario que  $\alpha = e^{i\varphi}$ , de modo que

$$\hat{P} = e^{i\varphi} \gamma^0, \quad \hat{P}^{-1} = e^{-i\varphi} \gamma^0 = \hat{P}^\dagger, \quad (6.129)$$

donde  $e^{i\varphi}$  es una fase arbitraria no observable.

### Límite No-Relativista.

En general, para un spinor  $\psi = (\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(4)})$  tendremos que

$$\hat{P}\psi^{(1)} = e^{i\varphi}\psi^{(1)}, \quad (6.130)$$

$$\hat{P}\psi^{(2)} = e^{i\varphi}\psi^{(2)}, \quad (6.131)$$

$$\hat{P}\psi^{(3)} = -e^{i\varphi}\psi^{(3)}, \quad (6.132)$$

$$\hat{P}\psi^{(4)} = -e^{i\varphi}\psi^{(4)}. \quad (6.133)$$

En el límite no-relativista, el spinor se reduce básicamente a dos componentes no nulas:

$$\psi(x) \approx \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.134)$$

de modo que el spinor  $\varphi$  (de “energía positiva”) son vectores propios del operador paridad, con autovvalor (“paridad interna”)  $+1$ , opuesta a la de los de “energía negativa”.

### 6.6.6. Construcción de soluciones de la ecuación libre de Dirac mediante transformaciones de Lorentz.

Las soluciones de la ecuación de Dirac para un electrón en reposo están dadas por las expresiones (6.66) y (6.67), que escribiremos en forma más compacta como

$$\psi^{(r)} = \omega^{(r)}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r mc^2 t} \quad (6.135)$$

con

$$\varepsilon_r := \begin{cases} +1, & \text{para } r = 1, 2 \\ -1, & \text{para } r = 3, 4 \end{cases} \quad (6.136)$$

y

$$\omega^{(1)}(0) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(2)}(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(3)}(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(4)}(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.137)$$

Estas cuatro soluciones de la ecuación de Dirac son también estados propios de

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.138)$$

es decir

$$\hat{\Sigma}_z \psi^{(r)}(x) = \pm \psi^{(r)}(x), \quad (6.139)$$

donde los eigenvalores  $+1$  son para  $r = 1, 3$  y  $-1$  para  $r = 2, 4$ .

Anteriormente obtuvimos las soluciones de la ecuación de Dirac para la partícula libre resolviéndola directamente. Ahora usaremos un método distinto: aplicaremos una transformación de Lorentz a un sistema que se mueve con velocidad  $-v^i$  con respecto al sistema en donde el electrón está en reposo. Para ello usamos la forma invariante de la solución en el sistema en reposo:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_r mc^2 t} = e^{-i\varepsilon_r \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}} = e^{-i\varepsilon_r \frac{p'_\mu x'^\mu}{\hbar}}, \quad (6.140)$$

donde

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (6.141)$$

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}, \quad (6.142)$$

y

$$p^{\mu} = [mc, 0, 0, 0] = \left[ \frac{E}{c}, 0, 0, 0 \right]. \quad (6.143)$$

Comenzemos notando que *las soluciones para energía negativa, y para energía positiva, no se mezclan bajo transformaciones de Lorentz propias ni bajo reflexiones espaciales*. El 4-momentum de una partícula libre es siempre tipo tiempo, e.d.  $p^{\mu} p_{\mu} = m^2 c^2 > 0$ , de modo que siempre están contenidas dentro del cono de luz. El 4-momentum de las soluciones con “energías positivas”,  $p^0 > 0$  está contenido dentro del cono de luz futuro, mientras aquellas con  $p^0 < 0$  en el cono de luz pasado. Las transformaciones de Lorentz propias y la transformación de paridad preservan la orientación de los cuadvectores tipo tiempo en los conos de luz futuro y pasado.

Para el caso particular de un boost a lo largo del eje  $x$  tenemos

$$\hat{S}(w^{01}) = \exp \left( -\frac{i}{4} [\hat{\sigma}_{\mu\nu}] w^{01} [I_{01}]^{\mu\nu} \right) \quad (6.144)$$

con

$$[I_{01}]^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.145)$$

Luego,

$$\hat{S}(w^{01}) = \exp \left( -\frac{i}{2} [\hat{\sigma}_{01}] w^{01} [I_{01}]^{01} \right) \quad (6.146)$$

$$= \exp \left( -\frac{i}{2} [\hat{\sigma}_{01}] w^{01} \right), \quad (6.147)$$

donde el parámetro de la transformación está dado por

$$w^{01} = -\arctan \left( \frac{v_x}{c} \right) = -\arctan(\beta). \quad (6.148)$$

Esto nos conduce a las usuales transformaciones de Lorentz

$$x'^0 = \cosh(w^{01}) (x^0 - x^1 \tanh w^{01}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x^0 + \beta x^1), \quad (6.149)$$

$$x'^1 = \cosh(w^{01}) (x^1 - x^0 \tanh w^{01}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x^1 + \beta x^0) \quad (6.150)$$

y considerando que

$$\hat{\sigma}_{01} = \frac{i}{2} (\gamma_0 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_0) = i \gamma_0 \gamma_1 = -i \gamma^0 \gamma^1 = -i \hat{\alpha}^1, \quad (6.151)$$

y la transformación  $\hat{S}$  con la forma reducida

$$\hat{S}(w^{01}) = \exp \left( -\frac{1}{2} \omega \hat{\alpha}^1 \right) \quad (6.152)$$

$$= \cosh \frac{\omega}{2} \hat{1} - \sinh \frac{\omega}{2} \hat{\alpha}^1. \quad (6.153)$$

Definimos

$$\omega^{(r)}(p_x) := \hat{S}\omega^{(r)}(0), \quad (6.154)$$

de modo que

$$\omega^1(p_x) = \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}, \quad \omega^2(p_x) = \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.155)$$

$$\omega^3(p_x) = \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^4(p_x) = \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.156)$$

Es posible demostrar, a partir de (6.148), que

$$-\tanh \frac{\omega}{2} = \frac{p_x c}{E + mc^2}, \quad (6.157)$$

$$\cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}. \quad (6.158)$$

Usando esto, obtenemos:

$$\hat{S}(w^{01}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{p_x c}{E + mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_x c}{E + mc^2} & -0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.159)$$

Análogamente, se puede demostrar que para una transformación de Lorentz con boost general,

$$\hat{S}(-v^i) = \hat{S}\left(-\frac{p^i}{E}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \hat{\alpha} \cdot \tilde{v}\right) \quad (6.160)$$

$$= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E + mc^2} & \frac{cp_-}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{cp_+}{E + mc^2} & -\frac{cp_z}{E + mc^2} \\ \frac{cp_z}{E + mc^2} & \frac{cp_-}{E + mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{cp_+}{E + mc^2} & -\frac{cp_z}{E + mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.161)$$

con

$$p_{\pm} =: p_x \pm ip_y. \quad (6.162)$$

Por lo tanto,

$$\psi^r = \hat{S}(-v^i) \omega^r(0) e^{-i\varepsilon_r \frac{p_{\mu} x^{\mu}}{\hbar}}. \quad (6.163)$$

Es un buen ejercicio verificar que esta forma es equivalente a aquella dada por las relaciones (6.47).

### 6.6.7. Covariantes Bilineares de los Spinors de Dirac.

Deben existir 16 matrices linealmente independientes de orden  $N = 4$ . Denotaremos estas matrices por

$$\left(\hat{\Gamma}^n\right)_{\beta}^{\alpha}, \quad n = 1, \dots, 16. \quad (6.164)$$



Las matrices  $\hat{\Gamma}^n$  pueden ser construidas, a partir de las matrices  $\gamma_\mu$  de Dirac, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^S &= 1 && 1 \text{ matriz} \\ \hat{\Gamma}_\mu^V &= \gamma_\mu && 4 \text{ matrices} \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T &= \hat{\sigma}_{\mu\nu} = \hat{\sigma}_{\nu\mu} && 6 \text{ matrices} \\ \hat{\Gamma}^P &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5 = \gamma^5 && 1 \text{ matriz} \\ \hat{\Gamma}_\mu^A &= \gamma_5\gamma_\mu && 4 \text{ matrices}\end{aligned}\quad (6.165)$$

Las letras **S**, **V**, **T**, **P** y **A** se refieren a sus propiedades de transformación, indicando escalares, vectores, tensores, pseudovectores y pseudotensores respectivamente.

Algunas propiedades de estas matrices son:

- $(\Gamma^n)^2 = \pm 1_{4 \times 4}$ .
- Para cada  $\Gamma^n$ , exceptuando  $\Gamma^S$ , existe al menos un  $\Gamma^m$  tal que

$$\Gamma^n \Gamma^m = -\Gamma^m \Gamma^n \quad (6.166)$$

Esta propiedad implica que todas las matrices  $\Gamma^n$ , excepto  $\Gamma^S$ , tienen traza nula.

- Para  $\Gamma^a$  y  $\Gamma^b$  dados, con  $a \neq b$ , existe un  $\Gamma^n \neq \Gamma^S$  tal que

$$\Gamma^a \Gamma^b = f_{ab}^n \Gamma^n, \quad (6.167)$$

con  $f_{ab}^n$  complejo.

Estas propiedades nos permiten probar la independencia lineal de las matrices  $\Gamma^n$ , es decir que

$$\sum_n a_n \Gamma^n = 0 \iff a_n = 0 \quad \forall n. \quad (6.168)$$

Consideremos la expresión

$$\sum_n a_n \Gamma^n = 0 \quad (6.169)$$

y multipliquemosla por la derecha con  $\Gamma^m \neq \Gamma^S$ . Obtenemos

$$\sum_n a_n \Gamma^n \Gamma^m = 0. \quad (6.170)$$

La traza de la expresión anterior es

$$a_m \text{Tr}((\Gamma^m)^2) + \sum_{n \neq m} a_n \text{Tr}(\Gamma^n \Gamma^m) = 0. \quad (6.171)$$

Esta expresión puede ser escrita en la forma

$$a_m \text{Tr}((\Gamma^m)^2) + \sum_{n \neq m} a_n \text{Tr}(f_{nm}^\nu \Gamma^n u) = 0. \quad (6.172)$$

En el segundo término del lado derecho no aparece la matriz  $\Gamma^S$ . Luego éste se anula. Además,  $\text{Tr}((\Gamma^m)^2) = \text{Tr}(\pm 1) = \pm 4$ . Luego,

$$a_m = 0 \quad \forall m \neq s. \quad (6.173)$$

En el caso en que multipliquemos por la matriz  $\Gamma^S$  tenemos

$$a_s \text{Tr}((\Gamma^S)^2) + \sum_{n \neq s} a_n \text{Tr}(\Gamma^n) = 0, \quad (6.174)$$

expresión que se reduce a

$$a_s = 0. \quad (6.175)$$

Luego, las matrices  $\Gamma$  son linealmente independientes.

Ahora examinaremos el comportamiento de expresiones bilineales de la forma  $\bar{\psi}(x)\Gamma^n\psi(x)$  bajo transformaciones de Lorentz.

Comenzemos por estudiar como transforma la cantidad  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ . En el sistema de referencia primado tenemos que esta cantidad es  $\bar{\psi}'(x')\psi'(x')$ , o equivalentemente

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\psi'(x'). \quad (6.176)$$

Dado que el spinor  $\psi(x)$  transforma como  $\psi'(x') = \hat{S}\psi(x)$  tenemos

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\hat{S}^{\dagger}\gamma^0\hat{S}\psi(x). \quad (6.177)$$

Si consideramos además que  $\hat{S}^{-1} = \gamma^0\hat{S}^{\dagger}\gamma^0$  o equivalentemente  $\hat{S}^{\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\hat{S}^{-1}$  tenemos que la expresión anterior es

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\hat{S}^{-1}\hat{S}\psi(x), \quad (6.178)$$

de la cual se obtiene que la forma bilinear

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (6.179)$$

tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia. La combinación bilinear  $\bar{\psi}(x)\Gamma^s\psi(x)$  es por lo tanto un escalar de Lorentz.

Consideremos ahora la forma bilinear  $\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$ . Esta forma en el sistema primado es

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}\gamma^{\mu}\hat{S}\psi(x). \quad (6.180)$$

Recordando que las transformaciones spinoriales transforman como

$$\hat{S}^{-1}\gamma^{\mu}\hat{S} = a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}, \quad (6.181)$$

tenemos que

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}\psi(x) = a^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x). \quad (6.182)$$

Luego  $\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$  transforma como un vector de Lorentz.

Una forma bilinear un poco más interesante es  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ . Esta en el sistema primado es

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}\gamma_5\hat{S}\psi(x). \quad (6.183)$$

Para resolver el lado derecho de la expresión anterior basta con hacer uso de las propiedades

$$[\hat{S}, \gamma_5] = 0 \quad \{\hat{P}, \gamma_5\} = 0, \quad (6.184)$$

donde  $\hat{P} = e^{i\phi}\gamma^0$  es el operador de inversión espacial de los espinores. Ambas expresiones pueden ser resumidas como

$$\hat{S}\gamma_5 = \det|a|\gamma_5\hat{S}, \quad (6.185)$$

expresión que nos permite escribir

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det|a|\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \quad (6.186)$$

de modo que la forma bilinear  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$  transforma como un pseudoescalar, puesto que el signo de la transformación depende del tipo (propia o impropia) de transformación de Lorentz.

Similarmente, podemos mostrar que la forma bilinear  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$  transforma como un pseudovector. En efecto

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}\gamma_5\gamma^\mu\hat{S}\psi(x), \\
&= \bar{\psi}(x)\det|a|\gamma_5\hat{S}^{-1}\gamma^\mu\hat{S}\psi(x), \\
&= \bar{\psi}(x)\det|a|\gamma_5a_\nu^\mu\gamma^\nu\psi(x), \\
&= \det|a|a_\nu^\mu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x).
\end{aligned} \tag{6.187}$$

Finalmente, mostraremos que la forma bilinear  $\bar{\psi}(x)\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi(x)$  transforma como un tensor de segundo rango, esto es

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x')\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\hat{S}\psi(x), \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\hat{S}\psi(x), \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}(\gamma^\mu\hat{S}\hat{S}^{-1}\gamma^\nu - \gamma^\nu\hat{S}\hat{S}^{-1}\gamma^\mu)\hat{S}\psi(x), \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)(\hat{S}^{-1}\gamma^\mu\hat{S}\hat{S}^{-1}\gamma^\nu\hat{S} - \hat{S}^{-1}\gamma^\nu\hat{S}\hat{S}^{-1}\gamma^\mu\hat{S})\psi(x), \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)(a_\eta^\mu\gamma^\eta a_\xi^\nu\gamma^\xi - a_\xi^\nu\gamma^\xi a_\eta^\mu\gamma^\eta)\psi(x), \\
&= a_\eta^\mu a_\xi^\nu \bar{\psi}(x) \frac{i}{2}(\gamma^\eta\gamma^\xi - \gamma^\xi\gamma^\eta)\psi(x), \\
&= a_\eta^\mu a_\xi^\nu \bar{\psi}(x)\hat{\sigma}^{\eta\xi}\psi(x).
\end{aligned} \tag{6.188}$$

## 6.7. Partículas de Dirac en campos externos: Ejemplos y problemas

## 6.8. Densidad Lagrangeana y Tensor de Moméntum-Energía de la ecuación libre de Dirac

La densidad lagrangeana libre de Dirac tiene la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2) \psi, \tag{6.189}$$

en donde  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$  es llamado el spinor adjunto a  $\psi$  y la abreviación  $\gamma^\mu$  representa  $\gamma^0 = \hat{\beta}, \gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i$ . También usamos la abreviación  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Ahora realizamos la variación con respecto a  $\bar{\psi}$ , o sea, aplicaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}} = 0. \tag{6.190}$$

Para ello, como de costumbre calculamos las derivadas necesarias:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= (i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2) \psi, \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}} &= 0.
\end{aligned}$$

Luego,

$$(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2) \psi = 0, \tag{6.191}$$

o bien

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + i \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0. \quad (6.192)$$

Aquí la combinación  $\lambda \equiv \hbar/mc$  es la longitud de onda de Compton de la partícula de masa  $m$ .

Ahora calculamos el tensor momento-energía a partir de la expresión

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} \partial_\nu \bar{\psi} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (6.193)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} &= \frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu}} (i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\nu \psi_{,\nu} - mc^2 \bar{\psi} \psi), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} &= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu, \end{aligned}$$

por lo que

$$T_\nu^\mu = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \delta_\nu^\mu \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\lambda \partial_\lambda \psi - mc^2 \psi), \quad (6.194)$$

o bien,

$$T_\nu^\mu = mc^2 \left[ \frac{i\hbar}{mc} \bar{\psi} \left( \gamma^\mu \partial_\nu - \delta_\nu^\mu \gamma^\lambda \partial_\lambda \right) \psi + \delta_\nu^\mu \bar{\psi} \psi \right], \quad (6.195)$$

es la expresión para el tensor de momento-energía de la ecuación libre de Dirac. Si  $\psi$  es una solución a la ecuación de Dirac (6.191), entonces (6.195) se reduce a

$$T_\nu^\mu = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi. \quad (6.196)$$

De aquí obtenemos la densidad de energía  $T_0^0$ :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= mc^2 \left[ \frac{i\hbar}{mc} \bar{\psi} \left( \gamma^0 \partial_0 - \delta_0^0 \gamma^\lambda \partial_\lambda \right) \psi + \delta_0^0 \bar{\psi} \psi \right], \\ T_0^0 &= mc^2 \left[ \frac{i\hbar}{mc} \bar{\psi} \left( \gamma^0 \partial_0 - \gamma^\lambda \partial_\lambda \right) \psi + \bar{\psi} \psi \right], \\ T_0^0 &= mc^2 \left[ -\frac{i\hbar}{mc} \bar{\psi} (\gamma \cdot \nabla) \psi + \bar{\psi} \psi \right], \end{aligned}$$

en donde hemos usado  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma)$ . Introduciendo  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ , nos queda

$$\begin{aligned} T_0^0 &= c \bar{\psi} (\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi + mc^2 \bar{\psi} \psi, \\ T_0^0 &= \bar{\psi} [c (\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}) + mc^2] \psi \\ T_0^0 &= \psi^\dagger \hat{H}_f \psi, \end{aligned}$$

ya que

$$\hat{H}_f \equiv c (\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta} mc^2 = \hat{\beta} [c (\hat{\beta} \hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + mc^2] = \gamma^0 [c (\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}) + mc^2], \quad (6.197)$$

y  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Luego,  $\int T_0^0 d^3x$  no es más que el valor de expectación del hamiltoniano  $\hat{H}_f$  en el estado  $\psi$ . Otra forma de ver esto es partir directamente de (6.196) y hacer

$$\begin{aligned} T_0^0 &= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi, \\ T_0^0 &= \bar{\psi} \gamma^0 i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ T_0^0 &= \psi^\dagger \hat{H}_f \psi, \end{aligned}$$

en virtud de la ecuación de Schrödinger  $\hat{H}_f\psi = i\hbar\partial\psi/\partial t$ . Aquí ocupamos  $\bar{\psi}\gamma^0 = \psi^\dagger$ , relación que es también válida dado que  $\gamma^0\gamma^0 = \hat{1}$ .

La traza  $T$  del tensor moméntum-energía es

$$\begin{aligned} T &\equiv T_\mu^\mu = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ T &= i\hbar c \bar{\psi} \frac{mc}{i\hbar} \psi, \\ T &= mc^2 \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \tag{6.198}$$

Uno debe notar que esto no es proporcional a la densidad de carga, la cual está dada por

$$\rho = e\bar{\psi}\gamma^0\psi = e\psi^\dagger\psi. \tag{6.199}$$

## 6.9. Partículas de Dirac en campos externos: Ejemplos y problemas

## Parte III

# Apéndice

## Apéndice A

# Teoría de Campos Clásica

### A.1. Formulación Funcional

Uno de los problemas más recurrentes en física es el intentar minimizar una expresión que no sólo depende de una variable continua sino que también de todos los valores de una función sobre dicha variable y, posiblemente, de derivadas de dicha función. Este tipo de problema jugó un rol crucial en el desarrollo de la Física Clásica en los siglos XVIII y XIX y su importancia se vió reforzada con el advenimiento de las Teorías de Campo en el siglo pasado. La formulación matemática de este problema corresponde al cálculo de variaciones.

Tres problemas famosos relacionados con el cálculo de variaciones son:

- Cálculo de la curva de longitud más corta que une dos puntos.
- Dados dos puntos en el plano vertical encontrar la trayectoria de tiempo mínimo que una partícula sigue entre dichos puntos suponiendo que su aceleración es debida a la gravedad.
- Encontrar la superficie mínima de revolución que pasa por dos puntos dados.

#### Definición de derivada funcional

Usualmente una función  $y(x)$  en Física asume valores reales sobre una variable  $x$  cuyos valores están comprendidos en un intervalo  $I = [a, b]$ . Consideremos ahora  $N$  puntos en dicho intervalo y escojamos los puntos  $x_n \in I$  de la forma  $x_n = a + \epsilon b$ , con  $N\epsilon = b - a$ . Podemos ahora representar la función  $y(x)$  por los valores de ésta en los puntos  $x_n$ , es decir por la función  $y_n = y(x_n) = y(a + \epsilon b)$ . En el límite  $N \rightarrow \infty$ , o equivalentemente  $\epsilon \rightarrow 0$ , la función  $y_n$  entrega la misma información que la función  $y(x)$ .

Ahora, podemos definir una función  $F$  sobre todos los  $y_n$ , es decir  $F(\{y_n\})$ . En el límite  $N \rightarrow \infty$ ,  $F$  es una función de  $y(x)$ . Llamamos a  $F$  funcional de  $y(x)$  y lo denotamos por  $F[y]$ .  $F$  es una función de todos los valores de  $y(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Luego,  $F$  depende de un número infinito de variables independientes y su valor es un número.

Un ejemplo simple de funcional es aquel que selecciona el valor de una función en un punto determinado, por ejemplo  $F[y] = y(x = 3)$ , de modo que  $F[y^3] = 27$  y  $F[y = \sin(\pi x)] = 0$ . Otro ejemplo simple de funcional es  $F[y] = \int_0^1 y(x) dx$ , de modo que  $F$  depende de la forma completa de la función  $y(x)$ . Obviamente, existen funcionales más interesantes.

Veamos qué sucede con  $F(\{y_n\})$  si cambiamos el valor de los  $y_n$  alrededor del set de valores

$\{y^0\}$  . El cambio en  $F$  está dado por

$$dF = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial y_n} \right)_{y^0} dy_n. \quad (\text{A.1})$$

Para ver cómo se comporta el cambio en  $F$  en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  reescribimos la expresión anterior en la forma

$$dF = \sum_{n=1}^N \epsilon \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F}{\partial y_n} \right)_{y^0} dy_n, \quad (\text{A.2})$$

la cual claramente evoca la definición de integral por Riemann, es decir,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \epsilon f(x_n). \quad (\text{A.3})$$

Luego, tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $x = a + n\epsilon$  y usando la notación  $dy_n = \delta y(x)$  obtenemos

$$dF = \int_a^b dx \left( \frac{\delta F}{\delta y(x)} \right)_{y^0(x)} \delta y(x), \quad (\text{A.4})$$

donde la  $y^0(x)$  es la función particular  $y(x)$  que sirve como punto de partida para el cambio infinitesimal  $\delta y(x)$ , y el factor  $1/\epsilon$  ha sido incluido en el término  $\delta F/\delta y(x)$ .

El resultado anterior puede ser interpretado de la siguiente forma: El cambio en  $F$  es una suma de términos proporcionales a los cambios infinitesimales  $\delta y(x)$ , cuyas constantes de proporcionalidad son la derivada funcional  $\delta F/\delta y(x)$ . Para fines prácticos podemos considerar este resultado como la definición de derivada funcional.

### Ejemplo simple de cálculo de derivada funcional

Consideremos ahora el funcional  $F$  definido como

$$F[y] = \int_0^1 y(x)^2 dx. \quad (\text{A.5})$$

Para calcular la derivada funcional comenzamos calculando el cambio  $dF$  debido a un cambio infinitesimal  $\delta y(x)$  en las variables independientes, esto es

$$F[y + \delta y] = \int_0^1 (y(x) + \delta y(x))^2 dx \quad (\text{A.6})$$

$$= \int_0^1 (y(x)^2 + 2y(x)\delta y(x) + \delta y(x)^2) dx. \quad (\text{A.7})$$

Considerando que tomaremos el límite  $\delta y(x) \rightarrow 0$  podemos eliminar el término cuadrático en  $\delta y$ , obteniendo de esta forma

$$F[y + \delta y] = \int_0^1 \delta y(x)^2 dx + \int_0^1 2y(x)\delta y(x) dx. \quad (\text{A.8})$$

De modo que tenemos

$$dF = F[y + \delta y] - F[y] = \int_0^1 2y(x)\delta y(x) dx. \quad (\text{A.9})$$



Comparando con la definición de derivada funcional obtenemos finalmente que

$$\frac{\delta F}{\delta y(x)} = 2y(x). \quad (\text{A.10})$$

En general, un funcional puede depender de más de una función, por ejemplo

$$F[y(x), z(x)] = \int_0^1 y(x)^2 z(x)^3 dx. \quad (\text{A.11})$$

En este caso tenemos que

$$\frac{\delta F}{\delta y(x)} = 2y(x)z(x)^3, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\delta F}{\delta z(x)} = 3y(x)^2 z(x)^2. \quad (\text{A.13})$$

Es posible también que la o las funciones dependan de más de una variable, por ejemplo

$$F[f(x, y, z)] = \int_V dV [f(x, y, z)]^3, \quad (\text{A.14})$$

de donde vemos que la derivada funcional

$$\frac{\delta F}{\delta f(x, y, z)} = 3[f(x, y, z)]^2 \quad (\text{A.15})$$

es tal como en el caso unidimensional.

## Ecuaciones de Euler I

En algunos casos especiales es posible obtener expresiones simples para las derivadas de funcionales genéricos con dependencias simples. Consideremos por ejemplo el funcional

$$F[y] = \int dx L(x, y(x)). \quad (\text{A.16})$$

Éste es una integral simple cuyo integrando es una función de  $x$  e  $y(x)$ . Variando  $y(x)$  tenemos

$$F[y + \delta y] = \int dx L(x, y + \delta y) = \int \left( L(x, y) + \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \delta y \right), \quad (\text{A.17})$$

donde hemos omitido todos los términos de orden superior a  $\delta y$ . Esto nos conduce a

$$F[y + \delta y] - F[y] = \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \delta y, \quad (\text{A.18})$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial L(x, y(x))}{\partial y(x)}. \quad (\text{A.19})$$

Un caso un tanto más complicado es un funcional de la forma

$$F[y] = \int dx L(x, y(x), y'(x)), \quad (\text{A.20})$$

donde  $y'(x) = dy(x)/dx$ . Una variación de  $y(x)$  nos conduce a

$$F[y + \delta y] = \int dx L(x, y + \delta y, y' + \delta y'), \quad (\text{A.21})$$

donde  $\delta y'$  corresponde a  $d(\delta y)/dx$ , es decir a la derivada de la variación. Expandiendo a primer orden en la variación y sus derivadas obtenemos

$$F[y + \delta y] = \int dx \left( L(x, y, y') + \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \delta y' \right). \quad (\text{A.22})$$

Para poder usar la definición de derivada funcional debemos escribir el último término en función de la variación  $\delta y$ . Esto puede ser hecho por medio de una integración por partes, es decir,

$$\int_a^b \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \delta y' dx = \left[ \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \right) \delta y(x). \quad (\text{A.23})$$

Luego, obtenemos que

$$F[y + \delta y] - F[y] = \int_a^b dx \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y} \delta y(x) - \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \right) \delta y(x) + \left[ \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \delta y \right]_a^b. \quad (\text{A.24})$$

Agrupando términos la expresión anterior es

$$F[y + \delta y] - F[y] = \int_a^b dx \left[ \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) + \left[ \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \delta y(x) \right]_a^b. \quad (\text{A.25})$$

Asumiendo que el segundo término se anula, obtenemos que la derivada funcional está dada por

$$\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \right). \quad (\text{A.26})$$

Éstas son las ecuaciones de Euler cuando la derivada funcional se iguala a cero.

Otro conjunto útil de ecuaciones tipo Euler es obtenido al considerar un funcional de la forma

$$F[f(x, y, z)] = \int_V dx dy dz L(x, y, z, f, f_x, f_y, f_z), \quad (\text{A.27})$$

donde vemos que la función  $f$  depende ahora de tres variables independientes y  $L$  depende de las primeras derivadas de  $f$  con respecto a las variables independientes. La variación de la función  $f$  nos lleva a

$$F[f + \delta f] = \int_V dx dy dz L(x, y, z, f + \delta f, f_x + \delta f_x, f_y + \delta f_y, f_z + \delta f_z). \quad (\text{A.28})$$

Expandiendo hasta primer orden en las variaciones y las derivadas de las variaciones obtenemos

$$F[f + \delta f] = \int_V dx dy dz \left( L + \frac{\partial L}{\partial f} \delta f + \frac{\partial L}{\partial x} \delta f_x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta f_y + \frac{\partial L}{\partial z} \delta f_z \right). \quad (\text{A.29})$$

Los términos proporcionales a las variaciones  $\delta f_x$ ,  $\delta f_y$  y  $\delta f_z$  pueden ser relacionados con la variación  $\delta f$  por medio de integración por partes, esto es

$$\int_V dx dy dz \frac{\partial L}{\partial x} \delta f_x = \left[ \frac{\partial L}{\partial f_x} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \delta f(x, y, z), \quad (\text{A.30})$$

$$\int_V dx dy dz \frac{\partial L}{\partial y} \delta f_y = \left[ \frac{\partial L}{\partial f_y} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial f_y} \right) \delta f(x, y, z), \quad (\text{A.31})$$

y

$$\int_V dx dy dz \frac{\partial L}{\partial z} \delta f_z = \left[ \frac{\partial L}{\partial f_z} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial f_z} \right) \delta f(x, y, z). \quad (\text{A.32})$$

Usando las ecuaciones anteriores, el cambio en  $F$  debido a la variación en  $f$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
F[f + \delta f] - F[f] &= \int_V dx dy dz \frac{\partial L}{\partial f} \delta f \\
&+ \left[ \frac{\partial L}{\partial f_x} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \delta f(x, y, z) \\
&+ \left[ \frac{\partial L}{\partial f_y} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial f_y} \right) \delta f(x, y, z) \\
&+ \left[ \frac{\partial L}{\partial f_z} \delta f \right]_{\partial V} - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial f_z} \right) \delta f(x, y, z). \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
F[f + \delta f] - F[f] &= \int_V dx dy dz \frac{\partial L}{\partial f} \delta f - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \delta f(x, y, z) \\
&- \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial f_y} \right) \delta f(x, y, z) - \int_V dx dy dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial f_z} \right) \delta f(x, y, z) \\
&+ \left[ \frac{\partial L}{\partial f_x} \delta f \right]_{\partial V} + \left[ \frac{\partial L}{\partial f_y} \delta f \right]_{\partial V} + \left[ \frac{\partial L}{\partial f_z} \delta f \right]_{\partial V}.
\end{aligned}$$

Asumiendo que la variación se anula en la frontera obtenemos finalmente que la derivada funcional de  $F$  está dada por

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial f_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial f_z} \right). \quad (\text{A.34})$$

## Ecuaciones de Euler II

En esta sección obtendremos las ecuaciones de Euler por un procedimiento ligeramente distinto. Nuestro objetivo es minimizar la integral

$$F = \int_{x_a}^{x_b} L(x, y, y') dx, \quad (\text{A.35})$$

donde  $L$  es una función fija de  $x$ ,  $y$  e  $y'$ . Los valores de  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $y(x_a) = y_a$  e  $y(x_b) = y_b$  son dados (fijos).

Para resolver el problema presentado por la minimización de  $F$  usaremos una familia de funciones  $y(x, \epsilon)$ . Dicha familia está parametrizada por medio de  $\epsilon \in [0, 1]$  y sus miembros satisfacen las siguientes propiedades:

- $y(x_a, \epsilon) = y_a$  y  $y(x_b, \epsilon) = y_b$  para todo valor de  $\epsilon$ .
- $y(x, \epsilon = 0) = y(x)$  minimiza  $F$ .
- $y(x, \epsilon)$  y sus derivadas hasta el segundo orden son continuas en  $x$  y  $\epsilon$ .

Usaremos el siguiente función de  $\epsilon$  para comparar con  $F$

$$F(\epsilon) = \int_{x_a}^{x_b} L(x, y(x, \epsilon), y'(x, \epsilon)) dx. \quad (\text{A.36})$$

Dado que  $y(x, \epsilon = 0)$  minimiza a  $F(\epsilon)$  y siendo  $F(\epsilon)$  una función diferenciable y continua de  $\epsilon$ , podemos aplicar los métodos del cálculo elemental para obtener el mínimo. Una condición necesaria para obtener el mínimo es

$$\left( \frac{dF}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 0. \quad (\text{A.37})$$

Esta condición nos lleva a

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{dy'}{d\epsilon} \right) dx. \quad (\text{A.38})$$

Esta expresión puede ser puesta en la forma

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{d\epsilon} \right) \right) dx. \quad (\text{A.39})$$

El segundo término puede ser integrado por partes, de modo que obtenemos

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} dx - \int_{x_a}^{x_b} \frac{dy}{d\epsilon} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx + \left[ \frac{dy}{d\epsilon} \frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_a}^{x_b}. \quad (\text{A.40})$$

Puesto que los extremos de la variación son fijos se cumple que

$$\left( \frac{dy}{d\epsilon} \right)_{x=x_a} = \left( \frac{dy}{d\epsilon} \right)_{x=x_b} = 0. \quad (\text{A.41})$$

Por lo tanto, obtenemos finalmente:

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} dx - \int_{x_a}^{x_b} \frac{dy}{d\epsilon} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx. \quad (\text{A.42})$$

Aplicando la condición necesaria para obtener el mínimo llegamos a

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \left( \frac{dy}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (\text{A.43})$$

Puesto que la función

$$\eta(x) = \left( \frac{dy}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} \quad (\text{A.44})$$

es arbitraria tenemos que el resto del integrando debe anularse, luego

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (\text{A.45})$$

## Conexión con Mecánica Clásica

En Mecánica Clásica las trayectorias que sigue un sistema son soluciones de las ecuaciones de Lagrange, las que a su vez son obtenidas como una extremización de la acción. Ésta está definida de la siguiente forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, x(t), x'(t)), \quad (\text{A.46})$$

donde  $L(t, x(t), x'(t))$  es el Lagrangeano del sistema. Considerando las ecuaciones de Euler antes deducidas con las equivalencias  $x \rightarrow t$ ,  $y(x) \rightarrow x(t)$  e  $y'(x) \rightarrow x'(t)$  obtenemos entonces que la derivada funcional de la acción está dada por

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial L(t, x(t), x'(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(t, x(t), x'(t))}{\partial y'} \right). \quad (\text{A.47})$$

El principio (de mínima acción) de Hamilton establece que las trayectorias físicas son aquellas que extreman la acción (pueden ser mínimos o máximos), es decir aquellas que son soluciones de  $\delta S/\delta x(t)$  o, equivalentemente,

$$\frac{\partial L(t, x(t), x'(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(t, x(t), x'(t))}{\partial x'} \right) = 0. \quad (\text{A.48})$$

Nótese que los extremos de la acción son obtenidos de la misma forma que cuando se extrema una función. Este conjunto de ecuaciones es conocido como las ecuaciones de Euler-Lagrange. Dado que en el principio variacional de Hamilton las condiciones de frontera  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  están fijas, no es necesario considerar los términos de frontera en la derivada funcional de la acción.

## Conexión con Teoría Clásica de Campos

## Apéndice B

# Cuantización del oscilador armónico unidimensional.

Sabemos que el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional de masa  $m$  y frecuencia  $\omega$  tiene la forma:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{q}^2, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  son los operadores de momentum lineal y de posición, respectivamente.

### B.1. Energía mínima y niveles de energía.

Dos formas simples de estudiar al oscilador armónico y de encontrar sus niveles de energía permitidos son usando el principio de indeterminación de Heisenberg y la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld. A pesar de su simplicidad, no nos permiten un estudio completo del problema ya que no podemos por ejemplo obtener los estados correspondientes a cada energía. Tampoco suministran un método que podamos utilizar para luego abordar problemas más complejos, como la cuantización del campo electromagnético, que son modelados mediante el oscilador armónico.

#### B.1.1. Principio de Indeterminación.

En realidad este camino nos lleva directamente a encontrar sólo la energía mínima que puede tener el oscilador.

Para esto, resulta obvio calcular el valor esperado de la energía ocupando el Hamiltoniano del sistema:

$$\langle E \rangle = \langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle + \frac{m}{2} \omega^2 \langle \hat{q}^2 \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Las expresiones  $\langle \hat{p}^2 \rangle$  y  $\langle \hat{q}^2 \rangle$  podemos obtenerlas de la relación de desviación cuadrática para un operador arbitrario  $\hat{O}$  :

$$(\Delta \hat{O})^2 = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2. \quad (\text{B.3})$$

luego, para nuestros operadores:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = (\Delta \hat{p})^2 + \langle \hat{p} \rangle^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = (\Delta \hat{q})^2 + \langle \hat{q} \rangle^2. \quad (\text{B.5})$$

Sabemos que

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle \psi | \hat{q} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} q |\psi(q)|^2 dq, \quad (\text{B.6})$$

pero  $q |\psi(q)|^2$  es una función antisimétrica que está siendo integrada sobre un intervalo simétrico, y por lo tanto, su valor es cero.

Por otro lado, para el operador momentum tenemos que

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q) \frac{\partial}{\partial q} \psi(q). \quad (\text{B.7})$$

Haciendo el cambio de variable  $\zeta = \frac{\hat{q}}{\lambda}$  con

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (\text{B.8})$$

obtenemos

$$\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \psi^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(\zeta). \quad (\text{B.9})$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(\zeta) = \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{2}}}{N} \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta} + \zeta \psi(\zeta), \quad (\text{B.10})$$

donde la función  $H$  son los polinomios de Hermite y  $N$  es una constante de normalización. La función de onda  $\psi(\zeta)$  está relacionada con los polinomios de Hermite mediante

$$\psi(\zeta) = H(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}}, \quad (\text{B.11})$$

que corresponde a la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \psi(\zeta) - \zeta^2 \psi(\zeta) = 0, \quad (\text{B.12})$$

que se deriva de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico en la representación de coordenadas

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2 |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (\text{B.14})$$

de modo que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \psi(q) + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \psi(q) = E \psi(q). \quad (\text{B.15})$$

Cuando hacemos la sustitución dada por la ecuación (B.8) donde

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} \psi(q) = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial q} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{m\omega}{\hbar} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2}, \quad (\text{B.21})$$

entonces

$$-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial^2\psi(\zeta)}{\partial\zeta^2} + \frac{\hbar\omega}{2}\zeta^2\psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \quad (\text{B.22})$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2\psi(\zeta)}{\partial\zeta^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \zeta^2\right)\psi(\zeta) = 0, \quad (\text{B.23})$$

y considerando desplazamientos grandes, e.d.,  $\zeta \gg \frac{2E}{\hbar\omega}$ ,

$$\frac{\partial^2\psi(\zeta)}{\partial\zeta^2} - \zeta^2\psi(\zeta) = 0. \quad (\text{B.24})$$

La solución de esta ecuación diferencial la asumimos como

$$\psi(\zeta) = H(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}}. \quad (\text{B.25})$$

La ecuación (B.10) la obtenemos fácilmente sustituyendo la solución anterior en la ecuación diferencial (B.24) y luego integrando una vez con respecto a  $\zeta$ .

Volviendo a lo nuestro, reemplazamos la ecuación (B.10) en la ecuación (B.9) del valor esperado del momentum  $p$  obtenemos que este último puede ser escrito como:

$$\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \psi^*(\zeta) \left( \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{2}}}{N} \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta} + \zeta \psi(\zeta) \right) \quad (\text{B.26})$$

$$= -\frac{i\hbar}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \psi^*(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta} - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \psi^*(\zeta) \zeta \psi(\zeta) \quad (\text{B.27})$$

$$= -\frac{i\hbar}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \zeta |\psi(\zeta)|^2 d\zeta \quad (\text{B.28})$$

$$= -\frac{i\hbar}{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} H(\zeta) \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \zeta |\psi(\zeta)|^2 d\zeta, \quad (\text{B.29})$$

pero, como los polinomios de Hermite son simétricos o antisimétricos en su argumento, el producto  $H(\zeta) \frac{\partial H(\zeta)}{\partial \zeta}$  es siempre antisimétrico. Por lo tanto, la integral se anula. Además, la segunda integral también se anula por la misma razón que se anulaba la correspondiente a  $\langle \hat{q} \rangle$ .

Por lo tanto, podemos decir que por razones de simetría en las integrales se cumple:

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{q} \rangle = 0. \quad (\text{B.30})$$

Esto tiene sentido ya que en una oscilación completa, el valor medio de la posición debe anularse al igual que su momentum.

Finalmente, volviendo a las ecuaciones (B.4) y (B.5) tenemos:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = (\Delta \hat{p})^2, \quad (\text{B.31})$$

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = (\Delta \hat{q})^2. \quad (\text{B.32})$$

Del principio de indeterminación de Heisenberg tenemos que:

$$(\Delta \hat{p})^2 (\Delta \hat{q})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (\text{B.33})$$

y, puesto que para el estado fundamental es válida la igualdad, de las ecuaciones (B.4) y (B.5) obtenemos

$$\langle \hat{p}^2 \rangle \langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (\text{B.34})$$



Reemplazando esta última ecuación en la ecuación (B.2) tenemos

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{4 \langle \hat{q}^2 \rangle} + \frac{m}{2} \omega^2 \langle \hat{q}^2 \rangle \quad (\text{B.35})$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\langle \hat{q}^2 \rangle} + \frac{m}{2} \omega^2 \langle \hat{q}^2 \rangle \quad (\text{B.36})$$

Ahora, minimizando  $\langle E \rangle$  con respecto a  $\langle \hat{q}^2 \rangle$

$$\frac{d \langle E \rangle}{d \langle \hat{q}^2 \rangle} = 0, \quad (\text{B.37})$$

tenemos

$$-\frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\langle \hat{q}^2 \rangle_{\text{mín}}^2} + \frac{m}{2} \omega^2 = 0, \quad (\text{B.38})$$

de modo que

$$\langle \hat{q}^2 \rangle_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}} = \frac{\hbar}{2m\omega}. \quad (\text{B.39})$$

Para terminar, sólo queda reemplazar  $\langle \hat{q}^2 \rangle_{\text{mín}}$  en la ecuación (B.36). Haciendo esto obtendremos que

$$\langle E \rangle_{\text{mín}} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\frac{\hbar}{2m\omega}} + \frac{m}{2} \omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (\text{B.40})$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (\text{B.41})$$

que es la energía mínima posible del oscilador armónico.

## B.2. Niveles de energía y estados cuánticos de energía.

Ahora desarrollaremos un método que nos permitirá encontrar; además de los niveles de energía, los estados cuánticos del sistema correspondientes a esas energías y nos dará directrices para poder estudiar sistemas más complicados.

### B.2.1. Operadores de Creación y de Destrucción.

Sabemos que el hamiltoniano cuántico del oscilador armónico esta dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2, \quad (\text{B.42})$$

donde utilizamos la regla de cuantización

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dq}, \quad (\text{B.43})$$

para el operador de momentum lineal en la representación de coordenadas. Así, la ecuación de Schrödinger,

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (\text{B.44})$$

para el oscilador en esta representación es

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (\text{B.45})$$

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{q}^2\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (\text{B.46})$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m}{2}\omega^2q^2\right)\psi(q) = E\psi(q). \quad (\text{B.47})$$

Ahora introducimos el cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\zeta, \quad (\text{B.48})$$

que implica

$$\frac{d}{dq} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dq} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{d\zeta}, \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{d^2}{dq^2} = \frac{d}{dq} \left( \frac{d}{dq} \right) = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{d\zeta^2}. \quad (\text{B.50})$$

De este modo,  $\zeta$  será nuestra nueva coordenada adimensional. La ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{m}{2}\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \zeta^2\right)\psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \quad (\text{B.51})$$

$$\left(-\frac{\hbar}{2}\omega \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{\hbar}{2}\omega \zeta^2\right)\psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \quad (\text{B.52})$$

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^2 \right) \right] \psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \quad (\text{B.53})$$

$$\hbar\omega \hat{N} \psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \quad (\text{B.54})$$

donde

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{N}, \quad (\text{B.55})$$

y

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^2 \right), \quad (\text{B.56})$$

es el operador Hamiltoniano en unidades de  $\hbar\omega$ , llamado operador de Número.

Veamos qué podemos hacer con el término  $-\frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^2$ . Usando

$$\left[\zeta, \frac{d}{d\zeta}\right] = -1, \quad (\text{B.57})$$

podemos escribir:

$$-\frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^2 = \left(-\frac{d}{d\zeta} + \zeta\right) \left(\frac{d}{d\zeta} + \zeta\right) + 1, \quad (\text{B.58})$$

o, de una manera más conveniente,

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{d\zeta} + \zeta\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\zeta} + \zeta\right) + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.59})$$

En efecto:

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \hat{\zeta} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) + \frac{1}{2} \quad (\text{B.60})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \zeta + \frac{1}{2} \zeta \frac{d}{d\zeta} + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{B.61})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left( \hat{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{d}{d\zeta} \zeta \right) + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{B.62})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} [\zeta, \frac{d}{d\zeta}] + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{B.63})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{B.64})$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^2 \right). \quad (\text{B.65})$$

Así, la ecuación de Schrödinger queda escrita como:

$$\hbar\omega \hat{N}\psi(\zeta) = E\psi(\zeta) \quad (\text{B.66})$$

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) + \frac{1}{2} \right] \psi(\zeta) = E\psi(\zeta) \quad (\text{B.67})$$

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \psi(\zeta) + \frac{\hbar\omega}{2} \psi(\zeta) = E\psi(\zeta) \quad (\text{B.68})$$

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \psi(\zeta) = E\psi(\zeta) - \frac{\hbar\omega}{2} \psi(\zeta) \quad (\text{B.69})$$

$$\hbar\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \right] \psi(\zeta) = \left( E - \frac{\hbar\omega}{2} \right) \psi(\zeta) \quad (\text{B.70})$$

$$\hbar\omega \hat{b}^\dagger \hat{b} \psi(\zeta) = E' \psi(\zeta) \quad (\text{B.71})$$

donde hemos definido los nuevos operadores

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right), \quad (\text{B.72})$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right), \quad (\text{B.73})$$

y redefinido la energía al valor

$$E' = E - \frac{\hbar}{2}\omega. \quad (\text{B.74})$$

Como se puede ver, hemos encontrado una forma alternativa de escribir la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional en función de los nuevos operadores  $\hat{b}^\dagger$

y  $\hat{b}$  que tienen relaciones de conmutación

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} \quad (\text{B.75})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{d\zeta} + \zeta \right) \quad (\text{B.76})$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{d}{d\zeta}\zeta - \zeta\frac{d}{d\zeta} + \zeta^2 \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{d}{d\zeta}\zeta + \zeta\frac{d}{d\zeta} + \zeta^2 \right) \quad (\text{B.77})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta}\zeta - \frac{1}{2} \zeta \frac{d}{d\zeta} + \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta}\zeta - \frac{1}{2} \zeta \frac{d}{d\zeta} - \frac{1}{2} \zeta^2 \quad (\text{B.78})$$

$$= \frac{d}{d\zeta}\zeta - \zeta \frac{d}{d\zeta} \quad (\text{B.79})$$

$$= \left[ \frac{d}{d\zeta}, \zeta \right] \quad (\text{B.80})$$

$$= 1, \quad (\text{B.81})$$

que corresponden a las relaciones de conmutación bosónicas. Por lo tanto,  $\hat{b}$  y  $\hat{b}^\dagger$  son operadores de Bose.

Nos podemos preguntar cómo es el operador Número en función de los operadores  $\hat{b}^\dagger$  y  $\hat{b}$ . Esto se ve directamente de la ecuación (B.59) ocupando las definiciones dadas por las ecuaciones (B.72) y (B.73), en efecto:

$$\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.82})$$

Por lo tanto, de la ecuación (B.55) vemos que el Hamiltoniano del oscilador también puede ser escrito como función de estos nuevos operadores:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{N} = \hbar\omega \left( \hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{b}\hat{b}^\dagger - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.83})$$

### B.2.2. Eigenestados y Eigenenergías.

Ahora, podemos empezar a construir los eigenestados del oscilador armónico simple unidimensional. Recordemos que la ecuación de Schrödinger está dada por

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (\text{B.84})$$

lo que nos dice que  $|\psi\rangle$  es un estado cuántico del sistema con energía bien definida  $E$ .

Usaremos el Hamiltoniano dado por la ecuación (B.83). Por lo tanto, es conveniente considerar a los estados cuánticos  $|\psi\rangle$  del oscilador, como los eigenestados  $|n\rangle$  del operador Número  $\hat{N}$ . Entonces:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (\text{B.85})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle + \frac{\hbar}{2}\omega|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (\text{B.86})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle = E_n|n\rangle - \frac{\hbar}{2}\omega|n\rangle \quad (\text{B.87})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle = \left( E_n - \frac{\hbar}{2}\omega \right) |n\rangle \quad (\text{B.88})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle = E'_n|n\rangle, \quad (\text{B.89})$$

donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , y

$$E'_n = E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{B.90})$$

Partamos operando con  $\hat{b}$  sobre el estado base  $|0\rangle$ . Para este estado tenemos

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|0\rangle = E'_0|0\rangle, \quad E'_0 = E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{B.91})$$

Ahora, aplicando el operador  $\hat{b}$  obtenemos

$$\hbar\omega\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}|0\rangle = E'_0\hat{b}|0\rangle \quad (\text{B.92})$$

$$\hbar\omega\left(\hat{b}\hat{b}^\dagger\right)\hat{b}|0\rangle = E'_0\hat{b}|0\rangle \quad (\text{B.93})$$

$$\hbar\omega\left(1 + \hat{b}^\dagger\hat{b}\right)\hat{b}|0\rangle = E'_0\hat{b}|0\rangle \quad (\text{B.94})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}|0\rangle = E'_0\hat{b}|0\rangle - \hbar\omega\hat{b}|0\rangle \quad (\text{B.95})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}|0\rangle\right) = \left(E'_0 - \hbar\omega\right)\left(\hat{b}|0\rangle\right). \quad (\text{B.96})$$

Esta ecuación nos dice que  $\hat{b}|0\rangle$  es un nuevo eigenvector del Hamiltoniano con eigenvalor  $E'_0 - \hbar\omega$ . Al aplicar el operador  $\hat{b}$  vemos que obtenemos otro estado con energía  $\hbar\omega$  veces menor. Pero la suposición inicial fue que estábamos en el estado de más baja energía, por lo tanto para evitar esta contradicción debe ocurrir que

$$\hat{b}|0\rangle = 0, \quad (\text{B.97})$$

es decir, si el sistema está en el estado fundamental, no puede bajar a un estado de menor energía. Por lo tanto, su energía debe ser

$$E'_0 = 0, \quad (\text{B.98})$$

de donde encontramos que:

$$E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0, \quad (\text{B.99})$$

es decir,

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{B.100})$$

Ésta, como sabemos, es la mínima energía en la cual se puede encontrar el oscilador armónico unidimensional.

Ahora, apliquemos el operador  $\hat{b}^\dagger$  sobre el estado base:

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}^\dagger\hat{b}\right)|0\rangle = E_0\hat{b}^\dagger|0\rangle \quad (\text{B.101})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}\hat{b}^\dagger - 1\right)|0\rangle = E_0\hat{b}^\dagger|0\rangle \quad (\text{B.102})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|0\rangle\right) - \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger|0\rangle\right) = E_0\left(\hat{b}^\dagger|0\rangle\right) \quad (\text{B.103})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|0\rangle\right) = \left(E_0 + \hbar\omega\right)\left(\hat{b}^\dagger|0\rangle\right) \quad (\text{B.104})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|1\rangle = E_1|1\rangle. \quad (\text{B.105})$$

Es decir, el estado  $|1\rangle = \hat{b}^\dagger|0\rangle$  es un eigenestado de  $\hat{H}$  con eigenenergía  $E_1 = E_0 + \hbar\omega$ .

Ahora aplicamos  $\hat{b}^\dagger$  por la izquierda a la igualdad  $\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|1\rangle = E_1|1\rangle$ . Obtenemos

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}^\dagger\hat{b}\right)|1\rangle = E_1\hat{b}^\dagger|1\rangle \quad (\text{B.106})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}\hat{b}^\dagger - 1\right)|1\rangle = E_1\hat{b}^\dagger|1\rangle \quad (\text{B.107})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|1\rangle\right) - \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger|1\rangle\right) = E_1\left(\hat{b}^\dagger|1\rangle\right) \quad (\text{B.108})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|1\rangle\right) = \left(E_1 + \hbar\omega\right)\left(\hat{b}^\dagger|1\rangle\right) \quad (\text{B.109})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|2\rangle = E_2|2\rangle. \quad (\text{B.110})$$

Es decir, el estado  $|2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{b}^\dagger|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{b}^\dagger\right)^2|0\rangle$  es un eigenestado de  $\hat{H}$  con eigenenergía  $E_2 = E_1 + \hbar\omega = E_0 + 2\hbar\omega$ . El factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  es introducido de modo que el estado  $|2\rangle$  sea normalizado (ver más adelante).

Si volvemos a aplicar  $\hat{b}^\dagger$ , obtendremos

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}^\dagger\hat{b}\right)|2\rangle = E_2\hat{b}^\dagger|2\rangle \quad (\text{B.111})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}\hat{b}^\dagger - 1\right)|2\rangle = E_2\hat{b}^\dagger|2\rangle \quad (\text{B.112})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|2\rangle\right) - \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger|2\rangle\right) = E_2\left(\hat{b}^\dagger|2\rangle\right) \quad (\text{B.113})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}\left(\hat{b}^\dagger|2\rangle\right) = (E_2 + \hbar\omega)\left(\hat{b}^\dagger|2\rangle\right) \quad (\text{B.114})$$

$$\hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b}|3\rangle = (E_2 + \hbar\omega)|3\rangle, \quad (\text{B.115})$$

resultado análogo a los dos casos anteriores.

\*\*\*\*\* INSERTAR PRUEBA GENERAL! \*\*\*\*\*

Por lo tanto, podemos concluir que:

- Cualquier estado  $|n\rangle$  puede ser construido aplicando  $n$  veces el operador de creación  $\hat{b}^\dagger$  sobre el estado fundamental:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{b}^\dagger\right)^n|0\rangle, \quad (\text{B.116})$$

donde el factor  $\frac{1}{\sqrt{n!}}$  es para que los estados  $|n\rangle$  sean ortonormales.

- El espectro de energías está dado por la expresión:

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega \quad (\text{B.117})$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega \quad (\text{B.118})$$

$$= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.119})$$

es decir, cada vez que se aplica el operador de creación sobre un estado, estamos creando un quantum de energía  $\hbar\omega$ .

- La manera como operan  $\hat{b}$  y  $\hat{b}^\dagger$  sobre los estados  $|n\rangle$  es la siguiente

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (\text{B.120})$$

$$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (\text{B.121})$$

$$\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (\text{B.122})$$

Demostrar el último punto es fácil. Para demostrar la relación dada por (B.120), aplicamos  $\hat{b}^\dagger$  sobre la ecuación (B.116):

$$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{b}^\dagger\left(\hat{b}^\dagger\right)^n|0\rangle \quad (\text{B.123})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{(n+1)!}}\left(\hat{b}^\dagger\right)^{n+1}|0\rangle \quad (\text{B.124})$$

$$= \sqrt{\frac{n!(n+1)}{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\left(\hat{b}^\dagger\right)^{n+1}|0\rangle\right] \quad (\text{B.125})$$

$$= \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle. \quad (\text{B.126})$$

Por otro lado sabemos que:

$$|n-1\rangle \propto \hat{b}|n\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |n-1\rangle = c_{n-1}\hat{b}|n\rangle. \quad (\text{B.127})$$

Luego, si multiplicamos por el bra  $\langle n-1|$ , podremos encontrar la constante de proporcionalidad  $c_{n-1}$ . En efecto:

$$\langle n-1|n-1\rangle = c_{n-1}\langle n-1|\hat{b}|n\rangle \quad (\text{B.128})$$

$$= c_{n-1}\left[\langle n|c_{n-1}^*\hat{b}^\dagger\right]\hat{b}|n\rangle \quad (\text{B.129})$$

$$= c_{n-1}c_{n-1}^*\langle n|\hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle \quad (\text{B.130})$$

$$= c_{n-1}c_{n-1}^*\langle n|\hat{b}^\dagger(\hat{b}|n\rangle) \quad (\text{B.131})$$

$$= c_{n-1}c_{n-1}^*\langle n|\hat{b}^\dagger\left(\frac{1}{c_{n-1}}|n-1\rangle\right) \quad (\text{B.132})$$

$$= c_{n-1}c_{n-1}^*\frac{1}{c_{n-1}}\langle n|\hat{b}^\dagger|n-1\rangle \quad (\text{B.133})$$

$$= c_{n-1}^*\sqrt{n}\langle n|n\rangle \quad (\text{B.134})$$

$$= c_{n-1}^*\sqrt{n}, \quad (\text{B.135})$$

pero el lado izquierdo es igual a 1, debido a que  $\{|n\rangle\}$  es una base ortonormal. Por lo tanto,

$$c_{n-1}^*\sqrt{n} = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.136})$$

Ya que  $n$  es real, tenemos que

$$c_{n-1} = c_{n-1}^* = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.137})$$

con lo que demostramos la segunda relación

$$\hat{b}|n\rangle = \frac{1}{c_{n-1}}|n-1\rangle \quad (\text{B.138})$$

$$= \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (\text{B.139})$$

Demostrar (B.122) es trivial usando (B.120) y (B.121). En efecto:

$$\hat{b}^\dagger(\hat{b}|n\rangle) = \hat{b}^\dagger(\sqrt{n}|n-1\rangle) \quad (\text{B.140})$$

$$= \sqrt{n}(\hat{b}^\dagger|n-1\rangle) \quad (\text{B.141})$$

$$= \sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle \quad (\text{B.142})$$

$$= n|n\rangle. \quad (\text{B.143})$$

### B.3. Estados Coherentes

### B.4. Problemas.

1. El campo de radiación dentro de un recinto cúbico, que no contiene cargas, es especificado por el estado

$$|c\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \quad (\text{B.144})$$

donde

$$c = |c| e^{i\delta} \quad (\text{B.145})$$

es un número complejo cualquiera, y  $|n\rangle$  es el estado

$$|n_r(\mathbf{k})\rangle = \frac{[a_r^\dagger(\mathbf{k})]^{n_r(\mathbf{k})}}{\sqrt{n_r(\mathbf{k})!}} |0\rangle \quad (\text{B.146})$$

en el cual hay  $n$  fotones con vector de onda  $\mathbf{k}$ , y vector de polarización  $\varepsilon_r(\mathbf{k})$  presentes, y no otros. Derive las siguientes propiedades del estado  $|c\rangle$ :

a)  $|c\rangle$  es normalizado:  $\langle c|c\rangle = 1$ .

**Respuesta:** En efecto,

$$\begin{aligned} \langle c|c\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle m| \frac{c^{*m}}{\sqrt{m!}} \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \exp(-|c|^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle m| \frac{c^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \exp(-|c|^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \langle m|n\rangle &= \langle 0| \frac{[a(\mathbf{k})]^{m(\mathbf{k})}}{\sqrt{m(k)!}} \frac{[a^\dagger(\mathbf{k})]^{n(\mathbf{k})}}{\sqrt{n(k)!}} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \langle 0| a^m a^{\dagger n} |0\rangle \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} a^\dagger|0\rangle &= \sqrt{1}|1\rangle \\ a^{\dagger 2}|0\rangle &= \sqrt{1}a^\dagger|1\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle \\ &\vdots \\ a^{\dagger n}|0\rangle &= \sqrt{n!}|n\rangle \end{aligned}$$

y de la misma forma,

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^2|n\rangle &= \sqrt{n}a|n-1\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}|n-2\rangle \\ &\vdots \\ a^m|n\rangle &= \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}|n-m\rangle, \text{sim} \leq n \\ a^m|n\rangle &= 0, \text{sim} > n \end{aligned}$$



y entonces,

$$\begin{aligned}
\langle m|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \langle 0| a^m \sqrt{n!} |n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle 0| a^m |n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle 0| \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} |n-m\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{m!}} \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} \langle 0|n-m\rangle
\end{aligned}$$

Entonces

$$\langle m|n\rangle = \delta_m^n \quad (\text{B.147})$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle c|c\rangle &= \exp(-|c|^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \\
&= \exp(-|c|^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \delta_m^n \\
&= \exp(-|c|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{*n} c^n}{n!} \\
&= \exp(-|c|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c|^n}{n!} \\
&= \exp(-|c|^2) \exp(|c|^2) \\
&= 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

b)  $|c\rangle$  es un eigenestado del operador de destrucción  $a_r(\mathbf{k})$  con el eigenvalor complejo  $c$ :

$$a_r(\mathbf{k}) |c\rangle = c |c\rangle \quad (\text{B.148})$$

**Respuesta:** En efecto, recordemos<sup>1</sup> que

$$|c\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{B.149})$$

y

$$|n\rangle = \frac{[a^\dagger]^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (\text{B.150})$$

Primero que nada, sabemos que

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (\text{B.151})$$

así que

$$\begin{aligned}
a |c\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} a |n\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle
\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>He preferido suprimir el subíndice  $r$  y la dependencia en  $\mathbf{k}$  de todas las variables que pone el libro, para hacer la notación un poco más compacta y agradable.

pues

$$a |0\rangle = 0 \quad (\text{B.152})$$

Y así,

$$\begin{aligned} a |c\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= c \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= c \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= c |c\rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

c) El número medio  $\bar{N}$  de fotones en el recinto en el estado  $|c\rangle$ , es dado por

$$\bar{N} = \langle c | N | c \rangle = |c|^2 \quad (\text{B.153})$$

donde  $N$  es operador de número total de fotones.

**Respuesta:** En efecto, como

$$N \equiv a^\dagger a \quad (\text{B.154})$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \langle c | N | c \rangle \\ &= \langle c | a^\dagger a | c \rangle \end{aligned}$$

Como de la pregunta anterior

$$a |c\rangle = c |c\rangle, \quad (\text{B.155})$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \langle c | c^* c | c \rangle \\ &= |c|^2 \langle c | c \rangle \\ &= |c|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

d) La fluctuación cuadrática media  $\Delta N$  en el número de fotones en el recinto, en el estado  $|c\rangle$ , es dado por

$$(\Delta N)^2 = \langle c | N^2 | c \rangle - \bar{N}^2 = |c|^2 \quad (\text{B.156})$$

**Respuesta:** En efecto,

$$\begin{aligned} (\Delta N)^2 &= \langle c | N^2 | c \rangle - \bar{N}^2 \\ &= \langle c | a^\dagger a a^\dagger a | c \rangle - |c|^4 \\ &= \langle c | c^* a a^\dagger c | c \rangle - |c|^4 \\ &= |c|^2 \langle c | a a^\dagger | c \rangle - |c|^4 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1 \\ a a^\dagger - a^\dagger a &= 1 \\ a a^\dagger &= 1 + a^\dagger a \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(\Delta N)^2 &= |c|^2 \langle c | (1 + a^\dagger a) | c \rangle - |c|^4 \\
&= |c|^2 [\langle c | c \rangle + \langle c | a^\dagger a | c \rangle] - |c|^4 \\
&= |c|^2 [1 + |c|^2] - |c|^4 \\
&= |c|^2 + |c|^4 - |c|^4 \\
&= |c|^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

e) El valor de expectación del campo eléctrico  $\vec{E}$ , en el estado  $|c\rangle$ , está dado por

$$\langle c | \vec{E} | c \rangle = -2\varepsilon_r(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} |c| \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t + \delta) \quad (\text{B.157})$$

donde  $V$  es el volumen del recinto.

**Respuesta:** En efecto, como

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (\text{B.158})$$

Como no hay fuentes, podemos usar

$$\phi = 0 \quad (\text{B.159})$$

y entonces,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \vec{E}_T(\vec{x}, t) \quad (\text{B.160})$$

Así,

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) (-i\omega_{\mathbf{k}}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) (i\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= -i \frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} \left[ a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= -i \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
\vec{E}(\vec{x}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \left[ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (\text{B.161})
\end{aligned}$$

Como el estado  $|c\rangle$  sólo contiene fotones con sólo **un** vector de onda  $\mathbf{k}$  y **un** vector  $\varepsilon_r(\mathbf{k})$ , y no otros, entonces

$$\begin{aligned}\langle c|\vec{E}|c\rangle &= \langle c|i\sum_{\mathbf{k}}\sum_r\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right]|c\rangle \\ &= \langle c|i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right]|c\rangle\end{aligned}$$

ya que los otros estados posibles no están en la cavidad. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle c|\vec{E}|c\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\langle c|\left[a_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right]|c\rangle \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[\langle c|a_r(\mathbf{k})|c\rangle e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-\langle c|a_r^\dagger(\mathbf{k})|c\rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right] \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[\langle c|c|c\rangle e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-\langle c|c^*|c\rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right] \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[ce^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-c^*e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right] \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[ce^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-\left(ce^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right)^*\right]\end{aligned}$$

Si ahora escribimos

$$c = |c|e^{i\delta} \quad (\text{B.162})$$

entonces

$$\langle c|\vec{E}|c\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})|c|\left[e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)}-\left(e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)}\right)^*\right] \quad (\text{B.163})$$

Como

$$\begin{aligned}z &= z_R + iz_C \\ z - z^* &= z_R + iz_C - z_R + iz_C \\ &= 2iz_C\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\langle c|\vec{E}|c\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})2i|c|\sin(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t) \\ &= -2\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})|c|\sin(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t). \blacksquare\end{aligned}$$

f) La fluctuación cuadrática media del campo eléctrico,  $\Delta E$  en el estado  $|c\rangle$  está dada por

$$(\Delta E)^2 = \langle c|\vec{E}^2|c\rangle - \left[\langle c|\vec{E}|c\rangle\right]^2 = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \quad (\text{B.164})$$

**Respuesta:** En nuestro caso, sólo nos interesa el campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right] \quad (\text{B.165})$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon \left[ ae^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - a^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
\vec{E}^2 &= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ ae^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - a^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \left[ ae^{i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - a^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ a^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - aa^\dagger - a^\dagger a \right]
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= 1 \\
aa^\dagger - a^\dagger a &= 1 \\
aa^\dagger &= 1 + a^\dagger a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}^2 &= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ a^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - aa^\dagger - a^\dagger a \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ a^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 1 - a^\dagger a - a^\dagger a \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ a^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 1 - 2a^\dagger a \right]
\end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
\langle c | \vec{E}^2 | c \rangle &= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \langle c | \left[ a^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 1 - 2a^\dagger a \right] | c \rangle \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ \langle c | a^2 | c \rangle e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \langle c | \left(a^\dagger\right)^2 | c \rangle e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - \langle c | c \rangle - 2 \langle c | a^\dagger a | c \rangle \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ \langle c | cc | c \rangle e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \langle c | c^* c^* | c \rangle e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - \langle c | c \rangle - 2 \langle c | c^* c | c \rangle \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ c^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + (c^*)^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ |c|^2 e^{2i\delta} e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + |c|^2 e^{-2i\delta} e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ |c|^2 e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)} + |c|^2 e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)} - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ |c|^2 \left( e^{2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)} + e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)} \right) - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ 2|c|^2 \cos 2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta) - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ 2|c|^2 (1 - 2\sin^2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta)) - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ 2|c|^2 - 4|c|^2 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta) - 1 - 2|c|^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ -4|c|^2 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta) - 1 \right] \\
&= \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ 4|c|^2 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t+\delta) + 1 \right]
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\langle c | \vec{E} | c \rangle &= -2\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\varepsilon_r(\mathbf{k}) |c| \sin(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t) \\
\langle c | \vec{E} | c \rangle^2 &= 2\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V} |c|^2 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
(\Delta E)^2 &= \langle c | \vec{E}^2 | c \rangle - \left[ \langle c | \vec{E} | c \rangle \right]^2 \\
&= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \left[ 4 |c|^2 \sin^2 (\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \delta) + 1 \right] - 2 \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{V} |c|^2 \sin^2 (\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}} t) \\
&= 2 \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{V} |c|^2 \sin^2 (\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}} t + \delta) + \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} - 2 \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{V} |c|^2 \sin^2 (\mathbf{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\mathbf{k}} t) \\
&= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V}
\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el estado "localizado"  $|x\rangle := \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_{k'}}{\hbar}} \hat{\phi}(x) |0\rangle$

$$\langle x | x' \rangle = \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} \hat{\phi}^\dagger(x) \right] \left[ \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_{k'}}{\hbar}} \hat{\phi}(x') \right] | 0 \rangle \quad (\text{B.166})$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \sum_k \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} (\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_k^\dagger e^{-ikx} + \hat{b}_k e^{ikx} \right\} \right] \\
&\quad \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \sum_{k'} \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_{k'}}{\hbar}} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_{k'} e^{ik'x'} + \hat{b}_{k'}^\dagger e^{-ik'x'} \right\} \right] | 0 \rangle \quad (\text{B.167})
\end{aligned}$$

$$= \langle 0 | \left[ \sum_k \left\{ \hat{b}_k^\dagger e^{-ikx} + \hat{b}_k e^{ikx} \right\} \right] \left[ \sum_{k'} \left\{ \hat{b}_{k'} e^{ik'x'} + \hat{b}_{k'}^\dagger e^{-ik'x'} \right\} \right] | 0 \rangle \quad (\text{B.168})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{kk'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} | 0 \rangle e^{-ikx+ik'x'} + \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger | 0 \rangle e^{-ikx-ik'x'} \right. \\
&\quad \left. + \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'} | 0 \rangle e^{ikx+ik'x'} + \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger | 0 \rangle e^{ikx-ik'x'} \right\} \quad (\text{B.169})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{kk'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger | 0, \dots, 1_{k'}, 0, \dots \rangle e^{-ikx-ik'x'} \right. \\
&\quad \left. + \langle 0 | \left[ \delta(k - k') + \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k \right] | 0 \rangle e^{ikx-ik'x'} \right\} \quad (\text{B.170})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{kk'} \left\{ \langle 0 | 0, \dots, 1_k, 1_{k'}, 0, \dots \rangle e^{-ikx-ik'x'} + \delta(k - k') \langle 0 | 0 \rangle e^{ikx-ik'x'} \right. \\
&\quad \left. + \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k | 0 \rangle e^{ikx-ik'x'} \right\} \quad (\text{B.171})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{kk'} e^{ikx-ik'x'} \delta(k - k') \quad (\text{B.172})$$

$$= \sum_k e^{i(x-x')k} \quad (\text{B.173})$$

$$= \delta(x - x'), \quad (\text{B.174})$$

$$\langle x | k \rangle = \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_k}{\hbar}} \hat{\phi}^\dagger(x) \right] \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{B.175})$$

$$= \langle 0 | \left[ \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\lambda}} \sum_{k'} \sqrt{\frac{4\pi\lambda\omega_{k'}}{\hbar}} (\omega_{k'})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \hat{b}_{k'}^\dagger e^{-ik'x} + \hat{b}_{k'} e^{ik'x} \right\} \right] \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{B.176})$$

$$= \langle 0 | \left[ \sum_{k'} \left\{ \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger e^{-ik'x} + \hat{b}_{k'} \hat{b}_k^\dagger e^{ik'x} \right\} \right] | 0 \rangle \quad (\text{B.177})$$

$$= \sum_{k'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{-ik'x} + \langle 0 | \hat{b}_{k'} \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{ik'x} \right\} \quad (\text{B.178})$$

$$= \sum_{k'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{-ik'x} + \langle 0 | \left[ \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} + \delta(k - k') \right] | 0 \rangle e^{ik'x} \right\} \quad (\text{B.179})$$

$$= \sum_{k'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_k^\dagger | 0 \rangle e^{-ik'x} + \langle 0 | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} | 0 \rangle e^{ik'x} + \langle 0 | \delta(k - k') | 0 \rangle e^{ik'x} \right\} \quad (\text{B.180})$$

$$= \sum_{k'} \left\{ \langle 0 | \hat{b}_{k'}^\dagger | 0, \dots, 1_k, 0, \dots \rangle e^{-ik'x} + \delta(k - k') \langle 0 | 0 \rangle e^{ik'x} \right\} \quad (\text{B.181})$$

$$= \sum_{k'} \left\{ \langle 0 | 0, \dots, 1_k, 1_{k'}, 0, \dots \rangle e^{-ik'x} + \delta(k - k') \langle 0 | 0 \rangle e^{ik'x} \right\} \quad (\text{B.182})$$

$$= \sum_{k'} \delta(k - k') e^{ik'x} \quad (\text{B.183})$$

$$= e^{ikx}. \quad (\text{B.184})$$

## Interpretación

Luego, hacemos el siguiente cambio de variables:

$$a_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} + i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \quad (\text{B.185})$$

$$a_{\vec{k}\sigma}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} - i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \quad (\text{B.186})$$

de manera que el Hamiltoniano se transforme en:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\vec{k}\sigma} \omega_k \frac{\omega_k}{2\hbar} \left\{ \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} + i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} - i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) + \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} - i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \left( \hat{q}_{\vec{k}\sigma} + i \frac{\hat{p}_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \right\} \quad (\text{B.187})$$

$$= \sum_{\vec{k}\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \hat{p}_{\vec{k}\sigma}^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 \hat{q}_{\vec{k}\sigma}^2 \right\} \quad (\text{B.188})$$

que corresponde al conocido Hamiltoniano de un conjunto de infinitos osciladores armónicos desacoplados con polarización  $\sigma$ , cuyas variables "de campo" son  $\hat{p}_{\vec{k}\sigma}$  y  $\hat{q}_{\vec{k}\sigma}$ . Las relaciones de conmutación entre estas variables también es bien conocida, siendo:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\vec{k}\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}'\sigma'}] &= i\hbar \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{q}_{\vec{k}\sigma}, \hat{q}_{\vec{k}'\sigma'}] &= [\hat{p}_{\vec{k}\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}'\sigma'}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.189})$$

de la cual podemos finalmente obtener la relación de conmutación que tanto buscamos (la de nuestras nuevas variables del campo EM  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$  y  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ ) simplemente invirtiendo las ecuaciones (B.185), (B.186), y luego reemplazándolas en (B.189). En efecto, al invertir las ecuaciones

mencionadas obtenemos:

$$\hat{q}_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}^\dagger) \quad (\text{B.190})$$

$$\hat{p}_{\vec{k}\sigma} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (a_{\vec{k}\sigma} - a_{\vec{k}\sigma}^\dagger) \quad (\text{B.191})$$

y luego ocupando sus conmutadores:

$$[\hat{q}_{\vec{k}\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}'\sigma'}] = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.192})$$

$$\left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}^\dagger), -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{k'}}{2}} (a_{\vec{k}'\sigma'} - a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger) \right] = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.193})$$

$$-\frac{i\hbar}{2}\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} \left\{ -[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] - [a_{\vec{k}'\sigma'}, a_{\vec{k}\sigma}^\dagger] \right\} = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.194})$$

pero, si calculamos

$$[\hat{q}_{\vec{k}\sigma}, \hat{q}_{\vec{k}'\sigma'}] = 0 \quad (\text{B.195})$$

$$\left[ \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}^\dagger), \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{k'}}} (a_{\vec{k}'\sigma'} + a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger) \right] = 0 \quad (\text{B.196})$$

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = [a_{\vec{k}'\sigma'}, a_{\vec{k}\sigma}^\dagger] \quad (\text{B.197})$$

resultado que se corrobora con

$$[\hat{p}_{\vec{k}\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}'\sigma'}] = 0 \quad (\text{B.198})$$

$$\left[ -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (a_{\vec{k}\sigma} - a_{\vec{k}\sigma}^\dagger), -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{k'}}{2}} (a_{\vec{k}'\sigma'} - a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger) \right] = 0 \quad (\text{B.199})$$

$$[a_{\vec{k}'\sigma'}, a_{\vec{k}\sigma}^\dagger] = [a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] \quad (\text{B.200})$$

encontramos que:

$$-\frac{i\hbar}{2}\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} \left\{ -[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] - [a_{\vec{k}'\sigma'}, a_{\vec{k}\sigma}^\dagger] \right\} = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.201})$$

$$i\hbar\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} [a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.202})$$

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}}\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.203})$$

Como estamos realizando la observación (midiendo) en el mismo punto del espacio de los  $\vec{k}$  (de lo contrario sabemos que los operadores conmutan), el resultado es no nulo solo cuando  $\vec{k} = \vec{k}'$ , por lo tanto  $\omega_k = \omega_{k'}$  y:

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.204})$$

Los otros conmutadores son obvios:

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}] = [a_{\vec{k}\sigma}^\dagger, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = 0 \quad (\text{B.205})$$



por el razonamiento hecho anteriormente.

ara obtener la energía y el momentum lineal del campo electromagnético en función de nuestras nuevas variables de las amplitudes  $a_{\vec{k}\sigma}(t)$  usaremos las ecuaciones (??), (??) para reemplazarlas en las expresiones (3.67) y (3.78). En efecto<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int_V \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \left[ +\frac{1}{\mu_0} \left( \vec{k} \times \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \right) \cdot \left( \vec{k}' \times \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \right) \right] \left\{ a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \left\{ a_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}'\sigma'}^* e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \left[ +\frac{1}{\mu_0} \left\{ \left( \vec{k} \cdot \vec{k}' \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \right) - \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k}' \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \cdot \vec{k} \right) \right\} \right] \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'}^* e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\
&\quad \left. - a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\} \\
&= -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \left[ +\frac{1}{\mu_0} \left\{ \left( \vec{k} \cdot \vec{k}' \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \right) - \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k}' \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \cdot \vec{k} \right) \right\} \right] \left\{ \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'}^* \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'} \right) \right\} \\
&= -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k N_k^2 \left[ \begin{aligned} &\varepsilon_0 \omega_k^2 \left\{ \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{-\vec{k}\sigma'} \right) \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^* \right) - \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma'} \right) \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left( \vec{k} \cdot -\vec{k} \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{-\vec{k}\sigma'} \right) - \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot -\vec{k} \right) \left( \hat{\varepsilon}_{-\vec{k}\sigma'} \cdot \vec{k} \right) \right\} \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^* \right) \\ &- \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left( \vec{k} \cdot \vec{k} \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma'} \right) - \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} \right) \left( \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma'} \cdot \vec{k} \right) \right\} \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} \right) \end{aligned} \right] \\
&= -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k N_k^2 \left[ \begin{aligned} &\varepsilon_0 \omega_k^2 \left\{ -(-1)^\sigma \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^* \right) - \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} \right) \right\} \\ &+ \frac{k^2}{\mu_0} \left\{ (-1)^\sigma \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^* \right) - \left( a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} \right) \right\} \end{aligned} \right] \delta_{\sigma\sigma'} \\
&= \frac{(2\pi)^3 (2\varepsilon_0)}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k N_k^2 \omega_k^2 \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \right\} \\
&= \frac{(2\pi)^3 (2\varepsilon_0)}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \left( \frac{\hbar}{\varepsilon_0 (2\pi)^3 2\omega_k} \right) \omega_k^2 \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \right\} \\
&= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* \right\}
\end{aligned}$$

donde ocupamos explícitamente que

$$(\vec{k} \times \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}) \cdot (\vec{k}' \times \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}') (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) - (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k}') (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} \cdot \vec{k}) \quad (\text{B.207})$$

$$\omega_{-k} = \omega_k \quad (\text{B.208})$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot (-\vec{k}) = 0 \quad (\text{B.209})$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 \quad (\text{B.210})$$

$$\vec{k} \cdot (-\vec{k}) = -k^2 \quad (\text{B.211})$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{B.212})$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{-\vec{k}\sigma'} = -(-1)^\sigma \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{B.213})$$

$$k^2 = c^2 \omega_k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega_k^2 \quad (\text{B.214})$$

<sup>2</sup>Otra manera alternativa, hubiese sido reemplazar directamente (??) en las expresiones (3.60) y (??). Pero la que seguimos aquí es más didáctica.

y en especial, escogimos

$$N_{-k} = N_k = \sqrt{\frac{\hbar}{\varepsilon_0 (2\pi)^3 2\omega_k}} \left[ \frac{Nsm^{3/2}}{C} \right] \quad (\text{B.215})$$

de manera que la energía nos diera de la misma forma que la de un conjunto de osciladores armónicos tridimensionales desacoplados. Notar que esta elección para  $N_k$  también nos asegura que las dimensiones de las cantidades físicas en juego sean las correctas.

Así, cada modo normal del campo electromagnético, normalizado con (B.215), se comporta como un oscilador armónico clásico con energía  $\hbar\omega_k$ .

Analogamente, para el momentum lineal obtenemos<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \varepsilon_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV \\ &= -\varepsilon_0 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \omega_k \left\{ \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \times (\vec{k}' \times \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) \right\} \left\{ a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \left\{ a_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}'\sigma'}^* e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right\} \\ &= -\varepsilon_0 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3x \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \omega_k \left\{ \vec{k}' (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) - \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k}') \right\} \left\{ \begin{aligned} &a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'} e^{i(\vec{k} - (-\vec{k}')) \cdot \vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'}^* e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \\ &- a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'}^* e^{-i(\vec{k} - (-\vec{k}')) \cdot \vec{x}} \end{aligned} \right\} \\ &= -(2\pi)^3 \varepsilon_0 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k \int d^3k' N_k N_{k'} \omega_k \left\{ \vec{k}' (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) - \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'} (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k}') \right\} \left\{ \begin{aligned} &(a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'}^*) \delta^{(3)}(\vec{k} - (-\vec{k}')) \\ &- (a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}'\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}'\sigma'}^*) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \right\} \\ &= (2\pi)^3 \varepsilon_0 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} \left\{ \begin{aligned} &(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{-\vec{k}\sigma'}) (a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^*) \\ &+ (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma'}) (a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^*) \end{aligned} \right\} \\ &= (2\pi)^3 \varepsilon_0 \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3k \left( \frac{\hbar}{\varepsilon_0 (2\pi)^3 2\omega_k} \right) \omega_k \vec{k} \left\{ -(-1)^\sigma (a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma'}^*) + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma'} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma'}^* \right\} \delta_{\sigma\sigma'} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \right\} - 2\pi\varepsilon_0 \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \int d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma}^* \right\} \end{aligned}$$

pero analizemos un poco mejor la primera integral del segundo término:

$$\int d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} = \int d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.223})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.224})$$

$$= \int_{-\infty}^0 d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} + \int_0^{\infty} d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.225})$$

$$= \int_{-\infty}^0 d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} + \int_0^{-\infty} d^3(-k) N_{-k}^2 \omega_{-k} (-\vec{k}) a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.226})$$

$$= \int_{-\infty}^0 d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} + \int_0^{-\infty} d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.227})$$

$$= \int_{-\infty}^0 d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} - \int_{-\infty}^0 d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma} a_{-\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.228})$$

$$= 0 \quad (\text{B.229})$$

<sup>3</sup>Nuevamente ocupamos las relaciones (B.207)-(B.215).

y análogamente sucede con la segunda integral:  $\int d^3k N_k^2 \omega_k \vec{k} a_{\vec{k}\sigma}^* a_{-\vec{k}\sigma}^*$  del segundo término. Por lo tanto, el momentum lineal del campo electromagnético es:

$$\vec{P} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \left\{ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \right\} \quad (\text{B.230})$$

que siguiendo con la analogía del sistema de osciladores armónicos tridimensionales desacoplados, tiene la misma forma matemática.

Finalmente, gracias a las relaciones de conmutación encontradas, podemos modificar la forma de los operadores Hamiltoniano y momentum lineal, de modo que nos sean más útiles en los futuros cálculos. Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \right] + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \right\} \\ &= \hbar \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.231})$$

y de (B.230):

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \right] + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \right\} \\ &= \hbar \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \frac{\hbar}{2} \delta^{(3)}(0) \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \vec{k} \\ &= \hbar \sum_{\sigma} \int d^3k \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.232})$$

ya que la segunda integral del lado derecho se anula por que el integrando es una función impar integrada sobre un intervalo simétrico.

#### B.4.1. Estados de Glauber: Estados Coherentes del Campo Electromagnético.

Sabemos que el operador campo eléctrico está determinado por:

$$\vec{E} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (\text{B.233})$$

Generalmente el campo electromagnético contiene muchos fotones, y está caracterizado por el estado cuántico de  $n$ -fotones  $|\dots, n_{\vec{k}\sigma}, \dots, n_{\vec{k}'\sigma'}, \dots\rangle$ . Si solamente están presentes los fotones correspondientes al modo  $k$  y polarización  $\sigma$ , sabemos que el estado cuántico queda como  $|n_{\vec{k}\sigma}\rangle = |0_{11}, 0_{12}, \dots, n_{\vec{k}\sigma}, 0_{\vec{k}\sigma'}, \dots\rangle$ . Para determinar el valor clásico del campo  $\vec{E}$ , calculamos el valor de expectación del operador  $\vec{E}$  en el estado de polarización  $|n_{\vec{k}\sigma}\rangle$ . En

efecto:

$$\langle n_{\vec{k}\sigma} | \vec{E} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle = \langle n_{\vec{k}\sigma} | \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \right] | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.234})$$

$$= i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (\text{B.235})$$

$$= i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} - 1 \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} + 1 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (\text{B.236})$$

$$= 0 \quad (\text{B.237})$$

debido a la ortogonalidad de los estados  $\{|n_{\vec{k}\sigma}\rangle\}$ . Por otro lado, el valor esperado de la densidad de energía del campo  $\vec{E}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{2V} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \vec{E} \cdot \vec{E}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2V} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k \hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \right] \left[ -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma'} \int d^3k' (\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}(t) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right\} \right] | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \\ &= \frac{\hbar}{4V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \int d^3k \int d^3k' (\omega_k)^{\frac{1}{2}} (\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} (\hat{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}_{\vec{k}'\sigma'}) \left\{ \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} - \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{4V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \int d^3k \int d^3k' (\omega_k)^{\frac{1}{2}} (\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} [\delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')] \left\{ \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{i2\vec{k}\cdot\vec{x}} - \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i2\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{4V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle - \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{i2\vec{k}\cdot\vec{x}} - \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i2\vec{k}\cdot\vec{x}} + \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \right\} \\ &= \frac{\hbar}{4V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} + 1 \rangle - \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} - 1 \rangle e^{i2\vec{k}\cdot\vec{x}} - \sqrt{n_{\vec{k}\sigma} + 1} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} + 1 \rangle e^{-i2\vec{k}\cdot\vec{x}} + \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle n_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} | n_{\vec{k}\sigma} - 1 \rangle e^{i2\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{4V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ (n_{\vec{k}\sigma} + 1) \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle - \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} (n_{\vec{k}\sigma} - 1) \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} - 2 \rangle e^{i2\vec{k}\cdot\vec{x}} - \sqrt{(n_{\vec{k}\sigma} + 1) (n_{\vec{k}\sigma} + 2)} \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} + 2 \rangle e^{-i2\vec{k}\cdot\vec{x}} + n_{\vec{k}\sigma} \langle n_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \right\} \\ &= \frac{\hbar}{2V (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \int d^3k \omega_k \left\{ n_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Estos son resultados sorprendentes ya que el valor esperado del campo eléctrico en un estado de  $n$  fotones es nulo, mientras que la densidad de energía es, como era de esperar, igual a la mitad de  $n$  fotones cada uno con energía  $\hbar\omega_k$  por unidad de volumen. La otra mitad proviene de la contribución del campo magnético:  $\frac{1}{2\mu_0} B^2$ . La única manera de entender esto es que los  $n$  fotones del campo poseen fases y que ellas están distribuidas estadísticamente, de manera que el promedio sobre las fases del valor esperado de  $\vec{E}$  se anule. En la construcción de la densidad de energía, las fases quedan fuera: la densidad de energía es, en cada punto del espacio-tiempo, un número real y positivo.

Fué Glauber el que resolvió el problema introduciendo nuevos estados del campo electromagnético, para los cuales el valor de expectación del operador  $\vec{E}$  coincide con el campo eléctrico clásico  $\vec{E}$ . El precio que se paga es que se introduce una incerteza absoluta en el número de fotones que tiene el campo, pero esto nos permite definir la fase del campo de manera mas precisa.

Los estados de Glauber, o llamados también estados coherentes, se escogen como los estados base del operador  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$ :

$$\hat{a}_{\vec{k}\sigma} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle = c_{\vec{k}\sigma} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.245})$$

donde  $|c_{\vec{k}\sigma}\rangle = |0_{11}, 0_{12}, \dots, c_{\vec{k}\sigma}, 0_{\vec{k}\sigma'}, \dots\rangle$ , o sea, el estado de  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$  donde sólo el eigenvalor de  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$  no es nulo.

Estos estados, los podemos escribir en la base de estados del operador número para un modo y una polarización en particular<sup>4</sup>:  $|n_{\vec{k}\sigma}\rangle$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle &= \left( \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \langle n_{\vec{k}\sigma}| \right) |c_{\vec{k}\sigma}\rangle \\ &= \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.246})$$

donde  $c_{n_{\vec{k}\sigma}}$  son los coeficientes de la expansión, y que todavía hay que determinarlos. Para eso, exigimos que los coeficientes satisfagan (B.245), es decir:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle &= \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \\ &= c_0 \hat{a}_{\vec{k}\sigma} |0\rangle + \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \\ &= \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \\ &= \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} |n_{\vec{k}\sigma} - 1\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.247})$$

ya que  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma} |0\rangle = 0$ . Tener en cuenta que en el término que quedó, sólo están presentes los estados  $|n_{\vec{k}\sigma}\rangle$  distintos al del vacío, es decir, para  $n_{\vec{k}\sigma} = 1, 2, \dots$

Ahora, cambiando  $n_{\vec{k}\sigma} - 1 \rightarrow n_{\vec{k}\sigma}$  de manera que esté presente nuevamente el estado del vacío:

$$\hat{a}_{\vec{k}\sigma} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle = \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}+1} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.248})$$

e igualando con (B.245), obtenemos:

$$c_{\vec{k}\sigma} |c_{\vec{k}\sigma}\rangle = \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}+1} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.249})$$

pero  $|c_{\vec{k}\sigma}\rangle$  está dado por (B.246), entonces:

$$c_{\vec{k}\sigma} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle = \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}+1} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.250})$$

de donde se obtiene la ecuación de recurrencia para los coeficientes:

$$c_{n_{\vec{k}\sigma}+1} = \frac{c_{\vec{k}\sigma} c_{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1}}, \quad n_{\vec{k}\sigma} = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.251})$$

---

<sup>4</sup>Sólo cambia el número de fotones presentes en ese modo y polarización escogida.

Para:

$$n_{\vec{k}\sigma} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{c_{\vec{k}\sigma} c_0}{\sqrt{1}} \quad (\text{B.252})$$

$$n_{\vec{k}\sigma} = 1 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{c_{\vec{k}\sigma} c_1}{\sqrt{2}} = \frac{c_{\vec{k}\sigma}^2 c_0}{\sqrt{1 \cdot 2}} \quad (\text{B.253})$$

$$n_{\vec{k}\sigma} = 2 \quad \rightarrow \quad c_3 = \frac{c_{\vec{k}\sigma} c_2}{\sqrt{3}} = \frac{c_{\vec{k}\sigma}^3 c_0}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3}} \quad (\text{B.254})$$

$$\vdots \quad (\text{B.255})$$

$$n_{\vec{k}\sigma} = n_{\vec{k}\sigma} \quad \rightarrow \quad c_{n_{\vec{k}\sigma}} = \frac{c_{\vec{k}\sigma}^{n_{\vec{k}\sigma}} c_0}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}!}} \quad (\text{B.256})$$

por lo tanto:

$$|c_{\vec{k}\sigma}\rangle = \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} c_{n_{\vec{k}\sigma}} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.257})$$

$$= c_0 \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{c_{\vec{k}\sigma}^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}!}} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle, \quad c \in \blacksquare, \quad c_0 \in \blacksquare \quad (\text{B.258})$$

Para determinar el valor de  $c_0$  ocupamos la relación de normalización:

$$\langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle = |c_0|^2 \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}! m_{\vec{k}\sigma}!}} \langle m_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.259})$$

$$= |c_0|^2 \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}! m_{\vec{k}\sigma}!}} \delta_{m_{\vec{k}\sigma}, n_{\vec{k}\sigma}} \quad (\text{B.260})$$

$$= |c_0|^2 \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(|c_{\vec{k}\sigma}|^2)^{n_{\vec{k}\sigma}}}{n_{\vec{k}\sigma}!} \quad (\text{B.261})$$

$$= |c_0|^2 e^{|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \equiv 1 \quad (\text{B.262})$$

Elegimos

$$c_0 = e^{-\frac{|c_{\vec{k}\sigma}|^2}{2}} \quad (\text{B.263})$$

por lo tanto:

$$|c_{\vec{k}\sigma}\rangle = e^{-\frac{|c_{\vec{k}\sigma}|^2}{2}} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}!}} |n_{\vec{k}\sigma}\rangle \quad (\text{B.264})$$

De la expansión en estados de número de fotones para un modo y polarización determinada, vemos claramente que los estados  $|c_{\vec{k}\sigma}\rangle$  no tienen un número definido de fotones.

El valor esperado de  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$  en los estados de Glauber es:

$$\langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle = e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \langle m_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.265})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \langle m_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} - 1 \rangle \quad (\text{B.266})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}} \delta_{m_{\vec{k}\sigma}, n_{\vec{k}\sigma}-1} \quad (\text{B.267})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{m_{\vec{k}\sigma}+1}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! (m_{\vec{k}\sigma}+1)!}} \sqrt{m_{\vec{k}\sigma}+1} \quad (\text{B.268})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma} e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{m_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! m_{\vec{k}\sigma}! (m_{\vec{k}\sigma}+1)}} \sqrt{m_{\vec{k}\sigma}+1} \quad (\text{B.269})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma} e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(|c_{\vec{k}\sigma}|^2)^{m_{\vec{k}\sigma}}}{m_{\vec{k}\sigma}!} \quad (\text{B.270})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma} e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} e^{|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \quad (\text{B.271})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma} \quad (\text{B.272})$$

mientras que para  $\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger$  se tiene:

$$\langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger | c_{\vec{k}\sigma} \rangle = e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \langle m_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger | n_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.273})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} \langle m_{\vec{k}\sigma} | n_{\vec{k}\sigma} + 1 \rangle \quad (\text{B.274})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}, m_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{m_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{m_{\vec{k}\sigma}! n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} \delta_{m_{\vec{k}\sigma}, n_{\vec{k}\sigma}+1} \quad (\text{B.275})$$

$$= e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{n_{\vec{k}\sigma}+1} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{(n_{\vec{k}\sigma}+1)! n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} \quad (\text{B.276})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(c_{\vec{k}\sigma}^*)^{n_{\vec{k}\sigma}} (c_{\vec{k}\sigma})^{n_{\vec{k}\sigma}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\sigma}! (n_{\vec{k}\sigma}+1) n_{\vec{k}\sigma}!}} \sqrt{n_{\vec{k}\sigma}+1} \quad (\text{B.277})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \sum_{n_{\vec{k}\sigma}=0}^{\infty} \frac{(|c_{\vec{k}\sigma}|^2)^{n_{\vec{k}\sigma}}}{n_{\vec{k}\sigma}!} \quad (\text{B.278})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* e^{-|c_{\vec{k}\sigma}|^2} e^{|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \quad (\text{B.279})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* \quad (\text{B.280})$$

Ahora, si calculamos el valor esperado de un modo del campo  $\vec{E}$  con polarización fijada en el estado de Glauber respectivo, obtenemos el resultado esperado:

$$\begin{aligned}
\langle c_{\vec{k}\sigma} | \vec{E} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle &= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \left[ i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \sum_{\sigma} \int d^3k (\omega_k)^{\frac{1}{2}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \frac{1}{V} a_{\vec{k}'\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{1}{V} a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \right] | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \\
&= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \left[ \frac{i}{V} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ a_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \right] | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \\
&= \frac{i}{V} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger | c_{\vec{k}\sigma} \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \\
&= -\frac{2}{V} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \frac{c_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - c_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{2i} \right\}, \quad c_{\vec{k}\sigma} = |c_{\vec{k}\sigma}| e^{i\theta_{\vec{k}\sigma}} \\
&= -\frac{2}{V} |c_{\vec{k}\sigma}| \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left\{ \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \theta_{\vec{k}\sigma})} - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \theta_{\vec{k}\sigma})}}{2i} \right\} \\
&= -\frac{2}{V} |c_{\vec{k}\sigma}| \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \tilde{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \sin \left\{ \vec{k} \cdot \vec{x} + \theta_{\vec{k}\sigma} \right\}
\end{aligned}$$

Esta es la forma de una onda electromagnética clásica, cuya amplitud es dada por  $|c_{\vec{k}\sigma}|$  y cuya fase es determinada por la fase de  $c_{\vec{k}\sigma} = |c_{\vec{k}\sigma}| e^{i\theta_{\vec{k}\sigma}}$ .

Definimos<sup>5</sup> la indeterminación del número de fotones en el estado coherente  $|c_{\vec{k}\sigma}\rangle$ , para un modo y una polarización específica, por:

$$\Delta n_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\langle c_{\vec{k}\sigma} | \left( \hat{N}_{\vec{k}\sigma} - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^2 | c_{\vec{k}\sigma} \rangle} \quad (\text{B.288})$$

$$= \sqrt{\langle c_{\vec{k}\sigma} | \left( \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 - 2\hat{N}_{\vec{k}\sigma} \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2 \right) | c_{\vec{k}\sigma} \rangle} \quad (\text{B.289})$$

$$= \sqrt{\langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 | c_{\vec{k}\sigma} \rangle - 2 \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{N}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2 \langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle} \quad (\text{B.290})$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 \rangle - 2 \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2} \quad (\text{B.291})$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 \rangle - 2 \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2 - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2} \quad (\text{B.292})$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 \rangle - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2} \quad (\text{B.293})$$

<sup>5</sup>Es necesario bajar a la normalización en una caja, para evitar la poca claridad que puede provocar al considerar la delta de Dirac en el conmutador:

$$[a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.287})$$



donde:

$$\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle = \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{N}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.294})$$

$$= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.295})$$

$$= \left( \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right) \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) \quad (\text{B.296})$$

$$= \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^\dagger \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) \quad (\text{B.297})$$

$$= \left( c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^\dagger \left( c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) \quad (\text{B.298})$$

$$= \left( \langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma}^* \right) \left( c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) \quad (\text{B.299})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* c_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.300})$$

$$= |c_{\vec{k}\sigma}|^2 \quad (\text{B.301})$$

Por otro lado:

$$\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 \rangle = \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.302})$$

$$= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.303})$$

$$= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + [\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger] \right) \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.304})$$

$$= \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + 1 \right) \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.305})$$

$$= \left( \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right) \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) + \left( \langle c_{\vec{k}\sigma} | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \right) \left( \hat{a}_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) \quad (\text{B.306})$$

$$= c_{\vec{k}\sigma}^* c_{\vec{k}\sigma}^* c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle + c_{\vec{k}\sigma}^* c_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}\sigma} | c_{\vec{k}\sigma} \rangle \quad (\text{B.307})$$

$$= |c_{\vec{k}\sigma}|^4 + |c_{\vec{k}\sigma}|^2 \quad (\text{B.308})$$

por lo tanto:

$$\Delta n_{\vec{k}\sigma} = \sqrt{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma}^2 \rangle - \langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle^2} \quad (\text{B.309})$$

$$= \sqrt{|c_{\vec{k}\sigma}|^4 + |c_{\vec{k}\sigma}|^2 - |c_{\vec{k}\sigma}|^4} \quad (\text{B.310})$$

$$= |c_{\vec{k}\sigma}| \quad (\text{B.311})$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle} \quad (\text{B.312})$$

es decir, la incertidumbre aumenta al aumentar el valor de  $c_{\vec{k}\sigma}$ , o también, al aumentar el número de fotones presentes en el campo.

Es conveniente calcular la incertidumbre relativa;

$$\frac{\Delta n_{\vec{k}\sigma}}{\langle \hat{N}_{\vec{k}\sigma} \rangle} = \frac{|c_{\vec{k}\sigma}|}{|c_{\vec{k}\sigma}|^2} \quad (\text{B.313})$$

$$= \frac{1}{|c_{\vec{k}\sigma}|} \quad (\text{B.314})$$

la que se hace pequeña a medida que el promedio del número de fotones aumenta en los estados de Glauber. Entonces, para estados coherentes con muchos fotones presentes, el campo eléctrico cuántico se comporta como el campo clásico. Los estados coherentes son estados con indeterminación mínima, donde es válido el signo de la igualdad en la relación de incertidumbre de Heisenberg.