3.3. Квадратичные иррациональности

Определение 3.5. Бесконечная обыкновенная непрерывная дробь $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ называется *периодической*, если существуют такие натуральные числа k_0 и t, что для любого $k > k_0$ выполняется равенство $a_{k+t} = a_k$, то есть последовательность $\{a_k\}$, начиная с некоторого места, является периодической:

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k_0-1}, a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+t}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+t}, \ldots] =$$
$$= [a_0; a_1, \ldots, a_{k_0}, \{a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+t}\}].$$

Пример 3.8. Следующие числа раскладываются в периодические непрерывные дроби:

$\sqrt{17} = [4; \{8\}]$ — период равен 1;

$\dfrac{\sqrt{35}+6}{11} = [1; 12, \{130, 13\}]$ — период равен 2;

$\sqrt{21} = [4; \{1, 1, 2, 1, 1, 8\}]$ — период равен 6;

$\dfrac{8\sqrt{29}}{13} = [3; \{3, 5, 2, 1, 1, 22, 3, 1, 3, 22, 1, 1, 2, 5, 3, 6\}]$ — период равен 16;

$812\sqrt{2} = [1148; \{2, 1, 13, 11, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 1, 1, 46, 3, 2, 2, 1, 1, 573, 1, 1, 2, 2, 3, 46, 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 11, 13, 1, 2, 2296\}]$ — период равен 40.

Отметим, что при разложении в непрерывную дробь квадратного корня из целого положительного числа, не являющегося полным квадратом, период всегда начинается с первого звена. □

Пример 3.9. Следующие числа раскладываются в непериодические непрерывные дроби:

$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, \ldots]$;

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, \ldots]$;

$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \ldots]$;

$\ln 2 = [0; 1, 2, 3, 1, 6, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 10, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots];$

$2^{\sqrt{2}} = [2; 1, 1, 1, 72, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 14, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 3, \ldots].$ □

Определение 3.6. Число называется *квадратичной иррациональностью*, если оно является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами a, b, c. Это уравнение определено однозначно, если потребовать, чтобы числа a, b, c были взаимно просты в совокупности и $a \geq 0$.

Пример 3.10. Числа $\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}+5$, $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{15}}{7-4\sqrt{15}}$ являются квадратичными иррациональностями; числа $\sqrt[3]{5}, 2\sqrt[5]{7}+3$, e, π не являются квадратичными иррациональностями. □

Любая квадратичная иррациональность имеет вид $u+v\sqrt{N}$, где числа u, v рациональные и N не является полным квадратом. Квадратичная иррациональность вида $u-v\sqrt{N}$ называется *сопряженной* к иррациональности $u+v\sqrt{N}$.

Теорема 3.6 (Лагранж). Квадратичные иррациональности и только они могут быть представлены в виде бесконечной периодической обыкновенной непрерывной дроби.

Доказательство [4]. Сначала докажем достаточность. Рассмотрим бесконечную периодическую обыкновенную непрерывную дробь

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Назовем число

$$r_k = a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \ddots}}$$

остатком непрерывной дроби α, тогда

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{\ddots}{a_{k-1} + \cfrac{1}{r_k}}}}.$$

Для остатков периодической непрерывной дроби выполняется соотношение $r_{k+t} = r_k$, где $k \geq k_0$ и t — период последовательности $\{a_k\}$. По способу составления подходящих дробей имеем

$$\alpha = \frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{r_{k+t} P_{k+t-1} + P_{k+t-2}}{r_{k+t} Q_{k+t-1} + Q_{k+t-2}} = \frac{r_k P_{k+t-1} + P_{k+t-2}}{r_k Q_{k+t-1} + Q_{k+t-2}},$$

откуда

$$\frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{r_k P_{k+t-1} + P_{k+t-2}}{r_k Q_{k+t-1} + Q_{k+t-2}},$$

то есть r_k является корнем квадратного уравнения

$$(P_{k-1}Q_{k+t-1} - P_{k+t-1}Q_{k-1})r^2 + (P_{k-1}Q_{k+t-2} + P_{k-2}Q_{k+t-1} -$$

$$- P_{k+t-1}Q_{k-2} - P_{k+t-2}Q_{k-1})r + (P_{k-2}Q_{k+t-2} - P_{k+t-2}Q_{k-2}) = 0$$

с целыми коэффициентами. Значит, r_k — квадратичная иррациональность. Тогда и

$$\alpha = \frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

— квадратичная иррациональность.

Теперь докажем необходимость. Пусть число α является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \qquad (3.8)$$

Разложим число α в обыкновенную непрерывную дробь и выразим его через некоторый остаток r_k непрерывной дроби:

$$\alpha = \frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.8) и проводя ряд преобразований, снова получаем квадратное уравнение

$$A_k r_k^2 + B_k r_k + C_k = 0 \tag{3.9}$$

относительно r_k с целыми коэффициентами

$$A_k = aP_{k-1}^2 + bP_{k-1}Q_{k-1} + cQ_{k-1}^2,$$
$$B_k = 2aP_{k-1}P_{k-2} + b\left(P_{k-1}Q_{k-2} + P_{k-2}Q_{k-1}\right) + 2cQ_{k-1}Q_{k-2},$$
$$C_k = aP_{k-2}^2 + bP_{k-2}Q_{k-2} + cQ_{k-2}^2.$$

Заметим, что $C_k = A_{k-1}$ и

$$B_k^2 - 4A_kC_k = (b^2 - 4ac)(P_{k-1}Q_{k-2} + P_{k-2}Q_{k-1})^2 =$$

$$= (b^2 - 4ac)(-1)^{2(k-2)} = b^2 - 4ac,$$

то есть дискриминанты уравнений (3.8) и (3.9) совпадают при любом k.

Из неравенства $\left|\alpha - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right| < \frac{1}{Q_{k-1}^2}$ получаем, что

$$P_{k-1} = \alpha Q_{k-1} + \frac{\varepsilon_{k-1}}{Q_{k-1}}$$

при некотором ε_{k-1}, таком, что $|\varepsilon_{k-1}| < 1$. Тогда

$$A_k = aP_{k-1}^2 + bP_{k-1}Q_{k-1} + cQ_{k-1}^2 =$$

$$= a\left(\alpha Q_{k-1} + \frac{\varepsilon_{k-1}}{Q_{k-1}}\right)^2 + b\left(\alpha Q_{k-1} + \frac{\varepsilon_{k-1}}{Q_{k-1}}\right)Q_{k-1} + cQ_{k-1}^2 =$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha + c)Q_{k-1}^2 + 2\alpha\varepsilon_{k-1} + a\frac{\varepsilon_{k-1}^2}{Q_{k-1}^2} + b\varepsilon_{k-1} =$$

$$= 0 \cdot Q_{k-1}^2 + 2\alpha\varepsilon_{k-1} + a\frac{\varepsilon_{k-1}^2}{Q_{k-1}^2} + b\varepsilon_{k-1} = 2\alpha\varepsilon_{k-1} + a\frac{\varepsilon_{k-1}^2}{Q_{k-1}^2} + b\varepsilon_{k-1}.$$

Значит,

$$|A_k| = \left|2a\alpha\varepsilon_{k-1} + a\frac{\varepsilon_{k-1}^2}{Q_{k-1}^2} + b\varepsilon_{k-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

$$|C_k| = |A_{k-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

для любого натурального k. Таким образом, целые коэффициенты A_k и C_k уравнения (3.9) ограничены по абсолютной величине и, следовательно, при изменении k могут принимать лишь конечное число различных значений. Дискриминанты уравнений (3.8) и (3.9) совпадают, поэтому коэффициент B_k может принимать лишь конечное число различных значений. Значит, при $k = 1, 2, \ldots$ существует лишь конечное число различных уравнений вида (3.9), то есть лишь конечное число различных остатков r_k. Следовательно, найдутся два одинаковых остатка r_k и r_{k+t} с разными номерами, что и означает периодичность непрерывной дроби. □

Пример 3.11. Разложим в непрерывную дробь число $1+2\sqrt{3}$:

$$1+2\sqrt{3} = [4;\ \{2,\ 6\}].$$

Эта непрерывная дробь периодическая, и все a_k равны либо 2, либо 6 при $k \geq 1$. Действительно, обозначим через x бесконечную непрерывную дробь $[0;\ 2,\ 6,\ 2,\ 6,\ \ldots]$. Тогда $x = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{6+x}}$. Упрощая выражение, получаем, что x является корнем уравнения

$$x^2 + 6x - 3 = 0,$$

откуда $x = -3+2\sqrt{3}$ и $4+x = 1+2\sqrt{3}$. □

3.4. Использование непрерывных дробей для решения задач

Рассмотрим некоторые примеры использования непрерывных дробей.