

## Capítulo 1

---

# Conceptos de mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo constituye el corazón de la mecánica clásica.

El contenido de este capítulo forma un núcleo básico de los resultados de la mecánica newtoniana que necesitaremos tener a mano para lo subsiguiente (leyes de conservación del momento lineal, momento angular y energía) así como ciertos rudimentos mínimos de la matemática usual en la resolución de los problemas.

## 1.1 Leyes de conservación

Repasaremos a continuación las leyes de conservación fundamentales de la mecánica para sistemas de partículas.

### 1.1.1 Momento lineal

La segunda ley de Newton se podía escribir en función del momento lineal de una partícula de masa  $m$  como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

siendo  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  el momento de la partícula y  $\mathbf{F}$  la fuerza total que actuaba sobre la misma. Si el resultado de las fuerzas sobre la partícula era nulo entonces se tiene que  $\mathbf{p} = \text{cte.}$  (el momento lineal es una constante de movimiento).

En el caso de un sistema de  $N$  partículas como el mostrado en la Figura 1.1 el momento total del sistema es la suma de los momentos individuales, es decir

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$$

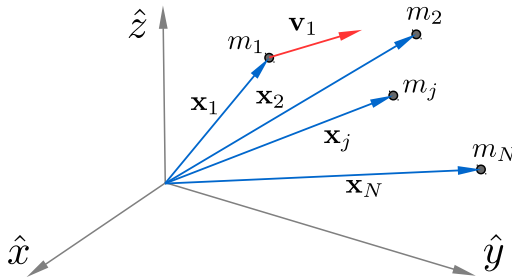
luego la segunda ley para el sistema serán las  $N$  ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza total sobre la partícula  $i$ -ésima que puede descomponerse según

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

siendo  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  las fuerzas debidas a agentes externos y  $\mathbf{F}_{ij}$  la fuerza sobre la partícula  $i$  debido a la partícula  $j$ .



**Figura 1.1** Sistema de partículas de masas  $m_i$  con sus correspondientes vectores de posición  $\mathbf{x}_i$ . La partícula  $m_1$  tiene además indicado su vector velocidad  $\mathbf{v}_1$ .

Entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}$$

pero el último término del RHS es nulo puesto que por cada sumando  $\mathbf{F}_{ij}$  también aparece el sumando  $\mathbf{F}_{ji}$  y por acción y reacción estas fuerzas tienen la

misma dirección y sentido opuesto, i.e.

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

De esta forma la ley de conservación para el sistema es

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{total}}^{\text{ext}}$$

y el momento  $\mathbf{P}$  del sistema se conserva si la resultante de todas las fuerzas externas es nula.

Definiendo el vector de posición del centro de masa como

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M}$$

donde  $M$  es la masa del sistema, se tiene el resultado clásico de que

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{x}_{\text{cm}}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \mathbf{P},$$

el sistema como un todo tiene un momento total que puede asociársele al de una única partícula *centro de masa* de masa  $M$  y que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ .

Si  $\mathbf{P}$  se conserva, entonces  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$  es una constante, el sistema posee un punto (el centro de masas) que se mueve con velocidad constante sin importar qué tan complejo sea el movimiento del conjunto total.

### 1.1.2 Momento angular

El momento angular de una partícula con momento lineal  $\mathbf{p}$  es

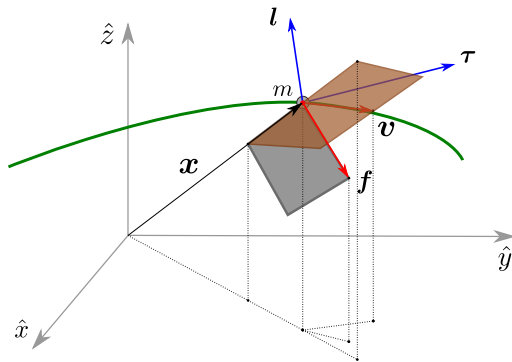
$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = m \mathbf{x} \times \mathbf{v}$$

como puede verse en la Figura 1.2. La variación temporal del momento angular,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

se reduce al segundo término, puesto que  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$  es paralela a  $\mathbf{p}$ , y se tiene finalmente el resultado conocido

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{f} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.2)$$



**Figura 1.2** Una partícula de masa  $m$  se desplaza en una trayectoria. En un punto  $\mathbf{x}$  de la misma se indican su velocidad  $\mathbf{v}$ , su momento angular  $\mathbf{l}$  y la fuerza  $\mathbf{f}$  a la que está sometida y el torque resultante  $\boldsymbol{\tau}$  por esa fuerza. El momento angular es perpendicular al plano (en marrón) definido por los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{v}$  mientras que el torque los es al plano (en gris) definido por  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{f}$ .

de que la variación del momento angular es el torque  $\boldsymbol{\tau}$  causado por la fuerza  $\mathbf{f}$  que actúa sobre la partícula.

Dado que la definición de  $\mathbf{l}$  y de  $\boldsymbol{\tau}$  implica el vector de posición  $\mathbf{x}$  se sigue que ambas magnitudes dependen de la elección del origen del sistema de coordenadas. Es decir que una determinación de  $\mathbf{l}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  tiene sentido únicamente con respecto a un cierto origen de coordenadas.

De la ecuación (1.2) se deduce que si la fuerza es siempre paralela al vector de posición de una partícula ( $\mathbf{f} \parallel \mathbf{x}$ ) entonces el momento angular  $\mathbf{l}$  se conserva puesto que el torque es  $\boldsymbol{\tau} = 0$  en ese caso. Es lo que se llama una fuerza central.

Habría que destacar lo de fuerza central con un dibujo. Es importante.

## Momento angular para un sistema de partículas

Si ahora tenemos un sistema de  $N$  partículas el momento angular correspondiente (con respecto a un dado origen de coordenadas) será

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$$

De manera equivalente, la variación temporal es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_i$$

y si utilizamos la descomposición (1.1) para la fuerza  $\mathbf{f}_i$  resulta

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

Es claro<sup>1</sup> que el segundo término puede expresarse de manera equivalente como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji}]$$

y aceptando que las fuerzas internas son pares acción-reacción se tiene

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j] \times \mathbf{F}_{ij},$$

de manera que la derivada del momento angular total es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j] \times \mathbf{F}_{ij} \quad (1.3)$$

La conservación de  $\mathbf{L}$ ,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

requiere entonces que las fuerzas externas sean centrales (lo cual anula el primer término en (1.3)) y que se verifique

$$\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

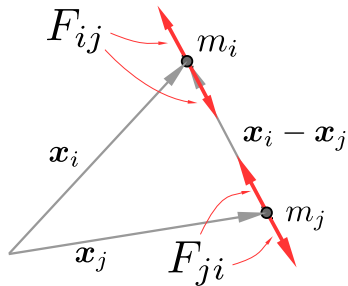
es decir que la fuerza sobre  $i$  ejercida por la partícula  $j$  tenga la dirección del vector que une las dos partículas, para anular el segundo término de (1.3).

Esto establece lo que se llama un “principio de acción y reacción fuerte”; las fuerzas son iguales y opuestas (de esto se trata el principio de acción y reacción), pero además colineales. Dadas dos partículas del sistema cualesquiera con posiciones  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  y de masas  $m_i, m_j$ , como se muestra en la Figura 1.3, la fuerza  $\mathbf{F}_{ij}$  sobre  $i$  debido a  $j$  debe estar contenida en la dirección del vector  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  lo cual le otorga las dos posibilidades indicadas por las flechas rojas gruesas. Para la fuerza  $\mathbf{F}_{ji}$  el razonamiento es, por supuesto, idéntico.

La existencia de un principio de acción y reacción fuerte sobreviene por la naturaleza puntual de los cuerpos. De no ser puntuales se tendrá principio de acción y reacción a secas.

Acá hay más para extraer: poner un gráfico con lo que no puede pasar. Poner un código de colores para las flechas, puesto que si son iguales y opuestas las fuerzas están hermanadas las externas por un lado y las internas por el otro.

<sup>1</sup>Nota 1.4

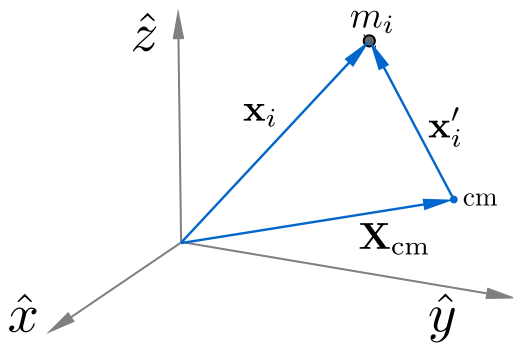


**Figura 1.3** Principio de acción y reacción fuerte para dos partículas de masas  $m_i$  y  $m_j$ .

Existe otra descomposición interesante para el momento angular  $\mathbf{L}$  de un sistema de  $N$  partículas en términos de sus distancias al centro de masas.

Para cada partícula  $i$ -ésima con posición  $\mathbf{x}_i$  y velocidad  $\mathbf{v}_i$  definimos una coordenada  $\mathbf{x}'_i$  y una velocidad  $\mathbf{v}'_i$  en términos de la posición  $\mathbf{R}$  y velocidad  $\mathbf{V}$  del centro de masa, ver Figura 1.4, de acuerdo a

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{x}'_i \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$$



**Figura 1.4**

En términos de estas nuevas variables primadas el momento angular es

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{x}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)$$

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

Como la posición del centro de masa es

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \quad (1.4)$$

se tendrá

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{x}'_i) = \mathbf{R} \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i$$

pero el primer término del RHS es  $M\mathbf{R}$  de manera que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i = 0. \quad (1.5)$$

La velocidad del centro de masa es la derivada temporal de (1.4), i.e.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (1.6)$$

Con estos resultados volvemos a la expresión del momento que resulta

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \right) + \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i,$$

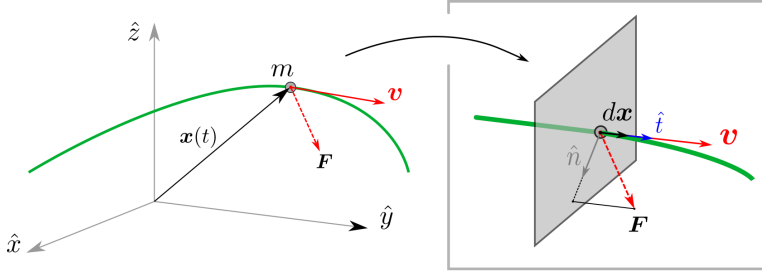
pero debido a (1.5) y a su derivada temporal (que resulta nula) el segundo y tercer sumando de la expresión anterior son nulos y entonces

$$\mathbf{L}_O = (\mathbf{R} \times M\mathbf{V}) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

siendo el primer término del RHS el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

### 1.1.3 Trabajo y energía

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una cierta trayectoria suave  $\mathbf{x}(t)$ , ver Figura 1.5, debido a la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$ . Su velocidad  $\mathbf{v}$  es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma



**Figura 1.5** Partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  bajo la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  (izquierda). En el detalle de la derecha se muestra la descomposición del movimiento en direcciones tangencial  $\hat{t}$  y normal  $\hat{n}$ .

un versor  $\hat{t}$  colineal con la misma. Esto define un plano, mostrado en la parte derecha de la figura, para el cual todo vector perteneciente al mismo es normal a la trayectoria. Elegimos un versor  $\hat{n}$  que está en la dirección de la proyección de  $\mathbf{F}$  sobre dicho plano.

Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F^t \hat{t} + F^n \hat{n} \quad \mathbf{v} = v \hat{t}$$

de manera que la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

para la componente  $\hat{t}$  resulta

$$m \frac{dv}{dt} = F^t$$

Involucrando al diferencial de arco  $ds = |d\mathbf{x}|$  a lo largo de la trayectoria, la ecuación anterior se puede escribir como

$$m v \frac{ds}{dt} = m v dv = F^t ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

donde la última igualdad es posible en virtud de que  $F^n \perp d\mathbf{x}$  por construcción.

Podemos integrar ambos miembros de (1.7) entre  $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$  y su correspondiente velocidad  $v(t_0) \equiv v_0$  hasta  $\mathbf{x}_1, v_1$ ,

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

**Notemos que el versor desplazamiento  $ds$  camina por la trayectoria.**



obteniendo

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_0}^{v_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}$$

que es el llamado *teorema de las fuerzas vivas* para una partícula de masa  $m$  y nos dice que la variación de energía cinética en la trayectoria es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la misma, i.e.

$$T_1 - T_0 = \Delta T_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}. \quad (1.8)$$

En el caso particular en que la fuerza sea normal a la trayectoria en todo el intervalo  $[t_0, t_1]$  se tendrá  $\Delta T = 0$ , es decir que se conserva la energía cinética a lo largo de toda la trayectoria. Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo y esto es solamente debido a que este proviene de un producto escalar (una proyección); las componentes normales no hacen trabajo.

Si la fuerza proviene de un potencial<sup>2</sup>, se tiene

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.9)$$

y podemos expresar en coordenadas cartesianas esta equivalencia (1.9)

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)$$

y evaluar la integral del trabajo para obtener

$$W = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}[t]) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt = V_0 - V_1$$

donde la última igualdad se obtiene por integración de un gradiente. Esto significa que la integral es independiente de la trayectoria  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$ .

Entonces, volviendo a (1.8)

$$\overbrace{T_1 - T_0}^{\text{Vale siempre}} = \underbrace{W_{0 \rightarrow 1}}_{\text{Si } \mathbf{F} \text{ proviene de potencial}} = V_0 - V_1$$

y pasando de miembros se tiene

$$(T_1 + V_1) = (T_0 + V_0)$$

que viene a significar que la cantidad  $E = T + V$  (la energía mecánica) se conserva si la fuerza  $\mathbf{F}$  proviene de un potencial  $V$ . Por dicha razón, las fuerzas

Falta meter lo de

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

<sup>2</sup>El menos delante del gradiente es una convención, como se verá a continuación

para las cuales se verifica (1.9) se llaman *fuerzas conservativas*. En una dimensión, cualquier  $F(x)$  se puede hacer provenir de un potencial si verifica ser integrable, es decir si podemos definir

$$V(x) = \int F(x) dx. \quad (1.10)$$

Para tres dimensiones no cualquier  $F(\mathbf{x})$  es conservativa.

El signo negativo en (1.9) hace que la cantidad conservada sea  $T + V$  en lugar de  $T - V$ . Tiene más sentido físico que se conserve una suma de energías antes que una resta de las mismas.

### Trabajo y energía para un sistema de partículas

Para un sistema de  $N$  partículas la energía cinética simplemente es la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

La definición del trabajo, en cambio, es un poco más complicada. Entre dos instantes de tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$  el sistema está caracterizado por las  $N$  posiciones  $\{\mathbf{x}_i\}$  de todos sus integrantes y cada partícula experimenta un desplazamiento  $\Delta \mathbf{x}_i$  asociado con la fuerza que actúa sobre ella.

En principio la fuerza sobre cada partícula puede dividirse en interna (debida a las otras partículas del sistema) y externas (debida a agentes exteriores al sistema), lo cual permite escribir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

y consecuentemente

$$W = W^{\text{int}} + W^{\text{ext}}$$

El  $W$  entre dos instantes de tiempo  $t_0$  y  $t_1$  corresponde ahora a la integral entre la configuración del sistema a  $t_0$  dada por  $\{\mathbf{x}_i(t_0)\}$  hasta la configuración  $\{\mathbf{x}_i(t_1)\}$ , las cuales etiquetaremos como 0 y 1 respectivamente.

Entonces el trabajo externo es

$$W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{x}_i$$

siendo  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  la fuerza externa sobre la partícula  $i$ . Para que valga la conservatividad es necesario que

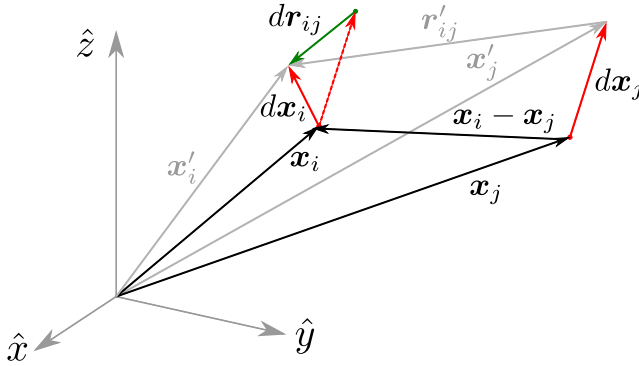
- La fuerza sobre  $i$  depende solamente de las coordenadas  $\mathbf{x}_i$  de esa partícula. Es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$$

- Se verifique para cada  $\mathbf{F}_i$

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0,$$

donde el operador  $\nabla$  se toma con respecto a las coordenadas de la partícula  $i$  en cuestión.



**Figura 1.6** Elementos implicados en la evaluación del trabajo interno  $W^{\text{int}}$  para un sistema de partículas.

Estas condiciones permiten escribir la fuerza como el gradiente de un potencial y entonces el trabajo externo es la suma de las diferencias entre las energías potenciales de las partículas entre las configuraciones 0 y 1, o bien

$$W^{\text{ext}} = - \sum_{i=1}^N \Delta V_i(\mathbf{x}_i)|_0^1$$

El trabajo interno corresponde a la suma sobre cada partícula  $i$  de la fuerza ejercida por todas las otras partículas  $j \neq i$  del sistema, es decir

$$W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{F}_{ij}$  es la fuerza sobre  $i$  ejercida por  $j$ . La restricción en la sumatoria sobre  $j$  descarta la suma de autofuerzas. Es claro que la expresión (1.11) se puede

escribir equivalentemente como

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{x}_j)$$

¿nota final con la justificación de que se puede escribir así?

y si ahora aceptamos que vale el principio de acción y reacción

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j).$$

Definiendo luego un vector de separación relativa  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  se tiene que las integrales son de la forma

$$\int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y sabemos, por analogía con lo anterior, que si  $\mathbf{F}_{ij}$  depende del vector de separación  $\mathbf{r}_{ij}$  y es de rotor nulo entonces las fuerzas internas son conservativas. En estos casos

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N (\Delta T_i - \Delta V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta V_{ij}$$

### EJEMPLO 1.1 Análisis energético de un potencial

Dada una fuerza 1D

$$F(x) = -kx + \frac{a}{x^3}, \quad a > 0$$

La fuerza  $-kx$  es una fuerza res-  
titutiva mientras que  $a/x^3$  es una  
fuerza repulsiva pues  $a > 0$ .

se realiza un análisis del potencial resultante y de la energía.

A partir de esta fuerza, que es la del oscilador armónico 1D sumada a una perturbación controlada por el parámetro  $a$ , procedemos a calcular el potencial, a través de la relación (1.10) de modo que (a menos de una constante aditiva que no interesa aquí) se obtiene

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{a}{2x^2}$$

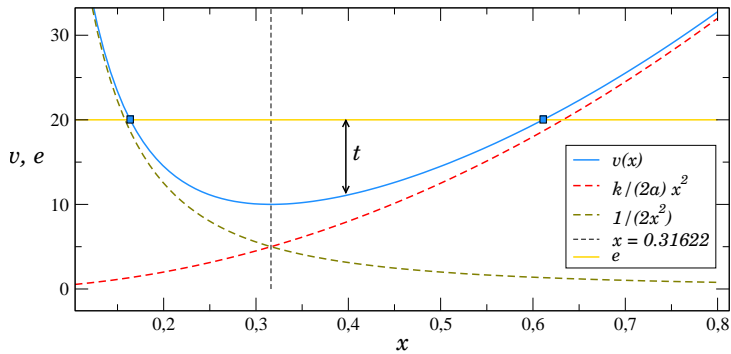
siendo la energía total

$$E = T + V(x),$$

la cual es una cantidad conservada.

Para analizar el movimiento bajo este potencial dividimos ambos miembros sobre  $a$  y se define  $v \equiv V/a$  para considerar tres casos representativos  $k/a = 5, 20, 100$ . Este potencial  $v$  es una especie de potencial por unidad de  $a$ . Consecuentemente, tendremos una energía reescalada  $e = t + v$ .

Para el caso  $k/a = 100$  la Figura 1.7 muestra la gráfica de  $v$  junto con la de cada uno de los términos que componen este potencial; el término  $k/(2a)x^2$  (cuadrático) y  $1/(2x^2)$  (una ley de potencias de exponente -2). En la zona de  $x$  pequeña domina la ley de potencias mientras que para  $x$  grande domina la cuadrática.



**Figura 1.7** Gráfico del potencial  $v = V(x)/a$  y energía  $e = E/a$  escalados para el ejemplo del oscilador perturbado ( $k/a = 100$ ).

También está indicada una línea de  $e$  constante que define la energía total  $t + v$ . Dada la restricción  $e = t + v$ , la energía cinética  $t$  está representada por la distancia vertical entre  $e$  y  $v$  para todo  $x$  comprendido entre los puntos indicados por cuadrados azules. Estos son aquellos puntos para los cuales  $t = 0$  (la velocidad es nula) y definen por ende un punto de cambio de movimiento; son los llamados *turning points* (puntos de retroceso). En la figura se indica con una doble flecha vertical la magnitud de  $t$  para  $x = 0.4$ .

Las regiones por fuera de los puntos de retroceso están prohibidas puesto que  $t < 0$  allí. El movimiento posible para este potencial es entonces acotado y se halla dentro del intervalo definido por dichos puntos.

La línea vertical punteada  $x = 0.31622$  indica el mínimo del potencial (que sale desde  $dV(x)/dx = 0$  y es equivalente por ello a la condición  $F(x) = 0$ ). Ese punto es, debido a la forma particular de  $F$ , donde son iguales los aportes del oscilador (término cuadrático) y de su perturbación (ley de potencias).

A medida que  $a$  es más importante ( $k/a$  disminuye) la parte  $1/x^2$  del potencial actúa hasta valores de  $x$  mayores, como puede verse en la Figura XXX donde aparecen graficado  $v$  para los casos  $k/a = 100, 20, 5$ .

Para una partícula que se mueva bajo este potencial la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - \frac{k}{2} x^2 - \frac{a}{2x^2},$$

permite llegar a la integral de la trayectoria

$$\sqrt{m} \int \frac{1}{[2E - kx^2 - a/x^2]^{1/2}} dx = \int dt.$$

La existencia de solución cerrada para esta integral dependerá, por supuesto, de la forma del potencial  $V(x)$ . En este caso particular el reemplazo  $u = x^2$  permite escribir el argumento de la raíz como una diferencia de cuadrados merced a un nuevo reemplazo  $y = u - E/k$ . Si se integra entre  $x_0 = x(t = 0)$  y  $x = x(t)$  se obtiene

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0 - E/k}^{x^2 - E/k} \frac{1}{\sqrt{C^2 - y^2}} dy = t - t_0$$

donde la constante es  $C = \sqrt{E^2 - ka/k}$ .

**Poner la cuenta genérica en las notas. Why not?. FALTA un gráfico.**

La solución de esta integral es del tipo  $\arcsin(y/|C|)$  de manera que obtenemos

$$x^2 = \frac{\sqrt{E^2 - ak}}{k} \sin \left[ \sqrt{4k/m}(t - t_0) + \arcsin((kx_0^2 - E)/\sqrt{E^2 - ak}) \right] + \frac{E}{k}.$$

Si se supone ahora que  $\dot{x}_0 = 0$  (la cinética es nula en el instante  $t = 0$ ) resulta  $\arcsin(1) = \pi/2$  y entonces

$$x^2 = \frac{\sqrt{E^2 - ak}}{k} \cos \left[ \sqrt{4k/m}(t - t_0) \right] + \frac{E}{k},$$

o bien

$$x = \sqrt{\frac{E}{k}} \left( 1 + \sqrt{1 - ak/E^2} \cos \left[ 2\sqrt{k/m}(t - t_0) \right] \right)^{1/2}$$

donde hemos tomado el valor positivo de la raíz porque en este problema es  $x > 0$ .

El caso límite  $a = 0$  recupera el oscilador armónico usual, como era de esperarse, pues en este caso se tiene

$$\left. \frac{x}{(a=0)} \right. = \sqrt{\frac{2E}{k}} \left( \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) \right] \right),$$

donde se ha utilizado la fórmula trigonométrica para el semiángulo.

**Completar esta solución. Ver en práctica?. Lo de  $E = E(a)$  no lo entendi.**

## 1.2 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo  $F^v$  se acomodan en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las  $F^v$  son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

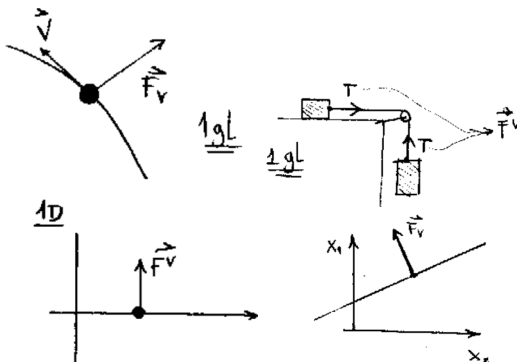


Figura 2.8

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que  $W_{virtual}^{F^v} = 0$ , y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{l} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. \quad f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que  $\mathbf{F}^v$  perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a  $t_0$  fijo compati-

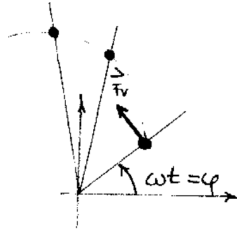


Figura 2.9

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en  $\delta t$  durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en  $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$ .

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

### 1.3 Velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas

En la resolución de los problemas dinámicos que surgen de las ecuaciones de Newton la igualdad vectorial involucrada debe, en general, escribirse en algún sistema de coordenadas apropiado. Esto implica para la aceleración la doble derivada con respecto al tiempo del vector de posición  $\mathbf{x}(t)$  en las coordenadas en las cuales se halle escrito.

Obviando el sistema cartesiano rectangular usual  $(x, y, z)$ , los dos sistemas de coordenadas más sencillos son el de coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$  y el de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ . Los problemas más sencillos de la dinámica implican geometrías donde estos sistemas son apropiados. Asimismo, muchas geometrías más complejas pueden quizás en primera aproximación modelarse con estas coordenadas.

Así, por ejemplo, un vector genérico en términos de la base de versores cilíndricos  $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$  será

$$\mathbf{V}(t) = r\hat{r} + \varphi\hat{\varphi} + z\hat{z},$$

de manera que su derivada con respecto al tiempo implica la derivación de cada coordenada y cada versor.

La gran ventaja de las coordenadas cartesianas es que los versores  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  tienen su orientación constante para cualquier punto del espacio, razón por la cual no varían con el tiempo. Entonces, en general, resulta conveniente evaluar las derivadas de los versores que sí varían con el tiempo (como por ejemplo  $\hat{r}$ ) en términos de su descomposición en cartesianas, puesto que sólo hay que derivar el coeficiente que lo acompaña.

Para coordenadas cartesianas, las fórmulas de velocidad y aceleración son triviales. A partir del vector de posición

$$\mathbf{x}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

se tienen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &\equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}, \\ \mathbf{a}(t) &\equiv \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}, \end{aligned}$$

donde con el objeto de no sobrecargar la notación no se ha explicitado la dependencia temporal en las coordenadas.

A continuación se deducen las fórmulas de velocidad y aceleración para las coordenadas cilíndricas y esféricas a partir de un vector de posición  $\mathbf{x}(t)$  del origen<sup>3</sup>.

### 1.3.1 Coordenadas cilíndricas

Un vector de posición del origen es

$$\mathbf{x}(t) = r\hat{r} + z\hat{z},$$

---

<sup>3</sup>Un vector del origen tiene su base anclada en el origen del sistema de coordenadas lo que causa que no tenga componentes angulares en los sistemas cilíndrico y esférico. Esta simplificación es importante y en realidad si no fuera aplicable la utilización de estos sistemas tal vez pierda su razón de ser.



y la derivada temporal se hace con la regla de Leibniz en el caso del primer término de la derecha,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{z}$$

y para evaluar la derivada temporal del versor consideramos la descomposición

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

que lleva a

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin \varphi \dot{\varphi} \hat{x} + \cos \varphi \dot{\varphi} \hat{y} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

y entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z}.$$

Para la aceleración hay que derivar la velocidad con respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{\varphi} + r \left( \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d\hat{\varphi}}{dt} \right) + \ddot{z} \hat{z}$$

y utilizando

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) = -\dot{\varphi} \hat{r}$$

finalmente se arriba a

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z}.$$

Para problemas de dos dimensiones suele utilizarse un sistema coordenado, conocido como coordenadas polares, que es el de cilíndricas con  $z \equiv 0$ . Las expresiones de velocidad y aceleración polares correspondientes serán las obtenidas en esta sección luego de *borrar* la coordenada  $z$ .

### 1.3.2 Coordenadas esféricas

Para el sistema esférico la deducción de la equivalencia cartesiana de los versores es un poco más trabajosa que en el sistema cilíndrico (donde en realidad estos versores viven en un plano  $z$  cte.) y el álgebra implicado es algo engorroso. La expresión de los versores es

$$\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z},$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}, \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}.\end{aligned}$$

Un vector de posición es simplemente

$$\mathbf{x} = r \hat{r}$$

aunque en el  $\hat{r}$  está *escondida* la dependencia angular. Consignaremos a continuación solamente las expresiones finales para la velocidad y aceleración, que son respectivamente

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \\ &\quad (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\varphi}\end{aligned}$$

## 1.4 Transformación entre sistemas en rotación

Otro tipo de transformación común entre sistemas de coordenadas (en el plano) que comparten origen es la rotación.

Suponiendo un sistema de coordenadas  $(x, y)$  fijo (que llamaremos “inercial”) de origen  $O$  y otro de coordenadas  $(x', y')$ , que está rotando en torno a ese origen (sistema “móvil”), interesa ver qué consecuencias tiene sobre la velocidad y aceleración de un vector de posición  $\mathbf{A}$ , el hecho de determinarlas desde uno u otro sistema. Si bien hablamos de un sistema *fijo*, en realidad ambos se hallan en rotación entre sí.

Figura de la rotación

Como se ve en la FIGURA XXX la posición instantánea entre sistemas está determinada por el ángulo  $\theta(t)$  y, dado que ambos sistemas comparten el origen, los mismos son coincidentes en  $\theta = 0$ .

Dado que los sistemas no se hallan entre sí a velocidad constante<sup>4</sup> es patente que las ecuaciones de Newton se verán modificadas. Para un vector  $\mathbf{A}$  constante con respecto al sistema inercial, cualitativamente esperaríamos observarlo desde el sistema móvil en alguna suerte de movimiento dado por el efecto dinámico de la rotación<sup>5</sup>. Veamos qué surge de la cuenta algebraica.

El mismo vector de acuerdo a los dos sistemas de coordenadas en el plano, es

$$\mathbf{A}(t) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \qquad \mathbf{A}'(t) = A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}'$$

<sup>4</sup>Aún en el caso de  $\theta(t) = cte.$  la velocidad no es constante como vector puesto que cambia de dirección todo el tiempo.

<sup>5</sup>Si estoy montado en el caballo de madera de una calesita veré a mi abuela, que me espera inmóvil a un lado, como dotada de movimiento.

donde las coordenadas primadas refieren al sistema móvil. Nótese que los versores asociados en ambos casos  $(\hat{x}, \hat{y})$  y  $(\hat{x}', \hat{y}')$  son constantes, esto es, no dependen del tiempo. Que ambos sistemas se hallen en rotación entre sí no es intrínseco de alguno de ellos. Un observador del sistema primado ve a sus ejes fijos mientras que en las medidas que realiza sobre  $\mathbf{A}$  verá una dinámica particular.

Si consideramos la variación temporal de  $\mathbf{A}'$  pero como es vista desde el sistema inercial resulta

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + A'_x \dot{\hat{x}}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + A'_y \dot{\hat{y}}',$$

porque para un observador en el sistema inercial se mueven las componentes del vector y los versores.

La variación temporal de los versores la conocemos porque es la misma situación geométrica que la encontrada para el caso de los versores cilíndricos  $(\hat{r}, \hat{\phi})$ . Podemos hallar la equivalencia

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \dot{\theta} \hat{y}' \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = -\dot{\theta} \hat{x}'.$$

Desde el sistema móvil los versores son por supuesto constantes (el sistema móvil no es consciente de su movimiento) de modo que

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}'$$

y entonces

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'.$$

Si definimos

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{z},$$

entonces resulta que

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' = \dot{\theta} \hat{z} \times (A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}') = A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'.$$

Volviendo a la derivada de  $\mathbf{A}$  tenemos

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}'$$

que nos da la variación temporal de un vector  $\mathbf{A}$  visto desde un sistema fijo en términos de lo que se mediría en un sistema (móvil) que está en rotación respecto al primero.

Esta notación es oscura, habría que ver una mejor manera de explicar esto.

Si ahora la especializamos para un vector de posición  $\mathbf{x}$ , obtenemos la velocidad

$$\mathbf{v}|_{\text{fijo}} = \mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}',$$

donde

$$\mathbf{v}|_{\text{móvil}} = \dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}'$$

Asimismo, la aceleración se obtiene aplicando la relación al vector  $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{x}/dt$ , de manera que tendremos

$$\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \frac{d}{dt} \left[ \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' \right] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}']$$

Ahora procedemos a trabajar las expresiones dentro del primer corchete, empezando por la derivada temporal de la velocidad en el sistema móvil,

$$\mathbf{a}|_{\text{móvil}} \equiv \frac{d}{dt} (\dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}')|_{\text{móvil}} = \ddot{x}' \hat{x}' + \ddot{y}' \hat{y}'$$

y continuando con el término

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}} = \omega x' \hat{y}' - \omega y' \hat{x}',$$

cuya derivada es

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}} = -(\dot{\omega} y' + \omega \dot{y}') \hat{x}' + (\dot{\omega} x' + \omega \dot{x}') \hat{y}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'|_{\text{móvil}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}}$$

Juntando todo resulta

$$\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'|_{\text{móvil}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}')$$

donde el tercero es la aceleración de Coriolis y el cuarto la aceleración centrípeta.

Las leyes de Newton observadas desde el sistema fijo serán

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 4 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

que se pueden reacomodar como

$$m \mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}|_{\text{móvil}} - m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 4 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

donde ahora en el RHS tenemos la fuerza  $\mathbf{F}$  que es la única que produce par de acción y reacción, y los términos de fuerza lineal, de Coriolis y centrífuga.

Si  $\boldsymbol{\omega} = cte$ . entonces la fuerza lineal es nula.

**NOTAS**

Está un poco inconsistente la notación utilizada, con lo de móvil y la prima. La carpeta tiene muchos typos. El 'Problema' de la hoja 5R no lo entiendo

**4.1 Sumatoria de torques** Una manera de convencerse de que esta escritura es posible es hacer un diagrama de los diferentes términos que aparecen en esta doble sumatoria. Es fácil de ver que con el añadido del término  $\mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji}$  se está haciendo un doble conteo que justifica el  $1/2$  que aparece luego.

Una demostración más matemática puede lograrse escribiendo la sumatoria  $j \neq i$  sin esta restricción, lo cual se puede hacer así:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} (1 - \delta_{ij})$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. Es claro que podemos hacer un cambio de etiquetas en las sumatorias puesto que los índices sumados son *mudos*, i.e.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} (1 - \delta_{ij}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji} (1 - \delta_{ij})$$

y dado que el orden de las sumatorias es irrelevante llegamos a

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} (1 - \delta_{ij}) + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji} (1 - \delta_{ij})]$$

Regresando ahora a las sumatoria restringida obtenemos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji}]$$

que es el resultado buscado.