О K-ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР

ГРИГОРИЙ ГАРКУША

Аннотация. Строится несвязный спектр K-теории для (неограниченных, некоммутативных) DG-алгебр, что обобщает аналогичные конструкции Каруби, Герстена и Вагонера. Обсуждаются также различные модели для надстроечных DG-алгебр, которые задают явное распетливание K-теории.

1. Введение

Классическое отображение K-теории Квиллена

$$K : (Algebras) \longrightarrow (Spaces)$$

может быть продолжено на категорию неограниченных, некоммутативных DG-алгебр

$$K : (DG - algebras) \longrightarrow (Spaces)$$

таким образом, что наше определение согласуется с K-теорией Квиллена алгебр, которые мы рассматриваем как тривиальные DG-алгебры с нулевым дифференциалом. K-теория DG-алгебр определяется в терминах S-конструкции Вальдхаузена и является технически более сложной нежели K-теория Квиллена алгебр. Тем не менее, она дает определенную свободу: например, DG-алгебру можно заменить квазиизоморфной ей с тем, чтобы вычислять ее K-группы.

Имеется общая техника, которую развивает Шлихтинг в [17], позволяющая распетливать K-теорию DG-алгебр: существуют такие пространства $E_1, E_2, \ldots$, что

$$K(A) \simeq \Omega E_1, E_1 \simeq \Omega E_2, \ldots.$$

Некоторое неудобство этой конструкции заключаются в том, что очень мало известно о пространствах E_n.

Существует метод распетливания алгебраической K-теории кольца, принадлежащий Каруби, Герстену и Вагонеру (см. [7, 14, 22]). По заданному кольцу R они строят другое кольцо SR, *надстройку* для R, такое, что $K(R) \simeq \Omega K(SR)$. Это обеспечивает один из возможных подходов к определению отрицательных K-групп кольца: положим $K_{-1}(R) = K_0(SR)$ и $K_{-n}(R) = K_0(S^n R)$ в общем случае.

Цель настоящей работы — обобщить такое распетливание на K-теорию DG-алгебр.

2000 *Mathematics Subject Classification.* УДК 512.666.

Key words and phrases. Дифференциальные градуированные алгебры, Алгебраическая K-теория.

Теорема. *Пусть k — коммутативное кольцо. Существует надстроечная конструкция S, которая сопоставляет DG k-алгебре A другую DG k-алгебру SA. Тогда последовательность пространств*

$$K(A), K(SA), K(S^2A), \dots.$$

задает Ω-спектр $\mathbf{K}(A)$, чьи гомотопические группы вычисляются следующим образом:

$$\pi_i \mathbf{K}(A) = \begin{cases} \pi_i K(A), & i > 0 \\ K_0(\mathscr{D}_A^c), & i = 0 \\ K_0(\mathscr{D}_{S^{-i}A}^c), & i < 0, \end{cases}$$

где $\mathscr{D}_A^c$ — триангулированная подкатегория компактных объектов производной категории $\mathscr{D}_A$.

Основной мотивацией для изучения K-теории DG-алгебр является обобщение фундаментальных теорем для алгебраической K-теории схем, полученных Томасоном в [20]. Стоит также отметить, что распетливание K-теории DG-алгебр, которое мы предлагаем в данной работе, может послужить основой для распеливания K-теории (несвязных, некоммутативных) кольцевых спектров (см. [5]). Автору до сих пор не известна конструкция надстройки S, которая служила бы моделью для распетливания K-теории кольцевых спектров.

Благодарности. Я бы хотел выразить свою признательность Мариушу Водзичкому за многочисленные плодотворные беседы во время его пребывания в Триесте в августе '04. Именно он предложил рассматривать модели надстроечных DG-алгебр, используемые в данной работе.

2. Фробениусовы пары

В этом разделе обсуждаются необходимые сведения о фробениусовых парах и их K-теории. Понятие фробениусовой пары принадлежит Бернхарду Келлеру. Мы будем придерживаться здесь работы Шлихтинга [17].

Напомним, что *точная категория* — это аддитивная категория, снабженная классом коротких точных последовательностей, удовлетворяющих аксиомам Ex0-Ex2$^{\mathrm{op}}$ Келлера [12]. Эти аксиомы эквивалентны аксиомам Квиллена [16]. Мы называем здесь допустимые мономорфизмы инфляциями, допустимые эпиморфизмы дефляциями, а короткие точные последовательности конфляциями.

Определение. *Фробениусова категория* — это точная категория $\mathscr{E}$ богатая проективными и инъективными объектами, и в которой проективные и инъективные объекты совпадают. Мы пишем $\mathscr{E}$-prinj для полной подкатегории проективных-инъективных объектов фробениусовой категории $\mathscr{E}$. *Отображением фробениусовых категорий* называем точный функтор, сохраняющий проективные-инъективные объекты. Для заданной фробениусовой категории $\mathscr{E}$ ее стабильная категория $\underline{\mathscr{E}}$ имеет те же объекты, что и $\mathscr{E}$. Морфизмы суть морфизмы в $\mathscr{E}$ по модулю тех, которые пропускаются через инъективный-проективный объект. Стабильная категория является триангулированной (Хаппель [8]). Ее построение функториально по отображениям фробениусовых категорий.

Фробениусова пара $\mathcal{A} = (\mathscr{A}, \mathscr{A}_0)$ — это вполне унивалентное включение $\mathscr{A}_0 \longrightarrow \mathscr{A}$ малых фробениусовых категорий. По определению $\mathscr{A}_0-\mathrm{prinj} \subset \mathscr{A} - \mathrm{prinj}$. Отображение фробениусовых пар $(\mathscr{A}, \mathscr{A}_0) \longrightarrow (\mathscr{B}, \mathscr{B}_0)$ — это отображение фробениусовых категорий $\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ такое, что $\mathscr{A}_0$ отображается в $\mathscr{B}_0$. Если $\mathscr{A}$ — малая фробениусова категория, пишем $\mathscr{A}$ для фробениусовой пары $(\mathscr{A}, \mathscr{A} - \mathrm{prinj})$.

Если $\mathcal{A} = (\mathscr{A}, \mathscr{A}_0)$ — фробениусова пара, то отображение $\underline{\mathscr{A}_0} \longrightarrow \underline{\mathscr{A}}$ малых триангулированных категорий вполне унивалентно, поскольку всякое отображение в инъективный объект пропускается через любую выбранную инфляцию в инъективный объект. *Производная категория* $D\mathcal{A} = D(\mathscr{A}, \mathscr{A}_0)$ фробениусовой пары $\mathcal{A}$ определяется как фактор-категория по Вердье [21, II.2]

$$D\mathcal{A} = \underline{\mathscr{A}}/\underline{\mathscr{A}_0}.$$

Отображение фробениусовых пар индуцирует отображение производных категорий путем перехода к стабильным категориям и фактор-категориям по Вердье.

Наконец, мы определяем K-теорию фробениусовой пары $\mathcal{A} = (\mathscr{A}, \mathscr{A}_0)$ следующим образом. Ассоциированная с ней категория Вальдхаузена [23] — это категория $\mathscr{A}$, в которой корасслоения $\mathrm{co}\mathcal{A}$ суть инфляции в $\mathscr{A}$, и слабые эквивалентности $w\mathcal{A}$ суть отображения в $\mathscr{A}$, которые являются изоморфизмами в $D\mathcal{A}$. Мы по прежнему пишем $\mathcal{A}$ для этой категории Вальдхаузена. *Пространство K-теории для $\mathcal{A}$* определяется по Вальдхаузену [23] как

$$K(\mathcal{A}) = \Omega|wS.\mathcal{A}|.$$

Отображение $\mathcal{A} \longmapsto K(\mathcal{A})$ задает функтор из фробениусовых пар в пространства.

Различные примеры фробениусовых пар и их производных категорий приведены в работе Шлихтинга [17].

3. Компактно порожденные триангулированные категории

В этом разделе мы напомним некоторые общие факты о триангулированных категориях.

Определение. Зафиксируем триангулированную категорию $\mathscr{S}$ с произвольными прямыми суммами. Объект X из $\mathscr{S}$ называется *компактным*, если для всякого семейства $\{Y_i\}_{i\in I}$ объектов из $\mathscr{S}$ каноническое отображение

$$\bigoplus_{i\in I} \mathscr{S}(X, Y_i) \longrightarrow \mathscr{S}(X, \bigoplus_{i\in I} Y_i)$$

является изоморфизмом. Триангулированная подкатегория $\mathscr{S}$, состоящая из компактных объектов, обозначается через $\mathscr{S}^c$. Она является толстой подкатегорией $\mathscr{S}$, т.к. прямое слагаемое компактного объекта — компактный объект, и $\mathscr{S}$ идемпотентно полна, т.к. замкнута относительно счетных прямых сумм (Бёкштедт-Нееман [3, 3.2]).

Категория $\mathscr{S}$ *компактно порождена*, если существует семейство $\mathscr{C}$ компактных объектов в $\mathscr{S}$ такое, что $\mathscr{S}(\mathscr{C}, Y) = 0$ (т.е. $\mathscr{S}(C, Y) = 0$ для всех $C \in \mathscr{C}$) влечет $Y = 0$ для всякого объекта Y из $\mathscr{S}$. Назовем такое семейство $\mathscr{C}$ *порождающим семейством*, если оно замкнуто относительно функтора сдвига, для которого мы пишем $\mathscr{C} = \Sigma\mathscr{C}$. Если порождающее семейство $\mathscr{C} = \{\Sigma^n S\}_{n\in\mathbf{Z}}$ для некоторого компактного объекта $S \in \mathscr{S}$, то назовем S *образующим*.

Теорема 3.1 (см. Нееман [15]). *Пусть $\mathscr{S}$ — компактно порожденная триангулированная категория и пусть R — семейство компактных объектов в $\mathscr{S}$ замкнутое относительно функтора сдвига. Допустим, что $\mathscr{R}$ — наименьшая полная подкатегория $\mathscr{S}$, содержащая R, замкнутая относительно произвольных копроизведений и треугольников. Пусть $\mathscr{T}$ — фактор-категория по Вердье $\mathscr{S}/\mathscr{R}$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

(1) *категория $\mathscr{R}$ компактно порождена, и R — порождающее семейство;*
(2) *если R — порождающее семейство для всей категории $\mathscr{S}$, то $\mathscr{R} = \mathscr{S}$;*
(3) *если $R \subset \mathscr{R}$ замкнуто относительно треугольников и прямых слагаемых, то оно совпадает с $\mathscr{R}^c$. В любом случае, $\mathscr{R}^c = \mathscr{R} \cap \mathscr{S}^c$;*
(4) *если t — компактный объект $\mathscr{T}$, то имеются объект $t' \in \mathscr{T}^c$, объект $s \in \mathscr{S}^c$ и изоморфизм в $\mathscr{T}$*

$$s \cong t \oplus t'.$$

Таким образом, t может и не быть изоморфным в $\mathscr{T}$ компактному объекту из $\mathscr{S}$, однако он является прямым слагаемым объекта, который изоморфен в $\mathscr{T}$ компактному объекту из $\mathscr{S}$.

Следующее утверждение показывает, что определенные точные функторы между триангулированными категориями суть эквивалентности.

Предложение 3.2. *Пусть $F : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}$ — точный функтор между триангулированными категориями с бесконечными суммами. Допустим, что $\mathscr{S}$ имеет образующий S такой, что:*

(1) *отображение*

$$F : \mathscr{S}(S[n], S) \longrightarrow \mathscr{T}(FS[n], FS)$$

является биекцией для всякого целого числа n и

(2) *FS — образующий для $\mathscr{T}$.*

Тогда F — эквивалентность категорий.

Доказательство. См. Шведе [18, 3.10]. □

4. Производные категории дифференциальных градуированных алгебр

В этом разделе мы напомним некоторые общие факты о DG-алгебрах и их производных категориях. За деталями мы отсылаем читателя к Келлеру [11], Крицу-Мэю [13] и Феликсу-Хальперину-Томасу [6].

Определение. Пусть k — коммутативное кольцо. *Дифференциальная градуированная k-алгебра* (или DG-алгебра) — это $\mathbf{Z}$-градуированная, ассоциативная k-алгебра с единицей $1 \in A_0$, наделенная k-линейным, однородным степени -1 дифференциалом $d : A \longrightarrow A$ (т.е. $dA_p \subset A_{p-1}$ для каждого p), удовлетворяющим градуированному правилу Лейбница

$$d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$$

для всех однородных элементов $a, b \in A$. *Дифференциальный градуированный A-модуль* (или DG A-модуль) — это $\mathbf{Z}$-градуированный, правый A-модуль, наделенный k-линейным, однородным степени -1 дифференциалом $d : M \longrightarrow M$, удовлетворяющим градуированному правилу Лейбница

$$d(ma) = (dm)a + (-1)^{|m|}m(da)$$

для всех однородных элементов $m \in M$ и $a \in A$. *Морфизм* DG A-модулей $f : M \longrightarrow N$ — это морфизм исходных градуированных A-модулей, однородный степени 0, коммутирующий с дифференциалом.

Пусть A — DG-алгебра. Ее производная категория $\mathscr{D}_A$ строится из категории всех DG A-модулей обращением квази-изоморфизмов, т.е. тех морфизмов, которые индуцируют изоморфизм в гомологиях.

Категория $\mathscr{D}_A$ может быть также описана следующим образом (см. Криц-Мэй [13, part III], например). DG A-модуль M назовем *клеточным* (соответственно *кофибрантным*), если имеется фильтрация DG A-подмодулями

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M = \cup_{i \in \mathbf{N}} M_i$$

такая, что каждый фактор M_i/M_{i-1} — свободный DG A-модуль, т.е. прямая сумма DG A-модулей A с образующими, сосредоточенными в различных степенях (соответственно прямое слагаемое клеточного модуля). Клеточный модуль иногда называется "полусвободным" (Аврамов-Хальперин [2]). В частности, всякий клеточный A-модуль является свободным градуированным A-модулем.

Хинич [9] показывает в §§2-3, что DG-модули над фиксированной DG-алгеброй образуют замкнутую модельную категорию, в которой слабые эквивалентности суть квази-изоморфизмы, а расслоения суть сюръективные отображения. Он доказывает, что DG-модуль M кофибрантен (т.е. морфизм $0 \longrightarrow M$ — корасслоение) в том и только том случае, когда он является прямым слагаемым клеточного DG-модуля.

Через $\mathscr{C}_A$ (соответственно $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$) обозначим полную подкатегорию DG A-модулей, состоящих из клеточных A-модулей (соответственно кофибрантных модулей). Ясно, что она замкнута относительно прямых сумм. Конус CM для DG A-модуля M определяется следующим образом:

$$CM_i := M_i \oplus M_{i-1}, \quad d(x, y) := (dx + (-1)^i y, dy).$$

Если M — клеточный (соответственно кофибрантный) A-модуль, то CM также является клеточным (соответственно кофибрантным) A-модулем. Отображение $f : M \longrightarrow N$ гомотопно нулю, если оно пропускается через CM.

Как $\mathscr{C}_A$, так и $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$ — фробениусовы категории, если мы определим конфляцию как последовательность, которая является расщепляющейся точной последовательностью A-модулей (забывая дифференциалы). Каждый DG A-модуль вида CM проективен и инъективен для этой структуры, поскольку A-модульные отображения $(0\ 1)^t : M[1] \longrightarrow CM$ и $(1\ 0) :$

$CM \longrightarrow M$ индуцируют изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG\,Mod}\,A}(CM, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,A}(M[1], N)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG\,Mod}\,A}(N, CM) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,A}(N, M)$, где M, N — DG A-модули. Кроме того, имеются включение $(1\,0)^t : M \longrightarrow CM$ и сюръекция $CM[-1] \to M$. Таким образом, категории $\mathscr{C}_A$ и $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$ богаты проективными и инъективными объектами, и они являются фробениусовыми категориями.

Лемма 4.1. *Если $L \rightarrowtail M \twoheadrightarrow N$ — конфляция DG A-модулей, где L, N — кофибрантные A-модули, то M – также кофибрантный A-модуль.*

Доказательство. Найдутся два кофибрантных модуля P, Q таких, что $L \oplus P$ и $N \oplus P \oplus Q$ — клеточные модули. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} L \oplus P \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & M' \arrow[r, two heads, "j'"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \oplus P \oplus Q \arrow[d, "\pi"] \\ L \oplus P \arrow[r, tail] & M \oplus P \arrow[r, two heads, "j"] & N \oplus P, \end{tikzcd}$$

у которой правый квадрат декартов, π — проекция. По Феликсу-Хальперину-Томасу [6, I.6.3] M' — клеточный A-модуль. Пусть i такой, что $\pi i = 1$. Так как $\pi(ij) = j$, найдется морфизм $i' : M \oplus P \longrightarrow M'$ такой, что $\pi' i' = 1$ и $j' i' = ij$. Поэтому $M \oplus P$ — прямое слагаемое клеточного модуля M'. Отсюда M кофибрантен. □

Обозначим через $\mathscr{H}_A$ (соответственно $\mathscr{H}_A^{\mathrm{cof}}$) гомотопическую категорию клеточных (соответственно кофибрантных) A-модулей. Ее объекты суть клеточные (соответственно кофибрантные) A-модули, и морфизмы — DG A-модульные отображения по модулю тех, которые гомотопны нулю. Включение $\mathscr{C}_A$ (соответственно $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$) в категорию всех DG A-модулей индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $\mathscr{H}_A \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_A$ (соответственно $\mathscr{H}_A^{\mathrm{cof}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_A$) (см. Криц-Мэй [13, III.2.7]). Также заметим, что включение $\mathscr{C}_A$ в $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$ индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $\mathscr{H}_A \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_A^{\mathrm{cof}}$.

Легко проверить, что $\mathscr{D}_A$ имеет бесконечные прямые суммы, и таковые заданы обычными суммами DG A-модулей.

Пусть A_A обозначает свободный DG A-модуль с одним образующим. Пусть M — произвольный DG A-модуль. Тогда ясно, что отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_A}(A_A, M) \longrightarrow H_0 M, \quad [f] \longmapsto [f(1)],$$

биективно. Очевидно, что объект A_A компактен в $\mathscr{D}_A$ и является образующим для $\mathscr{D}_A$.

Клеточный (соответственно кофибрантный) A-модуль назовем *конечным*, если он имеет конечный базис как A-модуль (соответственно, если он является прямым слагаемым конечного клеточного A-модуля). Обозначим через $\mathrm{cell}\,A$ (соответственно $\mathrm{cof}\,A$) полную подкатегорию $\mathscr{C}_A$ (соответственно $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$), состоящую из конечных клеточных (соответственно кофибрантных) A-модулей. Тогда $\mathrm{cell}\,A$ ($\mathrm{cof}\,A$) является малой фробениусовой категорией.

Будем говорить, что кофибрантный A-модуль N — прямое слагаемое с точностью до гомотопии клеточного A-модуля M, если имеется гомотопическая эквивалентность между M и $N \oplus N'$ для некоторого кофибрантного A-модуля N'. Если M конечен, то N не обязательно имеет гомотопический тип конечного кофибрантного A-модуля. Пусть $\mathscr{F}\mathscr{C}_A$ обозначает полную подкатегорию $\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}}$, чьи объекты — прямые слагаемые с точностью до гомотопии конечных клеточных A-модулей. Заметим, что объекты $\mathscr{F}\mathscr{C}_A$ — в точности компактные объекты $\mathscr{H}_A^{\mathrm{cof}}$. Категория $\mathscr{F}\mathscr{C}_A$ очевидно является малой фробениусовой категорией.

5. K-теория дифференциальных градуированных алгебр

Определение. Если A — DG-алгебра, то ее K-теория определяется как

$$K(A) = K(\mathscr{F}\mathscr{C}_A).$$

Заметим, что если A — k-алгебра, рассматриваемая как тривиальная DG-алгебра, сосредоточенная в степени ноль, то ее K-теория — это K-теория Квиллена для A с точностью до гомотопии. Рассмотрим также K-теорию

$$K^f(A) = K(\operatorname{cell} A)$$

конечных клеточных модулей. Если A — алгебра, то $K^f(A)$ — K-теория Квиллена конечно порожденных свободных модулей. Включение $\operatorname{cell} A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_A$ задает отображение пространств $K^f(A) \longrightarrow K(A)$, которое индуцирует изоморфизмы на π_i, $i > 0$, и мономорфизм на π_0 (см. Шлихтинг [17, 11.17]).

Мы также заметим, что $\pi_0 K(A)$ — группа Гротендика $K_0(\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A})$ триангулированной категории $\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A}$, которая, в свою очередь, является группой Гротендика $K_0(\mathscr{D}_A^c)$ триангулированной подкатегории компактных в $\mathscr{D}_A$ объектов.

Пусть A и B — DG-алгебры, и ${}_AX_B$ — DG $(A$-$B)$-*бимодуль*, т.е. X — градуированный левый A-модуль и градуированный правый B-модуль, действия A и B на X коммутируют, и единицы алгебр A и B действуют на X одинаково, и X наделен однородным k-линейным степени -1 дифференциалом d, удовлетворяющим тождеству

$$d(axb) = (da)xb + (-1)^{|a|}a(dx)b + (-1)^{|a|+|x|}ax(db).$$

Лемма 5.1. *Пусть X — DG $(A$-$B)$-бимодуль, который кофибрантен как правый DG B-модуль. Тогда функтор $-\otimes_A X$ сохраняет кофибрантные объекты и гомотопии. Более того, если X_B — прямое слагаемое с точностью до гомотопии конечного клеточного B-модуля, то функтор $-\otimes_A X$ индуцирует отображение фробениусовых категорий $\mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_B$ и, значит, отображение K-теорий $K(A) \longrightarrow K(B)$.*

Доказательство. Очевидно, что функтор $-\otimes_A X$ сохраняет гомотопии. Пусть F — клеточный A-модуль. Имеется фильтрация DG A-подмодулями

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F = \cup_{k\in\mathbf{N}} F_k$$

такая, что F_0 и каждый фактор $F_{k-1,k} = F_k/F_{k-1}$ — свободный DG A-модуль. Ясно, что $F_0 \otimes_A X$ и каждый $F_{k-1,k} \otimes_A X$ кофибрантен как правый B-модуль. По лемме 4.1 каждый $F_k \otimes_A X$, $k \geqslant 1$, кофибрантен. По подлемме (см. ниже) сам $F \otimes_A X$ кофибрантен.

Так как кофибрантные модули — прямые слагаемые клеточных модулей, то функтор $- \otimes_A X$ также сохраняет кофибрантные модули.

Подлемма. *Пусть правый DG A-модуль M является объеденением возрастающей последовательности $M_0 \subset M_1 \subset \cdots$ подмодулей таких, что M_0 и каждый $M_{k-1,k} = M_k/M_{k-1}$ — кофибрантный A-модуль. Тогда M сам кофибрантен.*

Доказательство. Существуют кофибрантные модули P, Q такие, что $F_0 = M_0 \oplus P$ и $F_{0,1} = M_{0,1} \oplus P \oplus Q$ — клеточные модули. Следуя доказательству леммы 4.1, можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r, tail, "\iota'"] \arrow[d, equal] & F_1 \arrow[r, two heads, "j'"] \arrow[d, shift right, "\pi'"'] & F_{0,1} \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\
F_0 \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[u, bend right, "\exists i''"'] & M_1 \oplus P \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[u, shift right, bend right, "\exists i'"'] & M_{0,1} \oplus P, \arrow[u, shift right, bend right, "\exists i"']
\end{tikzcd}$$

у которой правый квадрат декартов, π — проекция, и имеются i, i' такие, что $\pi i = 1, ij = j'i', \pi' i' = 1$. Тогда существует морфизм i'' такой, что $\iota' i'' = i' \iota$. Имеем: $\iota = \pi' i' \iota = \pi' \iota' i'' = \iota i''$ и, значит, $i'' = 1$, т.к. ι — инфляция. Таким образом, нижняя строка является ретрактом верхней. Ясно, что нижняя строка — коретракт для конфляции $M_0 \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M_{0,1}$.

Аналогичным образом можем построить клеточные A-модули F_k, $F_{k,k-1}$, $k \geqslant 1$, таким образом, что последовательность инфляций $M_0 \rightarrowtail M_1 \rightarrowtail \cdots$ будет ретрактом последовательности клеточных A-модулей $F_0 \rightarrowtail F_1 \rightarrowtail \cdots$. Поэтому $M = \cup_k M_k$ — прямое слагаемое в $F = \cup_k F_k$. По Феликсу-Хальперину-Томасу [6, I.6.3] $F = \cup_k F_k$ — клеточный A-модуль. Следовательно, $M = \cup_k M_k$ — кофибрантный A-модуль. $\square$

Далее допустим, что X_B — прямое слагаемое с точностью до гомотопии конечного клеточного B-модуля. Пусть F – конечный клеточный A-модуль. Имеется конечная фильтрация DG A-подмодулями

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_k = F$$

такая, что F_0 и каждый фактор $F_{k-1,k} = F_k/F_{k-1}$ — свободный DG A-модуль. Тогда $F_0 \otimes_A X$ и каждый $F_{k-1,k} \otimes_A X$ — прямое слагаемое с точностью до гомотопии конечного клеточного правого B-модуля. Поскольку $\mathscr{F}\mathscr{C}_B$ — замкнутая относительно расширений точная подкатегория в $\mathscr{C}_B^{\mathrm{cof}}$, каждый $F_k \otimes_A X$ — прямое слагаемое с точностью до гомотопии конечного клеточного правого B-модуля.

Теперь остается заметить, что функтор $- \otimes_A X$ сохраняет гомотопии и прямые суммы. $\square$

Отображение DG-алгебр $A \longrightarrow B$ индуцирует отображение $- \otimes_A B : \mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_B$ фробениусовых пар и, следовательно, отображение $K(A) \longrightarrow K(B)$. Если $A \longrightarrow B$ — квази-изоморфизм, то функтор $- \otimes_A B$ индуцирует эквивалентность производных категорий и, значит, гомотопическую эквивалентность $K(A) \xrightarrow{\sim} K(B)$ (см. Шлихтинг [17, 11.15]).

В завершение этого раздела мы обсудим Морита-инвариантность K-теории. В начале дадим некоторые определения.

Пусть A — DG-алгебра и пусть M, N — два правых DG A-модуля. Определим *комплекс гомоморфизмов* $\mathscr{H}om_A(M,N)$ следующим образом. В размерности $n \in \mathbf{Z}$ группа цепей $\mathscr{H}om_A(M,N)_n$ — это группа градуированных A-модульных гомоморфизмов степени n, т.е.

$$\mathscr{H}om_A(M,N)_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,A}(M[n], N).$$

Дифференциал $d : \mathscr{H}om_A(M,N)_n \longrightarrow \mathscr{H}om_A(M,N)_{n-1}$ определяется как

$$d(f) = d_N \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_M.$$

Для всякого DG A-модуля M комплекс эндоморфизмов $\mathscr{E}nd_A(M) = \mathscr{H}om_A(M,M)$ является DG-алгеброй относительно композиции, и M — DG $(\mathscr{E}nd_A(M), A)$-бимодуль. Заметим, что если $M = A^n$, то отображение

$$\mathscr{E}nd_A(M) \longrightarrow M_n A, \quad (f_{ij}) \longmapsto (f_{ij}(1))$$

— изоморфизм DG-алгебр. Здесь $M_n A$ означает DG-алгебру (n,n)-матриц с дифференциалом $d(a_{ij}) = (da_{ij})$.

Теорема 5.2 (Морита-инвариантность K-теории)**.** *Пусть A — DG-алгебра, а $M \in \mathscr{F}\mathscr{C}_A$ — образующий для производной категории $\mathscr{D}_A$. Тогда функтор $- \otimes_{\mathscr{E}nd_A(M)} M : \mathscr{F}\mathscr{C}_{\mathscr{E}nd_A(M)} \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_A$ индуцирует эквивалентность K-теорий $K(\mathscr{E}nd_A(M)) \xrightarrow{\sim} K(A)$. В частности, функтор $-\otimes_{M_n A} A^n$ индуцирует эквивалентность K-теорий $K(M_n A) \xrightarrow{\sim} K(A)$.*

Доказательство. По Келлеру [11, 6.1] функтор $-\otimes_{\mathscr{E}nd_A(M)} M$ индуцирует эквивалентность производных категорий $\mathscr{D}_{\mathscr{E}nd_A(M)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_A$. В частности, индуцированное отображение $\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{\mathscr{E}nd_A(M)}} \longrightarrow \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A}$ — эквивалентность. Теперь наше утверждение следует из [17, 11.15]. $\square$

6. Функторы конуса и надстройки

В этом разделе мы фиксируем ассоциативное кольцо с единицей R. Здесь мы обсудим различные модели для конус-колец и надстроечных колец. Мы следуем работе Водзичкого [25].

6.1. **Чистые точные последовательности.** Напомним, что короткая точная последовательность $M_0 \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M_2$ левых R-модулей *чиста*, если для каждого правого R-модуля N последовательность $N \otimes_R M_0 \rightarrowtail N \otimes_R M_1 \twoheadrightarrow N \otimes_R M_2$ точна.

Мономорфизм $i : M' \rightarrowtail M$ и эпиморфизм $f : M \twoheadrightarrow M''$ чисты, если соответствующие короткие точные последовательности $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, i$ и $\mathrm{Ker}\, f \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ чисты.

Теорема 6.1 (см. Уорфилд [24], Скляренко [1])**.** *Следующие условия эквивалентны чистоте точной последовательности $M_0 \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M_2$:*

1. *для всякого конечно представимого модуля L естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}_R(L, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, M_2)$ сюръективен;*
2. *всякое конечное множество линейных уравнений над R с константами из M_0, разрешимое в M_1, разрешимо и в M_0;*

(3) *точная последовательность* $M_0 \rightarrowtail M_1 \twoheadrightarrow M_2$ — *индуктивный предел расщепляющихся точных последовательностей.*

6.2. **Конус и надстройка кольца.** Следующая конструкция, принадлежащая Водзичкому [25], — небольшая модификация конструкции Вагонера [22].

Пусть CR — кольцо матриц (r_{ij}), $1 \leqslant i,j < \infty$, с элементами из R такое, что

(I) множество $\{r_{ij} \mid 1 \leqslant i,j < \infty\} \subset R$ конечно,

(II) число ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце конечно.

CR назовем *конус-кольцом* для R. Оно содержит $M_\infty(R) = \varinjlim M_n(R)$ как двусторонний идеал. Отсюда получаем функториальное расширение

$$M_\infty(R) \rightarrowtail CR \twoheadrightarrow SR, \tag{1}$$

где фактор-кольцо $SR = CR/M_\infty(R)$ назовем *надстройкой* R.

Поскольку последовательность (1) — индуктивный предел расщепляющихся коротких точных последовательностей R-модулей

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
M_n(R) & \longrightarrow & CR & \longrightarrow & CR/M_n(R) \\
\downarrow & & \| & & \downarrow \\
M_{n+1}(R) & \longrightarrow & CR & \longrightarrow & CR/M_{n+1}(R), \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

то она чиста.

В определении конус-функтора Вагонера [22] не требовалось, чтобы элементы матрицы (r_{ij}) принадлежали конечному подмножеству R (см. условие (I) выше). Обозначим эту "бóльшую" алгебру через $C_W R$, и пусть $S_W R = C_W R/M_\infty(R)$. Расширение

$$M_\infty(R) \rightarrowtail C_W R \twoheadrightarrow S_W R$$

также чисто. Лодэ [14, 1.4.4] рассматривает иной вариант конструкции Вагонера. Именно, $C_L R := C_W \mathbf{Z} \otimes R$ и $S_L R := S_W \mathbf{Z} \otimes R$.

Альтернативная конструкция конус-функтора и функтора надстройки была предложена ранее Каруби (см., например, [10, p. 269]). Его конус-кольцо $C_K R$ состоит из матриц, удовлетворяющих условию (I) выше и такому более сильному варианту условия (II):

(II′) число ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце ограничено.

Это определение, которое цитирует Конн [4, p. 103], эквивалентно первоначальному определению Каруби.

Называем R *вялым*, если найдется R-бимодуль M, конечно порожденный и проективный как правый модуль, и бимодульный изоморфизм $\theta : M \oplus R \cong M$. Хорошо известно, что конус-кольца $CR, C_K R, C_W R, C_L R$ вялые. Их K-теория, в частности, нулевая.

Пусть $R^\infty = R^{(\mathbf{N})}$ и $E = \operatorname{End}_R R^\infty$ — кольцо эндоморфизмов R^∞. Отождествим E с кольцом бесконечных матриц, в котором число ненулевых элементов каждого столбца конечно.

Предложение 6.2. *Выполнены следующие условия для кольца R:*

(1) *как правый R-модуль $C_W R$ — чистый подмодуль E;*
(2) *как правый R-модуль $C_K R$ — чистый подмодуль CR.*

Доказательство. (1). По теореме 6.1(2) достаточно проверить, что любое конечное множество линейных уравнений над R

$$\sum_{j=1}^{n} X^j r_{ij} = A^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где $A^i = (a^i_{kl})_{k,l\in\mathbf{N}} \in C_W R$, разрешимое в E, разрешимо в $C_W R$. Пусть набор $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ решает (2) в E.

Для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $k \in \mathbf{N}$ рассмотрим

$$s^k_i = \max\{l \in \mathbf{N} \mid a^i_{kl} \neq 0\}.$$

Так как каждая матрица A_i локально конечна, то каждое s^k_i конечно. Положим теперь

$$t(k) = \max\{s^k_1, \ldots, s^k_m\}.$$

Для любого $j \leqslant n$ определим матрицу $Z^j = (z^j_{kl})$ следующим образом. Пусть $z^j_{kl} = y^j_{kl}$, если $l \leqslant t(k)$, и ноль в противном случае. Тогда Z^j локально конечна, и набор $Z = (Z^1, \ldots, Z^n)$ решает (2). Отсюда $C_W R$ чист в E.

(2). Доказательство аналогично (1). □

Ясно, что правый R-модуль CR — прямой предел конечно порожденных свободных R-модулей и потому является плоским модулем. По Штенштрёму [19, I.11.1] SR — также плоский модуль.

Следствие 6.3. *$C_K R, S_K R$ и $C_L R, S_L R$ — плоские правые R-модули. Если R когерентно слева, то $C_W R, S_W R$ — также плоские правые R-модули.*

Доказательство. То, что $C_K R$ плоский, следует из предложения 6.2(2) и того факта, что чистый подмодуль плоского модуля — плоский модуль.

Пусть R когерентно слева. Правый модуль E_R изоморфен $\prod_{\mathbf{N}} R^\infty$. Модуль R^∞ плоский. По теореме Чейза [19, I.13.3] прямое произведение плоских правых модулей — плоский модуль. Поэтому E плоский. Так как $C_W R$ — чистый подмодуль E по предложению 6.2(1), то он также плоский.

Кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ когерентно, и, значит, $C_W \mathbf{Z}$ — плоская абелева группа. Тогда $C_L R = C_W \mathbf{Z} \otimes R$ — плоский правый R-модуль.

Утверждение о плоскости модулей $S_K R, S_L R$ и $S_W R$ следует из Штенштрёма [19, I.11.1]. □

7. Распетливание K-теории

Говорим, что DG-алгебра A *вялая*, если найдется такой DG A-бимодуль X, что X_A — прямое слагаемое с точностью до гомотопии конечного клеточного правого A-модуля, и бимодульный изоморфизм $\theta : X \oplus A \cong X$.

Пусть R — k-алгебра, и A — DG k-алгебра. Определим DG-алгебру $R \otimes_k A$ по правилу

$$(R \otimes_k A) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R \otimes_k A^n,$$
$$d(r \otimes a) = r \otimes (da),$$
$$(r \otimes a)(r' \otimes a') = rr' \otimes aa'$$

для всех $a \in A$, $r \in R$. Если R — плоский k-модуль, то

$$H_*(R \otimes_k A) = R \otimes_k H_*(A).$$

Положим

$$CA = Ck \otimes_k A, \quad C_K A = C_K k \otimes_k A,$$
$$C_W A = C_W k \otimes_k A, \quad C_L A = C_L k \otimes_k A.$$

Предложение 7.1. *Для DG-алгебры A выполнены следующие утверждения:*

(1) *если A вялая, то пространство K-теории A стягиваемо;*
(2) *DG-алгебры $CA, C_K A, C_W A, C_L A$ являются вялыми.*

Доказательство. (1). По лемме 5.1 $-\otimes_A X$ задает эндофунктор на $\mathscr{F}\mathscr{C}_A$. Бимодульный изоморфизм $\theta : X \oplus A \cong X$ индуцирует естественную эквивалентность эндофункторов $-\otimes_A X \oplus \mathrm{id} \cong -\otimes_A X$. По аддитивности $(- \otimes_A X)_* = 1_* + (- \otimes_A X)_*$, и, значит, тождественное отображение на $K(A)$ гомотопно нулю. Поэтому $K(A)$ стягиваемо.

(2). Докажем утверждение, скажем, для CA. Другие случаи проверяются аналогично.

Имеется Ck-бимодуль M, конечно порожденный, проективный как правый модуль, и изоморфизм бимодулей $\theta : M \oplus Ck \cong M$. Тогда CA-бимодуль $M \otimes_k A$ конечный, кофибрантный как правый CA-модуль. Более того, изоморфизм θ индуцирует изоморфизм CA-бимодулей $(M \otimes_k A) \oplus CA \cong (M \otimes_k A)$. Поэтому, CA является вялой. □

DG-алгебру CA будем называть *конус-DG-алгеброй* A. Для всякого n через $M_n(A)$ обозначим DG k-алгебру (n, n)-матриц с дифференциалом $d(a_{ij}) = (da_{ij})$. CA содержит $M_\infty(A) = \varinjlim M_n(A)$ как двусторонний идеал; отсюда получаем функториальное расширение

$$M_\infty(A) \rightarrowtail CA \twoheadrightarrow SA,$$

где фактор-DG-алгебру $SA = CA/M_\infty(A)$ называем *надстройкой* A. Заметим, что $SA = Sk \otimes_k A$. Соответствующие конус- и надстроечные DG-алгебры $C_K A, C_W A, C_L A, S_K A, S_W A, S_L A$ определяются аналогично.

Последовательность

$$M_\infty(k) \rightarrowtail Ck \twoheadrightarrow Sk$$

чиста. Поэтому последовательность

$$M_\infty(k) \otimes_k H_*A \rightarrowtail Ck \otimes_k H_*A \twoheadrightarrow Sk \otimes_k H_*A$$

точна. Так как Ck, Sk — плоские k-модули, то последняя последовательность индуцирует функториальное расширение на гомологиях

$$H_*(M_\infty(A)) \rightarrowtail H_*(CA) \twoheadrightarrow H_*(SA).$$

Аналогичное расширение на гомологиях выполнено для DG-алгебр C_KA, C_LA, S_KA, S_LA. Если k когерентно, то же самое справедливо для C_WA, S_WA, т.к. C_Wk, S_Wk плоские (см. следствие 6.3).

Для $n \in \mathbf{N}$ через e_n обозначим идемпотентную матрицу в Ck, у которой первые диагональные элементы — единицы, и другие элементы — нули. Пусть $X = e_1Ck \otimes_k A$. Он является DG $(A\text{-}CA)$-бимодулем и прямым слагаемым CA как правый DG CA-модуль. По предложению 5.1 функтор $-\otimes_A X$ индуцирует отображения

$$\mathscr{C}_A^{\mathrm{cof}} \longrightarrow \mathscr{C}_{CA}^{\mathrm{cof}}, \quad \mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}.$$

Предложение 7.2. *Функторы $-\otimes_A X$ и $-\otimes_{CA} SA$ индуцируют точную последовательность производных категорий*

$$\mathscr{D}_A \xrightarrow{T_X} \mathscr{D}_{CA} \xrightarrow{T_{SA}} \mathscr{D}_{SA},$$

т.е. T_X вполне унивалентный, $T_{SA} \circ T_X = 0$ и T_{SA} индуцирует эквивалентность

$$\mathscr{D}_{CA}/T_X(\mathscr{D}_A) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{SA}.$$

В частности, отображение $\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A} \longrightarrow \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}}$ вполне унивалентно. Кроме того, аналогичное утверждение выполнено для DG-алгебр C_KA, C_LA, S_KA, S_LA над всяким коммутативным кольцом k и для DG-алгебр C_WA, S_WA, если кольцо k когерентно.

Доказательство. Как правый DG CA-модуль X — компактный объект $\mathscr{D}_{CA}$. Пусть $\mathscr{R}$ — компактно порожденная триангулированная подкатегория $\mathscr{D}_{CA}$, порожденная X. Отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_A}(A, A)_* \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{CA}}(X, X)_* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(X, X)_*$$

— изоморфизм, т.к. обе части изоморфны H_*A. По предложению 3.2 триангулированные категории $\mathscr{D}_A$ и $\mathscr{R}$ эквивалентны. Следовательно, триангулированные подкатегории компактных объектов $\mathscr{D}_A^{\mathrm{c}}$ и $\mathscr{R}^{\mathrm{c}}$ также эквивалентны. В частности, $\mathscr{D}_A^{\mathrm{c}} \simeq \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A} \longrightarrow \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}}$ — вполне унивалентное отображение.

Фактор-категория по Вердье $\mathscr{D}_{CA}/\mathscr{R}$ имеет копроизведения и компактно порождена $\mathscr{D}_{CA}^{\mathrm{c}}$. Функтор $F : \mathscr{D}_{CA}/\mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{D}_{SA}$ сохраняет копроизведения и компактные объекты. Мы утверждаем, что F — эквивалентность.

По предложению 3.2 достаточно проверить, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{CA}/\mathscr{R}}(CA, CA)_* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{SA}}(SA, SA)_* \cong H_*(SA) \qquad (3)$$

— изоморфизм. Поскольку

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{CA}}(CA, CA)_* \cong H_*(CA) \longrightarrow H_*(SA)$$

— эпиморфизм, то (3) — эпиморфизм. Пусть теперь отображение $\ell : CA[n] \longrightarrow CA$ такое, что $T_{SA}(\ell) = 0$. Так как $H_n(CA)/H_n(M_\infty A) = H_n(SA)$, то найдутся $i \in \mathbf{N}$ и гомологический класс $[z] \in H_n(M_i A)$, представляющий ℓ.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
e_iCk \otimes_k A[n] \arrow[d, "\ell"'] & CA[n] \arrow[l, two heads, "proj"'] \arrow[d, "\ell"] \\
e_iCk \otimes_k A \arrow[r, tail, "inj"] & CA.
\end{tikzcd}$$

Заметим, что имеется естественный изоморфизм правых DG CA-модулей $X^{(i)} \cong e_iCk \otimes_k A$. Поэтому каждый e_iCA принадлежит $\mathscr{R}^c$. Коммутативная диаграмма выше показывает, что образ ℓ в $\mathscr{D}_{CA}/\mathscr{R}$ нулевой. Поэтому (3) — изоморфизм, что и требовалось показать. $\square$

Обозначим через $\mathscr{S}_A$ фробениусову пару $(\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}, \mathscr{S}_0)$, где $\mathscr{S}_0$ — полная подкатегория в $\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}$ объектов, которые отображаются в ноль в $\mathscr{D}_{CA}/\mathscr{D}_A$. Тождественный функтор $\mathrm{id} : \mathscr{F}\mathscr{C}_{CA} \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}$ задает отображение $\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA} \longrightarrow \mathscr{S}_A$ фробениусовых пар, которое на производных категориях — функтор локализации $\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}} \longrightarrow \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}}/\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A} = D\mathscr{S}_A$. Отметим, что отображение $\mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}}$ пропускается через $\mathscr{S}_0$ и индуцирует гомотопическую эквивалентность $K(A) \longrightarrow K(\mathscr{S}_0)$ (см. Шлихтинг [17, 11.15]).

Определение (Спектр K-теории)**.** Пусть A — DG-алгебра. Отображение фробениусовых категорий $\mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}$ задает отображения $\mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_{CA} \longrightarrow \mathscr{S}_A$ и $\mathscr{F}\mathscr{C}_A \longrightarrow (\mathscr{F}\mathscr{C}_A, \mathscr{F}\mathscr{C}_A) \longrightarrow \mathscr{S}_A$ фробениусовых пар, чьи композиции совпадают. Отсюда получаем коммутативную диаграмму пространств K-теории

$$\begin{array}{ccc}
K(A) & \longrightarrow & K(\mathscr{F}\mathscr{C}_A, \mathscr{F}\mathscr{C}_A) \simeq * \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
* \simeq K(CA) & \longrightarrow & K(\mathscr{S}_A).
\end{array} \tag{4}$$

По предложению 7.1 пространство $K(CA)$ стягиваемо. Поскольку $wS_n(\mathscr{F}\mathscr{C}_A, \mathscr{F}\mathscr{C}_A) = S_n\mathscr{F}\mathscr{C}_A$ — аддитивная категория, то она обладает начальным объектом. Следовательно, пространство $K(\mathscr{F}\mathscr{C}_A, \mathscr{F}\mathscr{C}_A)$ стягиваемо.

Этот квадрат вместе с двумя стягиваниями задает отображение

$$\alpha_A : K(A) \longrightarrow \Omega K(\mathscr{S}_A).$$

Функтор $-\otimes_{CA} SA$ индуцирует отображения фробениусовых пар $\mathscr{S}_A \longrightarrow \mathscr{F}\mathscr{C}_{SA}$. Отсюда получаем отображения

$$\beta_A : K(\mathscr{S}_A) \longrightarrow K(SA)$$

и

$$\Omega\beta_A \circ \alpha_A : K(A) \longrightarrow \Omega K(SA). \tag{5}$$

Определим спектр $\mathbf{K}(A)$, ассоциированный с DG-алгеброй A, как последовательность пространств $K(A), K(SA), K(S^2A), \ldots$ вместе со структурными отображениями, заданными (5).

Теорема 7.3. *Пусть A — DG k-алгебра. Тогда спектр $\mathbf{K}(A)$ является Ω-спектром. Гомотопические группы $\mathbf{K}(A)$ равны*

$$\pi_i\mathbf{K}(A) = \begin{cases} \pi_i K(A), & i > 0 \\ K_0(\mathscr{D}^c_A), & i = 0 \\ K_0(\mathscr{D}^c_{S^{-i}A}), & i < 0. \end{cases}$$

Кроме того, аналогичное утверждение выполнено для DG-алгебр $S_K A$, $S_L A$ над любым коммутативным кольцом k и для DG-алгебры $S_W A$, если кольцо k когерентно.

Доказательство. Квадрат (4) гомотопически эквивалентен квадрату

$$\begin{array}{ccc} K(\mathscr{S}_0) & \longrightarrow & K(\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_0) \simeq * \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ * \simeq K(CA) & \longrightarrow & K(\mathscr{S}_A). \end{array}$$

По Шлихтингу [17, 11.18] последний квадрат гомотопически декартов. Поэтому (4) также гомотопически декартов. Таким образом, индуцированное отображение

$$\alpha_A : K(A) \longrightarrow \Omega K(\mathscr{S}_A)$$

— гомотопическая эквивалентность. По теореме 3.1 и предложению 7.2 $\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{SA}}$ — идемпотентное замыкание для $D\mathscr{S}_A = \underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_{CA}}/\underline{\mathscr{F}\mathscr{C}_A}$. По кофинальности (см. Шлихтинг [17, 11.17]) отображение

$$\Omega\beta_A : \Omega K(\mathscr{S}_A) \longrightarrow \Omega K(SA)$$

— гомотопическая эквивалентность, а значит и $\Omega\beta_A \circ \alpha_A$ — гомотопическая эквивалентность. □

Список литературы

[1] *Е. Г. Скляренко*, Относительная гомологическая алгебра в категориях модулей, Успехи мат. наук 33(3) (1978), 85-120.

[2] *L. Avramov, S. Halperin*, Through the looking glass: A dictionary between rational homotopy theory and local algebra, In Algebra, algebraic topology and their interactions, Proc. Conf., Stockholm 1983, Lecture Notes in Mathematics, No. 1183, Springer-Verlag,1986, pp. 1-27.

[3] *M. Bökstedt, A. Neeman*, Homotopy limits in triangulated categories, Compositio Math. 86(2) (1993), 209-234.

[4] *A. Connes*, Non-commutative differential geometry, Publ. Math. I.H.E.S. 62 (1986), 41-144.

[5] *A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, J. P. May*, Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory, Mathematical Surveys and Monographs 47, American Mathematical Society, Providence, 1997, xii+249 pp.

[6] *Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas*, Rational homotopy theory, Graduate Texts in Mathematics 205, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] *S. M. Gersten*, On the spectrum of algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc. 78(2) (1972), 216-219.

[8] *D. Happel*, On the derived category of a finite-dimensional algebra, Comment. Math. Helv. 62 (1987), 339-389.

[9] *V. Hinich*, Homological algebra of homotopy algebras, Comm. Algebra 25(10) (1997), 3291-3323.
[10] *M. Karoubi, O. Villamayor*, K-théorie algébrique et K-théorie topologique I, Math. Scand. 28 (1971), 265-307.
[11] *B. Keller*, Deriving DG categories, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér., 27 (1994), 63-102.
[12] *B. Keller*, Derived categories and their uses, In Handbook of Algebra, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 671-701.
[13] *I. Kriz, J. P. May*, Operads, algebras, modules and motives, Astérisque 233 (1995), iv+145 pp.
[14] *J.-L. Loday*, K-théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér., 9 (1976), 309-377.
[15] *A. Neeman*, The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability, J. Amer. Math. Soc. 9(1) (1996), 205-236.
[16] *D. Quillen*, Higher algebraic K-theory. I, In Algebraic K-theory I, Lecture Notes in Mathematics, No. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85-147.
[17] *M. Schlichting*, Negative K-theory of derived categories, Math. Z. 253(1) (2006), 97-134.
[18] *S. Schwede*, Morita theory in abelian, derived and stable model categories, in Structured Ring Spectra, London Math. Soc. Lecture Notes 315, 2004, pp. 33-86.
[19] *B. Stenström*, Rings of quotients, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 217, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
[20] *R. W. Thomason, T. Trobaugh*, Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, The Grothendieck Festschrift III, Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck, Progress in Mathematics 88, Birkhäuser, 1990, pp. 247-435.
[21] *J.-L. Verdier*, Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Astérisque 239 (1996), ix+253 pp.
[22] *J. B. Wagoner*, Delooping classifying spaces in algebraic K-theory, Topology 11 (1972), 349-370.
[23] *F. Waldhausen*, Algebraic K-theory of spaces, In Algebraic and geometric topology, Proc. Conf., New Brunswick/USA 1983, Lecture Notes in Mathematics, No. 1126, Springer-Verlag, 1985, pp. 318-419.
[24] *R. B. Jr. Warfield*, Purity and algebraic compactness for modules, Pacific J. Math. 28 (1969), 699-719.
[25] *M. Wodzicki*, Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory, Ann. Math. 129 (1989), 591-639.

School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road, M13 9PL Manchester, UK

E-mail address: `garkusha@imi.ras.ru`