Apéndice A

Delta de Dirac

La delta de Dirac tiene representaciones numéricas en términos de límites. En sí, debe entenderse como un proceso límite. Las dos más utilizadas son las representaciones lorentziana,

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}$$

gaussiana

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/(4\epsilon)}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\epsilon}}$$

y la que utiliza la función sinc, [CHECK]

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}$$

Hacer grafiquitos de estas funciones.

La variable que tiene a cero ϵ cuantifica el ancho mientras que $1/\epsilon$ cuantifica la altura.

Apéndice B

Coordenadas esféricas y cilíndricas

Acá se condensan algunas expresiones asociadas al aspecto de los operadores diferenciales en los diferentes sistemas de coordenadas curvilíneos.

El prototipo de sistema curvilíneo es el esférico. Teníamos

$$d\boldsymbol{x} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\hat{\varphi} \qquad dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

donde $r^2\sin\theta$ es el jacobiano de la transformación.

La idea es que en cualquier sistema curvilíneo de coordenadas $\{q_i\}$ se tiene para el diferencial total de una función f

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{x}$$

y como en coordenadas cartesianas es

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{x} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i,$$

la idea es que tiene que valer lo mismo en todo sistema de coordenadas. Luego, en un sistema donde las coordenadas no son las cartesianas se tiene

$$d\boldsymbol{x} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

donde los h_i dan la métrica del espacio coordenado. El gradiente será

$$\boldsymbol{\nabla} f = g_1 \hat{e}_1 + g_2 \hat{e}_2 + g_3 \hat{e}_3$$

donde g_i se ajusta pidiendo que el escalar df sea un invariante

$$\boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{x} = \sum_i h_i g_i dq_i,$$

de lo cual surge que

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \hat{e}_i.$$

Este es el operador gradiente en un sistema curvilíneo.

La divergencia en cartesianas es

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

y utilizando el teorema de la divergencia de Green,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

se arriba a

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} [h_2 h_3 F_1] + \frac{\partial}{\partial q_2} [h_1 h_3 F_2] + \frac{\partial}{\partial q_3} [h_1 h_2 F_3] \right)$$

Luego, el laplaciano (que será el operador más usado en este curso) resulta de

$$\nabla^2 \varphi = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi},$$

es decir la divergencia del gradiente de la función.

En un sistema curvilíneo la delta será algo como

$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1 - q_1') \delta(q_2 - q_2') \delta(q_3 - q_3').$$

Apéndice C

Rejunte

Simplificaciones

Recordemos que

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

la simplificación de las raíces cuadradas implican el módulo para tener en cuenta las dos posibilidades del signo.

Ángulo entre dos vectores

En esféricas el ángulo entre dos vectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, escribiendo los versores en cartesianas resulta

$$\cos\gamma \equiv \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2|} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$