[2量子计算与量子信息-量子力学与量子比特]

单量子比特门

量子门需要满足的限制--幺正性（变换前后概率守恒），Bloch球上的一点变换到球上的另一点，只要变换前后态都在球面上，那么变换就是幺正的。
令人惊讶的是除此之外没有其它限制

Pauli矩阵

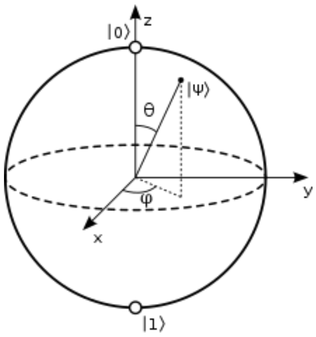
从三个特殊的量子门开始(Z表象下的Pauli矩阵)：

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

让我们再次强调下之前关于自旋和Bloch球的讨论
任意一个量子态

$$|\psi\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

可以一一对应Bloch球面上的一点



在z方向上，向上和向下的本征态分别记为：

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以看出他是Pauli矩阵Z的本征态，对应本征值分别为$1, -1$（实际上Pauli矩阵是通过要求这样的本征值求出来的，这里我们可以不做推导先看结构，有兴趣的可以自己去推到Pauli矩阵）。
这时，x方向的向上和向下（Bloch球中）在Z表象下为：

$$|0\rangle_x = \cos\frac{\pi}{4}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi}{4}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|1\rangle_x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i0}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

同理y方向有：

$$|0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, |1\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

他们恰好是Pauli矩阵X和Y的本征态。

让我们再次重申一下这里的物理意义：
上一次说过力学量对应相应的厄米算符，这里X，Y，Z三个矩阵（z表象下）分别对应x，y，z三个方向上的自旋物理量，它们的本征态明显对应Bloch上x，y，z三个方向上的单位矢量，如上，由于除了幺正性之外我们对量子门没有更多的要求，所以X，Y，Z三个矩阵我们也可以视为量子门。
接下来我们考虑如下的旋转算符：

$$R_x(\theta) \equiv \mathrm{e}^{-i\theta X/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) \equiv \mathrm{e}^{-i\theta Y/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) \equiv \mathrm{e}^{-i\theta Z/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta/2} \end{bmatrix}$$

其中第二个等号用到了X，Y，Z的平方等于单位阵，展开即可得到，这三个算符作用在一个态上表示这个态沿着x，y，z三个轴旋转θ角度。例如Z：
Z作用在任意一个量子态下为：

$$R_z(\theta)|\psi\rangle = e^{-i\theta Z/2}(a|0\rangle_z + b|1\rangle_z)$$

注意等号右边是用Z的本征态分解

$$= e^{-i\theta/2}a|0\rangle_z + e^{i\theta/2}b|1\rangle_z$$

$$= e^{-i\theta/2}\left(a|0\rangle_z + e^{i\theta}b|1\rangle_z\right)$$

可以看出相对相位增加了θ即旋转了θ角度。$R_x(\theta)$和$R_y(\theta)$同理，按照X，Y的本征态分解（所以此时是X，Y表象）可以得到同样的结论。
更进一步定义算符：

$$R_n(\theta) \equiv \exp(-i\theta\hat{n}\cdot\sigma/2) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_xX + n_yY + n_zZ)$$

其中σ表示向量(X, Y, Z)，向量元是矩阵。第二个等号可以由X，Y，Z相互是反对易的得到$(\hat{n}\cdot\sigma)^2 = I$然后展开等得到。
同理换到$\hat{n}$表象下可以得到一样的结论：$R_n(\theta)$将任意量子态绕$\hat{n}$向量旋转θ角度。

单量子门的分解

单量子门所要完成的事情为将Bloch球面上的一点变换到另一点，这个事情总是可以通过绕某个向量的旋转来完成的，所以任意一个单量子比特们可以表示为：

$$U = e^{i\alpha}R_n(\theta)$$

$e^{i\alpha}$是一个整体相位，在上述的证明中已经出现了（带整体相位的是一个东西，但不代表某些情况下，某一个的写法比另一个更好）

此外任意一个单量子比特门还可以表示为：

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$$

构造方法如下：
单量子比特门可以写为：

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

要满足幺正性即

1. $$a^2 + b^2 = 1$$
2. $$b^2 + d^2 = 1$$
3. $$ac^* + bd^* = 0$$
4. $$ad - bc = 1$$

其中满足1,2,4条件的矩阵可以直接写出：

$$U=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2}\\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

此时我们可以在矩阵元上加上相位，这保持1,2条件

$$U=\begin{bmatrix}e^{i\theta_1}\cos\frac{\gamma}{2} & -e^{i\theta_2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ e^{i\theta_3}\sin\frac{\gamma}{2} & e^{i\theta_4}\cos\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

加上的相位要满足3,4条件，于是：

$$\theta_1=-\theta_4,\theta_2=-\theta_3$$

再做变量代换：

$$\theta_1=-\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2},\quad \theta_2=-\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}$$

加上整体相位因子可得：

$$U=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\cos\frac{\gamma}{2} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \mathrm{e}^{(\alpha+\beta/2-\delta/2)}\sin\frac{\gamma}{2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta/2+\delta/2)}\cos\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

此即为：

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$$

一些经常出现的单量子门

Hadamard 门	$-\boxed{H}-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$
Pauli-X 门	$-\boxed{X}-$	$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
Pauli-Y 门	$-\boxed{Y}-$	$\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$
Pauli-Z 门	$-\boxed{Z}-$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
相位门	$-\boxed{S}-$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{8}$门	$-\boxed{T}-$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\end{bmatrix}$

最后一个有时也可以称为$Z_{\frac{1}{4}}$门

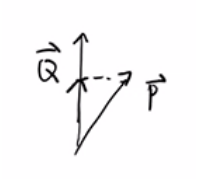
$$Z_{\frac{1}{4}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\pi/4}\end{bmatrix}$$

额外介绍：空间旋转和四元数简介

感谢知乎作者lxycg非常详细的关于四元数与空间旋转的笔记

- **点积和叉积**

考虑两个向量：



$$\vec{P}=\begin{bmatrix}P_y\\P_y\\P_z\end{bmatrix},\quad \vec{Q}=\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}$$

$\vec{P}$在$\vec{Q}$上的投影为

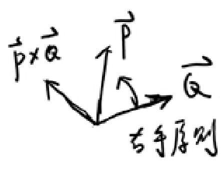
$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_Q\vec{P}&=\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{Q}|^2}\vec{Q}\\&=\frac{1}{|\vec{Q}|^2}\left(\begin{bmatrix}P_x & P_y & P_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{|\vec{Q}|^2}\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}\left([Q_x,Q_yQ_z]\begin{bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{bmatrix}\right)\\&=\frac{1}{|\vec{Q}|^2}\begin{bmatrix}Q_xQ_x & Q_xQ_y & Q_xQ_z\\Q_yQ_x & Q_yQ_y & Q_yQ_z\\Q_zQ_x & Q_zQ_y & Q_zQ_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中

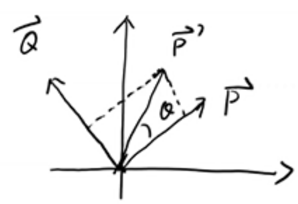
$$\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}[Q_x,Q_yQ_z]=\begin{bmatrix}Q_xQ_x & Q_xQ_y & Q_xQ_z\\Q_yQ_x & Q_yQ_y & Q_yQ_z\\Q_zQ_x & Q_zQ_y & Q_zQ_z\end{bmatrix}$$

称为并矢，他们在右乘上一个矢量的计算上保持结果一致
两个矢量的叉积为：

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{bmatrix}0 & -P_z & P_y\\P_z & 0 & -P_x\\-P_y & P_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\\Q_z\end{bmatrix}$$



- **二维旋转**



考虑$\vec{P}$旋转到$\vec{P}'$，此时$\vec{Q}$为垂直于$\vec{P}$的向量，以$\vec{Q}$，$\vec{P}$为基底有$\vec{Q}-\vec{P}$坐标系，在此坐标系下$\vec{P}'$表示为：

$$\vec{P}'=\vec{P}\cos\theta+\vec{Q}\sin\theta$$

$\vec{P}$，$\vec{Q}$在原坐标系下表示为：

$$\vec{P}=\begin{bmatrix}P_x\\P_y\end{bmatrix},\vec{Q}=\begin{bmatrix}-P_y\\P_x\end{bmatrix}$$

于是有：

$$\begin{bmatrix}P'_x\\P'_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_x\\P_y\end{bmatrix}\cos\theta+\begin{bmatrix}-P_y\\P_x\end{bmatrix}\sin\theta$$

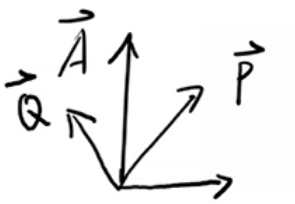
得到二维旋转变换：

$$\vec{P}'=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\vec{P}$$

这可以拓展到特殊的绕三个坐标轴的三维旋转变换：
$$\mathbf{R}_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{R}_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$
其中绕y轴的旋转符号不一样是因为手征性质。

- **三维旋转**

现在讨论绕三维空间任意一个轴的旋转，我们令沿着这个轴的一个单位矢量为$\vec{A}$



$\vec{A}$，$\vec{P}$ 张成一个平面，$\vec{Q}$为与此平面垂直并且长度等于$\vec{P}$的长度的矢量。显然$\vec{P}$可以分解为与$\vec{A}$平行的量和与$\vec{A}$垂直的量，由于$\vec{A}$是单位矢量，于是与$\vec{A}$平行的分量：

$$\operatorname{proj}_{\vec{A}}\vec{P}=(\vec{A}\cdot\vec{P})\vec{A}$$

与$\vec{A}$垂直的分量：

$$\operatorname{perp}_{\vec{A}}\vec{P}=\vec{P}-(\vec{A}\cdot\vec{P})\vec{A}$$

并且$\vec{Q}$为：

$$\vec{Q}=\vec{A}\times\vec{P}$$

参考二维旋转，与$\vec{A}$垂直的分量在旋转后变为：

$$\operatorname{perp}_{\vec{A}}\vec{P}'=\operatorname{perp}_{\vec{A}}\vec{P}\cos\theta+\vec{Q}\sin\theta$$

$$=(\vec{P}-(\vec{A}\cdot\vec{P})\vec{A})\cos\theta+(\vec{A}\times\vec{P})\sin\theta$$

与$\vec{A}$平行的分量显然不变，于是旋转后矢量为：

$$\vec{P}'=(\vec{A}\cdot\vec{P})A+(\vec{P}-(\vec{A}\cdot\vec{P})\vec{A})\cos\theta+(\vec{A}\times\vec{P})\sin\theta$$

$$=\vec{P}\cos\theta+(\vec{A}\times\vec{P})\sin\theta+\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{P})(1-\cos\theta)$$

- **四元数**

四元数可以写为（代数形式）：

$$q=w+xi+yj+zk$$

也可写为矢量形式：

$$q=s+\vec{v}$$

其中i，j，k为三个虚部，他们分别遵循以下运算性质：

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

以及$ij=-ji=k$，$jk=-kj=i$，$ki=-ik=j$
可以看出四元数没有乘法交换律。
他们的乘法可以写为矢量形式：

$$\begin{gathered}
q_1q_2=\left(w_1+x_1i+y_1j+z_1k\right)\left(w_2+x_2i+y_2j+z_2k\right)\\
=\omega_1\omega_2+\omega_1\left(x_2i+y_2j+z_2k\right)+\omega_2\left(x_1i+y_1j+z_1k\right)+\left(x_1i+y_1j+z_1k\right)\left(x_2i+y_2j+z_2k\right)\\
=w_1w_2+w_1\vec{v}_2+w_2\vec{v}_1-\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)+x_1y_2ij+x_1z_2ik+y_1x_2ji+y_1z_2jk+z_1x_2ki+z_1y_2kj\\
=w_1w_2+w_1\vec{v}_2+w_2\vec{v}_1-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\begin{bmatrix}i & j & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -z_1 & y_1\\ z_1 & 0 & -x_1\\ -y_1 & x_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix}
\end{gathered}$$

即：

$$q_1q_2=w_1w_2+w_1\vec{v}_2+w_2\vec{v}_1-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_1\times\vec{v}_2$$

此外四元数的共轭为：

$$\bar{q}=\overline{s+\vec{v}}=s-\vec{v}$$

$$\bar{q}=\overline{w+xi+yj+zk}=w-xi-yj-zk$$

四元数的，模为：

$$|q|^2=\omega^2+x^2+y^2+z^2=q\bar{q}=q\cdot q$$

于是逆元为：

$$q^{-1}=\frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

- **证明四元数可以表示空间旋转**

我们认为空间旋转为一个函数ϕ，它需要满足一些关系为：

1. 长度保持不变：

$$\|\phi(\vec{p})\|=\|\vec{p}\|$$

2. 角度保持不变：

$$\phi\left(\vec{p}_1\right)\cdot\phi\left(\vec{p}_2\right)=p_1\cdot p_2$$

3. 手征性质保持不变：

$$\phi\left(\vec{p}_1\right)\times\phi\left(\vec{p}_2\right)=\phi\left(\vec{p}_1\times\vec{p}_2\right)$$

可能会奇怪为何2的等式右手没有ϕ，而3的右手有，因为2的点乘出的是标量，标量一般认为在坐标变换下不变，而3叉乘出的是矢量，矢量在坐标变换下一般是变的。所以这里标量在变换下保持不变是隐含的，另外变换是线性的应该也是隐含的。
如果我们将$\vec{p}_1,\vec{p}_2$视为四元数，则如下变换隐含2,3条件：
4.

$$\phi\left(\vec{p}_1\right)\phi\left(\vec{p}_2\right)=\phi\left(\vec{p}_1\vec{p}_2\right)$$

证，因为：

$$\begin{aligned}\phi\left(\vec{p}_1\right)\phi\left(\vec{p}_2\right)&=s_1s_2-\phi\left(\vec{v}_1\right)\cdot\phi\left(\vec{v}_2\right)+s_1\phi\left(\vec{v}_2\right)+s_1\phi\left(\vec{v}_1\right)+\phi\left(\vec{v}_1\right)\times\phi\left(\vec{v}_2\right)\\&=\phi\left(s_1s_2-v_1\cdot v_2+s_1v_2+s_2v_1+v_1\times v_2\right)\end{aligned}$$

由于是线性运算：

$$=s_1s_2-\left(v_1\cdot v_2\right)+s_1\phi\left(v_2\right)+s_2\phi\left(v_1\right)+\phi\left(v_1\times v_2\right)$$

可得：

$$-\phi\left(\vec{v}_1\right)\cdot\phi\left(\vec{v}_2\right)+\phi\left(\vec{v}_1\right)\times\phi\left(\vec{v}_2\right)=-\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right)+\phi\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)$$

由于叉乘和点乘一个是矢量，一个是标量，于是分别相等，即为2,3条件，于是我们只需满足1,4条件即可，而：

$$\phi_q(\vec{p})=q\vec{p}q^{-1}$$

即可满足1,4条件（这里将$\vec{p}$看为标量部分为0的四元数）：

- $$\left\|\phi_q(\vec{p})\right\|=|q||\vec{p}|\left|q^{-1}\right|=\frac{|q||\vec{p}|\bar{q}\mid}{|q|^2}=|\vec{p}|$$
- $$\phi_q\left(\vec{p}_1\right)\phi_q\left(\vec{p}_2\right)=q\vec{p}_1q^{-1}q\vec{p}_2q^{-1}=q\vec{p}_1\vec{p}_2q^{-1}=\phi_q\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2\right)$$

  于是我们证明了四元数可以表示旋转，但是具体的表示应该如何写呢？

- **四元数表示空间旋转的具体形式**

  我们令q为一个单位四元数即$|q|=1$，对$\vec{p}$ 做旋转有（此时$\vec{p}$ 视为标量分量为0的四元数）：

$$\begin{aligned}q\vec{p}q^{-1}&=(s+\vec{v})\vec{p}(s-\vec{v})\\&=(s\vec{p}-\vec{v}\cdot\vec{p}+\vec{v}\times\vec{p})(s-\vec{v})\\&=[-\vec{v}\cdot\vec{p}+(s\vec{p}+\vec{v}\times\vec{p})](s-\vec{v})\\&=-s\vec{v}\cdot\vec{p}+(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}+s(s\vec{p}+\vec{v}\times\vec{p})+\vec{v}\cdot(s\vec{p}+\vec{v}\times\vec{p})-(s\vec{p}+\vec{v}\times\vec{p})\times\vec{v}\end{aligned}$$

  其中$\vec{v}\cdot\vec{v}\times\vec{p}=0$，于是：

$$=(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}+s^2\vec{p}+2s\vec{v}\times\vec{p}-\vec{v}\times\vec{p}\times\vec{v}$$

  由于$\vec{v}\times\vec{p}\times\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{p}-(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}$，有：

$$=2(\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{v}+s^2\vec{p}+2s\vec{v}\times\vec{p}-(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{p}$$

  令$\vec{v}=t\vec{A}$，$\vec{A}$是一个单位矢量：

$$=2t^2(\vec{A}\cdot\vec{p})\vec{A}+s^2\vec{p}+2st\vec{A}\times\vec{p}-t^2\vec{p}$$

  即：

$$q\vec{p}q^{-1}=\left(s^2-t^2\right)\vec{p}+2st\vec{A}\times\vec{p}+2t^2(\vec{A}\cdot\vec{p})\vec{A}$$

  对比之前推出的三维旋转的变换为：

$$\vec{P}'=\vec{P}\cos\theta+(\vec{A}\times\vec{P})\sin\theta+\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{P})(1-\cos\theta)$$

可得一一对应关系为：

$$s^2-t^2=\cos\theta,\quad 2st=\sin\theta,\quad 2t^2=1-\cos\theta$$

解出：

$$t=\sin\frac{\theta}{2},\quad s=\cos\frac{\theta}{2}$$

四元数q的矢量表示为：

$$q=s+\vec{v}=\cos\frac{\theta}{2}+\vec{A}\sin\frac{\theta}{2}$$

$\vec{A}$即为所绕旋转轴，θ即为旋转角度。
同时也给出代数表示为：

$$q=\cos\frac{\theta}{2}+A_x\sin\frac{\theta}{2}i+A_y\sin\frac{\theta}{2}j+A_z\sin\frac{\theta}{2}k$$

- **四元数的指数表示**

首先对四元数做指数运算有：

$$e^q=e^{\omega+\vec{v}}=e^{\omega}e^{\vec{v}}$$

其中指数函数的展开为：

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

于是：

$$e^q=e^{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{v}^k}{k!}$$

由于：

$$\vec{v}^2=(xi+yj+zk)^2=-|\vec{v}|^2$$

于是

$$e^q=e^w\left(\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{\left(-|\vec{v}|^2\right)^n}{k!}+\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{\left(-|\vec{v}|^2\right)^n\vec{v}}{k!}\right),\quad n\in\{0,1,2\cdots\}$$

由于三角函数的展开为：

$$\cos\theta=\sum_{n=2n}^{\infty}\frac{\left(-\theta^2\right)^n}{k!}$$

$$\sin\theta=\sum_{k=2k+1}^{\infty}\frac{\left(-\theta^2\right)^n}{k!}\theta$$

代入得：

$$e^q=e^{\omega}\left(\cos|\vec{v}|+\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\sin|\vec{v}|\right)$$

此时我们选取$\vec{u}$为不带标量的单位四元数，θ是任意一标量，有：

$$\begin{aligned}e^{\vec{u}\theta}&=\cos|\vec{u}\theta|+\frac{\sin|\vec{u}\theta|}{|\vec{u}\theta|}\vec{u}\theta\\&=\cos\theta+\vec{u}\sin\theta\end{aligned}$$

可以看出这可以表示任意一个单位四元数，给出单位四元数的三种表示形式以及他们的关系为：

- 代数形式

$$q=\cos\theta+u_x\sin\theta\, i+u_y\sin\theta\, j+u_z\sin\theta\, k$$

- 矢量形式

$$q=[\cos\theta,\vec{u}\sin\theta]$$

- 指数形式

$$q = e^{\vec{u}\theta}$$

我们回到前面，量子态绕任意轴的旋转为：

$$R_n(\theta) \equiv \exp(-i\theta\hat{n}\cdot\sigma/2) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_xX + n_yY + n_zZ)$$

实际上Pauli算符X，Y，Z相互之间有如下关系：

$$XY = iZ \Rightarrow (-iX)(-iY) = -iZ$$

将$-iX$，$-iY$，$-iZ$视为四元数的 i，j，k，则：

$$\cos\frac{\theta}{2} + n_x\sin\frac{\theta}{2}i + n_y\sin\frac{\theta}{2}j + n_z\sin\frac{\theta}{2}k = e^{\frac{\theta}{2}\vec{n}}$$

其中：

$$\vec{n}\big|_{\text{向量}}(-i\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -iX \\ -iY \\ -iZ \end{bmatrix} = n_xi + n_yj + n_zk = \vec{n}\big|_{\text{四元数}}$$

所以量子态的旋转和三维旋转虽不一样，但还是可以用四元数表示。