TD/TP: Algorithmique et Programmation avancée

3: Programmation dynamique

1: Problème du sac à dos

On dispose de n objets de poids $(p_1, \ldots, p_n)$ et de valeur $(v_1, \ldots, v_n)$, et d'un sac à dos de capacité maximale P. On veut déterminer valeur maximale on peut avoir dans le sac à dos.

On appelle $V(i, j)$ la solution du problème réduit aux i premiers objets et à capacité maximale j.

1. Compléter à la main le tableau V pour les 4 couples (p, v): $(4, 3)$, $(7, 7)$, $(5, 4)$ et $(2, 2)$ et un sac de capacité maximale 15
2. En déduire une formule de récurrence pour $V(i, j)$.
3. Écrire et coder l'algorithme correspondant.
4. Coder de sorte à ce que l'algorithme renvoie aussi les objets qui réalisent la solution optimale.

2: Plus longue sous-suite commune

Definition. Étant donnée une suite $X = x_1x_2 \ldots x_m$, une autre suite $Z = z_1z_2 \ldots z_k$ est une sous-suite de X s'il y a une suite d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ strictement croissante telle que pour tout $j = 1, 2, \ldots, k$ on a $x_{i_j} = z_j$.

Étant données deux suites X et Y, on veut calculer une plus longue sous-suite commune de X et Y, c'est-à-dire une suite Z telle Z est une sous-suite de X et une sous-suite de Y, avec Z de longueur maximale.

Example 1. Pour $X = aabaababaa$, $Y = ababaaabb$, $PLSC = ababaaa$.

On définit $c[i, j]$ comme la longueur de la plus longueur sous-suite commune de $X_i = x_1x_2 \ldots x_i$ et $Y_j = y_1y_2 \ldots y_j$

1. Déterminer une $PLSC$ de $X = abcbdab$ et $Y = bdcaba$ à l'aide d'un tableau.
2. En déduire une formule de récurrence pour $c[i, j]$.
3. Écrire l'algorithme qui renvoie la $PLSC$ de deux suites.

3: La distance d'édition

La distance d'édition mesure la similarité entre deux chaines s et t. Elle est égale au nombre minimal de transformations élémentaires (suppressions, insertions et substitutions de caractères) nécessaires pour transformer s en t.

Example 2. $s = "tests"$, $t = "tests"$, $distEd(s, t) = 0$
$s = "tests"$, $t = "twist"$, $distEd(s, t) = 3$

Soit n la longueur de s et m la longueur de t. On définit $distEd[i, j]$ comme la distance d'édition de s_i et t_j, préfixes de s et t de longueurs respectives i et j.

1. Donner une formule de récurrence pour $distEd[i, j]$ à partir des préfixes de longueurs $i - 1$ et $j - 1$ de s et t.
2. Écrire l'algorithme correspondant.