首先解RN-AdS场方程的方法为:关于微分方程的低能模式展开的解法
$RN-AdS_5$相对于$Schwarzschild$背景来说多了一个电荷，度规发生改变，其余不变。
微扰场仍然为:

$$\tilde{\nabla}_M\tilde{F}^{MN}=0\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\tilde{\partial}_M\left(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{F}^{MN}\right)=0$$

对场$\tilde{F}_{MN}=\tilde{\nabla}_M\tilde{C}_N-\tilde{\nabla}_N\tilde{C}_M$做傅里叶展开:

$$\tilde{C}_M\left(r,t,x^i\right)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x}\tilde{C}_M\left(r,k^\mu\right)$$

后可以得到分量方程（假设动量只在x方向）：

1. 横向方程（y或z方向）：

$$0=\partial_r\left[rf(r)\partial_r\tilde{C}_\perp\right]+\frac{\omega^2r}{f(r)}\tilde{C}_\perp-q^2r^{-1}\tilde{C}_\perp,\quad\perp=y,z$$

2. 纵向方程（t和x方向）：

$$\begin{aligned}&0=\partial_r\left(r^3\partial_r\tilde{C}_t\right)-\frac{r}{f(r)}\left(q^2\tilde{C}_t+\omega q\tilde{C}_x\right)\\&0=\partial_r\left[rf(r)\partial_r\tilde{C}_x\right]+\frac{r}{f(r)}\left(\omega^2\tilde{C}_x+\omega q\tilde{C}_t\right)\end{aligned}$$

然后解这个方程组，首先做一些化简:

- 对于度规$f(r)=r^2-\frac{M}{r^2}+\frac{q^2}{r^4}$做代换：$M\rightarrow\left(rh^4+rh^4q^2\right),q\rightarrow qrh^3$于是有:
$f(r)=r^2+\frac{q^2rh^6}{r^4}-\frac{rh^4+q^2rh^4}{r^2}$
- 使用$u=\frac{rh^2}{r^2}$要更加方便一点

于是横向方程可以写为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{rh(-1+u)(-1-u+q^2u^2)}\sqrt{u}\Big(\big(-p^2(-1+u)\big(-1-u+q^2u^2\big)+\omega^2\big)x[u]+\\&\quad4rh^2(-1+u)u^2\big(2(1+u)+q^4u^2(-2+3u)-q^2\big(-2+u+5u^2\big)\big)x'[u]\Big)+\\&4rh(-1+u)u^{3/2}\big(-1-u+q^2u^2\big)x''[u]=0\end{aligned}$$

依据关于微分方程的低能模式展开的解法求解方程

1. 发散

假设$x(u)$在视界处有发散行为$x[u]=(1-u)^\alpha F[u]$，这里发散行为全提出来，所以$F[u]$是没有发散的，带入场方程，剔除掉$(1-u)^\alpha$的发散项后，在视界$u=1$处做级数展开，领头阶为:

$$\frac{16\mathrm{rh}^2\alpha^2\ \mathrm{F}[1]-16\mathrm{q}^2\mathrm{rh}^2\alpha^2\ \mathrm{F}[1]+4\mathrm{q}^4\mathrm{rh}^2\alpha^2\ \mathrm{F}[1]+\omega^2\ \mathrm{F}[1]}{(-2+\mathrm{q}^2)\mathrm{rh}(\mathrm{u}-1)}$$

因为发散行为已经被剔除，所以要求这一项为0，可解得：

$$\left\{\left\{\alpha \to -\frac{\omega}{2\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathrm{rh}}\right\},\left\{\alpha \to \frac{\omega}{2\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathrm{rh}}\right\}\right\}$$

做一些化简，可以将常数rh吸收到ω, p中去$\omega \to 2rh\omega, p \to 2rhp$，于是：

$$\alpha \to \frac{\omega}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}}$$

2. 场方程的级数展开

将$x[u]=(1-u)^\alpha F[u]$带入方程后可得，剔除掉发散的场方程为：

$$\frac{2\omega F[u]}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u^2)}+\frac{4u^2\left(\sqrt{-(-2+q^2)^2}-\omega\right)\omega F[u]}{(-2+q^2)^2(-1+u^2)^2}$$
$$+\frac{\left(-p^2(-1+u)\left(-1-u+q^2u^2\right)+\omega^2\right)F[u]}{(-1+u)^2u(1+u-q^2u^2)^2|}+\frac{4u\omega F'[u]}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u^2)}$$
$$+\frac{u\left(-2+q^2(-2+3u)\right)\left(2u\omega F[u]+\sqrt{-(-2+q^2)^2}\left(-1+u^2\right)F'[u]\right)}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}(-1+u)^2(1+u)(-1-u+q^2u^2)}+F''[u]=0$$

然后将展开$F[u]=\mathrm{F}\theta[u]+\lambda\mathrm{F1}[u]+\lambda^2\ \mathrm{F2}[u]+\lambda^3\ \mathrm{F3}[u]$带入上述方程
可以得到按级数展开的方程：

$$\left(\frac{u\left(-2-2q^2+3q^2u\right)F0'[u]}{(-1+u)(-1-u+q^2u^2)}+F0''[u]\right)+O[\lambda]\ldots=0$$

于是一阶一阶的解

3. 第零阶：

$$\frac{\mathrm{u}\left(-2-2\mathrm{q}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)\mathrm{F0}'[\mathrm{u}]}{(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+\mathrm{F0}''[\mathrm{u}]=\theta$$

它的解为：

$$\left\{\mathrm{F0}[\mathrm{u}] \to \mathbb{C}_2+\frac{\mathbb{C}_1\left(\frac{(2-4\mathrm{q}^2)\ \mathrm{Arctan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}+2\log[-1+\mathrm{u}]-\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]\right)}{2(-2+\mathrm{q}^2)}\right\}$$

其中，因为之前的讨论已经把解的发散去掉了，所以，这里不会有发散，于是$C_1=0$，所以零阶解为：

$$F0[u]=C$$

这里有一个积分常数，需要边界条件决定，实际上，我们需要的是解中各阶数系数的比值，所以这个积分常数取多少并不重要，简单起见我们可以令边界条件为$F[0]=C$，于是高阶项系数需要满足在边界上为0。

4. 第一阶

$$\frac{4\mathrm{C}\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathrm{u}^2\omega}{(-2+\mathrm{q}^2)^2(-1+\mathrm{u}^2)^2}+\frac{2\mathrm{C}\omega}{\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}(-1+\mathrm{u}^2)}$$
$$+\frac{\mathrm{u}\left(-2+\mathrm{q}^2(-2+3\mathrm{u})\right)\left(2\mathrm{Cu}\omega+\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}(-1+\mathrm{u}^2)\mathrm{F1}'[\mathrm{u}]\right)}{\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}(-1+\mathrm{u})^2(1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+\mathrm{F1}''[\mathrm{u}]=0$$

它的解为：

$$\Bigg\{\mathrm{F1}[\mathrm{u}]\to\mathbb{C}_2+\frac{1}{\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}}\Bigg(\frac{\left(\mathrm{C}(4+5\mathrm{q}^2)\omega+\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathbb{c}_1\right)\log[1-\mathrm{u}]}{-2+\mathrm{q}^2}-\mathrm{C}\omega\log[1+\mathrm{u}]-$$
$$\frac{\left(2\mathrm{C}(\omega+3\mathrm{q}^2\omega)+\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathbb{c}_1\right)\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]}{2(-2+\mathrm{q}^2)}-\Bigg(\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\right)\left(2\mathrm{C}\left(\omega+3\mathrm{q}^2\omega\right)+\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\mathbb{c}_1\right)$$
$$\left(\log\left[1-\frac{\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]-\log\left[1+\frac{\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]\right)\Bigg)\Big/\left(2\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\left(-2+\mathrm{q}^2\right)\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$

其中发散项只有$Log[1-u]$，消去发散项得：

$$\Bigg\{\mathrm{F1}[\mathrm{u}]\to\mathbb{C}_2-\frac{1}{2\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}}$$
$$\mathrm{C}\omega\Bigg(2\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\log[1+\mathrm{u}]+\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]+$$
$$\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\right)\left(\log\left[1-\frac{\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]-\log\left[1+\frac{\mathrm{i}\left(-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]\right)\Bigg)\Bigg\}$$

由于边界条件为$F1[0]=0$，所以可以定出C_2，于是一阶解为：

$$\Bigg\{\mathrm{F1}[\mathrm{u}]\to\Bigg(\mathrm{C}\omega\Bigg(\left(2-4\mathrm{q}^2\right)\mathrm{Arc}\cot\left[\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\right]+\left(2-4\mathrm{q}^2\right)\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]-$$
$$\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\left(2\log[1+\mathrm{u}]+\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]\right)\Bigg)\Bigg)\left(2\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\sqrt{-(-2+\mathrm{q}^2)^2}\right)\Bigg\}$$

5. 第二阶

二阶解和上述同理，去掉发散项后再取边界条件，不过比较复杂，这里就不写出来了，具体看程序

纵向方程和横向方程同理可以写出为：

$$-\frac{\mathrm{p}^2\sqrt{\mathrm{u}}\mathrm{Ct}[\mathrm{u}]}{\mathrm{rh}(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}-\frac{\mathrm{p}\sqrt{\mathrm{u}}\omega\mathrm{Cx}[\mathrm{u}]}{rh(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+4\mathrm{rhu}^{3/2}\mathrm{Ct}''[\mathrm{u}]=0$$

$$\frac{\mathrm{p}\sqrt{\mathrm{u}}\omega\mathrm{Ct}[\mathrm{u}]}{\mathrm{rh}(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+\frac{\sqrt{\mathrm{u}}\omega^2\mathrm{Cx}[\mathrm{u}]}{\mathrm{rh}(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)}+$$
$$4\mathrm{rhu}^{5/2}\left(-2+\mathrm{q}^2(-2+3\mathrm{u})\right)\mathrm{Cx}'[\mathrm{u}]+4\mathrm{rh}(-1+\mathrm{u})\mathrm{u}^{3/2}\left(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right)\mathrm{Cx}''[\mathrm{u}]=0$$

1. 首先

同样的，我们可以提出发散行为：

$$Cx[u]=(1-u)^{\beta}cx[u],\quad Ct[u]=(1-u)^{\gamma}ct[u]$$

将其带入上面两个方程联立方程，由于已经去掉了发散项，所以在$u=1$处级数展开的负一阶项为0，于是可以求得：

$$\left\{\{\beta\to 0\},\{\beta\to 1\},\left\{\beta\to -\frac{\omega}{2\sqrt{-(-2+q^2)^2}rh}\right\},\left\{\beta\to \frac{\omega}{2\sqrt{-(-2+q^2)^2}rh}\right\}\right\}$$

以及：

$$\left\{\{\gamma\to\theta\},\{\gamma\to 1\},\left\{\gamma\to\frac{1}{2}\left(2+\frac{\omega^2}{rh\sqrt{-(-2+q^2)^2\omega^2}}\right)\right\},\left\{\gamma\to\frac{1}{2}\left(2-\frac{\omega^2}{rh\sqrt{-(-2+q^2)^2\omega^2}}\right)\right.$$

做化简$\omega\to 2rh\omega,p\to 2rhp$们可以得到入射解的发散项指数为：

$$\beta\to\frac{\omega}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}},\quad \gamma\to 1+\frac{\omega}{\sqrt{-(-2+q^2)^2}}$$

2. 解系数

将发散带入方程组，并带入化简$\omega\to 2rh\omega,p\to 2rhp$，之后我们可以得到在$u=1$处展开的各阶系数为：

$$\mathrm{Ct}[1]=\frac{p\left(-2+q^2\right)\mathrm{Cx}[1]}{2\left(\sqrt{-(-2+q^2)^2}+\omega\right)},\quad Ct'[1]=\ldots Cx[1],\quad Ct''[1]=\ldots Cx[1]$$
$$Cx'[1]=\ldots Cx[1],\quad Cx''[1]=\ldots Cx[1]$$

这里讨论各阶系数是为了明确一个问题，纵向方程虽然有两个，但是它们是联立的，所以个一个横向方程一样除去发散项后应该只有一个独立的积分常数。

3. 场方程的级数展开

分离出发散行为后，依据

$$Ct[u] = \mathrm{Ct0}[u] + \lambda \mathrm{Ct1}[u] + \lambda^2 \mathrm{Ct2}[u] + \lambda^3 \mathrm{Ct3}[u]$$

$$Cx[u] = \mathrm{Cx0}[u] + \lambda \mathrm{Cx1}[u] + \lambda^2 \mathrm{Cx2}[u] + \lambda^3 \mathrm{Cx3}[u]$$

展开，得到级数展开的方程：

$$\left(\frac{2\mathrm{Ct0[u]}}{-1+\mathrm{u}^2} + \frac{4\mathrm{uC}t0'[\mathrm{u}]}{-1+\mathrm{u}^2} + \mathrm{Ct0}''[\mathrm{u}]\right) + O[\lambda] + \ldots = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{u}\left(-2-2\mathrm{q}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)\mathrm{Cx0}'[\mathrm{u}]}{(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)} + \mathrm{Cx0}''[\mathrm{u}]\right) + O[\lambda] + \ldots = 0$$

4. 零阶方程

$$\frac{2\mathrm{Ct0[u]}}{-1+\mathrm{u}^2} + \frac{4\mathrm{uCt0}'[\mathrm{u}]}{-1+\mathrm{u}^2} + \mathrm{Ct0}''[\mathrm{u}] = 0$$

$$\frac{\mathrm{u}\left(-2-2\mathrm{q}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}\right)\mathrm{Cx0}'[\mathrm{u}]}{(-1+\mathrm{u})(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2)} + \mathrm{Cx0}''[\mathrm{u}] = 0$$

他们的解为：

$$\left\{\mathrm{Ct0[u]} \to \frac{\mathbb{C}_1+\mathrm{u}\mathbb{C}_2}{-1+\mathrm{u}^2}\right\}$$

$$\left\{\mathrm{Cx0[u]} \to \mathbb{c}_2 + \frac{\mathbb{C}_1\left(\frac{\left(2-4\mathrm{q}^2\right)\mathrm{Arctan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}} + 2\log[-1+\mathrm{u}] - \log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]\right)}{2(-2+\mathrm{q}^2)}\right\}$$

其中$Cx0$的解去掉发散项后为$Cx0[u] = C$，$Ct0$展开后可以明显看出发散项：

$$Ct0[u] = \frac{\mathbb{C}_1+\mathbb{C}_2}{2(\mathrm{u}-1)} + \frac{1}{4}(-\mathbb{C}_1+\mathbb{C}_2) + \frac{1}{8}(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_2)(\mathrm{u}-1) + 0[\mathrm{u}-1]^2$$

去掉后为：

$$\left\{\mathrm{Ct0[u]} \to \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{u}}\right\}$$

由第二小节可以看出Ct的解在视界处是不包含常数项的（这里的常数项是指不含ω, p的一阶或高阶项），因为$Ct[1]$包含p，所以：

$$\{\mathrm{Ct0[u]} \to 0, \quad Cx0[u] \to C\}$$

这里用了视界处的条件，所以很明显的边界条件是取在$u = 1$处

5. 一阶方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\,\mathrm{Ct}\,1[\mathrm{u}]}{-1+\mathrm{u}^2}-\frac{4\mathrm{u}\mathrm{Ct}1'[\mathrm{u}]}{1-\mathrm{u}^2}+\mathrm{Ct}1''[\mathrm{u}]=0\\
&\frac{2\mathrm{C}\left(-1-2\mathrm{u}-\mathrm{u}^2+3\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}^3\right)\omega}{\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}(-1+\mathrm{u})(1+\mathrm{u})^2\left(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right)}+\Bigg(\mathrm{u}\Bigg(-2\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}(1+\mathrm{u})+\\
&\mathrm{q}^2\left(-2\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}+\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}\mathrm{u}+3\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}\mathrm{u}^2\right)\Bigg)\mathrm{Cx}1'[\mathrm{u}]\Bigg)/\\
&\left(\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}(-1+\mathrm{u})(1+\mathrm{u})\left(-1-\mathrm{u}+\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right)\right)+\mathrm{Cx}1''[\mathrm{u}]=0
\end{aligned}
$$

它的解为:

$$
\left\{\mathrm{Ct}1[\mathrm{u}]\to\frac{\mathbb{C}_1+\mathrm{u}\mathbb{C}_2}{-1+\mathrm{u}^2}\right\}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{Cx}1[\mathrm{u}]\to\mathbb{C}_2+\frac{1}{\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}}\left(-\frac{\left(-1+2\mathrm{q}^2\right)\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2u}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]\left(2\mathrm{C}\left(\omega+3\mathrm{q}^2\omega\right)+\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}\mathrm{C}_1\right)}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\left(-2+\mathrm{q}^2\right)}+\right.\\
\left.\frac{\left(\mathrm{C}\left(4+5\mathrm{q}^2\right)\omega+\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}\mathrm{C}_1\right)\log[-1+\mathrm{u}]}{-2+\mathrm{q}^2}-\mathrm{C}\omega\log[1+\mathrm{u}]-\frac{\left(2\mathrm{C}\left(\omega+3\mathrm{q}^2\omega\right)+\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}\mathbb{C}_1\right)\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]}{2\left(-2+\mathrm{q}^2\right)}\right]
\end{array}\right\}
$$

与零阶同理$Ct1[u]$去掉发散项后为$Ct1[u]=\frac{C}{1+u}$，不一样的是，它要满足

$$
\mathrm{Ct}[1]=\frac{p\left(-2+q^2\right)c}{2\left(\sqrt{-\left(-2+q^2\right)^2}+\omega\right)}
$$

这样的边界条件，注意这个值并不是一阶的，所以我们对它做展开

$$
Ct[1]=\frac{\mathrm{Cp}\left(-2+q^2\right)\lambda}{2\sqrt{-\left(-2+q^2\right)^2}}+\frac{\mathrm{Cp}\,\omega\lambda^2}{2\left(-2+q^2\right)}+O[\lambda]^3
$$

于是:

$$
Ct1[1]=\frac{\mathrm{Cp}\left(-2+q^2\right)}{2\sqrt{-\left(-2+q^2\right)^2}}
$$

于是$Ct1[u]$的解为:

$$
\left\{\mathrm{Ct}1[\mathrm{u}]\to\frac{\mathrm{Cp}\left(-2+\mathrm{q}^2\right)}{\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}(1+\mathrm{u})}\right\}
$$

另一方面$Cx1[u]$的发散项只有$Log[-1+u]$，于是可以求出$Cx1$中的C_1为:

$$
\left\{C_1\to-\frac{C\left(4+5q^2\right)\omega}{\sqrt{-\left(-2+q^2\right)^2}}\right\}
$$

带入之后取边界条件$Cx1[1]=0$，在视界处为0，Cx解的边界条件可以任意一些，但是要和Ct取在同一位置，于是$Cx1$为:

$$\left\{\mathrm{Cx}\,1[\mathrm{u}] \to \frac{1}{2\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\sqrt{-\left(-2+\mathrm{q}^2\right)^2}}\mathrm{C}\omega\Big(\left(-2+4\mathrm{q}^2\right)\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]+\right.$$
$$\left.\left(2-4\mathrm{q}^2\right)\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-1+2\mathrm{q}^2\mathrm{u}}{\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}}\right]+\sqrt{-1-4\mathrm{q}^2}\left(\log\left[8-4\mathrm{q}^2\right]-2\log[1+\mathrm{u}]-\log\left[1+\mathrm{u}-\mathrm{q}^2\mathrm{u}^2\right]\right)\Big]\right\}$$

6.二阶方程

二阶解的方法和一阶解差不多，太长就不写了，具体可以看程序。