

NIS2312-1 Spring 2021-2022

信息安全的数学基础 (1)

Assignment 5

2022 年 3 月 23 日

在这个练习中, 默认 G 是一个群, H 和 K 是 G 的子群.

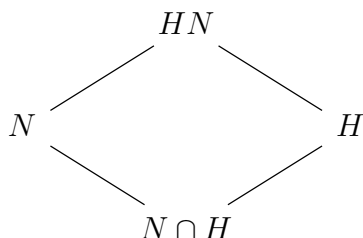
Problem 1

对任意 $n \in \mathbf{Z}^+$, 证明 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}_n$.

Problem 2

第二同构定理: 给定群 G 和其正规子群 N , 子群 H , 证明:

1. HN 是一个群且 $N \triangleleft HN$
2. $N \cap H$ 是 H 的正规子群;
3. 有群同构: $H/(N \cap H) \cong HN/N$.



Problem 3

假设 $C \triangleleft A$ 并且 $D \triangleleft B$, 证明: $C \times D \triangleleft A \times B$ 和 $(A \times B)/(C \times D) \cong (A/C) \times (B/D)$ (直积保持正规性).

Problem 4

在 $\mathbf{Z}_{40} \oplus \mathbf{Z}_{30}$ 中, 给出两个阶等于 12 的子群.

Problem 5

假设 $G = H_1 H_2 \cdots H_n$, 且 $H_i \triangleleft G$. 证明下面的条件是等价的:

1. G 是 H_i 的内直积;
2. $H_1 H_2 \cdots H_{i-1} \cap H_i = \{e\}$, $\forall i = 2, 3, \dots, n$;
3. $H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n \cap H_i = \{e\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.