量子计算和量子信息-引言

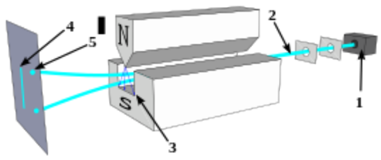
量子计算与量子信息

量子力学与量子比特

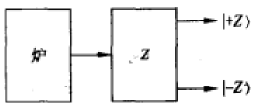
经典物理遇到的对实验现象解释的困难

Stern–Gerlach（斯特恩-格拉赫）实验

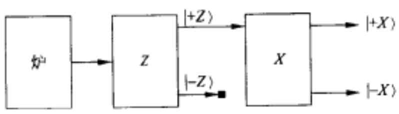
- 原实验使用银原子，简单不失一般性的情况下，这里使用电子讨论。（所以有必要声明一下，这里说明的不是严格的Stern–Gerlach实验，电子相比银原子更方便阐明物理思想）



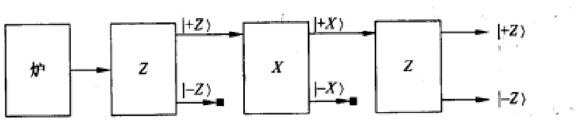
试验为：一束电子（不经过任何挑选，为随机的电子）从右端产生经过中间的磁场后打在左端的屏上，左边的屏上会出现两个峰。
我们知道电子带一个单位的负电荷， 这是没有疑问的。此外在磁场下发生偏移证明电子带竖直方向的磁矩，这是很不寻常的。我们通常将与此磁矩关联的量称为自旋。简单思考下我们可以很容易的得出以下结论：电子在屏上的偏移量和它在竖直方向（以下简称z方向）上的磁矩分量成正相关。我们通常的认知里物体在z方向上的磁矩可以取任意值，于是一束完全随机的电子束在z方向上的磁矩分布应该是连续的，这样经过磁场后打在屏上的分布应为一个连续分布，但实验结果却为离散的两个峰。这表明电子在z方向上的磁矩只能取两个分离的值



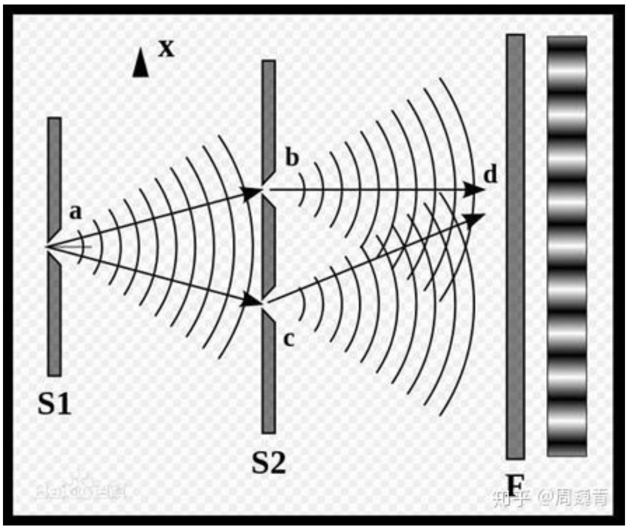
- 此时我们把其中一个峰的电子束提出，使其经过一个x方向的磁场，如果电子只有z方向的磁矩则不会在x方向有任何偏转，然而电子束在x方向任然产生了分离的两个峰



当然你可能会觉得一开始的电子束就同时有x和z方向的分布，于是我们还可以将第二次分布其中的一个峰的电子束取出再施加一次z方向的磁场，此时依照经典的直觉来看屏上应该只会出现一个峰，然而屏上任然出现两个分离的峰：



杨氏双缝干涉



- 同一光源发出的两束光通过b和c小孔在屏上会形成干涉条纹，经典来说这很正常，这正是光的波动性的决定性证据。但是光电效应告诉我们光的能量是一份一份的，正比于频率，即光的粒子性。此时我们将光源的功率调低导致光源每次只能射出一份能量也就是一个光子，按照经典的观点这一份光子要么通过b到屏幕，要么通过c到屏幕，最后每隔一段时间射出一份光子，射出非常多份后应该形成无干涉的图像，毕竟一个光子和谁干涉呢？（经典观点认为干涉图像是一群光子相互干涉）然而结果是仍然形成干涉条纹，也就是说光子和自己干涉。
- 此外如果我在b和c安放探测器，一旦探测器能探测是否有一个光子经过b或c，则干涉条纹消失

量子力学

对以上实验的解释可以通过建立非经典的模型来办到

1. 粒子的波动性用一个波函数描述

   $$|\psi(\vec{r})|^2 dxdydz$$

   它表示在一个体元$dxdydz$中发现一个粒子的概率，所以要满足归一化条件

   $$\int_V |\psi(\vec{V})|^2 dv = 1$$

2. 力学量为对应的厄米算符，在实验中观测到的值为其本征值

   $$\hat{F}\psi_n = F_n\psi_n$$

   厄米算符的本征值都为实数，不同本征态相互正交
3. 态叠加原理：
   如果体系处于某一个本征态ψ_n，则测量结果唯一确定为F_n
   如果体系处于两个本征态的叠加

   $$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

   则测量结果可能为F_1或F_2，并且态坍缩至对应的ψ_1和ψ_2
   值得注意的是取什么样的本征态取决于测量，或者说希望测量的是什么，例如我希望测量z方向的自旋，则选取的本征态为z方向的上和下，我希望测量x方向的自旋选取的本征态为x方向的上和下，前者和后者不同。
   思考：这里是离散情况例子，连续情况例如波函数$\psi(\vec{r})$它的本征态是什么？
4. 表象变换
   我们已经看到同样的一个态，我可以用不同的本征态去展开，例如自旋可以在x方向的上和下态展开，也可以用z方向的上和下展开。在什么样的本征态下讨论问题我们称之为什么样的表象，例如我们一般用波函数讨论问题，我们一般把波函数写成坐标的函数，则说此时我们在坐标表象下讨论问题。我们也可以在其它表象下考虑问题，通过表象变换即可：

   $$\langle x \mid \psi\rangle = \psi(x), \langle p \mid \psi\rangle = \psi(p)$$

$$\langle x \mid \psi\rangle=\int_p\langle x \mid p\rangle\langle p \mid \psi\rangle dp=\int_p e^{-ixp}\langle p \mid \psi\rangle dp$$

对应傅里叶变换

$$\psi(x)=\int_p e^{-ixp}\varphi(p)dp$$

其中

$$\int_p |p\rangle\langle p| dp=1$$

作用在态上实为态的一个展开

5. Schrodinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=H|\psi(t)\rangle$$

态的时间演化方程，在坐标表象和定域势中有：

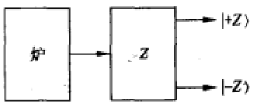
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t)$$

如果喜欢解方程可以取量子力学中看各种情况，例如无限深方势井、有限深方势井、谐振子、中心力场等，不过在量子计算中好像用的不多，它的作用被各种量子门取代。

当然这里是一个比较快速的量子力学速览，推荐看一下公理化的量子力学作为补充。

对实验的解释

- Stern–Gerlach（斯特恩-格拉赫）实验



入射光束处于的量子态为：

$$|z\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle$$

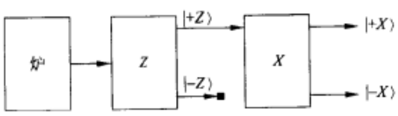
其自旋概率统计的平均值为零，然而测量的时候会随机坍缩到本征态中的一个，概率由系数的平方决定，于是产生了两个峰。此外还可以看到自旋是一个物理量它对应的算符在z方向的表象中我们记为σ_z，有：

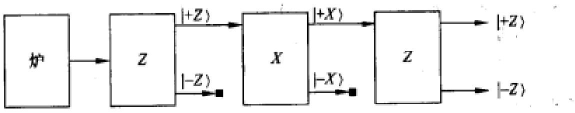
$$\sigma_z|+z\rangle=|+z\rangle,\quad \sigma_z|-z\rangle=-|-z\rangle$$

所以$|z\rangle$态的自旋统计平均值的算法为：

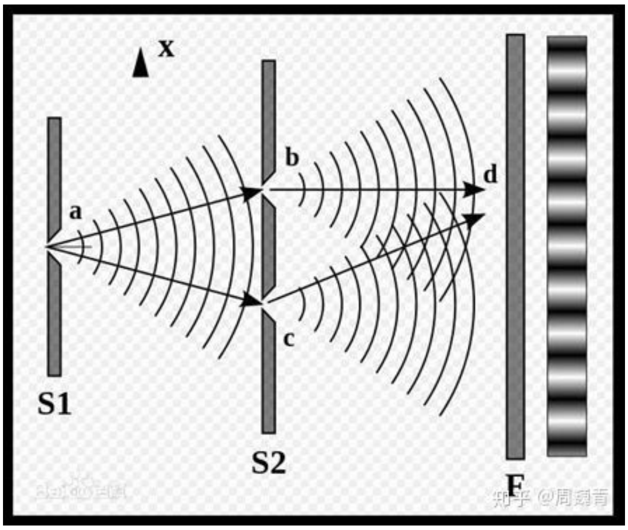
$$\begin{aligned}\langle z|\sigma_z|z\rangle &=\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +z|+\langle -z|)\sigma_z\frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle+|-z\rangle)\\ &=\frac{1}{2}(\langle +z|+\langle -z|)(|+z\rangle-|-z\rangle)\\ &=\frac{1}{2}(\langle +z \mid +z\rangle-\langle -z \mid -z\rangle)\\ &=0\end{aligned}$$

剩下的两个情况同理





- 杨氏双缝干涉



当a发出一份光量子，此时态为：

$$|\psi\rangle = a_1|b\rangle + a_2|c\rangle$$

在屏坐标表象上为：

$$\langle x_d \mid \psi\rangle = a_1 \langle x_d \mid b\rangle + a_2 \langle x_d \mid c\rangle$$

$$\psi(x_d) = a_1\psi_b(x_d) + a_2\psi_c(x_d)$$

此时$\psi_b(x_d)$和$\psi_c(x_d)$叠加产生干涉图像
一旦在b和c处测量波函数坍缩到$\psi_b(x_d)$或$\psi_c(x_d)$，则明显干涉图像消失

单量子比特-自旋空间-Bloch球

让我们再次回到自旋上来，这是一个非常好的，可以用来说明量子性质的例子。
像经典计算机有0和1一样，我们如何在量子中实现0或1？自旋给了一个简单的例子，我们将自旋向上记为$|0\rangle$，自旋向下记为$|1\rangle$，则任意一个自旋态可以表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha, \beta \in C$$

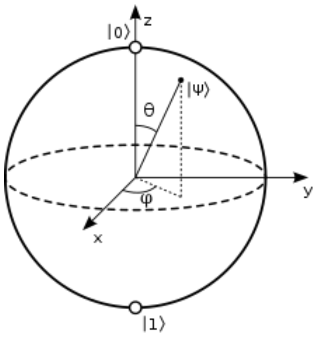
我们还可以以一种自带归一化条件的形式写出

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

其中整体相因子$e^{i\gamma}$没有意义，因为真正有物理意义的是态的内积（表示分布的概率），态本身没有意义，而这一项在作内积时消去，有意义的是相对相位$e^{i\varphi}$。此外，这里$\frac{\theta}{2}$的取值为0到$\pi/2$，因为超过$[0, \frac{\pi}{2})$的值等于$[0, \frac{\pi}{2})$的值添加一个正或负号，而这可以被吸收到整体相位和相对相位中，为了避免表示的重复，所以只取$[0, \frac{\pi}{2})$，于是$\theta \in [0, \pi)$

$$|\psi\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

可以以一对一于以下球面上的一点



此即Bloch球面，可以看出，对于一个经典比特只有两个取值0或1，但是对于一个量子比特它可以取Bloch球面上的任意一点，所以有无穷多个取值。

多量子比特

例如两个量子比特我们可以记为

$$|\psi\rangle=\alpha_{00}|0\rangle_1|0\rangle_2+\alpha_{01}|0\rangle_1|1\rangle_2+\alpha_{10}|1\rangle_1|0\rangle_2+\alpha_{11}|1\rangle_1|1\rangle_2$$

也可写为：

$$|\psi\rangle=\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle+\alpha_{10}|10\rangle+\alpha_{11}|11\rangle$$

现在只测量第一个比特，得到0的概率显然为$\alpha_{00}^2+\alpha_{01}^2$，测量后态坍缩到：

$$|\psi'\rangle=\frac{\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{\alpha_{00}^2+\alpha_{01}^2}}$$

- 一个重要的量子态

  $$|\psi\rangle=\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

  可以看到一个奇特的性质如果取这样的双量子态，则一旦1粒子坍缩到$|0\rangle_1$则2粒子立刻坍缩到$|0\rangle_2$，反之1粒子坍缩到$|1\rangle_1$则2粒子立刻坍缩到$|1\rangle_2$。这里强调立刻，意思是不论1粒子和2粒子相距多远这个过程都是瞬时发生的，不受光速限制，这也被称为量子纠缠。

注：通过整个这一章的讨论，我们可以看到量子世界的一个十分精髓的要点在于：对整个系统的考虑无法化为对多个无相互作用的子系统系统的考虑然后将它们组合在一起重建整个系统（Holographic Entanglement Entropy，Mukund Rangamani • Tadashi Takayanagi，2017），然而这在经典世界是可行的。例如以下两个在整体上能区分的两个双粒子态：

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}|00\rangle+\frac{1}{2}|01\rangle+\frac{1}{2}|10\rangle+\frac{1}{2}|11\rangle$$

$$|\psi\rangle=\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

在单个1粒子或2粒子看来都是：

$$|\psi\rangle_1=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1$$

$$|\psi\rangle_2=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_2+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_2$$

这样一个有别于经典世界的特点也是量子世界各种特性的来源，例如后面的超密编码、量子隐形传态等。