### 3.3. *Formulación matemática con 4 indices*

Las variables de decisión necesarias son:
$x_{ijkd}$:Variable binaria que será igual a 1 si el par de nodo $i$,$j$ se encuentran en la ruta del vehículo $k$ asignado al deposito $d$.
$z_{ipkd}$: Cantidad de producto $p$ repartido al nodo $i$ por el vehículo $k$ asignado al deposito $d$.
$u_{ijkd}$: Variable auxiliar para eliminar sub-tours.

Los parámetros requeridos son:
$N$: Set de nodos, donde tenemos $D$ depósitos y $C$ ciudades.
$P$: Número de productos a repartir.
$K$: Número de vehículos disponibles en total.
$V$: Capacidad de cada vehículo.
$v_p$: Volumen del producto $p$.
$d_{cp}$: Demanda de cliente $c$ por producto $p$.
$C_{ij}$: Matriz de distancia entre nodos $i$, $j$.
$T_{ij}$: Matriz de tiempos entre nodos $i$, $j$.
$s_{dp}$: Cantidad de producto $p$ en deposito $d$.

Así el la formulación es:

$$\textbf{MPMDFDSDVRP} \quad \text{Minimize} \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{d \in D} C_{ij} x_{ijkd} \tag{17}$$

subject to :

$$\sum_{d \in D} \sum_{k \in K} \sum_{j \in C} x_{djkd} \leq K \tag{18}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in C} x_{djkd} \leq K, \quad \forall d \in D \tag{19}$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{d \in D} x_{djkd} \leq 1, \quad \forall k \in K \tag{20}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in C} x_{ijkd} = 0, \quad \forall i \in D, d \in D, i \neq d \tag{21}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in C} x_{ijkd} = 0, \quad \forall j \in D, d \in D, j \neq d \tag{22}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{d \in D} x_{jikd} = 0, \quad \forall i \in D, j \in D \tag{23}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} \sum_{d \in D} x_{jikd} \geq 1, \quad \forall i \in C \tag{24}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ijkd} - \sum_{j \in N} x_{jikd} = 0, \quad \forall i \in C, k \in K, d \in D \tag{25}$$

$$z_{ipkd} \leq M * \sum_{j \in N} x_{ijkd}, \quad \forall i \in C, k \in K, p \in P, d \in D \tag{26}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{k \in K} z_{ipkd} = d_{ip}, \quad \forall i \in C, p \in P \tag{27}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in C} \sum_{d \in D} z_{ipkd} * v_p \leq V, \quad \forall k \in K \tag{28}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in C} z_{ipkd} \leq s_{dp}, \quad \forall d \in D, p \in P \tag{29}$$

$$u_{ijkd} \leq V * x_{ijkd}, \quad \forall i, j \in N, k \in K, d \in D \tag{30}$$

$$\sum_{j \in N, j \neq i} u_{jikd} - \sum_{j \in C, j \neq i} u_{ijkd} = \sum_{p \in P} z_{ipkd}, \quad \forall i \in C, k \in K, d \in D \tag{31}$$

$$x_{ijkd} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N, \forall k \in K, \forall d \in D \tag{32}$$

$$u_{ijkd} \geq 0, \quad \forall i, j \in C, \forall k \in K, \forall d \in D \tag{33}$$

$$z_{ijpk} \geq 0, \quad \forall i, j \in C, \forall p \in P, \forall k \in K \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

La función objetivo (1) se encarga de minimizar la distancia recorrida.La función objetivo (2) se encarga de minimizar el tiempo recorrido. La ecuación (3) permite que no se asignen más vehículos que los disponibles. Restricción (4) genera que en cada deposito se puedan asignar a lo más $K$ vehículos. La restricción (5) y (6) hacen que cada vehículo debe salir y volver a su deposito asignado. Restricción (6) elimina toda ruta que de vehículo que no haya sido asignado. Restricción (8) asegura que no existan rutas entre depósitos. Restricción (9) cada ciudad debe ser visitada. Restricción (10) es una ecuación de balance. Restricción (11) asegura que no se reparta si no existe la ruta. Restricción (12) se debe cumplir la demanda. Restricción (13) no se puede superar el volumen de los vehículos. Restricción (14) asegura que se respete el inventario de los depositos. Restricciones (15),(16),(17) eliminan los subtours y las restricciones (18),(19),(20) son de integralidad.