Relajación Lagrangeana

Modelos Determinísticos en Investigación de Operaciones

Dott.ssa Rosa Medina

Universidad de Concepción

10 de abril de 2018

Relajación Lagrangeana

La Relajación Lagrangeana entrega una cota inferior de la solución óptima, para un problema de mínimo.

Dado un modelo matemático, identificamos las restricciones que hacen este problema difícil y las eliminamos. Para evitar las soluciones infactibles, penalizamos en la función objetivo las violaciones de las restricciones eliminadas.

Problema Lineal P

$$
\begin{aligned}
Z = Min \quad & cx \\
s.a \quad & Ax = b \\
& Dx \leq e \\
& x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Relajación

Restricciones difíciles

$$\begin{aligned} Z = Min \quad & cx \\ s.a \quad & \boxed{Ax = b} \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_R = Min \quad & cx \\ s.a \quad & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Relajación Lagrangeana

Multiplicadores lagrangeanos

$$
\begin{aligned}
Z = Min \quad & cx \\
s.a \quad & Ax = b \quad \ldots \boxed{\lambda} \\
& Dx \leq e \\
& x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Penalizamos las violaciones

$$
\begin{aligned}
Z_{RL}(\lambda) = Min \quad & cx \boxed{+\lambda(Ax - b)} \\
s.a \quad & Dx \leq e \\
& x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Cota inferior

Sea x^* la solución óptima del problema P. Para cualquier conjunto de multiplicadores lagrangeanos, se cumple que:

$$Z_{RL}(\lambda) \leq cx^* + \lambda(Ax^* - b) = Z$$

Desigualdades difíciles

Menor o igual

Necesitamos $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} Z = Min \quad & cx \\ s.a \quad & Ax \boxed{\leq} b \quad \lambda \\ & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{RL}(\lambda) = Min \quad & cx + \lambda(Ax - b) \\ s.a \quad & Dx \leq e \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_{RL}(\lambda) \leq cx^* + \lambda(Ax^* - b) \leq Z}$$

Desigualdades difíciles

Mayor o igual

Necesitamos $\lambda \leq 0$

$$
\begin{aligned}
Z = Min \quad & cx \\
s.a \quad & Ax \boxed{\geq} b \quad \lambda \\
& Dx \leq e \\
& x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{RL}(\lambda) = Min \quad & cx + \lambda(Ax - b) \\
s.a \quad & Dx \leq e \\
& x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Z_{RL}(\lambda) \leq cx^* + \lambda(Ax^* - b) \leq Z}$$

Ejercicio

Escribir las posibles relajaciones lagrangeanas para el siguiente problema

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
s.a \quad & x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 2 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

¿Cómo son los multiplicadores para problemas de maximización?

Problema lagrangeano dual

Encontrar la mayor cota inferior.

$$max_{\lambda} \left\{ \begin{array}{ll} Min & cx + \lambda(Ax - b) \\ s.a & Dx \leq e \\ & x \in Z \end{array} \right\}$$

Selección de Restricciones

- Subproblema conocido

$$\begin{aligned} Min \quad & cx - \lambda(b - Ax) \\ s.a \quad & Dx \geq e \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Restricciones de unión
- Duplicar variables (Descomposición Lagrangeana)

Selección de Restricciones

- Subproblema conocido
- Restricciones de unión

$$
\begin{array}{ll}
Min & cx - \lambda(h - Ex - Fy) \\
s.a & Ax \geq b \\
 & x \in X \\
 & Cy \geq d \\
 & y \in Y
\end{array}
$$

- Duplicar variables (Descomposición Lagrangeana)

Selección de Restricciones

- Subproblema conocido
- Restricciones de unión
- Duplicar variables (Descomposición Lagrangeana)

$$
\begin{aligned}
Min \quad & cx - \lambda(x - y) \\
s.a \quad & Ax \geq b \\
& x \in X \\
& Cy \geq d \\
& y \in Y
\end{aligned}
$$

Optimalidad

A veces, la solución del Relajamiento Lagrangeano es factible para el problema original ¿significa qué es óptima?

Optimalidad

Sea x_λ la solución óptima del Relajamiento Lagrangeano para un λ dado, entonces:

- $fx_\lambda + \lambda[Ax_\lambda - b] \leq v(P)$
  con $v(P)$ el valor de la solución óptima en el problema original.

- Además, si x_λ es factible para el problema original, entonces:
  $fx_\lambda + \lambda[Ax_\lambda - b] \leq v(P) \leq fx_\lambda$

- Si además $\lambda[Ax_\lambda - b] = 0$, entonces x_λ es una solución óptima para el problema original y $v(P) = fx_\lambda$

Optimalidad

Para que la solución óptima del Relajamiento Lagrangeano sea óptima para el problema original, tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

- La solución X del Relajamiento Lagrangeano satisface todas las restricciones del problema original ($AX = b$, $DX \leq e$, $X \in Z$)
- $Z_{RL}(\lambda) = cX + \lambda(AX - b) = cX = Z \Rightarrow \lambda(AX - b) = 0$

Integralidad

- La **propiedad de integralidad** se cumple cuando la solución óptima del Relajamiento Lagrangeano, no cambia si se elimina la restricción de integralidad ($x \in \mathbb{Z}$)

Integralidad

- La **propiedad de integralidad** se cumple cuando la solución óptima del Relajamiento Lagrangeano no cambia si se elimina la restricción de integralidad ($x \in \mathbb{Z}$).
- Si se cumple la propiedad de integralidad, entonces el valor máximo de la cota inferior que se puede obtener con la relajación lagrangeana (Z_{RL}), es igual a la relajación lineal (Z_C) del problema original.

$$Z \geq Z_{RL} = Z_C$$

Integralidad

- La **propiedad de integralidad** se cumple cuando la solución óptima del Relajamiento Lagrangeano no cambia si se elimina la restricción de integralidad ($x \in \mathbb{Z}$).
- Si se cumple la propiedad de integralidad, entonces el valor máximo de la cota inferior que se puede obtener con la relajación lagrangeana (Z_{RL}), es igual a la relajación lineal (Z_C) del problema original.
- Si no se cumple con la propiedad de integralidad, entonces el valor máximo de la cota inferior que se puede obtener con la relajación lagrangeana (Z_{RL}), es mayor o igual que el valor de la relajación lineal del problema original (Z_C).

$$Z_C \leq Z_{RL} \leq Z$$

Integralidad

$$
\begin{aligned}
Z_{RL} = \quad & max_{\lambda}\{ \quad min_x cx + \lambda(Ax - b)\} \\
& \qquad\qquad s.a\, Dx \geq e \\
& \qquad\qquad x \in \mathbb{Z}^+ \\
& \geq max_{\lambda}\{ \quad min_x cx + \lambda(Ax - b)\} \\
& \qquad\qquad s.a\, Dx \geq e \\
& \qquad\qquad x \geq 0 \\
& = Z_C
\end{aligned}
$$

Relación con el dual

¿cómo se relacionan los multiplicadores de lagrange con las variables duales?

Relación con el dual

¿cómo se relacionan los multiplicadores de lagrange con las variables duales?
Si se cumple la propiedad de integralidad, entonces los multiplicadores de lagrange óptimos (que entregan la cota inferior más alta) son iguales a las variables duales del problema original relajado linealmente.

Teorema de las holguras complementarias:

$$\lambda * (Ax - b) = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

- Método de subgradiente
  Es un procedimiento iterativo, partiendo de un grupo de multiplicadores, genera nuevos multiplicadores, intentando maximizar la cota inferior obtenida con el Relajamiento Lagrangeano.

Método de subgradiente

1. Sea $\pi \in]0, 2]$ un parámetro definido por el usuario. Inicializar la cota superior Z_{UB} por ejemplo con una heurística. Decidir un grupo inicial de multiplicadores.
2. Resolver el Relajamiento Lagrangeano con los multiplicadores y obtener una solución y la cota inferior Z_{LB}.
3. Definir los subgradientes G_i para las restricciones relajadas, de acuerdo a la solución actual:

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

Método de subgradiente

1. Sea $\pi \in]0, 2]$ un parámetro definido por el usuario. Inicializar la cota superior Z_{UB} por ejemplo con una heurística. Decidir un grupo inicial de multiplicadores.
2. Resolver el Relajamiento Lagrangeano con los multiplicadores y obtener una solución y la cota inferior Z_{LB}.
3. Definir los subgradientes G_i para las restricciones relajadas, de acuerdo a la solución actual
4. Definir un tamaño de paso (escalar) T:

$$T = \frac{\pi(Z_{UB} - Z_{LB})}{\sum_{i=1}^{m} G_i^2}$$

Método de subgradiente

1. Sea $\pi \in]0,2]$ un parámetro definido por el usuario. Inicializar la cota superior Z_{UB} por ejemplo con una heurística. Decidir un grupo inicial de multiplicadores.
2. Resolver el Relajamiento Lagrangeano con los multiplicadores y obtener una solución y la cota inferior Z_{LB}.
3. Definir los subgradientes G_i para las restricciones relajadas, de acuerdo a la solución actual
4. Definir un tamaño de paso (escalar) T
5. Actualizar los multiplicadores:

$$\lambda_i = max\{0, \lambda_i + T \cdot G_i\} \quad i = 1, \ldots, m$$

e ir al paso dos

Método de subgradiente

1. Sea $\pi \in]0,2]$ un parámetro definido por el usuario. Inicializar la cota superior Z_{UB} por ejemplo con una heurística. Decidir un grupo inicial de multiplicadores.
2. Resolver el Relajamiento Lagrangeano con los multiplicadores y obtener una solución y la cota inferior Z_{LB}.
3. Definir los subgradientes G_i para las restricciones relajadas, de acuerdo a la solución actual
4. Definir un tamaño de paso (escalar) T
5. Actualizar los multiplicadores e ir al paso dos

Método de subgradiente

El **criterio de término** puede ser:

- limitar el número de iteraciones
- reducir el valor de π (a la mitad) con cada iteración y terminar cuando alcanza un valor muy pequeño

El procedimiento no lleva a una mejora en cada iteración, puede entregar cotas peores a la actual.

Ejemplo: GAP

Generalized Assignment Problem, Problema de Asignación Generalizado

Dado un conjunto de tareas que se deben realizar y un conjunto de máquinas para realizarlas, se debe determinar la asignación de las tareas a las máquinas de manera que el costo sea el mínimo. Hay que considerar que los costos y tiempos de procesamiento son diferentes en cada máquina y, además, las máquinas tienen distintos tiempos disponibles.

Ejemplo: GAP

I: conjunto de m máquinas
J: conjunto de n tareas
c_{ij}: costo de asignar a la máquina i la tarea j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
a_{ij}: tiempo que requiere la máquina i para realizar la tarea j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
b_i: tiempo disponible de la máquina i, $i = 1, \ldots, m$

variables de decisión: $x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si la máquina } i \text{ procesa la tarea } j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Ejemplo: GAP

$$
\begin{array}{rll}
Z = Min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
s.a & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, n \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i & i = 1. \ldots, m \\
 & x \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de asignación

$$Z = Min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a \quad \boxed{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1. \ldots, m$$

$$x \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de asignación

$$Z_{RL1}(\lambda) = Min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \boxed{+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - 1)}$$

$$s.a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad i = 1.\dots, m$$

$$x \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de asignación

$$
\begin{aligned}
Z_{RL1}(\lambda) = Min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\lambda_j)x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \\
s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad i = 1.\dots, m \\
& x \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de capacidad

$$Z = Min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1. \ldots, m}$$

$$x \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de capacidad con $\lambda \geq 0$

$$Z_{RL2}(\lambda) = Min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \boxed{+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} - b_i)}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo: GAP

Restricciones de capacidad con $\lambda \geq 0$

$$
\begin{aligned}
Z_{RL2}(\lambda) = Min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\lambda_i a_{ij})x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \\
& x \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Ejemplo: GAP

$$m = 2$$
$$n = 7$$
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 2 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 9 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$
$$b_i = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: GAP

$$
\begin{array}{lllllllllllllllll}
Z= \text{Min} & 6x_{11} & +9x_{12} & +4x_{13} & +2x_{14} & +10x_{15} & +3x_{16} & +6x_{17} & +4x_{21} & +8x_{22} & +9x_{23} & +x_{24} & +7x_{25} & +5x_{26} & +4x_{27} & & \\
\text{s. a} & x_{11} & & & & & & & +x_{21} & & & & & & & =1 \\
& & x_{12} & & & & & & & +x_{22} & & & & & & =1 \\
& & & x_{13} & & & & & & & +x_{23} & & & & & =1 \\
& & & & x_{14} & & & & & & & +x_{24} & & & & =1 \\
& & & & & x_{15} & & & & & & & +x_{25} & & & =1 \\
& & & & & & x_{16} & & & & & & & +x_{26} & & =1 \\
& & & & & & & x_{17} & & & & & & & +x_{27} & =1 \\
& 4x_{11} & +x_{12} & +2x_{13} & +x_{14} & +4x_{15} & +3x_{16} & +8x_{17} & & & & & & & & \leq 11 \\
& & & & & & & & 9x_{21} & +9x_{22} & +8x_{23} & +x_{24} & +3x_{25} & +8x_{26} & +7x_{27} & \leq 22
\end{array}
$$

$x_{11} \in \{0,1\}$, $x_{12} \in \{0,1\}$, $x_{13} \in \{0,1\}$, $x_{14} \in \{0,1\}$, $x_{15} \in \{0,1\}$, $x_{16} \in \{0,1\}$, $x_{17} \in \{0,1\}$,
$x_{21} \in \{0,1\}$, $x_{22} \in \{0,1\}$, $x_{23} \in \{0,1\}$, $x_{24} \in \{0,1\}$, $x_{25} \in \{0,1\}$, $x_{26} \in \{0,1\}$, $x_{27} \in \{0,1\}$

Ejemplo: GAP

$$
\begin{array}{lllllllllllllllll}
Z= & \text{Min} & 6x_{11} & +9x_{12} & +4x_{13} & +2x_{14} & +10x_{15} & +3x_{16} & +6x_{17} & +4x_{21} & +8x_{22} & +9x_{23} & +x_{24} & +7x_{25} & +5x_{26} & +4x_{27} & \\
 & \text{s. a} & x_{11} & & & & & & & +x_{21} & & & & & & & =1 \\
 & & & x_{12} & & & & & & & +x_{22} & & & & & & =1 \\
 & & & & x_{13} & & & & & & & +x_{23} & & & & & =1 \\
 & & & & & x_{14} & & & & & & & +x_{24} & & & & =1 \\
 & & & & & & x_{15} & & & & & & & +x_{25} & & & =1 \\
 & & & & & & & x_{16} & & & & & & & +x_{26} & & =1 \\
 & & & & & & & & x_{17} & & & & & & & +x_{27} & =1 \\
 & & 4x_{11} & +x_{12} & +2x_{13} & +x_{14} & +4x_{15} & +3x_{16} & +8x_{17} & & & & & & & & \leq 11 \\
 & & & & & & & & & 9x_{21} & +9x_{22} & +8x_{23} & +x_{24} & +3x_{25} & +8x_{26} & +7x_{27} & \leq 22
\end{array}
$$

$x_{11} \in \{0,1\}$, $x_{12} \in \{0,1\}$, $x_{13} \in \{0,1\}$, $x_{14} \in \{0,1\}$, $x_{15} \in \{0,1\}$, $x_{16} \in \{0,1\}$, $x_{17} \in \{0,1\}$,
$x_{21} \in \{0,1\}$, $x_{22} \in \{0,1\}$, $x_{23} \in \{0,1\}$, $x_{24} \in \{0,1\}$, $x_{25} \in \{0,1\}$, $x_{26} \in \{0,1\}$, $x_{27} \in \{0,1\}$

$$Z=32{,}00$$

Ejemplo: GAP

Relajación lineal

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
Z_{LINEAL}= & \text{Min } 6x_{11} & +9x_{12} & +4x_{13} & +2x_{14} & +10x_{15} & +3x_{16} & +6x_{17} & +4x_{21} & +8x_{22} & +9x_{23} & +x_{24} & +7x_{25} & +5x_{26} & +4x_{27} & \\
 & \text{s. a } x_{11} & & & & & & & +x_{21} & & & & & & & =1 \\
 & & x_{12} & & & & & & & +x_{22} & & & & & & =1 \\
 & & & x_{13} & & & & & & & +x_{23} & & & & & =1 \\
 & & & & x_{14} & & & & & & & +x_{24} & & & & =1 \\
 & & & & & x_{15} & & & & & & & +x_{25} & & & =1 \\
 & & & & & & x_{16} & & & & & & & +x_{26} & & =1 \\
 & & & & & & & x_{17} & & & & & & & +x_{27} & =1 \\
 & 4x_{11} & +x_{12} & +2x_{13} & +x_{14} & +4x_{15} & +3x_{16} & +8x_{17} & & & & & & & & \leq 11 \\
 & & & & & & & & 9x_{21} & +9x_{22} & +8x_{23} & +x_{24} & +3x_{25} & +8x_{26} & +7x_{27} & \leq 22
\end{array}
$$

$x_{11} \geq 0$, $x_{12} \geq 0$, $x_{13} \geq 0$, $x_{14} \geq 0$, $x_{15} \geq 0$, $x_{16} \geq 0$, $x_{17} \geq 0$, $x_{21} \geq 0$, $x_{22} \geq 0$, $x_{23} \geq 0$, $x_{24} \geq 0$, $x_{25} \geq 0$, $x_{26} \geq 0$, $x_{27} \geq 0$

$$Z_{LINEAL}=31{,}78$$

Ejemplo: GAP

Relajamiento lagrangeano de las restricciones de asignación

$$
\begin{array}{llllllllll}
Z_{RL1}(\lambda) = \text{Min} & (6+\lambda_1)x_{11} & +(9+\lambda_2)x_{12} & +(4+\lambda_3)x_{13} & +(2+\lambda_4)x_{14} & +(10+\lambda_5)x_{15} & +(3+\lambda_6)x_{16} & +(6+\lambda_7)x_{17} & \\
 & +(4+\lambda_1)x_{21} & +(8+\lambda_2)x_{22} & +(9+\lambda_3)x_{23} & +(1+\lambda_4)x_{24} & +(7+\lambda_5)x_{25} & +(5+\lambda_6)x_{26} & +(4+\lambda_7)x_{27} & -\sum_{j=1}^{7}\lambda_j \\
\text{s. a} & 4x_{11} & +x_{12} & +2x_{13} & +x_{14} & +4x_{15} & +3x_{16} & +8x_{17} & \leq 11 \\
 & 9x_{21} & +9x_{22} & +8x_{23} & +x_{24} & +3x_{25} & +8x_{26} & +7x_{27} & \leq 22
\end{array}
$$

$x_{11} \in \{0,1\}$, $x_{12} \in \{0,1\}$, $x_{13} \in \{0,1\}$, $x_{14} \in \{0,1\}$, $x_{15} \in \{0,1\}$, $x_{16} \in \{0,1\}$, $x_{17} \in \{0,1\}$,
$x_{21} \in \{0,1\}$, $x_{22} \in \{0,1\}$, $x_{23} \in \{0,1\}$, $x_{24} \in \{0,1\}$, $x_{25} \in \{0,1\}$, $x_{26} \in \{0,1\}$, $x_{27} \in \{0,1\}$

Ejemplo: GAP

Relajamiento lagrangeano de las restricciones de capacidad con $\lambda \geq 0$

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z= \text{Min} & (6+4\lambda_1)x_{11} & +(9+\lambda_1)x_{12} & +(4+2\lambda_1)x_{13} & +(2+\lambda_1)x_{14} & +(10+4\lambda_1)x_{15} & +(3+3\lambda_1)x_{16} & +(6+8\lambda_1)x_{17} & \\
 & +(4+9\lambda_2)x_{21} & +(8+9\lambda_2)x_{22} & +(9+8\lambda_2)x_{23} & +(1+\lambda_1)x_{24} & +(7+3\lambda_2)x_{25} & +(5+8\lambda_2)x_{26} & +(4+7\lambda_2)x_{27} & -11\lambda_1-22\lambda_2 \\
\text{s. a} & x_{11}+x_{21} & & & & & & & =1 \\
 & & x_{12}+x_{22} & & & & & & =1 \\
 & & & x_{13}+x_{23} & & & & & =1 \\
 & & & & x_{14}+x_{24} & & & & =1 \\
 & & & & & x_{15}+x_{25} & & & =1 \\
 & & & & & & x_{16}+x_{26} & & =1 \\
 & & & & & & & x_{17}+x_{27} & =1
\end{array}
$$

$x_{11} \in \{0,1\}$, $x_{12} \in \{0,1\}$, $x_{13} \in \{0,1\}$, $x_{14} \in \{0,1\}$, $x_{15} \in \{0,1\}$, $x_{16} \in \{0,1\}$, $x_{17} \in \{0,1\}$,
$x_{21} \in \{0,1\}$, $x_{22} \in \{0,1\}$, $x_{23} \in \{0,1\}$, $x_{24} \in \{0,1\}$, $x_{25} \in \{0,1\}$, $x_{26} \in \{0,1\}$, $x_{27} \in \{0,1\}$

Bibliografía

Fisher, M. L. *The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems*, Management Science, 27(1), 1-18. 1981.