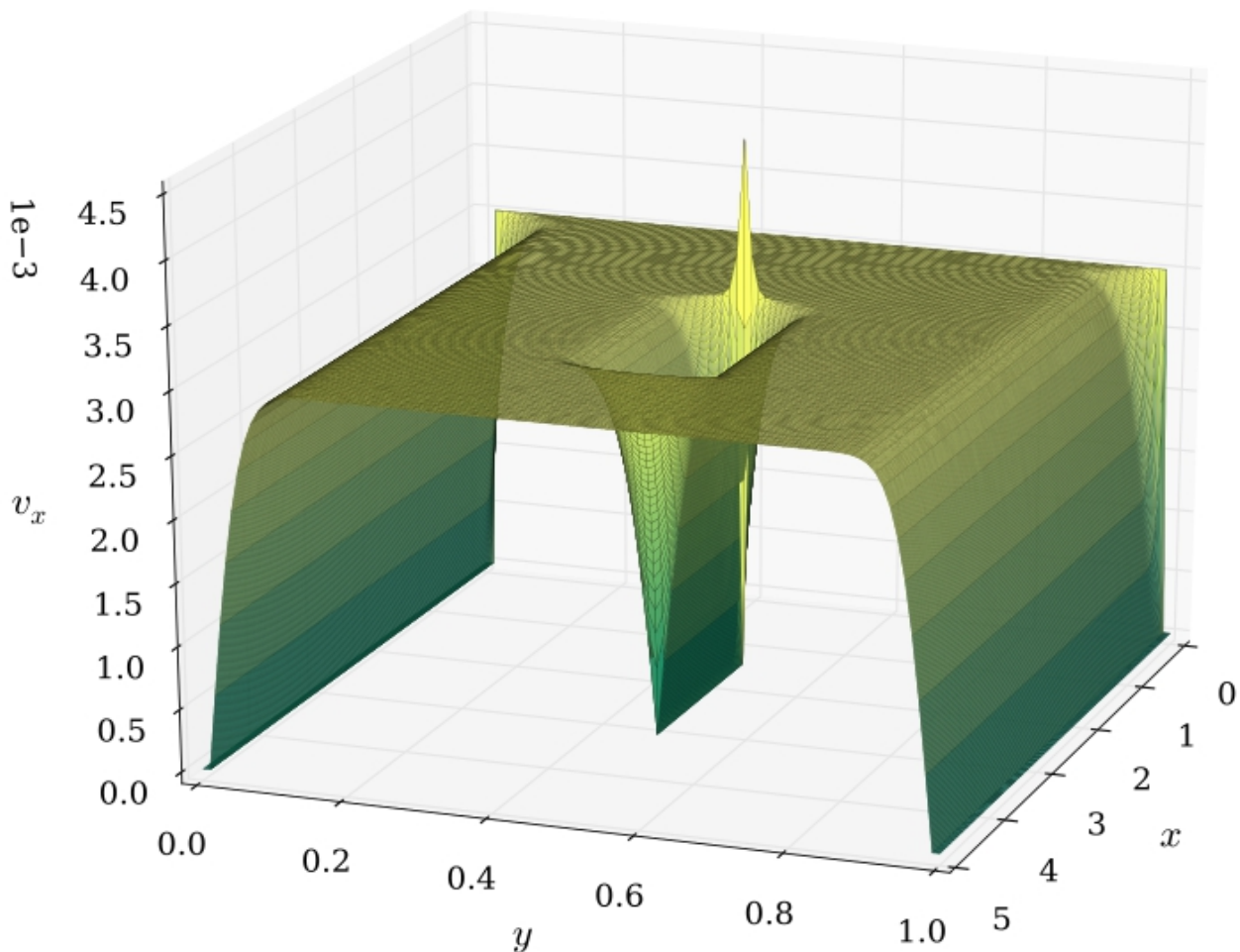


OBJECTIF : ETUDE D'UNE EQUATION ADVECTION-DIFFUSION 2D PAR METHODE DES VOLUMES FINIS : transport d'un scalaire passif



PROFESSEUR: REMY Benjamin

ETUDIANTS: GANOUE Arouna

Le but du TP est d'apprendre à coder la méthode des volumes finis en prenant un exemple d'équation d'advection diffusion. Cette équation a une structure adaptée à la méthode des volumes finis. En effet, contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis. La méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite *forte* de l'équation à résoudre[1]. Ce qui paraît absolument très intéressant, l'intégrale ayant un effet régularisateur. La méthode est également très intéressante au niveau des ordres comme on va le voir en faisant la discrétisation.

Équation à résoudre $\rho C_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \vec{V}) \right) + \text{div}(\lambda \nabla \theta) = 0$ dans le domaine D.

Pour résoudre, la méthode des volumes finis divise ce domaine en sous domaines qu'on va appeler cellules $(\Omega_p)_{1 \leq p \leq N_D}$ de bord $(\partial \Omega_p)_{1 \leq p \leq N_D}$. Les termes de divergences qui apparaissent nous aide à moyenner très facilement grâce au théorème de flux-divergence:

Sous des conditions sur le domaine de définition et la différentiabilité de \vec{a} , on a:

$\iiint_{\Omega_p} \nabla \cdot \vec{a} dV = \iint_{\partial \Omega_p} \vec{a} \cdot \vec{n} dS$ La première intégrale étant sur le volume entier et la seconde sur la surface de ce volume.

On applique ce théorème sur chaque cellule p et on a l'équation suivante pour chaque cellule pour moyenner l'équation.

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{\theta}_p}{\partial t} = -\rho C_p \frac{1}{|\Omega_p|} \iint_{\partial \Omega_p} \theta V \cdot \vec{e}_n dS + \frac{1}{|\Omega_p|} \iint_{\partial \Omega_p} \lambda \nabla \theta \cdot \vec{n} dS$$

Le grand travail reste le calcul de ces intégrales de surface. Les inconnues du problème sont $(\bar{\theta}_p)_{1 \leq p \leq N_D}$. Donc l'objectif du travail est de se retrouver à la fin avec une relation linéaire entre les $(\bar{\theta}_p)_{1 \leq p \leq N_D}$.

Le terme de diffusion reste relativement simple d'un point de vue Mathématiques-Physique.

En plus du choix des schémas explicites et implicites, ici il y a une autre possibilité. On va le voir en essayant de discrétiser l'équation du modèle par méthode des volumes finis.

Il faut d'abord bien définir la cellule sur laquelle, on va faire la discrétisation. La cellule est indiquée sur la figure suivante:

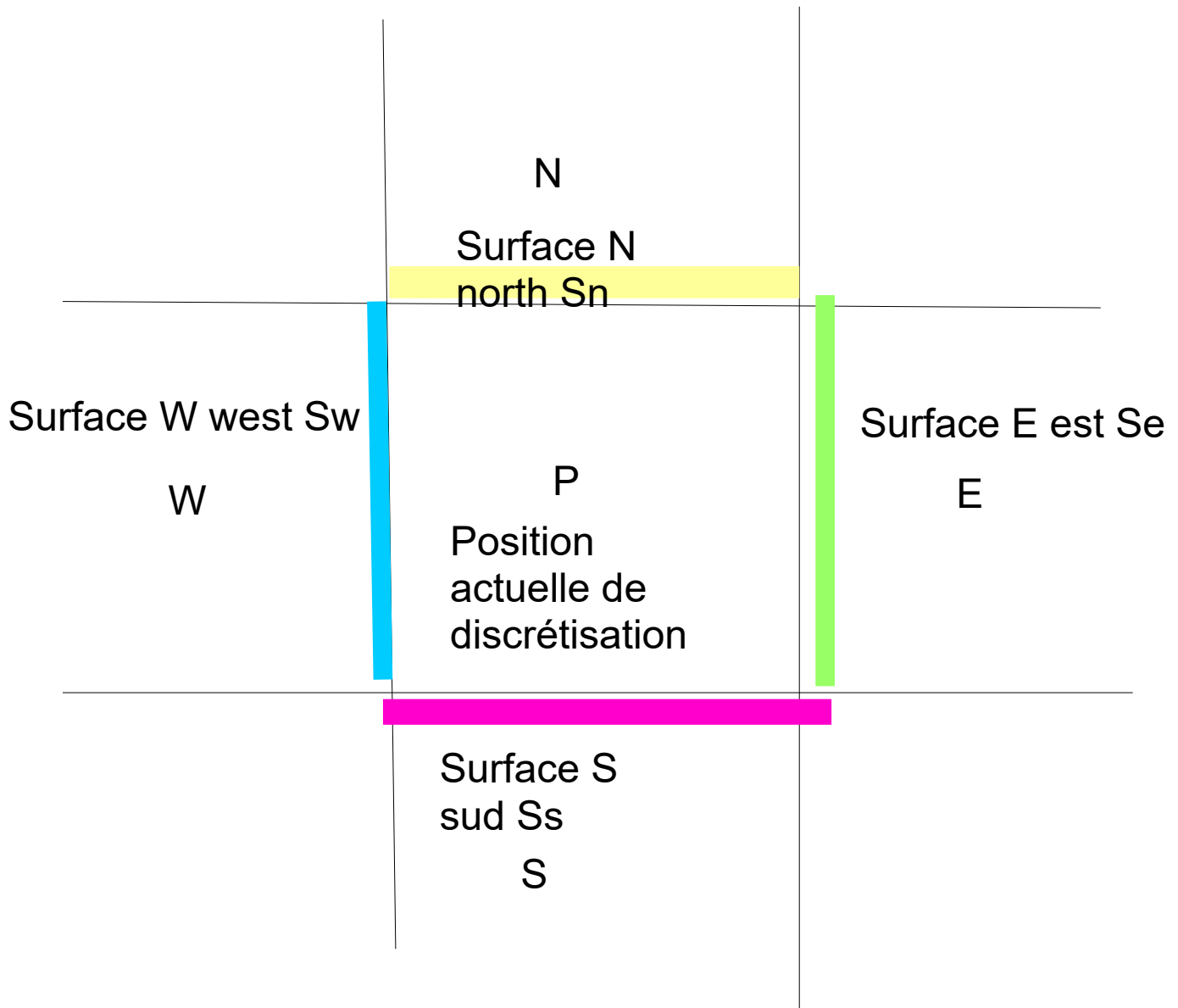


Figure 1: Domaine autour du point P de discrétisation

On voit sur la figure **Figure 1** que $\partial\Omega_p = S_w + S_s + S_e + S_n$. Il faut alors trouver l'approximation sur chaque arête (S_w, S_s, S_e et S_n).

On va se servir du fait que

Prop 1 Si f est une fonction intégrable sur le domaine D , alors $\int_{S_i} f(\vec{x}) dS \simeq f_i S_i$;
et cette approximation est au moins d'ordre 2:

La demonstration dans notre cas ici vient directement du développement de Taylor au barycentre de la surface.

Preuve

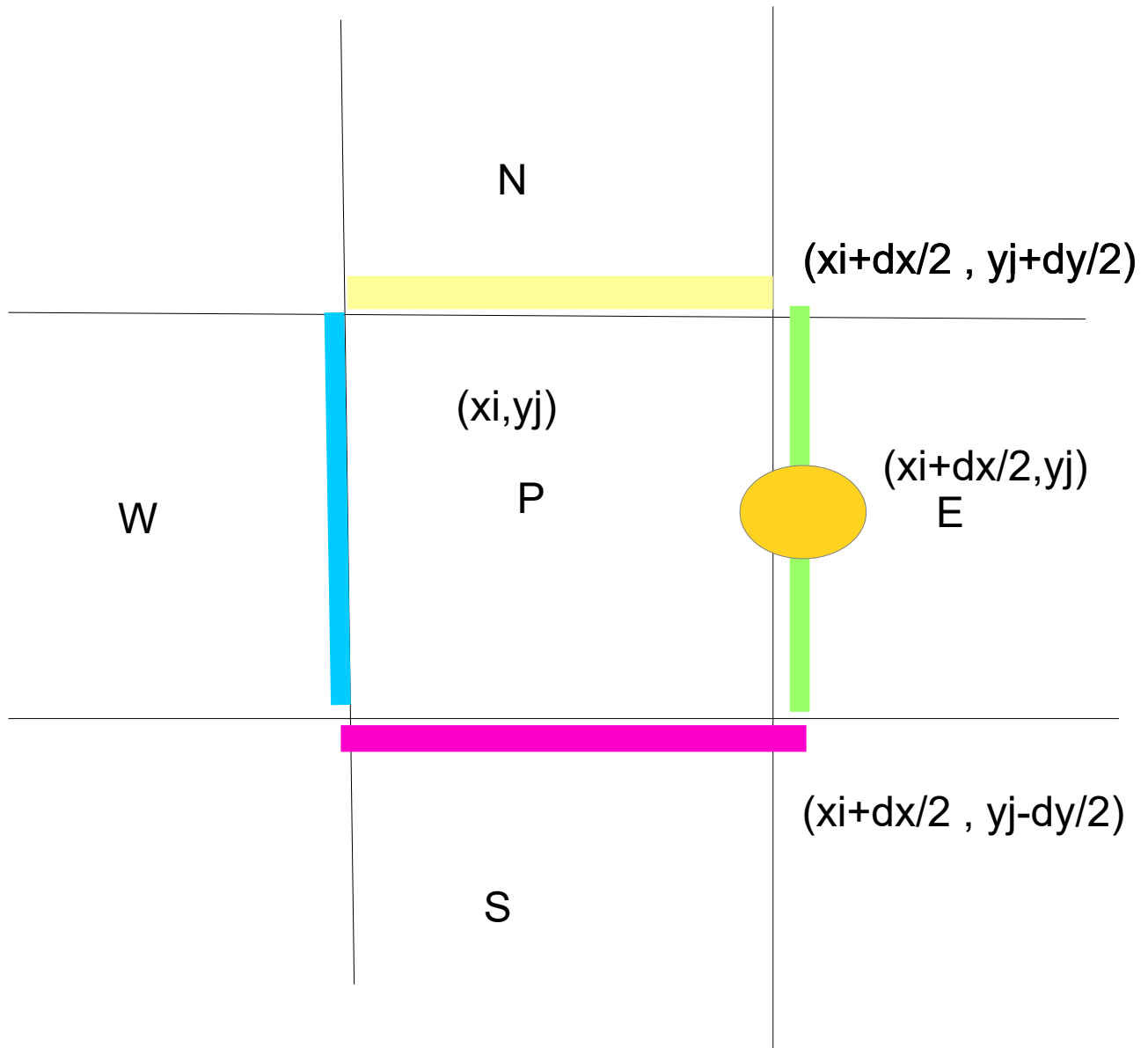


Figure 2: surface verte sur laquelle pour la surface est.

On a d'après le developpement de Taylor en $(x_e, y_e) = (x_i + dx/2, y_i)$,

$$\text{on a: } \int_{S_e} f(x, y) dS_e = \int_{S_e} f(x_e, y) dy = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y) dy$$

et

$$f(x_{i+\frac{1}{2}}, y) = f_e + (y - y_e) \partial_y f(x_e, y_e) + \frac{1}{2} (y - y_e)^2 \partial_y^2 f(x_e, y_e) + o(y - y_e)^2$$

En posant, $f_e = f(x_e, y_e)$

En intégrant et regardant les parités autour du point (x_e, y_e) , il ne reste que les termes de degrés impaires(la discrétisation est uniforme donc le pas de discrétisation est uniforme en x comme en y) et on a le resultat suivant:

$$\begin{aligned} \int_{S_e} f(x, y) dS_e &= f_e dy + \frac{1}{2} ((y_e - y_{j+\frac{1}{2}})^2 - (y_e - y_{j-\frac{1}{2}})^2) \partial_y f(x_e, y_e) + \\ &\frac{1}{6} ((y_e - y_{j+\frac{1}{2}})^3 - (y_e - y_{j-\frac{1}{2}})^3) \partial_{yy} f(x_e, y_e) + o(y - y_e)^3 \end{aligned}$$

$$\text{soit } \int_{S_e} f(x, y) dS_e = f_e dy + \frac{1}{6} 2 \frac{dy^3}{8} \partial_{yy} f(x_e, y_e) + o(dy^3)$$

Et enfin,

$$\int_{S_e} f(x, y) dS_e = f_e dy + \frac{dy^3}{24} \partial_{yy} f(x_e, y_e) + o(dy^3) \quad \text{d'où le resultat. } \square$$

On va utiliser la ***Prop 1*** pour le calcul des differentes intégrales de surfaces apparaissant dans la moyennisation de l'EDP sur le volume fini élément Ω_p

Pour le terme de diffusion, on a:

$$\iiint_{\Omega_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \theta d\Omega = \iint_{\partial\Omega_p} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{n}$$

En considerant les normales sur chaque surface comme sur la figure ***Figure3***

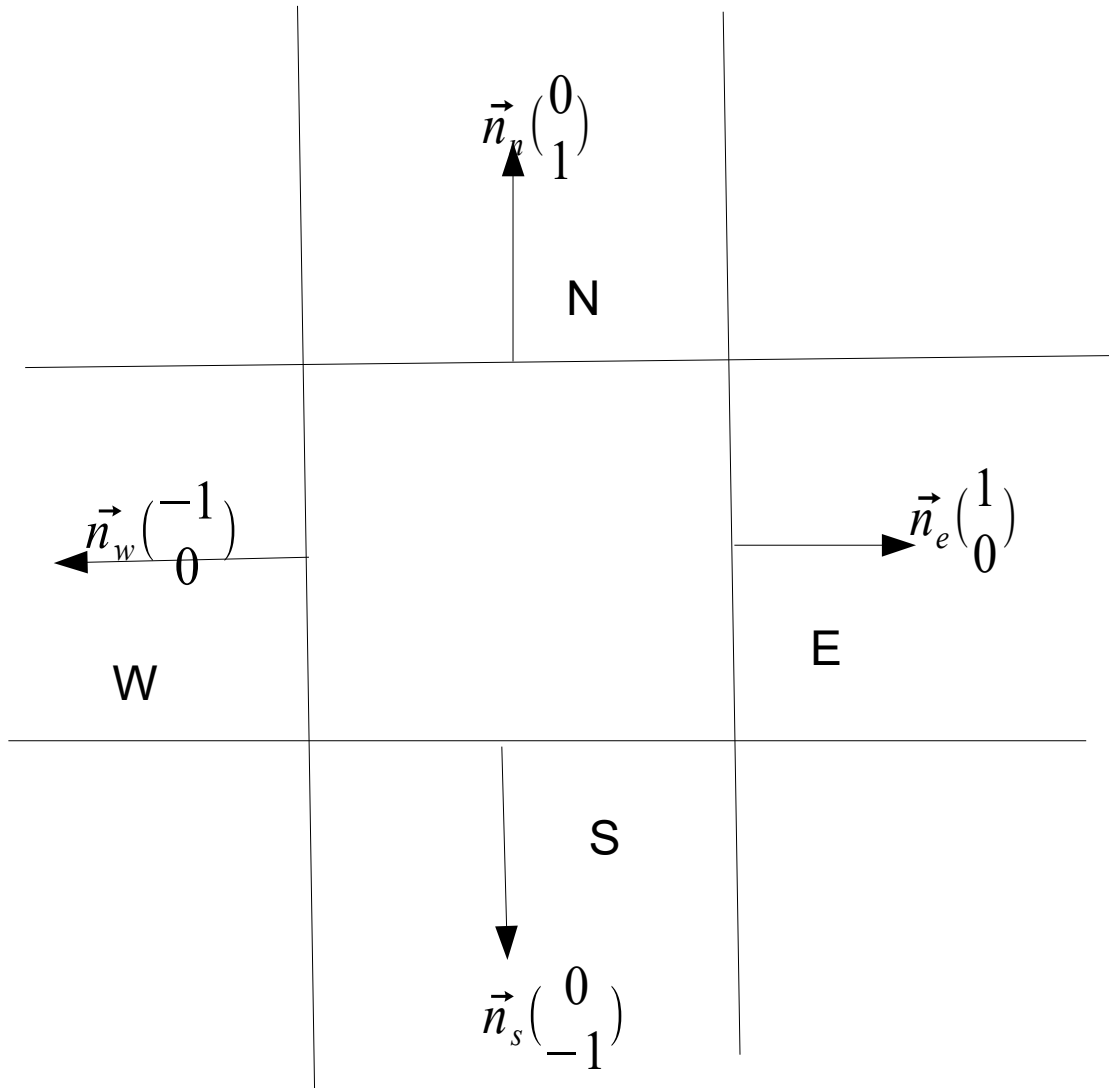


Figure 3: Les normales sur les bords du domaines

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega_P|} \iint_{\partial \Omega_P} \vec{\nabla} \theta \vec{n} = \\ & = \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_e, y_e) dy - \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_w, y_w) dy + \frac{\partial \theta}{\partial y}(x_n, y_n) dx - \frac{\partial \theta}{\partial y}(x_s, y_s) dx \end{aligned}$$

Nous devons à partir de là choisir nos fonctions d'interpolations.

Pour le terme de conduction:

On fera les calculs théoriques pour les surfaces orthogonales à l'axe $\vec{o}\vec{x}$. Les calculs en $\vec{o}\vec{y}$ se deduisent de celui de $\vec{o}\vec{x}$ par une analogie assez simple.

On fait l'approximation linéaire suivante pour Se:

$$\theta(x, y_p) = \bar{\theta}_P + a(x - x_i) + o(x - x_i)^2 \quad \text{et on utilise l'hypothèse des volumes finis:}$$

La température au barycentre (x_l, y_k) est la moyenne de la température sur la

cellule correspondante. Donc $\theta(x_{i+1}, y_p) = \bar{\theta}_{i+1,j}$. Ceci permet de déterminer a et par suite le gradient de température sur la surface Se.

$$\text{On a donc } \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_e, y_e) dy = a + o\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i\right) = \frac{\bar{\theta}_{i+1,j} - \bar{\theta}_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} + o(dx)$$

Pour Sw, on fait cette approximation: $\theta(x, y_p) = \bar{\theta}_P + a(x - x_{i-1}) + o(x - x_{i-1})^2$

On a le gradient par la valeur de la pente a et donc en utilisant l'hypothèse des volumes finis (La température au barycentre (x_l, y_k) est la moyenne de la température sur la cellule correspondante):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_w, y_w) dy = a + o\left(x_{i-\frac{1}{2}} - x_i\right) = \frac{\bar{\theta}_{i-1,j} - \bar{\theta}_{i,j}}{x_{i-1} - x_i} + o(dx)$$

On obtient ainsi une approximation du flux diffusif suivant $\vec{o}\vec{x}$ s'écrit en tenant compte de

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = dx \quad \text{flux}_x = \frac{\bar{\theta}_{i+1,j} - 2\bar{\theta}_{i,j} + \bar{\theta}_{i-1,j}}{dx} dy = \frac{\bar{\theta}_E - 2\bar{\theta}_P + \bar{\theta}_E}{dx} dy \quad (2)$$

Et le flux en $\vec{o}\vec{y}$ simplement par pure analogie: $\text{flux}_y = \frac{\bar{\theta}_S - 2\bar{\theta}_P + \bar{\theta}_N}{dy} dx$
(2')

On pourrait penser que schéma est d'ordre 1, le schéma est bien d'ordre 2.

Prop2: Les schemas (2) et (2') sont d'ordre 2.

Preuve:

L'idée est de chercher un schéma d'ordre 2. Mais nous retrouverons en fait ce même schéma!

On fait une approximation quadratique en x:

$$\theta(x, y_p) = \bar{\theta}_P + a(x - x_i) + b(x - x_i)^2 + o(x - x_i)^3$$

Sachant qu'on suppose que: $\theta(x_{i+1}, y_j) = \bar{\theta}_E$ et $\theta(x_{i-1}, y_j) = \bar{\theta}_W$ on n'a les deux relations liants a et b.

$$\bar{\theta}_W = \bar{\theta}_P - a dx + b dx^2 + o(dx)^3 \quad \text{et}$$

$$\bar{\theta}_E = \bar{\theta}_P + a dx + b dx^2 + o(dx)^3 \quad \text{on trouve } a = \frac{\bar{\theta}_E - \bar{\theta}_W}{2 dx} \quad \text{et} \quad b = \frac{\bar{\theta}_E - 2\bar{\theta}_P + \bar{\theta}_W}{2 dx^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_w, y_w) = a + 2b\left(x_{i-\frac{1}{2}} - x_i\right) + o\left(x_{i-\frac{1}{2}} - x_i\right)^2$$

$$= \frac{\theta_E - \theta_W}{2 dx} + 2 \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{2 dx^2} \left(\frac{-dx}{2} \right) + o(dx)^2$$

$$= \frac{\theta_E - \theta_W}{2 dx} + 2 \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{2 dx^2} \left(\frac{-dx}{2} \right) + o(dx)^2 \quad \text{de même}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_e, y_e) = \frac{\theta_E - \theta_W}{2 dx} + 2 \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{2 dx^2} \left(\frac{dx}{2} \right) + o(dx)^2$$

et ainsi $flux_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_e, y_e) dy - \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_w, y_w) dy$

$$= \left(a + 2b \left(\frac{dx}{2} \right) + o(dx)^2 \right) dy - \left(a + 2b \left(\frac{-dx}{2} \right) + o(dx)^2 \right) dy$$

$$flux_x = 2b dx dy + o(dx)^2 = \frac{\theta_E - 2\theta_P + \theta_W}{dx} dy + o(dx)^2 \quad \text{donc obtenu par}$$

l'approximation affine est le même obtenu par approximation quadratique. On vient de montrer que ce schéma est bien d'ordre 2 en espace. La démonstration pour l'axe \vec{oy} est exactement la même. \square

On a utiliser le champ de vitesses suivantes pour la convection:

$$\vec{u} = \frac{-ay}{x^2 + y^2} \vec{k}_u + \frac{ax}{x^2 + y^2} \vec{k}_v$$

Pour le terme de convection

Il reste le terme de convection dans l'équation. Pour discretiser ce schéma on peut avoir deux points de vu: La première mathématique et la deuxième physique.

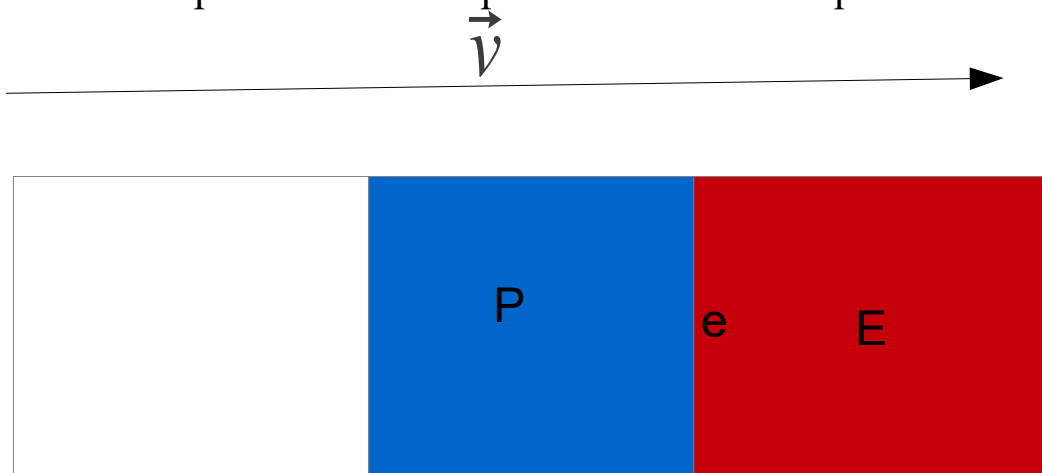


Figure 4: Particules soumises à de la diffusion-convections

Le point de vue mathématique consiste à dire que sur la **Figure 4**, les particules en (x_e, y_e) est la moyenne des particules des deux cellules voisines. Ce point de vue est tout à fait valide quand on a une vitesse de convection assez faible.

C'est le cas par exemple de la diffusion des molécules.

$\theta_e = \frac{\theta_P + \theta_E}{2}$. La formulation est similaire pour les autres faces.

Nous avons nommé ce schéma *linéaire-linéaire*. On obtient les profils suivants:

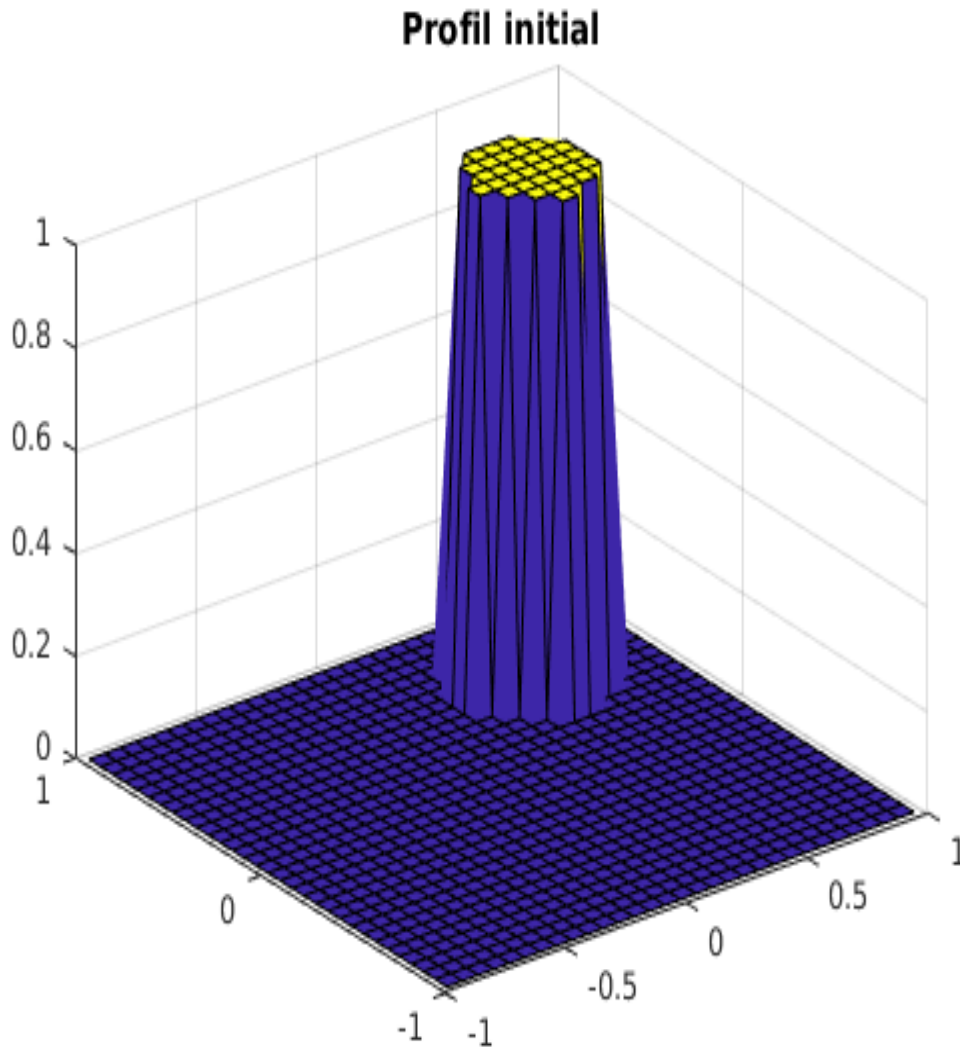


Figure 5: Profil initial du colorant dans le domaine.

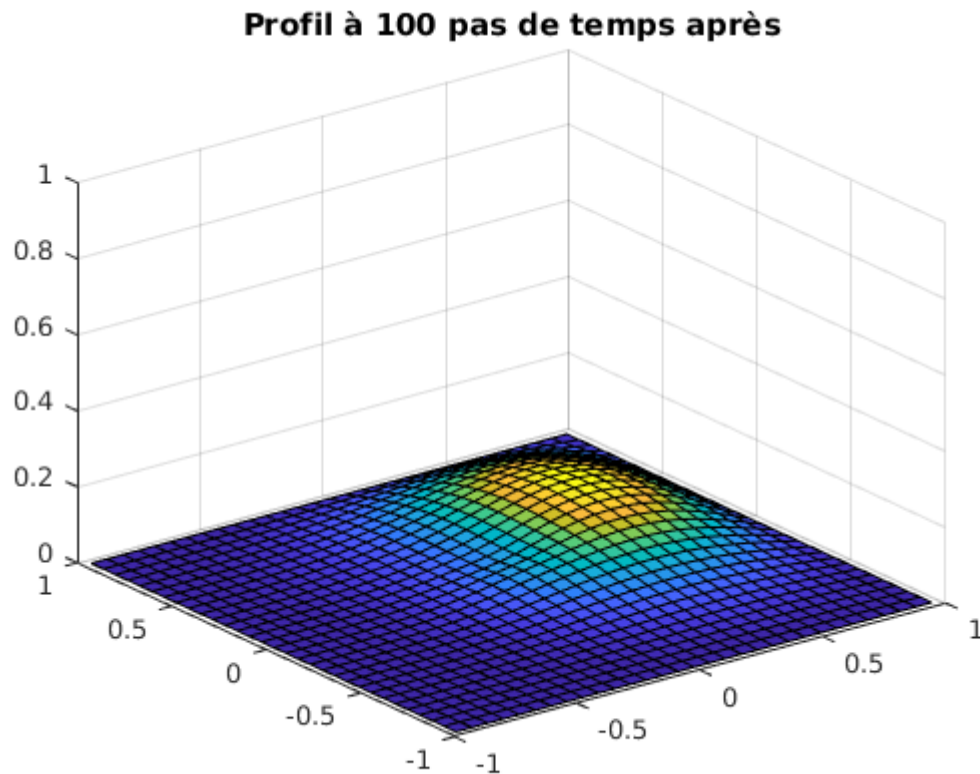
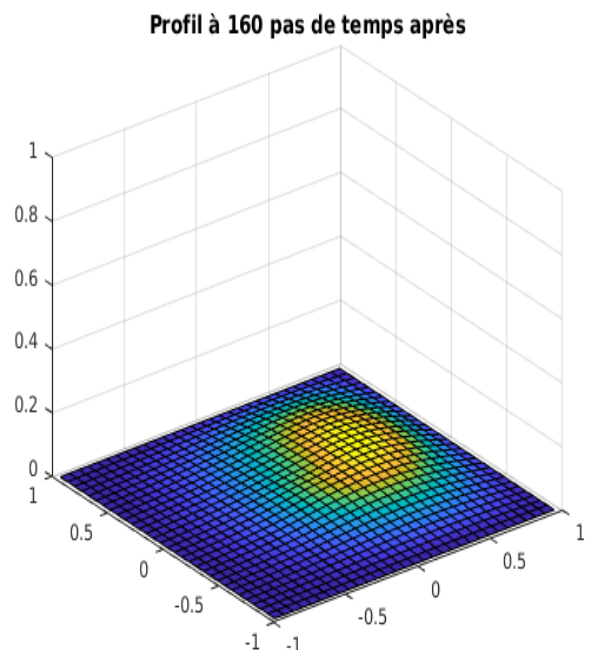
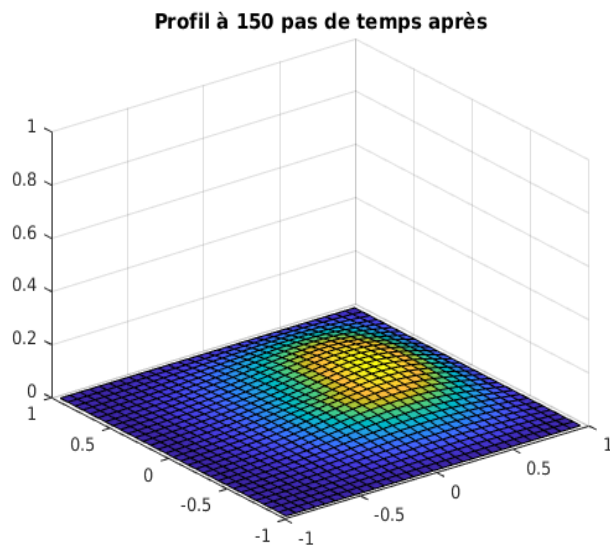


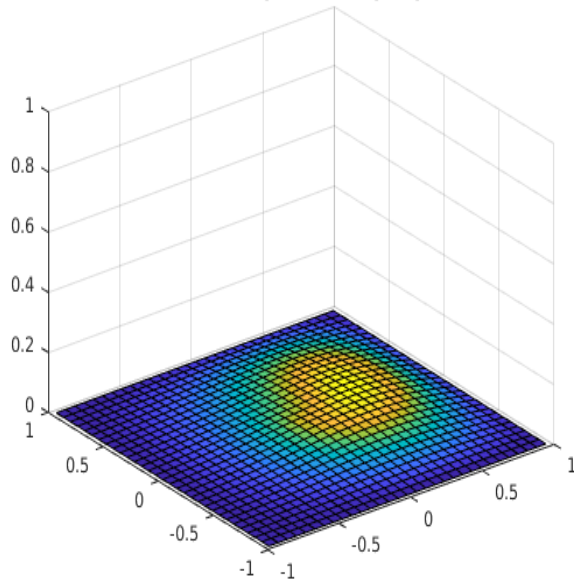
Figure 6: Profil à 100 pas de temps après du colorant dans le domaine.

On voit déjà le un tourbillon se former dans le sens des vitesses qu'on n'a dans le sens Sud-Est les cordonnées étant toutes positives initialement(la vitesse est négative suivant \vec{oy} et positive suivant \vec{ox}). L'amplitude de la vitesse ici est de 1.

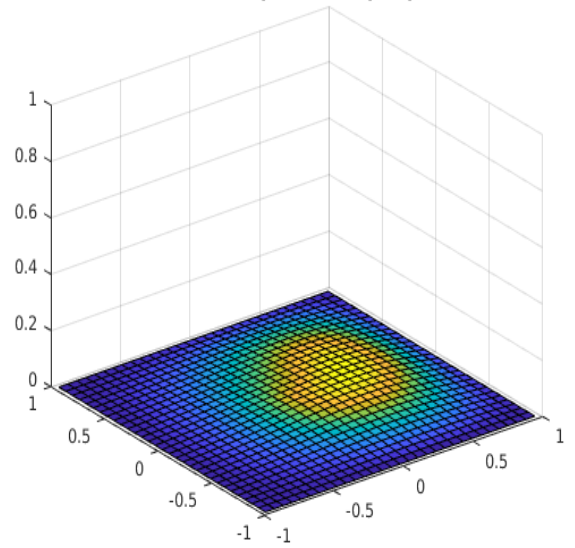
On a aussi les figures suivantes.



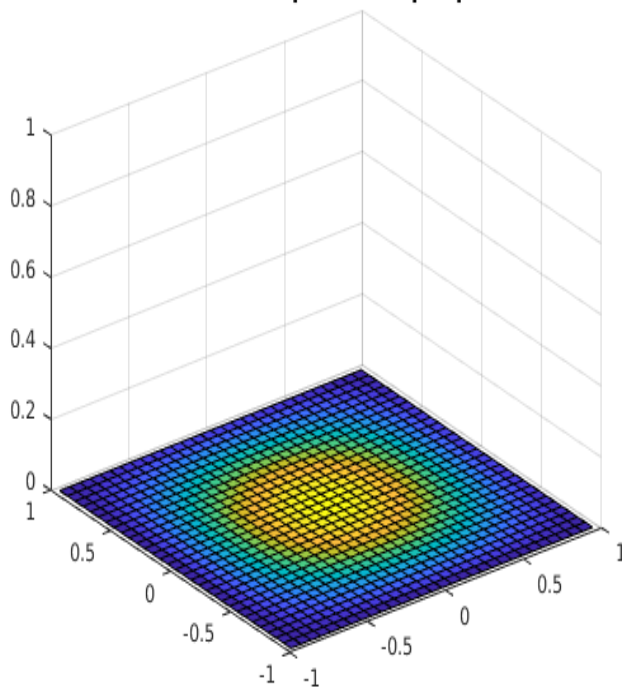
Profil à 180 pas de temps après



Profil à 200 pas de temps après



Profil à 1000 pas de temps après



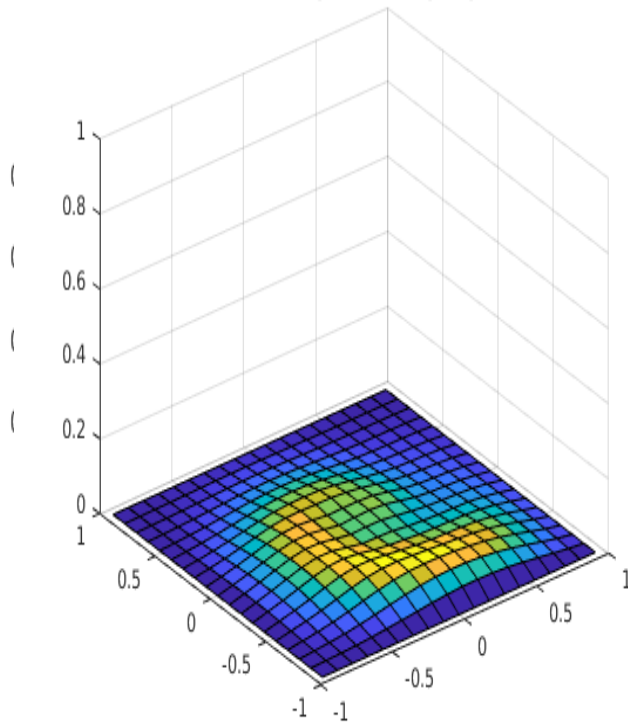
A la fin, la masse de colorant se retrouve au centre à cause de l'orientation du champ de vitesse et la valeur du champ qui est assez élevée lorsqu'on part vers l'origine.

L'amplitude a qui était dans l'expression de la vitesse était à 1 lors de l'exécution du code. Nous allons mettre sa valeur.

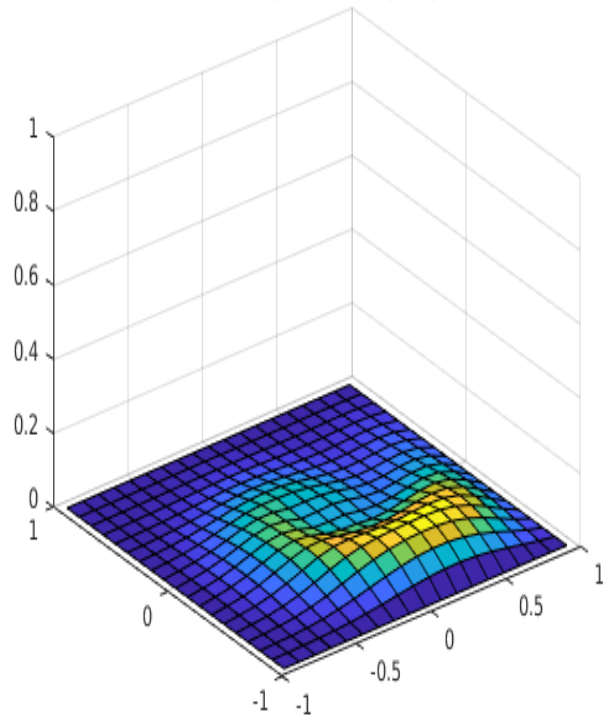
Nous constatons que le schéma est très instable, donc nous avons limité nos pas de la discrétisation. Le tourbillon apparaît plus vite et il est plus violent et assez amplifié que dans le premier cas. Cette violence est due à l'amplitude de la vitesse.

Profil à 50 pas de temps après

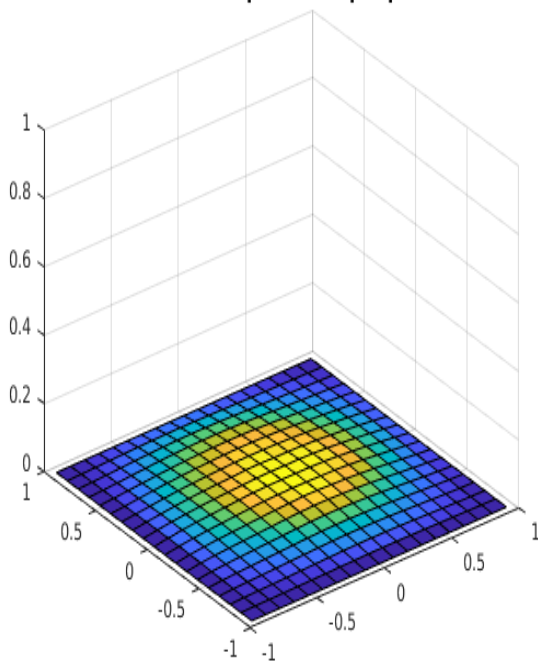
Profil à 100 pas de temps après



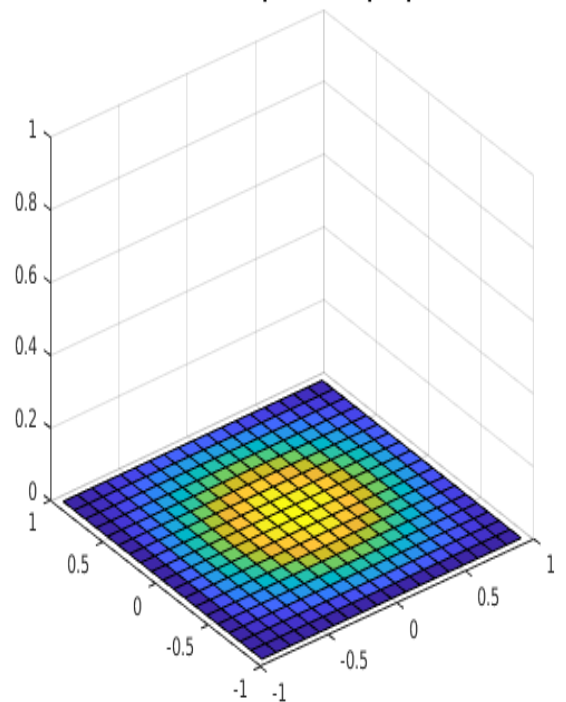
Profil à 80 pas de temps après



Profil à 200 pas de temps après



Profil à 1000 pas de temps après



<Code LINEAIRE-LINERAIRE : *lin_lin.m* >

```
clear all
close all
clc
```

```
tc=1;
Nt=1000;
dt=tc/Nt;
% amplitude de la vitesse a=1 5 10
a=10;
```

```
%=====
===
```

```
% Espace
%*
```

```
%=====
===
```

```
Nx=19;
Ny=19;
Ly=1;
Lx=1;
%Pas d'espace
dx=2*Lx/Nx;
dy=2*Ly/Ny;
```

```
x=-Lx+dx/2:dx:Lx-dx/2;
y=-Ly+dy/2:dy:Ly-dy/2;
```

```
%=====
===
```

```
% Cercle
Rc=Lx/4;
Xc=Lx/2;
Yc=Lx/2;
```

```
%=====
===
```

```
%=====
===
```

```
%=====
===
```

```
%Matrice de rigidité et solution initiale
```

```
%=====
===
```

```
N=Nx*Ny;
A=zeros(N,N);
U0=zeros(N,1);
for j=1:Ny
    for i=1:Nx
        k1=k(Ny,i,j);
        k2=k(Ny,i-1,j);
        k3=k(Ny,i+1,j);
```

```

k4=k(Ny,i,j-1);
k5=k(Ny,i,j+1);
if( i>1 && i<Nx && j>1 && j<Ny)
    %Conduction
    A(k1,k1)=1-2*dt/dx^2-2*dt/dy^2;
    A(k1,k2)=dt/dx^2;
    A(k1,k3)=dt/dx^2;
    A(k1,k4)=dt/dy^2;
    A(k1,k5)=dt/dy^2;

    %Vitesse de convection
    ue=u(a,x(i)+dx/2,y(j));
    uw=u(a,x(i)-dx/2,y(j));
    vn=v(a,x(i),y(j)+dy/2);
    vs=v(a,x(i),y(j)-dy/2);
    %Conduction-Convection
    A(k1,k1)=A(k1,k1)-dt/(2*dx)*(ue-uw)-dt/(2*dy)*(vn-vs);
    A(k1,k2)=A(k1,k2)+dt/(2*dx)*uw;
    A(k1,k3)=A(k1,k3)-dt/(2*dx)*ue;
    A(k1,k4)=A(k1,k4)+dt/(2*dy)*vs;
    A(k1,k5)=A(k1,k5)-dt/(2*dy)*vn;
end
%condition au bord de Dirichlet homogène
if(i==1 || i==Nx || j==1 || j==Ny )
    A(k1,k1)=1;

end
%    l'interieur du cercle    il y a le colerant initialement
if ((x(i)-Xc)^2+(y(j)-Yc)^2)<=Rc^2)
    U0(k1,1)=1;
end
end
end

%=====
%
% Evolution de la solution en fonction du temps
%=====
U1=U0;
U= zeros(N,Nt);
U(:,1)=U0;
for t=1:Nt
    U(:,t+1)=A*U(:,t);
    Uxy=reshape(U(:,t),Nx,Ny);
    surf(x,y,Uxy)
    axis([-Lx Lx -Ly Ly 0 1])
    drawnow
    pause(0.1)
end

```

Pour les calculs théoriques de l'approximation linéaire-linéaire, nous avons juste fait les calculs pour le bord Se; les relations sur les autres bords s'en déduisant par analogie.

Cela revient à dire que: $f_e = \omega f_E + (1 - \omega) f_P$ avec $\omega = \frac{(x_e - x_P)}{(x_E - x_P)} = \frac{1}{2}$. La discretisation étant uniforme.

Pour les surfaces Sn et Ss ça sera plutôt des y avec les indices à mettre adéquatement.

Prop3 L'approximation $\theta_e = \omega \theta_E + (1 - \omega) \theta_P$ avec $\omega = \frac{(x_e - x_P)}{(x_E - x_P)}$ **est** d'ordre 2.

Preuve:

Il suffit de faire un développement de Taylor à l'ordre 1 pour avoir ce résultat:

$$\theta_E = \theta_P + (x_E - x_P) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_P, y_P) + O((x_E - x_P)^2)$$

$$\theta_e = \theta_P + (x_P - x_e) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_P, y_P) + O((x_e - x_P)^2)$$

$$\theta_e - \omega \theta_E = (1 - \omega) \theta_P + O(dx)^2 \quad \square$$

Donc tout le schéma linéaire-linéaire globale est d'ordre 2 c'est ce qui fait le schéma est assez intéressant d'un point de vue mathématique!

Mais dès que la convection devient importante, il faut revoir la discretisation de la convection.

Schema UPWIND:

Dans ce schéma, on dit que sur la **figure 4**, on dit que lorsque la vitesse est non nul, la couleur au point e sera la couleur de l'amont de l'écoulement. Il est évident que ce schéma sera d'ordre 1:

Il suffit de voir que:

Si la vitesse est positive(en fait la projection sur l'axe $\vec{o\hat{x}}$):

$$\theta_e = \theta(x_P, y_P) + (x_e - x_P) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_P, y_P) + o((x_e - x_P)^2) = \bar{\theta}_P + O(dx)$$

Si la vitesse est négative(en fait la projection sur l'axe $\vec{o}x$)

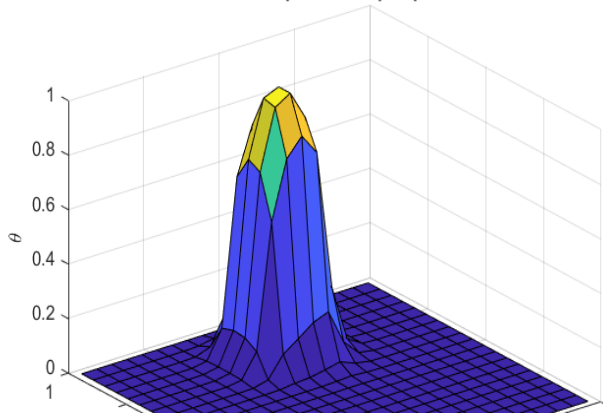
$$\theta_e = \theta(x_E, y_E) + (x_e - x_E) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_E, y_E) + o(x_e - x_E)^2 = \bar{\theta}_E + O(dx)$$

Toutes nos approximations sont d'ordres 1 pour le terme de convections donc au final le schéma devient d'ordre 1(même si le terme de diffusion est d'ordre 2).
Mais nous tenons compte de la réalité physique du problème traité.

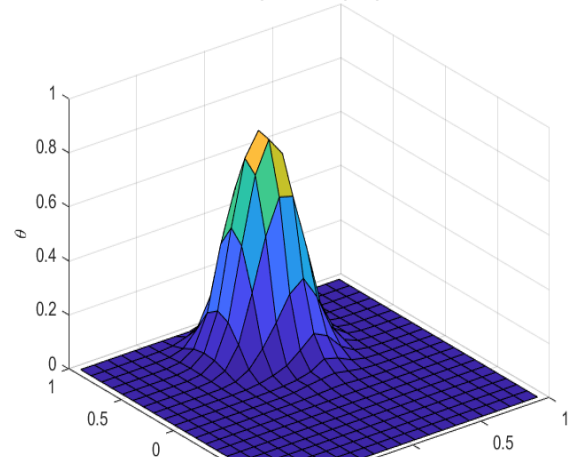
Nous venons de voir un choix extrêmement crucial dans la résolution d'une équation modélisant un phénomène. En plus des schémas explicites et implicites(qui permette de définir la stabilité des schémas), il faut tenir compte de la réalité physique pour avoir des résultats pertinents.

Voici nos différents profils de températures dans le domaine.

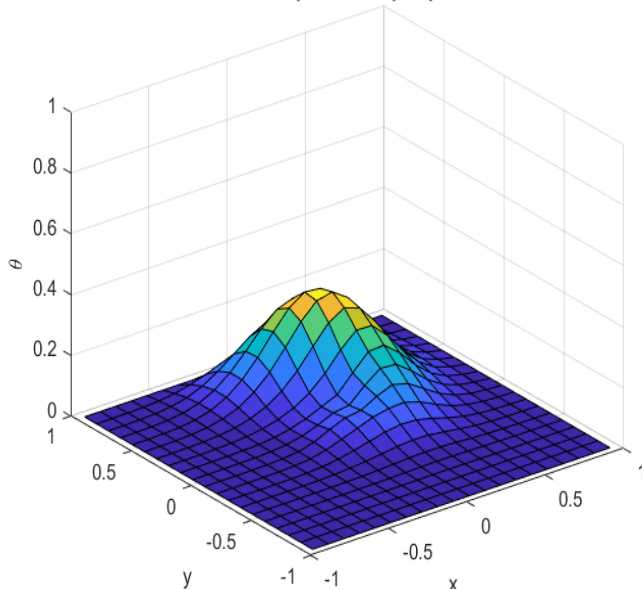
Profil à 20 pas de temps après $a=5$



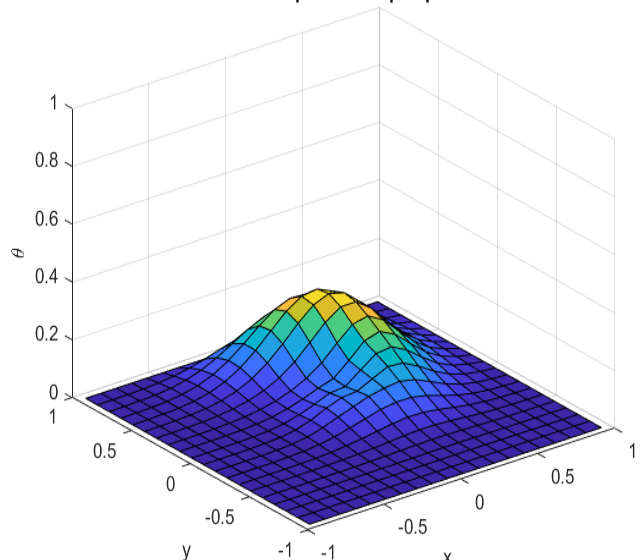
Profil à 60 pas de temps après $a=5$



Profil à 250 pas de temps après $a=5$

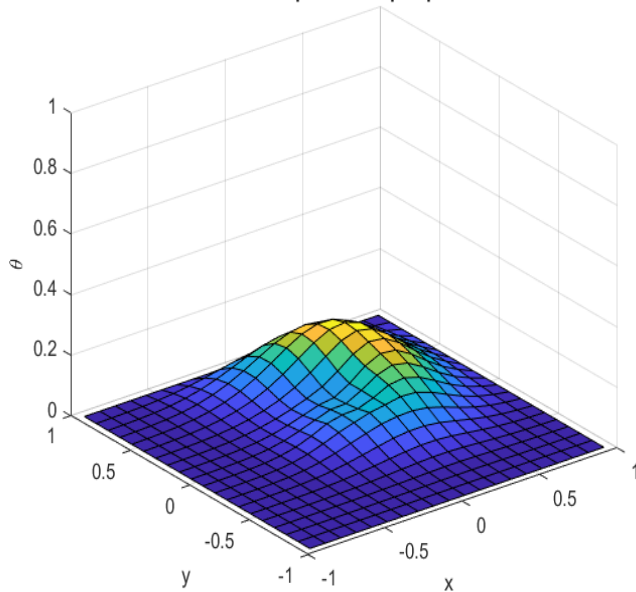


Profil à 300 pas de temps après $a=5$

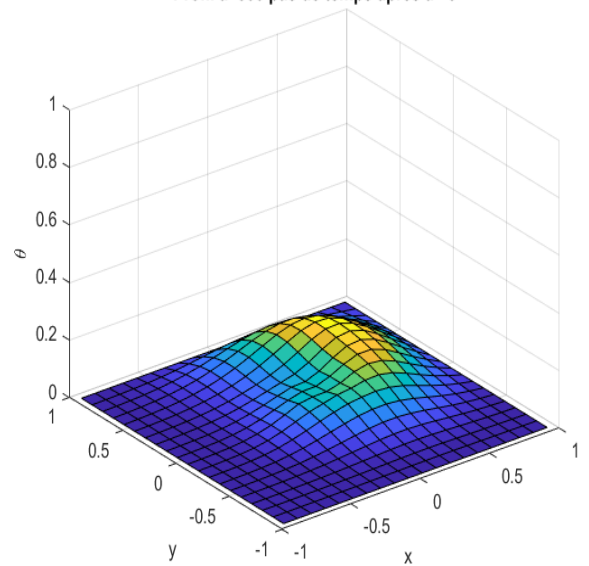


Suivant évolution observée avec cette solution, on voit vite le tourbillon que dans le schéma linéaire-linéaire. C'est indice qui nous dit que ce schéma tient vraiment compte du terme de transport qui est dans notre équation.

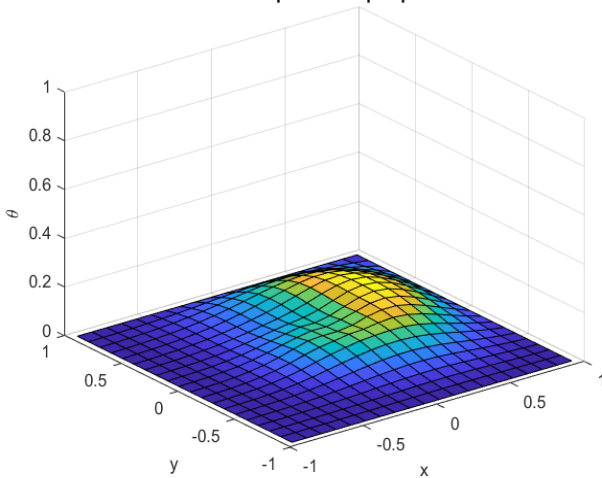
Profil à 400 pas de temps après $a=5$



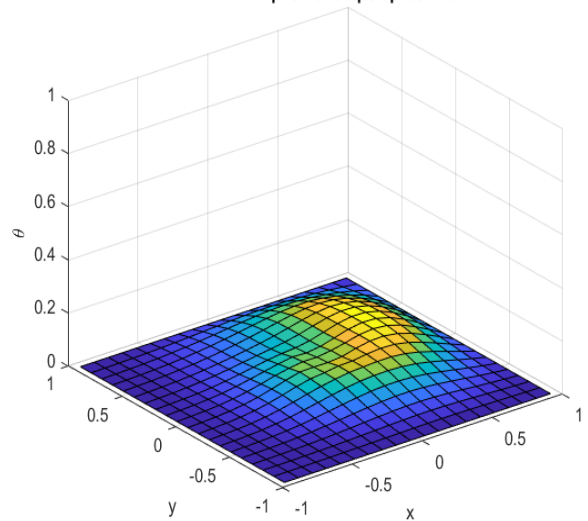
Profil à 500 pas de temps après $a=5$



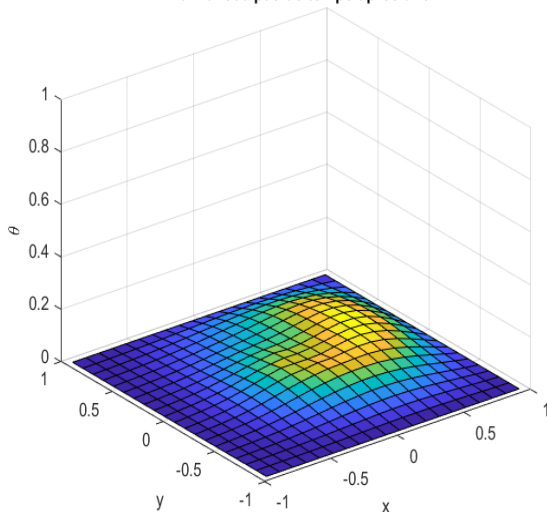
Profil à 600 pas de temps après $a=5$



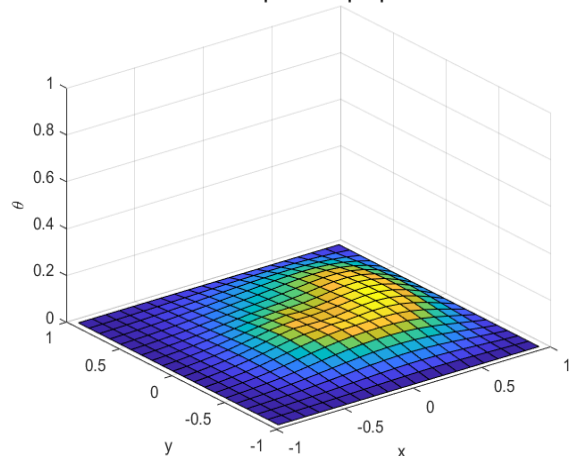
Profil à 700 pas de temps après $a=5$



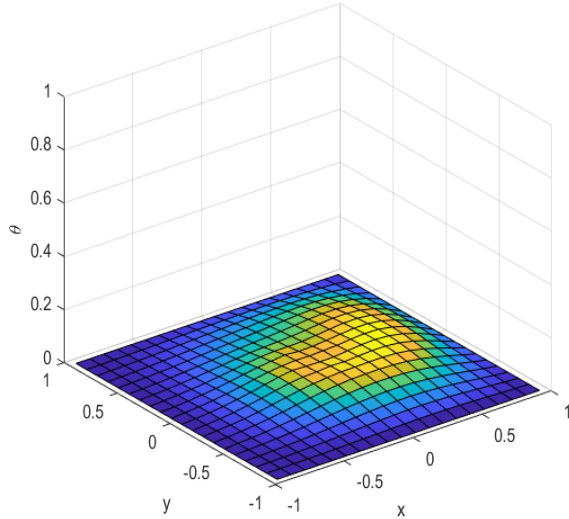
Profil à 800 pas de temps après $a=5$



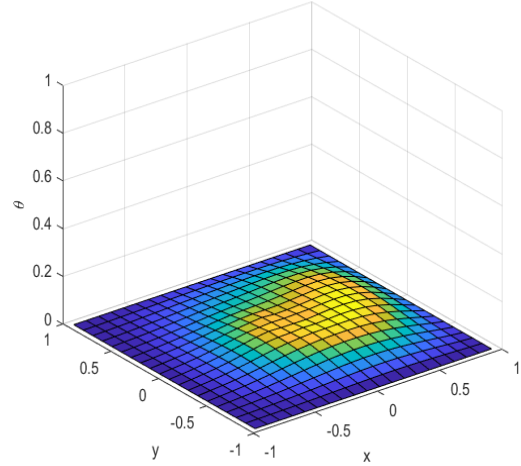
Profil à 900 pas de temps après $a=5$



Profil à 950 pas de temps après $a=5$

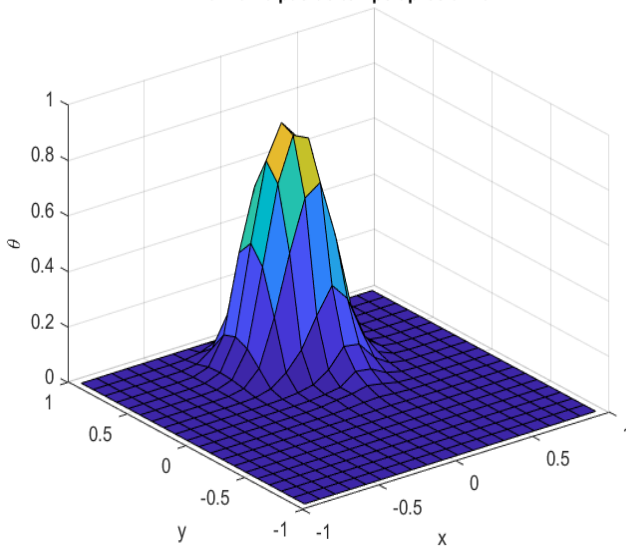


Profil à 1000 pas de temps après $a=5$

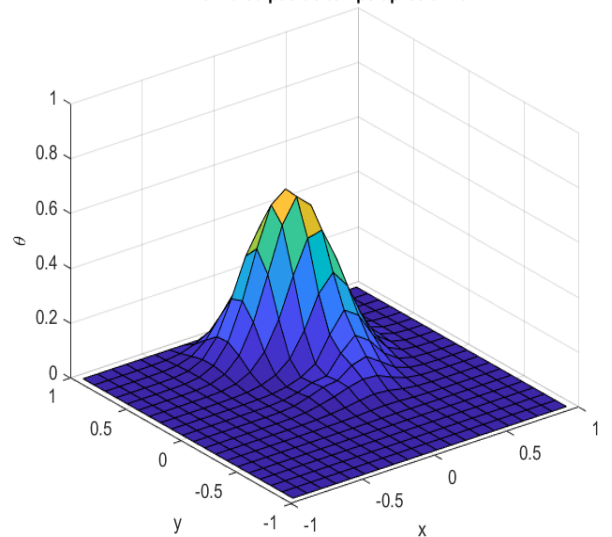


On va doubler l'amplitude de la vitesse pour mieux amplifier le phénomène de convection et ainsi l'observer.

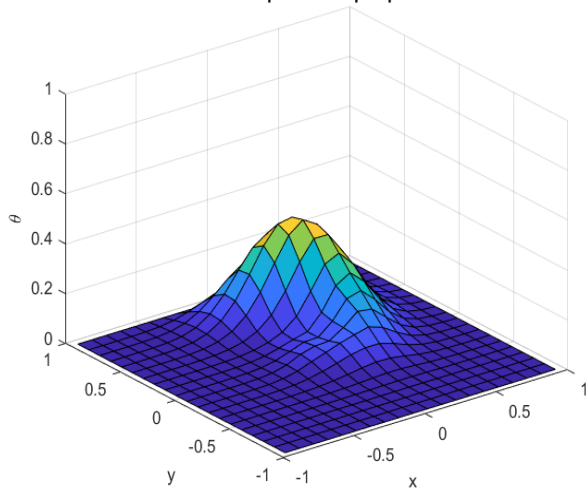
Profil à 40 pas de temps après $a=10$



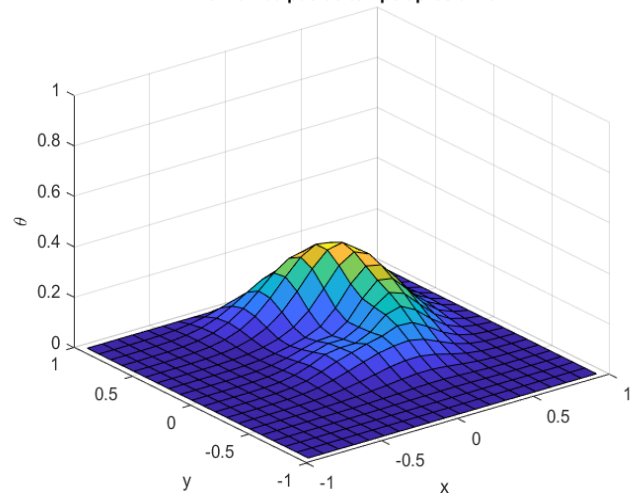
Profil à 90 pas de temps après $a=10$



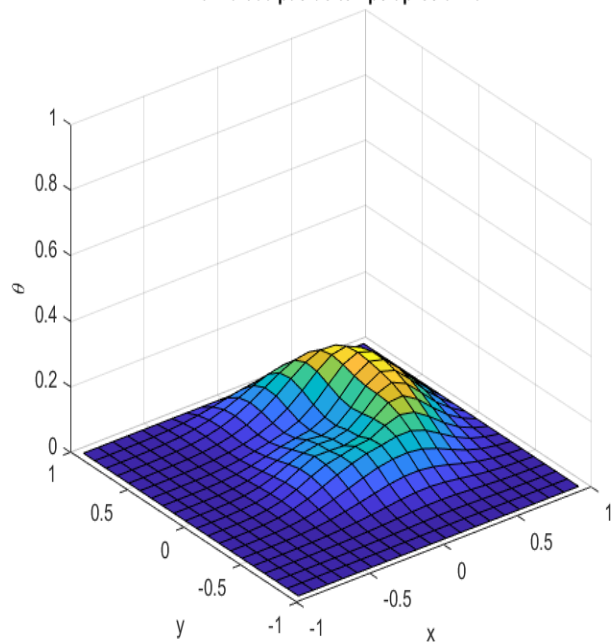
Profil à 150 pas de temps après $a=10$



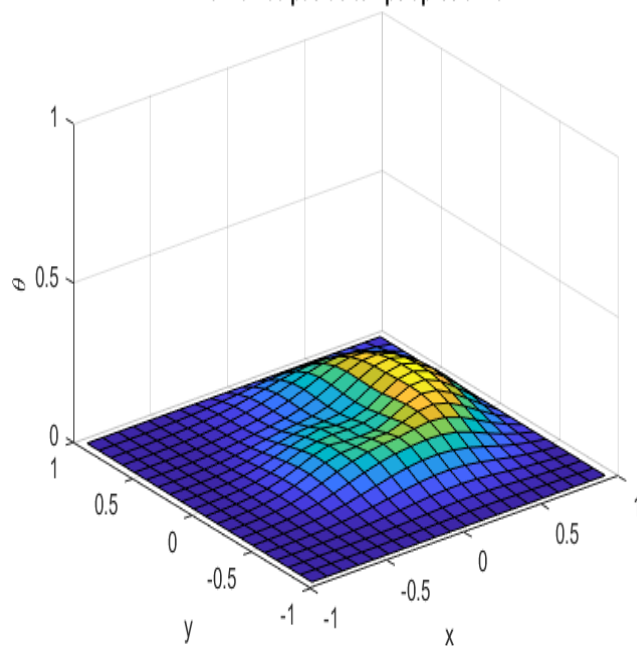
Profil à 200 pas de temps après $a=10$



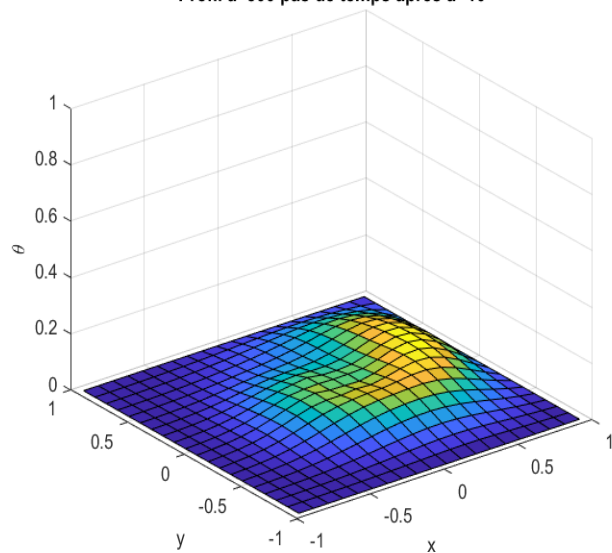
Profil à 300 pas de temps après $a=10$



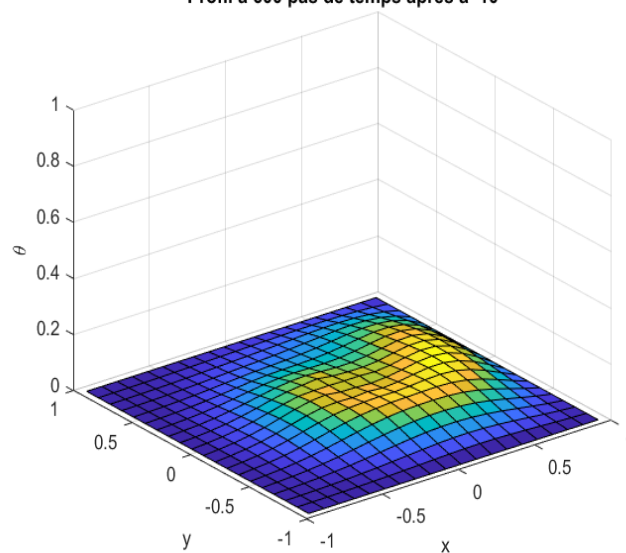
Profil à 400 pas de temps après $a=10$



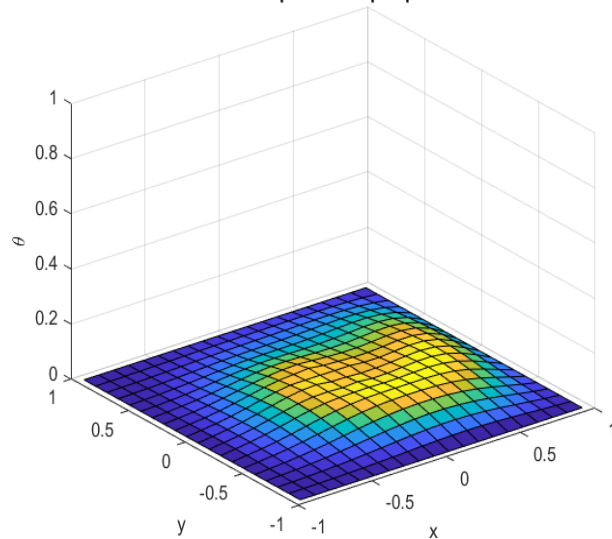
Profil à 500 pas de temps après $a=10$



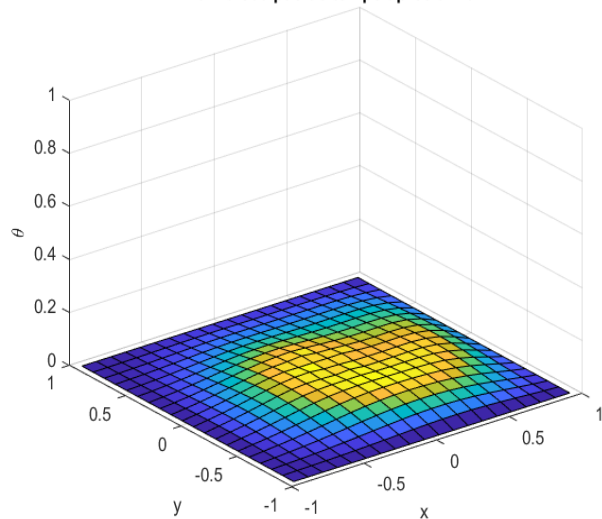
Profil à 600 pas de temps après $a=10$

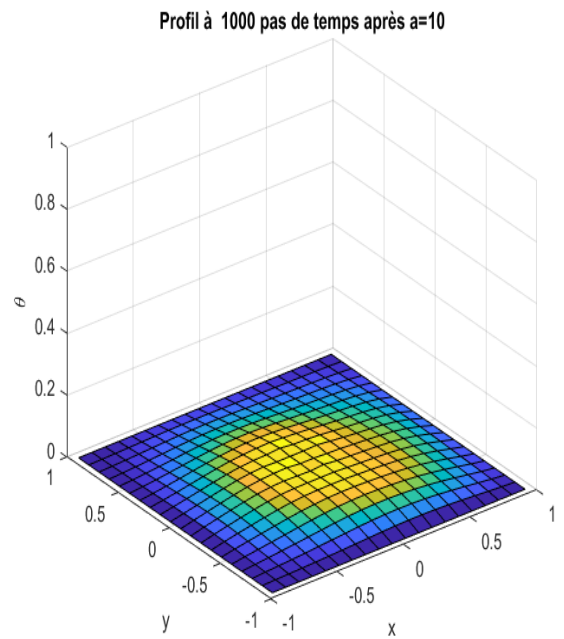
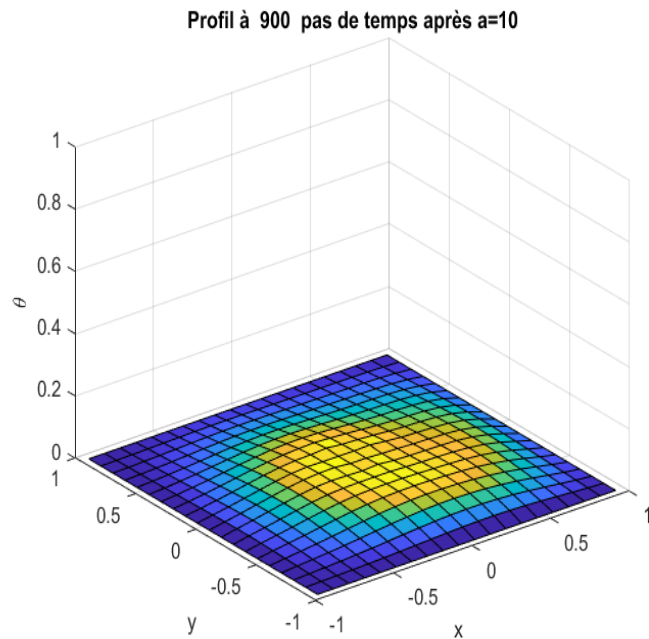


Profil à 700 pas de temps après $a=10$



Profil à 800 pas de temps après $a=10$





Le tourbillon se manifeste clairement plus vite ce qui est normal car on a augmenté l'amplitude de la vitesse, donc l'importance du phénomène de transport.

<Code LINEAIRE-UPWIND : *lin_upw.m* >

```
clear all
close all
clc
```

```
tc=1;
Nt=10000;
dt=tc/Nt;
% amplitude de la vitesse a=1 5 10
a=10;
```

```
%=====
%
% Espace
%*
%=====
%
Nx=20;
Ny=20;
Ly=1;
Lx=1;
%Pas d'espace
dx=2*Lx/Nx;
```

```

dy=2*Ly/Ny;

x=-Lx+dx/2:dx:Lx-dx/2;
y=-Ly+dy/2:dy:Ly-dy/2;
%=====
=====
% Cercle
Rc=Lx/4;
Xc=Lx/2;
Yc=0;
%=====
=====

%=====
=====
%=====
=====
%Matrice de rigidité et solution initiale
%=====
=====
N=Nx*Ny;
A=zeros(N,N);
U=zeros(N,Nt);
for j=1:Ny
    for i=1:Nx
        k1=k(Ny,i,j);
        k2=k(Ny,i-1,j);
        k3=k(Ny,i+1,j);
        k4=k(Ny,i,j-1);
        k5=k(Ny,i,j+1);
        if( i>1 && i<Nx && j>1 && j<Ny)
            %Conduction
            A(k1,k1)=1-2*dt/dx^2-2*dt/dy^2;
            A(k1,k2)=dt/dx^2;
            A(k1,k3)=dt/dx^2;
            A(k1,k4)=dt/dy^2;
            A(k1,k5)=dt/dy^2;

            %Vitesses de convection
            ue=u(a,x(i)+dx/2,y(j));
            uw=u(a,x(i)-dx/2,y(j));
            vn=v(a,x(i),y(j)+dy/2);
            vs=v(a,x(i),y(j)-dy/2);
            %Conduction-Convection__upwind
            A(k1,k1)=A(k1,k1)-dt/(dx)*(max(ue,0)-min(uw,0))-dt/(
(dy)*(max(vn,0)-min(vs,0)));
            A(k1,k2)=A(k1,k2)+dt/(dx)*max(uw,0);

```

```

        A(k1,k3)=A(k1,k3)-dt/(dx)*min(ue,0);
        A(k1,k4)=A(k1,k4)+dt/(dy)*max(vs,0);
        A(k1,k5)=A(k1,k5)-dt/(dy)*min(vn,0);
    end
    if(i==1 || i==Nx || j==1 || j==Ny )
        A(k1,k1)=1;

    end

    if ((x(i)-Xc)^2+(y(j)-Yc)^2)<=Rc^2
        U(k1,1)=1;
    end
end
end

%=====
% Evolution de la solution en fonction du temps
%=====

for t=1:Nt
    U(:,t+1)=A*U(:,t);
    Uxy=reshape(U(:,t),Nx,Ny);
    surf(x,y,Uxy)
    axis([-Lx Lx -Ly Ly 0 1])
    drawnow
end

```

Nous allons chercher un schéma qui tient compte de la réalité physique mais qui a un meilleur ordre que le schéma linéaire-upwind. Le schéma est d'ordre 2 et il s'appelle schéma quick.

Schema QUICK

Rappelons que nous cherchons une approximations de ce terme:

$$-\rho C_p \iint_{\Omega_p} \vec{\nabla} \cdot \theta \vec{v} d\Omega_p = -\rho C_p \int_{\partial\Omega_p} \theta \vec{v} \cdot \vec{n} dS_p \quad . \text{ avec}$$

$$S_p = S_e + S_s + S_w + S_n$$

Nous allons faire l'approximation pour une vitesse positive suivant l'axe $\vec{o}\hat{x}$ et ensuite deduire tous les autres cas pour la surface S_e .

En fait un cherche une fonction f telque que $\theta_e = f(\bar{\theta}_W, \bar{\theta}_P, \bar{\theta}_E)$. On tient compte de la réalité physique car on dit que dans le cas d'une vitesse suivant $\vec{o}\vec{x}$ positive, les particules sur la surface S_e seront fonctions des particules des deux cellules amont et de la cellule aval(**Figure 7**). Nous cherchons un schéma d'ordre 2 donc nous allons faire naturellement une approximation quadratiques en x(Pour les surfaces S_s et S_n on fait des approximations quadratiques en y et le principe est exactement le même).

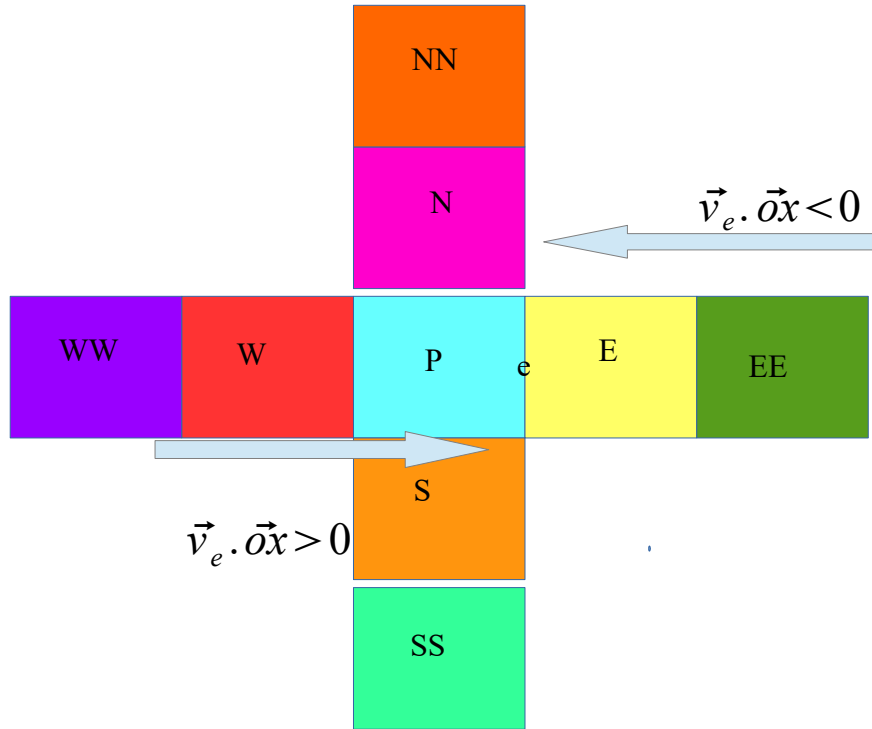


Figure 7: Illustration de l'interpolation quick

On pose donc à y fixé $\theta(x) = \theta_i + a(x - x_i) + b(x - x_i)^2 + O(x - x_i)^3$

On utilise encore l'hypothèse des volumes finis qui dit que la température au barycentre de la cellule est peu différente de la moyenne de la température sur la cellule.

$$\theta_i = \bar{\theta}_P, \quad \theta(x = x_{i-1}) = \bar{\theta}_W \quad \text{et} \quad \theta(x = x_{i+1}) = \bar{\theta}_E$$

Donc nous avons les relations suivantes pour déterminer a et b .

$$\theta(x = x_{i-1}) = \bar{\theta}_W = \bar{\theta}_P + a(x_{i-1} - x_i) + b(x_{i-1} - x_i)^2 + O(x_{i-1} - x_i)^3$$

$$\theta(x = x_{i+1}) = \bar{\theta}_E = \bar{\theta}_P + a(x_{i+1} - x_i) + b(x_{i+1} - x_i)^2 + O(x_{i+1} - x_i)^3$$

et $x_{i+1} - x_i = -(x_{i-1} - x_i) = dx$

Donc

On se retrouve avec

$$\bar{\theta}_W = \bar{\theta}_P - a \, dx + b \, dx^2 + O \, dx^3$$

$$\bar{\theta}_E = \bar{\theta}_P + a \, dx + b \, dx^2 + O \, dx^3 \quad \text{soit} \quad a = \frac{\bar{\theta}_E - \bar{\theta}_W}{2 \, dx} \quad \text{et} \quad b = \frac{\bar{\theta}_W - 2 \, \bar{\theta}_P + \bar{\theta}_E}{2 \, dx^2}$$

Donc l'approximation s'écrit tout simplement ainsi:

$$\theta(x) = \bar{\theta}_P + \frac{\bar{\theta}_E - \bar{\theta}_W}{2 \, dx} (x - x_i) + \frac{\bar{\theta}_W - 2 \, \bar{\theta}_P + \bar{\theta}_E}{2 \, dx^2} (x - x_i)^2 + O(x - x_i)^3$$

Et θ_e n'est rien d'autre que $\theta(x_{i+\frac{1}{2}})$ ce qui donne avec $x_{i+\frac{1}{2}} - x_i = \frac{dx}{2}$:

$$\theta_e = \theta(x_{i+\frac{1}{2}}) = \bar{\theta}_P + \frac{\bar{\theta}_E - \bar{\theta}_W}{2 \, dx} \frac{dx}{2} + \frac{\bar{\theta}_W - 2 \, \bar{\theta}_P + \bar{\theta}_E}{2 \, dx^2} \frac{dx^2}{4} + O \, dx^3$$

Soit au final $\theta_e = \frac{-\bar{\theta}_W + 6 \, \bar{\theta}_P + 3 \, \bar{\theta}_E}{8} + O \, dx^3$ En fait l'approximation pour le

terme de convection est d'ordre 3 mais n'oublions pas que le terme de diffusion est approximé à l'ordre 2. Donc notre schéma Quick reste globalement d'ordre 2.

Pour le cas de la vitesse négative, le comportement est exactement le même, sauf qu'on raisonnera sur les cellules appropriées. On doit chercher une fonction f tel que:

$\theta_e = f(\bar{\theta}_{EE}, \bar{\theta}_E, \bar{\theta}_P)$ Donc en clair, les deux éléments des couples $(\bar{\theta}_{EE}, \bar{\theta}_W)$, $(\bar{\theta}_P, \bar{\theta}_E)$ et $(\bar{\theta}_E, \bar{\theta}_P)$ s'intervertissent les rôles dans l'approximation.

$$\theta_e = \frac{-\bar{\theta}_{EE} + 6 \, \bar{\theta}_E + 3 \, \bar{\theta}_P}{8} + O \, dx^3 \quad . \text{ L'explication est peut-être un abstraite. En}$$

fait, il suffit juste de regardant l'écoulement en sens inverse, il sera assez clair que les rôles joués par les cellules réapparaissent. Ensuite, il faut juste regarder la similarité des rôles.

On obtient l'approximation sur toute la surface:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_P} \theta \vec{v} \cdot \vec{n} dS_P = & \frac{\max(ue,0)}{8} (-\bar{\theta}_W + 6\bar{\theta}_P + 3\bar{\theta}_E) \\
& + \frac{\min(ue,0)}{8} (-\bar{\theta}_{EE} + 6\bar{\theta}_E + 3\bar{\theta}_P) \\
& - \frac{\max(uw,0)}{8} (-\bar{\theta}_{WW} + 6\bar{\theta}_W + 3\bar{\theta}_P) \\
& - \frac{\min(uw,0)}{8} (-\bar{\theta}_E + 6\bar{\theta}_P + 3\bar{\theta}_W) \\
& + \frac{\max(vn,0)}{8} (-\bar{\theta}_S + 6\bar{\theta}_P + 3\bar{\theta}_N) \\
& + \frac{\min(un,0)}{8} (-\bar{\theta}_{NN} + 6\bar{\theta}_N + 3\bar{\theta}_P) \\
& - \frac{\max(vs,0)}{8} (-\bar{\theta}_{SS} + 6\bar{\theta}_S + 3\bar{\theta}_P) \\
& - \frac{\min(vs,0)}{8} (-\bar{\theta}_N + 6\bar{\theta}_P + 3\bar{\theta}_S) + O(dx)^3
\end{aligned}$$

Le schéma est assez lourd quand même!!

Nous avons réalisé ce schéma sous matlab.

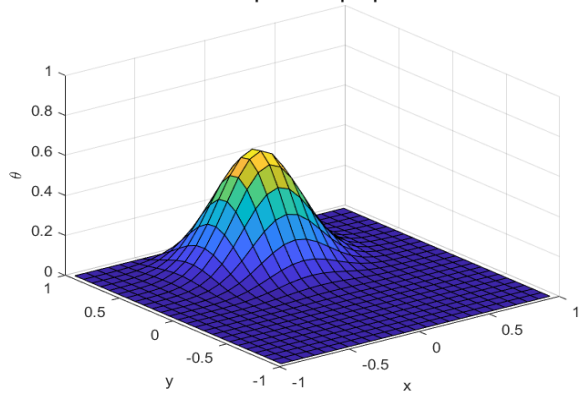
Ici nous avons schéma qui est très sensible à la vitesse. Le schéma est instable dès que l'amplitude a augmente(juste au dessus de la dizaine.)

Avec ce schéma assez réaliste et avec un assez bon ordre d'approximation nous allons essayer d'analyser la convection-diffusion en fonction du **nombre de Peclet**. En fait notre champ de vitesse a cette particularité d'avoir un péclet constant.

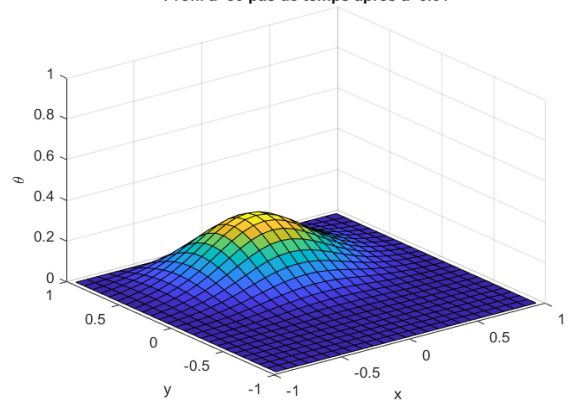
En effet $Pe = \frac{Lc |\vec{v}|}{D} = \frac{Lc}{D} \sqrt{\left(\frac{(ay)^2}{x^2+y^2} + \frac{(-ax)^2}{x^2+y^2}\right)} = \frac{Lc a}{D}$. Comme Lc et D sont tous 1 dans notre problème, donc le Péclet c'est exactement a .

Pour Péclet très inférieur 1(On a pris $a=0,01$)

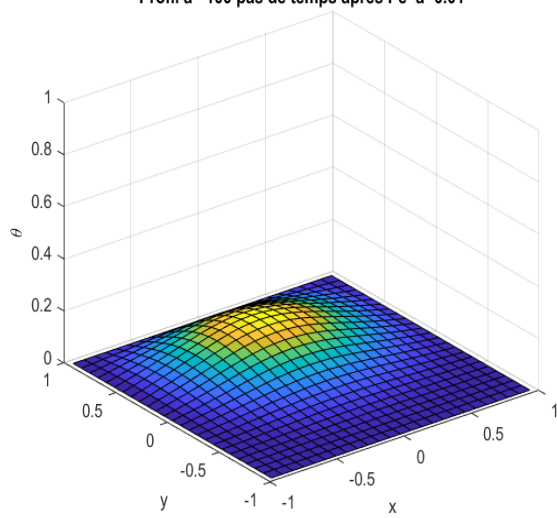
Profil à 20 pas de temps après $a=0.01$



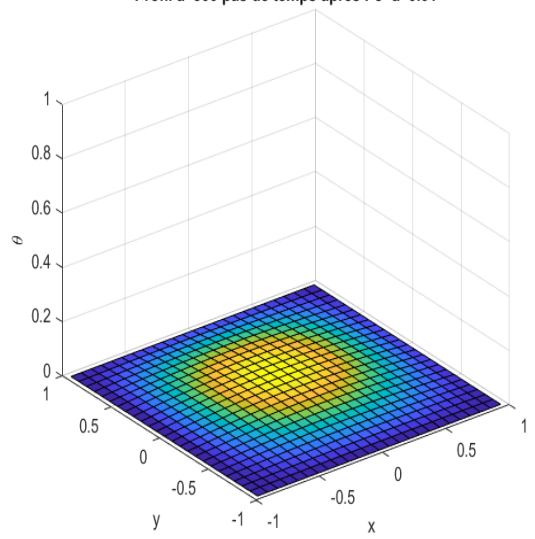
Profil à 50 pas de temps après $a=0.01$



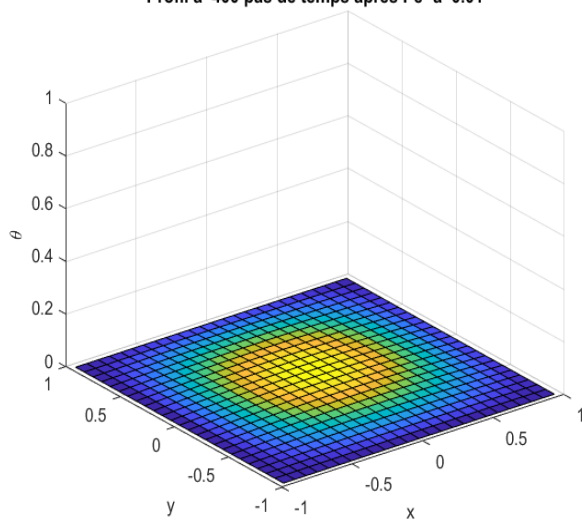
Profil à 100 pas de temps après $Pe=a=0.01$



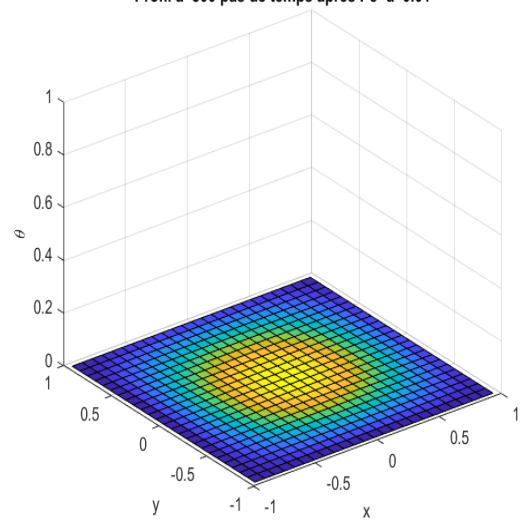
Profil à 300 pas de temps après $Pe=a=0.01$

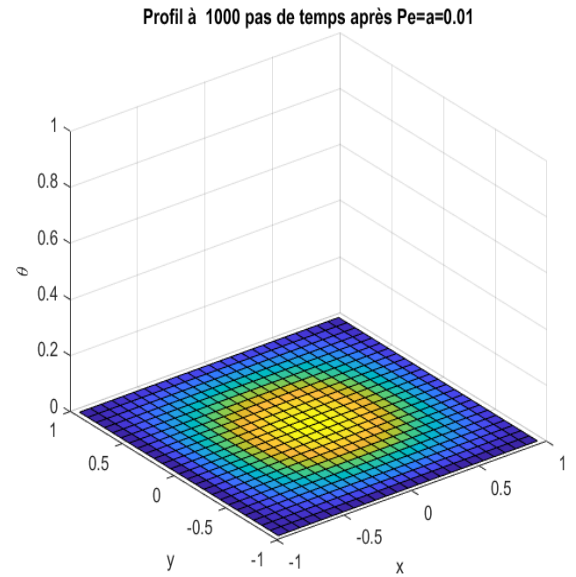
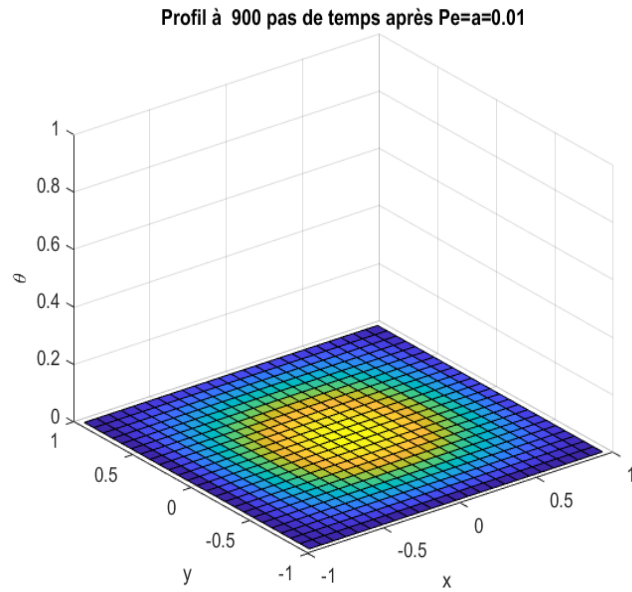


Profil à 400 pas de temps après $Pe=a=0.01$



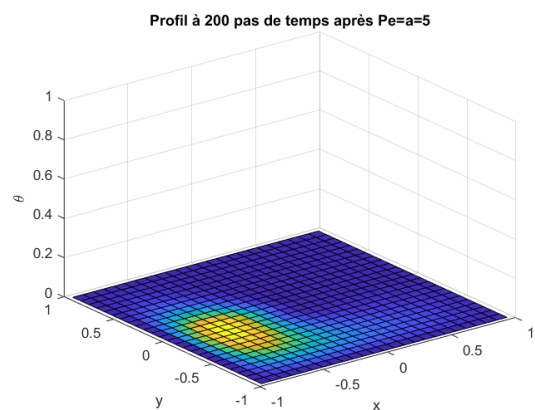
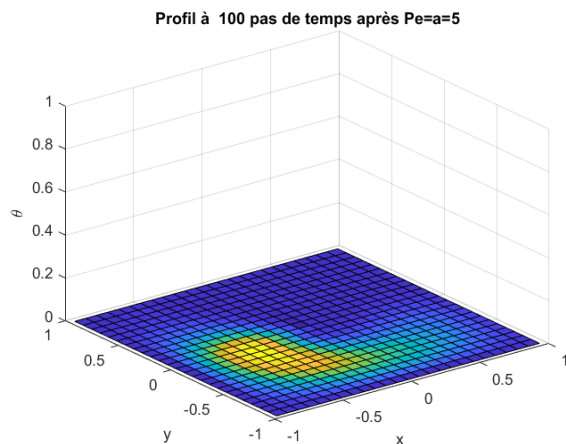
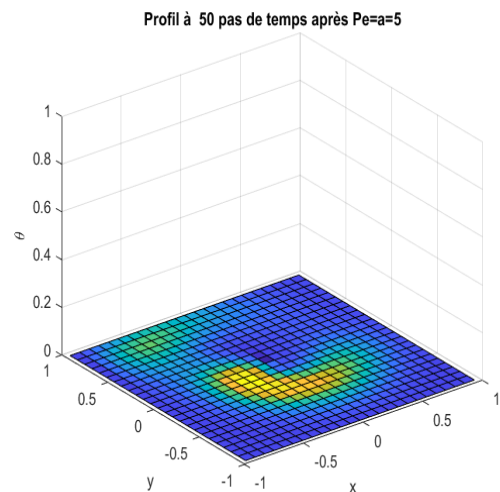
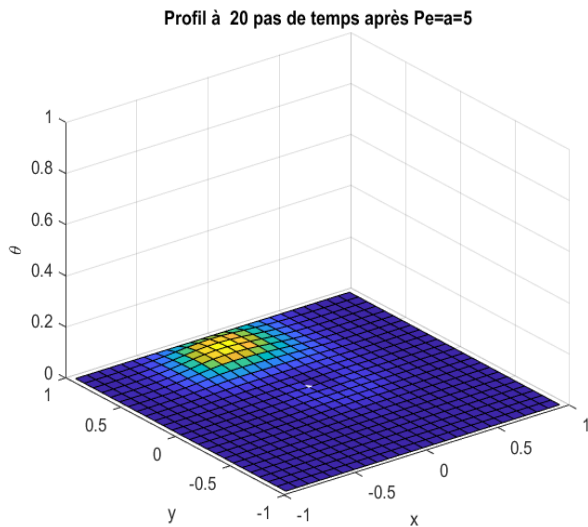
Profil à 800 pas de temps après $Pe=a=0.01$

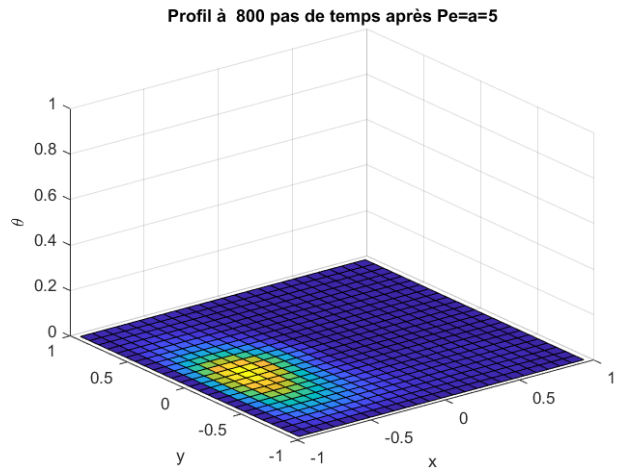
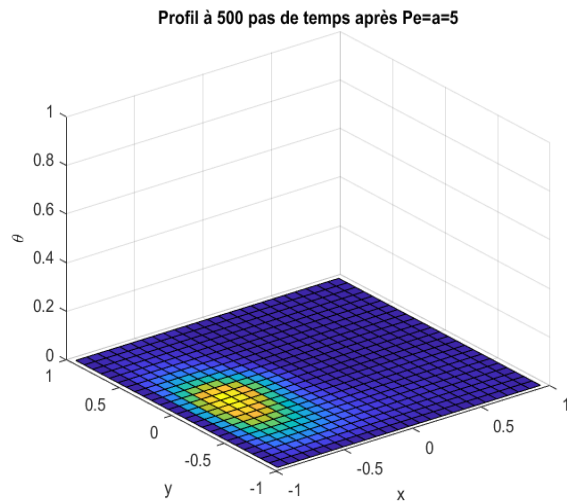




On voit clairement qu'avec Péclet assez petit, on a que de la diffusion, c'est qui est effectivement le comportement attendu.

Essayons de mettre Péclet à 5 soit 500 fois la valeur actuelle de Péclet.





On voit que la masse de particule se transporte sur tout le domaine sans faire vraiment de diffusion et ceci d'un temps à l'autre, la convection étant dominante lorsque Péclet est grand.

<Code LINEAIRE-QUICK : *lin_quick.m* >

```
clear all
close all
clc
```

```
tc=1;
Nt=1000;
dt=tc/Nt;
% amplitude de la vitesse a=1 5 10
a=5;
```

```
%=====
=====
```

```
% Espace
```

```
% *
```

```
%=====
=====
```

```
Nx=25;
```

```
Ny=25;
```

```
Ly=1;
```

```
Lx=1;
```

```
%Pas d'espace
```

```
dx=2*Lx/Nx;
```

```
dy=2*Ly/Ny;
```

```
x=-Lx+dx/2:dx:Lx-dx/2;
```

```

y=-Ly+dy/2:dy:Ly-dy/2;
%=====
=====
% Cercle
Rc=Lx/4;
Xc=Lx/2;
Yc=0;
%=====
=====

%=====
=====
%=====
=====
%Matrice de rigidité et solution initiale
%=====
=====
N=Nx*Ny;
A=zeros (N,N) ;
U=zeros (N,Nt+1) ;
for j=1:Ny
    for i=1:Nx
        k1=k (Nx,i,j) ;
        k2=k (Nx,i-1,j) ;
        k3=k (Nx,i+1,j) ;
        k4=k (Nx,i,j-1) ;
        k5=k (Nx,i,j+1) ;
        k22=k (Nx,i-2,j) ;
        k33=k (Nx,i+2,j) ;
        k44=k (Nx,i,j-2) ;
        k55=k (Nx,i,j+2) ;
        %Calcul du champ de vitesse.
        %Vitesse de convection
        ue=u (a,x (i)+dx/2,y (j)) ;
        uw=u (a,x (i)-dx/2,y (j)) ;
        vn=v (a,x (i),y (j)+dy/2) ;
        vs=v (a,x (i),y (j)-dy/2) ;
        if ( i>1 && i<Nx && j>1 && j<Ny)
            %Conduction
            A(k1,k1)=1-2*dt/dx^2-2*dt/dy^2;
            A(k1,k2)=dt/dx^2;
            A(k1,k3)=dt/dx^2;
            A(k1,k4)=dt/dy^2;
            A(k1,k5)=dt/dy^2;

            %Conduction-Convection__quick
            if ( i>2 && i<Nx-1 && j>2 && j<Ny-1)
                ue_plus=(-dt/dx) * (max (ue,0)/8) ;

```

```

        ue_moins=(-dt/dx)*(min(ue,0)/8);
        uw_plus=(-dt/dx)*(max(uw,0)/8);
        uw_moins=(-dt/dx)*(min(uw,0)/8);
        vs_plus=(-dt/dy)*(max(vs,0)/8);
        vs_moins=(-dt/dy)*(min(vs,0)/8);
        vn_plus=(-dt/dy)*(max(vn,0)/8);
        vn_moins=(-dt/dy)*(min(vn,0)/8);

        % On a deja fait la multiplication des facteurs
        -dt/dy*1/8

        % dans le calcul des vitesses.
        A(k1,k1)=A(k1,k1)+6*ue_plus+3*ue_moins-3*uw_plus-
6*uw_moins+6*vn_plus+3*vn_moins-3*vs_plus-6*vs_moins;
        A(k1,k2)=A(k1,k2)-ue_plus-6*uw_plus-3*uw_moins;
        A(k1,k3)=A(k1,k3)+3*ue_plus+6*ue_moins+uw_moins;
        A(k1,k4)=A(k1,k4)-vn_plus+6*vs_plus-3*vs_moins;
        A(k1,k5)=A(k1,k5)+3*vn_plus+6*vn_moins+vn_moins;
        A(k1,k22)= A(k1,k22)+uw_plus;
        A(k1,k33)= A(k1,k33)-ue_moins;
        A(k1,k44)= A(k1,k44)+vs_plus;
        A(k1,k55)= A(k1,k55)-vn_moins;
    end
    %si on est presque'au bord on fait du upwind
    if(i==2 || i==Nx-1 || j==2 || j==Ny-1)
        A(k1,k1)=A(k1,k1)-dt/(dx)*(max(ue,0)-min(uw,0))-
dt/(dy)*(max(vn,0)-min(vs,0));
        A(k1,k2)=A(k1,k2)+dt/(dx)*max(uw,0);
        A(k1,k3)=A(k1,k3)-dt/(dx)*min(ue,0);
        A(k1,k4)=A(k1,k4)+dt/(dy)*max(vs,0);
        A(k1,k5)=A(k1,k5)-dt/(dy)*min(vn,0);
    end
end
end

    if(i==1 || i==Nx || j==1 || j==Ny )
        A(k1,k1)=1;

    end

    if ((x(i)-Xc)^2+(y(j)-Yc)^2)<=Rc^2)
        U(k1,1)=1;
    end
end
end

%=====
%
% Evolution de la solution en fonction du temps
%=====

```

=====

```
for t=1:Nt
    U(:,t+1)=A*U(:,t);
    Uxy=reshape(U(:,t),Nx,Ny);
    surf(x,y,Uxy)
    axis([-Lx Lx -Ly Ly 0 1])

    title('Schema quick')
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('{\theta}')
    drawnow
end
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] [Wikipedia](#)