Capítulo 1

Transformaciones canónicas

1.1 Funciones generatrices

Consideraremos ahora varios casos diferentes de dependencia en la función generatriz,

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$\sum p_i \dot{q}_i - H + K - \sum P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \sum \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} - H + K = 0$$

y la transformación canónica queda definida por

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$

Todas las combinaciones posibles son

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t) \qquad F_2 = F_2(q_i, P_i, t) \qquad F_3 = F_3(p_i, Q_i, t) \qquad F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$$

y para F_2, por ejemplo, se tiene

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^N q_i P_i$$

la cual es una identidad (transformación). Y

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = q_i = Q_i$$

1.2 Algunos ejemplos de generatrices y transformaciones

La generatriz identidad

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_i q_i P_i,$$

es tal que las coordenadas y los momentos son los mismos (no cambian).

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_\ell} = P_\ell = p_\ell \qquad\qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_\ell} = q_\ell = Q_\ell$$

La generatriz

$$F_1(q_i, P_i) = \sum_i q_i Q_i,$$

tranforma coordenada en momento y viceversa, de manera que

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_\ell} = Q_\ell = p_\ell \qquad\qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q_\ell} = -P_\ell = q_\ell$$

Una rotación es una transformación canónica. Otro nombre de las transformaciones canónicas es el de transformaciones de contacto. Los pasajes de coordenadas usuales son casos de transformaciones canónicas.

1.3 Corchetes de Poisson

Sea $A = A(q_i, p_i, t)$ entonces

$$\frac{d}{dt}A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

y utilizando las ecuaciones canónicas

$$\frac{d}{dt}A = \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{\equiv [A,H]} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

donde la sumatoria particular resultante se define como el corchete de Poisson. Entonces

$$\frac{d}{dt}A = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Las constantes de movimiento en un sistema mecánico cumplen que su corchete de Poisson con el hamiltoniano es nulo.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = [q_i, H] \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = [p_i, H]$$

Todas las *cosas* constantes en el tiempo en un sistema mecánico (no depende explícitamente del tiempo) deben ser tales que su variación temporal sea el corchete de Poisson con el hamiltoniano.

Tendremos entonces, siguiendo la mecánica, que:

$$\dot{q}_i = [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_\ell} \qquad \dot{p}_i = [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}$$

que es otra manera de escribir las ecuaciones canónicas. Si transformamos coordenadas llegaremos a

$$\dot{Q}_i = [Q_i, K] \qquad \dot{P}_i = [P_i, K]$$

junto con los corchetes fundamentales:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [q_i, q_j] = 0$$

de modo que el corchete entre los momentos es nulo así también como el corchete entre las coordenadas.

Si las variables son canónicas, satisfacen estos corchetes fundamentales para las nuevas $\{p, q\}$

$$[B, A] = \nabla_\xi B^t J \nabla_\xi A$$

Si consigo un sistema mecánico y lo arreglo de modo que las coordenadas y momentos satisfagan

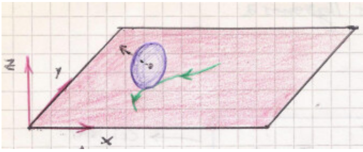
$$[B_k, H] = 0 \qquad\qquad [B_k, B_\ell] = 0 \forall k, \ell$$

que significa que los momentos son constantes de movimiento y que entre sí tienen corchete nulo, entonces existe una transformación canónica con todas las coordendas cíclicas.

Así, por ejemplo, H, ℓ^2, ℓ_z tienen corchete nulo entre sí. Pero ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z no tienen corchete nulo entre sí; no puedo armarme una transformación canónica que me lleva a un espacio donde ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z son momentos generalizados. Esto es similar a lo que ocurría con el CCOC de mecánica cuántica.

EJEMPLO 3.1 Moneda que desliza por un plano (sin gravedad)

Ya se habló de este problema en la sección 2, con respecto a multiplicadores de Lagrange.



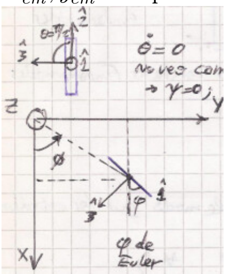
El lagrangiano se puede escribir

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2$$

y la velocidad del centro de masa es

$$\boldsymbol{V}_{cm} = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}$$

y los x_{cm}, y_{cm} no se pueden despejar en función de los ángulos de Euler.



Con respecto a los dos dibujitos de acá arriba vemos que $\dot{\theta} = 0$ no veo cambio en ψ de modo que puedo poner $\psi = 0, \dot{\psi} \neq 0$ y además

$$a\dot{\psi}\cos\varphi = V_x^{cm}$$
$$a\dot{\psi}\sin\varphi = V_y^{cm}$$

y si no necesito despejar las coordenadas puedo utilizar el vínculo dependiendo de las velocidades. Si tuviese un $V = V(coord)$ entonces necesitaría despejar las coordenadas en función de los ángulos de Euler y no me alcanza con este vínculo de las velocidades (el problema es que no es integrable).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(I_3 + Ma^2)\dot{\psi} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

Utilizo Euler y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Otra forma es reescribir el vínculo y usar multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{X}_{\mathrm{cm}}^2 + \dot{Y}_{\mathrm{cm}}^2) + \frac{1}{2}I_3\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

que es un lagrangiano en cuatro variables para que el que tenemos dos vínculos,

$$\lambda_1(a\cos\varphi d\psi - dx) = 0 \qquad \lambda_2(a\sin\varphi d\psi - dy) = 0$$

$$I_3\ddot{\psi}$$
$$M\ddot{X}_{\mathrm{cm}} = -\lambda_1 \qquad m\ddot{x} = ma\cos\varphi\dot{\psi}$$
$$M\ddot{Y}_{\mathrm{cm}} = -\lambda_2 \qquad m\ddot{y} = ma\sin\varphi\dot{\psi}$$

Al reemplazar λ_1, λ_2 por sus valores deberé llegar a $Ma^2\ddot{\psi}$.