首先解RN-AdS场方程的方法为:关于微分方程的低能模式展开的解法

 $RN = AdS_5$ 相对于Schwarzschild背景来说多了一个电荷,度规发生改变,其余不变。 微扰场仍然为:

$$ilde{
abla}_{M}{ ilde{F}}^{MN}=0\Longrightarrowrac{1}{\sqrt{- ilde{g}}} ilde{\partial}_{M}\Bigl(\sqrt{- ilde{g}}{ ilde{F}}^{MN}\Bigr)=0$$

对场 $ilde{F}_{MN}= ilde{
abla}_{M} ilde{C}_{N}- ilde{
abla}_{N} ilde{C}_{M}$ 做傅里叶展开:

$$ilde{C}_Mig(r,t,x^iig) = \int rac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x} ilde{C}_M(r,k^\mu)$$

后可以得到分量方程 (假设动量只在x方向):

1. 横向方程(y或z方向):

$$0 = \partial_r \Big[r f(r) \partial_r ilde{C}_ot \Big] + rac{\omega^2 r}{f(r)} ilde{C}_ot - q^2 r^{-1} ilde{C}_ot, \hspace{0.5cm} ot = y, z$$

2. 纵向方程(t和x方向):

$$egin{aligned} 0 &= \partial_r \Big(r^3 \partial_r ilde{C}_t \Big) - rac{r}{f(r)} \Big(q^2 ilde{C}_t + \omega q ilde{C}_x \Big) \ 0 &= \partial_r \Big[r f(r) \partial_r ilde{C}_x \Big] + rac{r}{f(r)} \Big(\omega^2 ilde{C}_x + \omega q ilde{C}_t \Big) \end{aligned}$$

然后解这个方程组,首先做一些化简:

- 对于度规 $f(r)=r^2-rac{M}{r^2}+rac{q^2}{r^4}$ 做代换: $M o \left(rh^4+rh^4q^2
 ight), q o qrh^3$ 于是有: $f(r)=r^2+rac{q^2rh^6}{r^4}-rac{rh^4+q^2rh^4}{r^2}$
- 使用 $u = \frac{rh^2}{r^2}$ 要更加方便一点

于是横向方程可以写为:

$$egin{aligned} &rac{1}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)}\sqrt{u}ig(ig(-p^2(-1+u)ig(-1-u+q^2u^2ig)+\omega^2ig)x[u]+\ &4rh^2(-1+u)u^2ig(2(1+u)+q^4u^2(-2+3u)-q^2ig(-2+u+5u^2ig)ig)x'[u]ig)+\ &4rh(-1+u)u^{3/2}ig(-1-u+q^2u^2ig)x''[u]=0 \end{aligned}$$

依据关于微分方程的低能模式展开的解法求解方程

1. 发散

假设x(u)在视界处有发散行为 $x[u]=(1-u)^{\alpha}F[u]$,这里发散行为全提出来,所以F[u]是没有发散的,带入场方程,剔除掉 $(1-u)^{\alpha}$ 的发散项后,在视界u=1处做级数展开,领头阶为:

$$\frac{16 {\rm rh}^2 \alpha^2 \ {\rm F}[1] - 16 {\rm q}^2 {\rm rh}^2 \alpha^2 \ {\rm F}[1] + 4 {\rm q}^4 {\rm rh}^2 \alpha^2 \ {\rm F}[1] + \omega^2 \ {\rm F}[1]}{(-2+{\rm q}^2) {\rm rh}({\rm u}-1)}$$

因为发散行为已经被剔除,所以要求这一项为0,可解得:

$$\left\{\left\{lpha
ightarrow-rac{\omega}{2\sqrt{-{(-2+{
m q}^2)}^2}{
m rh}}
ight\},\left\{lpha
ightarrowrac{\omega}{2\sqrt{-{(-2+{
m q}^2)}^2}{
m rh}}
ight\}
ight\}$$

做一些化简,可以将常数rh吸收到 ω, p 中去 $\omega \to 2rh\omega, p \to 2rhp$,于是:

$$lpha
ightarrow rac{\omega}{\sqrt{-{(-2+q^2)}^2}}$$

2. 场方程的级数展开

将 $x[u] = (1-u)^{\alpha} F[u]$ 带入方程后可得,剔除掉发散的场方程为:

$$\begin{split} \frac{2\omega F[u]}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u^2)} + \frac{4u^2\Big(\sqrt{-(-2+q^2)^2}-\omega\Big)\omega F[u]}{(-2+q^2)^2(-1+u^2)^2} \\ + \frac{\Big(-p^2(-1+u)\big(-1-u+q^2u^2\big)+\omega^2\big)F[u]}{(-1+u)^2u(1+u-q^2u^2)^2|} + \frac{4u\omega F'[u]}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u^2)} \\ + \frac{u\big(-2+q^2(-2+3u)\big)\Big(2u\omega F[u]+\sqrt{-(-2+q^2)^2}\big(-1+u^2\big)F'[u]\Big)}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u)^2(1+u)(-1-u+q^2u^2)} + F''[u] = 0 \end{split}$$

然后将展开 $F[u] = F\theta[u] + \lambda F1[u] + \lambda^2 F2[u] + \lambda^3 F3[u]$ 带入上述方程可以得到按级数展开的方程:

$$\left(rac{uig(-2-2q^2+3q^2uig)F0'[u]}{(-1+u)(-1-u+q^2u^2)}+F0''[u]
ight)+O[\lambda]\ldots=0$$

于是一阶一阶的解

3. 第零阶:

$$rac{\mathrm{u}ig(-2-2\mathrm{q}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}ig)\mathrm{F0'[u]}}{(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+\mathrm{F0''[u]}= heta$$

它的解为:

$$\left\{ \mathrm{F0[u]}
ightarrow \mathbb{C}_1 \left(rac{(2-4\mathrm{q}^2) \operatorname{Arctan} \left[rac{-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}
ight]}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}} + 2 \log[-1+\mathrm{u}] - \log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2
ight]
ight)}
ight.
ight\}$$

其中,因为之前的讨论已经把解的发散去掉了,所以,这里不会有发散,于是 $C_1 = 0$,所以零阶解为:

$$F0[u] = C$$

这里有一个积分常数,需要边界条件决定,实际上,我们需要的是解中各阶数系数的比值,所以这个积分常数取多少并不重要,简单起见我们可以令边界条件为F[0]=C,于是高阶项系数需要满足在边界上为O。

4. 第一阶

$$\begin{split} &\frac{4C\sqrt{-(-2+q^2)^2}u^2\omega}{(-2+q^2)^2(-1+u^2)^2} + \frac{2C\omega}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u^2)} \\ &+ \frac{u\big(-2+q^2(-2+3u)\big)\bigg(2Cu\omega + \sqrt{-(-2+q^2)^2}\big(-1+u^2\big)F1'[u]\bigg)}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u)^2(1+u)(-1-u+q^2u^2)} + F1''[u] = 0 \end{split}$$

它的解为:

$$\begin{split} &\left\{ F1[u] \to \mathbb{C}_2 + \frac{1}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}} \left(\frac{\left(C(4+5q^2)\omega + \sqrt{-(-2+q^2)^2} \mathfrak{C}_1\right) \log[1-u]}{-2+q^2} - C\omega \log[1+u] - \right. \\ & \left. \frac{\left(2C(\omega + 3q^2\omega) + \sqrt{-(-2+q^2)^2} \mathfrak{C}_1\right) \log[1+u-q^2u^2]}{2(-2+q^2)} - \left(i\left(-1+2q^2\right)\left(2C\left(\omega + 3q^2\omega\right) + \sqrt{-(-2+q^2)^2} \mathfrak{C}_1\right) \right. \\ & \left. \left(\log\left[1 - \frac{i(-1+2q^2u)}{\sqrt{-1-4q^2}}\right] - \log\left[1 + \frac{i(-1+2q^2u)}{\sqrt{-1-4q^2}}\right]\right) / \left(2\sqrt{-1-4q^2}\left(-2+q^2\right)\right)\right]\right\} \end{split}$$

其中发散项只有Log[1-u], 消去发散项得:

$$egin{align*} \left\{ egin{align*} &\mathbf{F1}[\mathbf{u}]
ightarrow \mathbb{C}_2 - rac{1}{2\sqrt{-1-4\mathbf{q}^2}\sqrt{-(-2+\mathbf{q}^2)^2}} \ &\mathbf{C}\omega \Big(2\sqrt{-1-4\mathbf{q}^2}\log[1+\mathbf{u}] + \sqrt{-1-4\mathbf{q}^2}\log\left[1+\mathbf{u}-\mathbf{q}^2\mathbf{u}^2
ight] + \ &\mathbf{i} \Big(-1+2\mathbf{q}^2\Big) \Big(\log\left[1-rac{\mathbf{i} \left(-1+2\mathbf{q}^2\mathbf{u}
ight)}{\sqrt{-1-4\mathbf{q}^2}}
ight] - \log\left[1+rac{\mathbf{i} \left(-1+2\mathbf{q}^2\mathbf{u}
ight)}{\sqrt{-1-4\mathbf{q}^2}}
ight] \Big) \Big) \Big\} \end{aligned}$$

由于边界条件为F1[0] = 0,所以可以定出 C_2 ,于是一阶解为:

$$\begin{split} \left\{ \mathrm{F1[u]} \to & \left(\mathrm{C}\omega \bigg(\left(2 - 4\mathrm{q}^2 \right) \mathrm{Arc} \cot \left[\sqrt{-1 - 4\mathrm{q}^2} \right] + \left(2 - 4\mathrm{q}^2 \right) \mathrm{ArcTan} \left[\frac{-1 + 2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1 - 4\mathrm{q}^2}} \right] - \\ & \sqrt{-1 - 4\mathrm{q}^2} \big(2\log[1 + \mathrm{u}] + \log\left[1 + \mathrm{u} - \mathrm{q}^2\mathrm{u}^2 \right] \big) \bigg) \right) \left(2\sqrt{-1 - 4\mathrm{q}^2} \sqrt{-\left(-2 + \mathrm{q}^2 \right)^2} \right) \right\} \end{split}$$

5. 第二阶

二阶解和上述同理,去掉发散项后再取边界条件,不过比较复杂,这里就不写出来了,具体看程序

纵向方程和横向方程同理可以写出为:

$$\begin{split} &-\frac{p^2\sqrt{u}Ct[u]}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)} - \frac{p\sqrt{u}\omega Cx[u]}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)} + 4rhu^{3/2}Ct''[u] = 0 \\ &\frac{p\sqrt{u}\omega Ct[u]}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)} + \frac{\sqrt{u}\omega^2Cx[u]}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)} + \\ &4rhu^{5/2}\big(-2+q^2(-2+3u)\big)Cx'[u] + 4rh(-1+u)u^{3/2}\big(-1-u+q^2u^2\big)Cx''[u] = 0 \end{split}$$

1. 首先

同样的,我们可以提出发散行为:

$$Cx[u]=(1-u)^{eta}cx[u], \quad Ct[u]=(1-u)^{\gamma}ct[u]$$

将其带入上面两个方程联立方程,由于已经去掉了发散项,所以在u = 1处级数展开的负一阶项为0,于是可以求得:

$$\left\{\{eta
ightarrow0\},\{eta
ightarrow1\},\left\{eta
ightarrow-rac{\omega}{2\sqrt{-{(-2+q^2)}^2}rh}
ight\},\left\{eta
ightarrowrac{\omega}{2\sqrt{-{(-2+q^2)}^2}rh}
ight\}
ight\}$$

以及:

$$\Bigg\{\{\gamma o heta\}, \{\gamma o 1\}, \Bigg\{\gamma o rac{1}{2}\Bigg(2+rac{\omega^2}{rh\sqrt{-(-2+q^2)^2\omega^2}}\Bigg)\Bigg\}, \Bigg\{\gamma o rac{1}{2}\Bigg(2-rac{\omega^2}{rh\sqrt{-(-2+q^2)^2\omega^2}}\Bigg)\Bigg\}$$

做化简 $\omega \to 2rh\omega, p \to 2rhp$ 们可以得到入射解的发散项指数为:

$$eta
ightarrow rac{\omega}{\sqrt{-{(-2+q^2)}^2}}, \quad \gamma
ightarrow 1 + rac{\omega}{\sqrt{-{(-2+q^2)}^2}}$$

2. 解系数

将发散带入方程组,并带入化简 $\omega \to 2rh\omega, p \to 2rhp$,之后我们可以得到在u=1处展开的各阶系数为:

$$ext{Ct}[1] = rac{p(-2+q^2)\operatorname{Cx}[1]}{2\left(\sqrt{-(-2+q^2)^2}+\omega
ight)}, \quad Ct'[1] = \ldots Cx[1], \quad Ct''[1] = \ldots Cx[1] \ Cx'[1] = \ldots Cx[1], \quad Cx''[1] = \ldots Cx[1]$$

这里讨论各阶系数是为了明确一个问题,纵向方程虽然有两个,但是它们是联立的,所以个一个横向方程一样除去发散项后应该只有一个独立的积分常数。

3. 场方程的级数展开

分离出发散行为后, 依据

$$egin{aligned} Ct[u] &= ext{Ct0}[u] + \lambda ext{Ct1}[u] + \lambda^2 ext{Ct2}[u] + \lambda^3 ext{Ct3}[u] \ \\ Cx[u] &= ext{Cx0}[u] + \lambda ext{Cx1}[u] + \lambda^2 ext{Cx2}[u] + \lambda^3 ext{Cx3}[u] \end{aligned}$$

展开,得到级数展开的方程:

$$\begin{split} \left(\frac{2\mathrm{Ct0}[\mathrm{u}]}{-1+\mathrm{u}^2} + \frac{4\mathrm{u}\mathrm{C}t0'[\mathrm{u}]}{-1+\mathrm{u}^2} + \mathrm{Ct0''}[\mathrm{u}]\right) + O[\lambda] + \ldots &= 0 \\ \\ \left(\frac{\mathrm{u}\big(-2-2\mathrm{q}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}\big)\mathrm{Cx0'}[\mathrm{u}]}{(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)} + \mathrm{Cx0''}[\mathrm{u}]\right) + O[\lambda] + \ldots &= 0 \end{split}$$

4. 零阶方程

$$\begin{array}{l} \frac{2Ct0[u]}{-1+u^2} + \frac{4uCt0'[u]}{-1+u^2} + Ct0''[u] = 0 \\ \frac{u(-2-2q^2+3q^2u)Cx0'[u]}{(-1+u)(-1-u+q^2u^2)} + Cx0''[u] = 0 \end{array}$$

他们的解为:

$$\begin{cases} \text{Ct0}[\text{u}] \rightarrow \frac{\mathbb{C}_1 + \text{u}\mathbb{C}_2}{-1 + \text{u}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Cx0}[\text{u}] \rightarrow \mathbb{C}_2 + \frac{\mathbb{C}_1 \left(\frac{\left(2 - 4\text{q}^2\right) \text{Arctan} \left[\frac{-1 + 2\text{q}^2 \text{u}}{\sqrt{-1 - 4\text{q}^2}} \right]}{\sqrt{-1 - 4\text{q}^2}} + 2 \log[-1 + \text{u}] - \log[1 + \text{u} - \text{q}^2 \text{u}^2] \right)} \\ \frac{2(-2 + \text{q}^2)}{2} \end{cases}$$

其中Cx0的解去掉发散项后为Cx0[u]=C,Ct0展开后可以明显看出发散项:

$$Ct0[u] = rac{\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2}{2(\mathrm{u} - 1)} + rac{1}{4}(-\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2) + rac{1}{8}(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2)(\mathrm{u} - 1) + 0[\mathrm{u} - 1]^2$$

去掉后为:

$$\left\{Ct0[u] \to \frac{C}{1+u}\right\}$$

由第二小节可以看出Ct的解在视界处是不包含常数项的(这里的常数项是指不含 ω, p 的一阶或高阶项),因为Ct[1]包含p,所以:

$$\{\mathrm{Ct0}[\mathrm{u}] \to 0, \quad Cx0[u] \to C\}$$

这里用了视界处的条件,所以很明显的边界条件是取在u=1处

5. 一阶方程

$$\begin{split} &\frac{2\operatorname{Ct}1[u]}{-1+u^2} - \frac{4u\operatorname{Ct}1'[u]}{1-u^2} + \operatorname{Ct}1''[u] = 0 \\ &\frac{2\operatorname{C}(-1-2u-u^2+3q^2u^2+2q^2u^3)\omega}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u)(1+u)^2(-1-u+q^2u^2)} + \left(u\left(-2\sqrt{-(-2+q^2)^2}(1+u)+\right) + q^2\left(-2\sqrt{-(-2+q^2)^2} + \sqrt{-(-2+q^2)^2}u + 3\sqrt{-(-2+q^2)^2}u^2\right)\right)\operatorname{Cx}1'[u]\right) / q^2\left(\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u)(1+u)(-1-u+q^2u^2)\right) + \operatorname{Cx}1''[u] = 0 \end{split}$$

它的解为:

$$\begin{cases} Ct1[u] \to \frac{\mathbb{C}_1 + u\mathbb{C}_2}{-1 + u^2} \\ \\ Cx1[u] \to \mathbb{C}_2 + \frac{1}{\sqrt{-(-2 + q^2)^2}} \left(-\frac{\left(-1 + 2q^2\right) ArcTan\left[\frac{-1 + 2q^2u}{\sqrt{-1 - 4q^2}}\right] \left(2C(\omega + 3q^2\omega) + \sqrt{-(-2 + q^2)^2}C_1\right)}{\sqrt{-1 - 4q^2}(-2 + q^2)} + \\ \\ \frac{\left(C(4 + 5q^2)\omega + \sqrt{-(-2 + q^2)^2}C_1\right) \log[-1 + u]}{-2 + q^2} - C\omega \log[1 + u] - \frac{\left(2C(\omega + 3q^2\omega) + \sqrt{-(-2 + q^2)^2}C_1\right) \log[1 + u - q^2u^2]}{2(-2 + q^2)} \right] \end{cases}$$

与零阶同理Ct1[u]去掉发散项后为 $Ct1[u]=\frac{C}{1+u}$,不一样的是,它要满足

$$ext{Ct}[1] = rac{pig(-2+q^2ig)c}{2ig(\sqrt{-ig(-2+q^2ig)^2}+\omegaig)}$$

这样的边界条件,注意这个值并不是一阶的,所以我们对它做展开

$$Ct[1] = rac{\operatorname{Cp}\left(-2+q^2
ight)\lambda}{2\sqrt{-\left(-2+q^2
ight)^2}} + rac{\operatorname{Cp}\omega\lambda^2}{2(-2+q^2)} + O[\lambda]^3$$

于是:

$$Ct1[1] = rac{\operatorname{Cp}\left(-2+q^2
ight)}{2\sqrt{-\left(-2+q^2
ight)^2}}$$

于是Ct1[u]的解为:

$$\left\{ \mathrm{Ct1}[\mathrm{u}]
ightarrow rac{\mathrm{Cp}ig(-2+\mathrm{q}^2ig)}{\sqrt{-{(-2+\mathrm{q}^2)}^2}(1+\mathrm{u})}
ight\}$$

另一方面Cx1[u]的发散项只有Log[-1+u],于是可以求出Cx1中的 C_1 为:

$$\left\{C_1
ightarrow -rac{Cig(4+5q^2ig)\omega}{\sqrt{-ig(-2+q^2ig)^2}}
ight\}$$

带入之后取边界条件Cx1[1]=0,在视界处为0,Cx解的边界条件可以任意一些,但是要和Ct取在同一位置,于是Cx1为:

$$\begin{cases} \operatorname{Cx} 1[u] \to \frac{1}{2\sqrt{-1-4q^2}\sqrt{-(-2+q^2)^2}} \operatorname{C}\!\omega\!\left(\left(-2+4q^2\right)\operatorname{ArcTan}\left[\frac{-1+2q^2}{\sqrt{-1-4q^2}}\right] + \\ \left(2-4q^2\right)\operatorname{ArcTan}\left[\frac{-1+2q^2u}{\sqrt{-1-4q^2}}\right] + \sqrt{-1-4q^2}\!\left(\log\left[8-4q^2\right] - 2\log[1+u] - \log\left[1+u-q^2u^2\right]\right)\right] \end{cases}$$

6.二阶方程

二阶解的方法和一阶解差不多,太长就不写了,具体可以看程序。