Лабораторная работа №2

Статистическая проверка гипотез

1. Цель работы

Освоение методов статистической проверки гипотез о равенстве математических ожиданий в ***Пакете анализа*** *Microsoft Excel*.

2. Общие сведения

Проверяемую гипотезу обычно называют нулевой (или основной) и обозначают H_0. Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают альтернативную, или конкурирующую, гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Например, σэ – σт = 0. Принятие H_1 свидетельствует о наличии различий. Например, σэ – σт ≠ 0.

Правило, по которому гипотеза H_0 отвергается или принимается, называется **статистическим критерием** или **статистическим тестом**.

При проверке гипотезы, т.к. все данные у нас имеют вероятностную природу, неизбежны ошибки. При проверке гипотез возможны ошибки двух родов:

1 рода. в результате статистической проверке нулевая гипотеза (H_0) отклоняется, но на самом деле она верна;

2 рода. когда нулевая гипотеза (H_0) не отклоняется, но на самом деле верна альтернативная гипотеза (H_1).

Ошибки тесно связаны с понятием уровня статистической значимости. Уровень значимости – это вероятность ошибки первого рода при принятии решения. Для обозначения уровня значимости используют α = 0,05; α = 0,01; α = 0,001. Вероятность ошибки (α) показывает процент ошибки, допустимый при статистическом исследовании.

В науке приняты следующие уровни значимости:

α <0,01 – высокозначимый уровень

α <0,05 – значимый уровень

0,05< α <0,1 – не значимо, но есть тенденция (квазизначимый уровень)

Например, в группе из 100 учеников проводилось исследование по уровню утомляемости в начале учебного года и в конце учебного года. Была принята H_0, заключающееся в том, что существенных различий между уровнем утомляемости в начале года и в конце года нет (с уровнем значимости 0,05). Это означает, что различия могут быть только в пяти процентах от общего количества испытуемых, т.е. различия могут наблюдаться у пяти детей из этих ста.

Этапы принятия статистического решения

1. Формулировка H_0 и H_1.

2. Определение объема выборки.

3. Выбор соответствующего уровня значимости ($\approx$ 0,05, 0,01, 0,001).

4. Выбор статистического метода (критерия), который зависит от типа решаемой психологической задачи.

5. Вычисление соответствующего эмпирического значения по экспериментальным данным, согласно выбранному статистическому методу (критерию).

6. Нахождение по таблице для выбранного статистического метода критических значений, соответствующих уровню значимости $\alpha = 0,05$ и $\alpha =0,01$ или уровень допустимого значения $\beta = 0,95$, $\beta = 0,99$.

7. Построение оси значимости и нанесение на нее табличных критических значений и эмпирических значений измеряемой величины.

8. Формулировка принятия решения (принятие гипотезы).

Уровень значимости прямо зависит от того, каким числом степеней свободы обладает данный коэффициент или параметр. Число независимых величин, участвующих в образовании того или другого параметра, называется числом степеней свободы этого параметра. Оно равно общему числу величин, по которым вычисляется параметр, минус число условий, связывающих эти величины. Число степеней свободы и способы его определения всегда даются в окончательных формулах, которыми пользуется исследователь при статистической обработке своих материалов.

2.1 Двухвыборочный z-тест для средних

Это средство применяется для проверки гипотезы о равенстве (неравенстве) математических ожиданий двух независимых генеральных совокупностей (большие независимые выборки), имеющих нормальное распределение, при известных дисперсиях этих распределений. Пусть имеются две независимые выборки x_1, x_2, ..., x_n и y_1, y_2, ... y_m объемом соответственно *n и m,* извлеченные из совокупностей, имеющих нормальные распределения с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и неизвестными математическими ожиданиями соответственно μ_1 и μ_2. Проверяется нулевая гипотеза H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (δ задано). Z-тест позволяет проверить гипотезу H_o против разных конкурирующих гипотез: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 + \delta$ или H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$, либо H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$. Критериальная статистика вычисляется по формуле

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}},$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние соответственно первой и второй выборок.

Для выборок из нормально распределенных генеральных совокупностей критериальная статистика z имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому при заданном уровне значимости α критическая область строится на основе стандартного нормального распределения — вычисляется квантиль ***t*** порядка (1 — α) для проверки гипотезы о равенстве, либо квантиль ***t*** порядка (1 - α/2) для проверки гипотез неравенства. Нулевая гипотеза о равенстве принимается, если $|z| < t$ (в противном случае отвергается); гипотеза H_o при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$ принимается, если $z < t$; и при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ нулевая гипотеза принимается при выполнении неравенства $z > -t$.

Рассмотрим пример. Имеется две выборки[1] объемом соответственно 50 и 20 значений, показанные на рис. 2.1. Обе имеют нормальное распределение, первая — стандартное (т.е. $\mu_1 = 0$ и $\sigma_1^2 = 1$), а для второй $\mu_2 = 1$ и $\sigma_2^2=2$. Проверим с помощью средства ***Двухвыборочныи z-тест для средних*** нулевую гипотезу, что $\mu_2 — \mu_1 = 1{,}5$ для разных случаев конкурирующих гипотез. Заполненное диалоговое окно для этого примера также показано на рис.2.1а.

[1] Выборки получены с помощью средства ***Генерация случайных чисел***

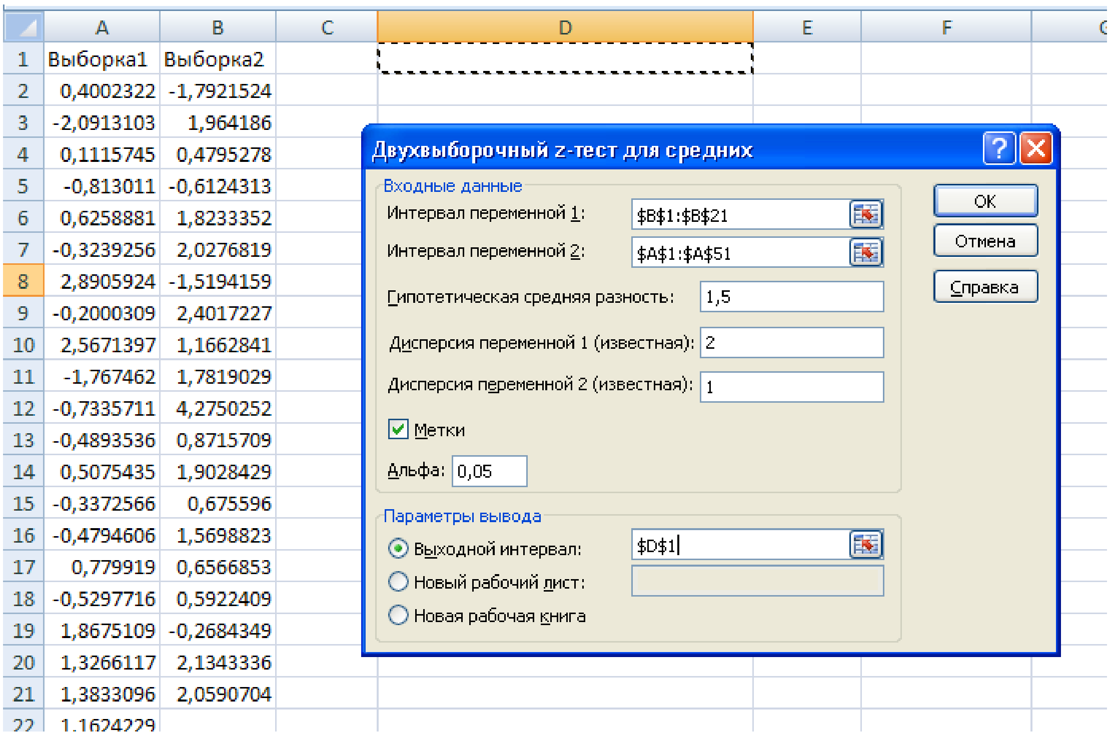
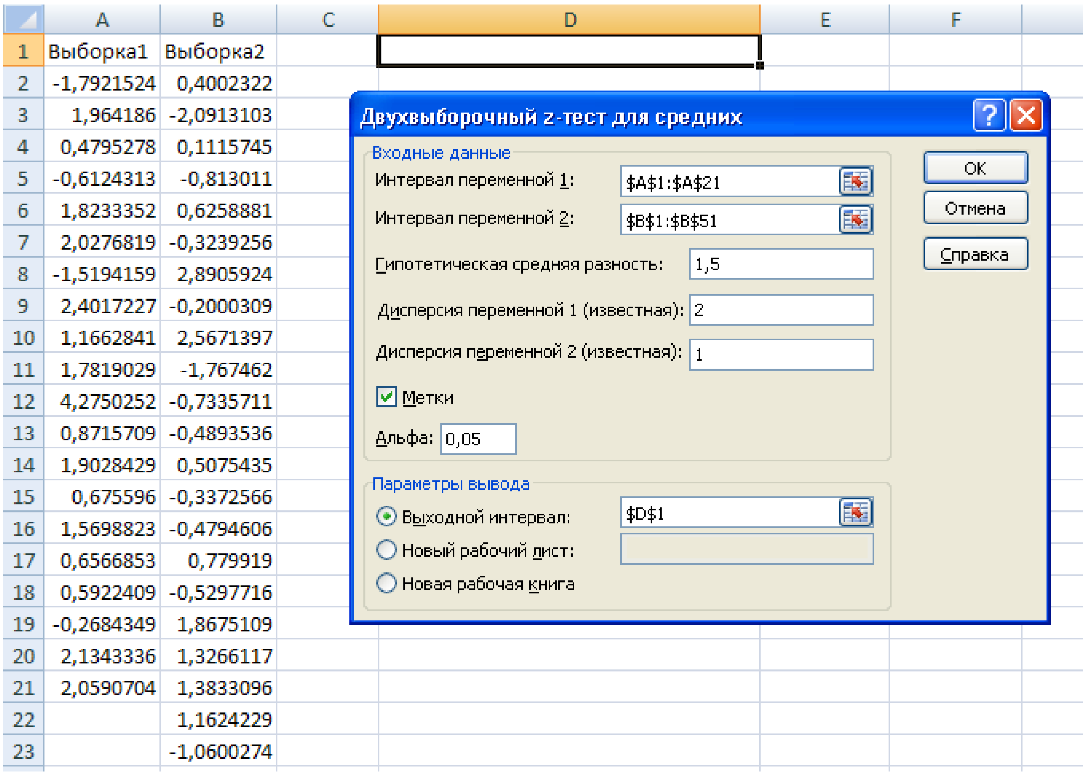


Рис.2.1а Исходные данные и диалоговое окно ***Двухвыборочныи z-тест для средних***

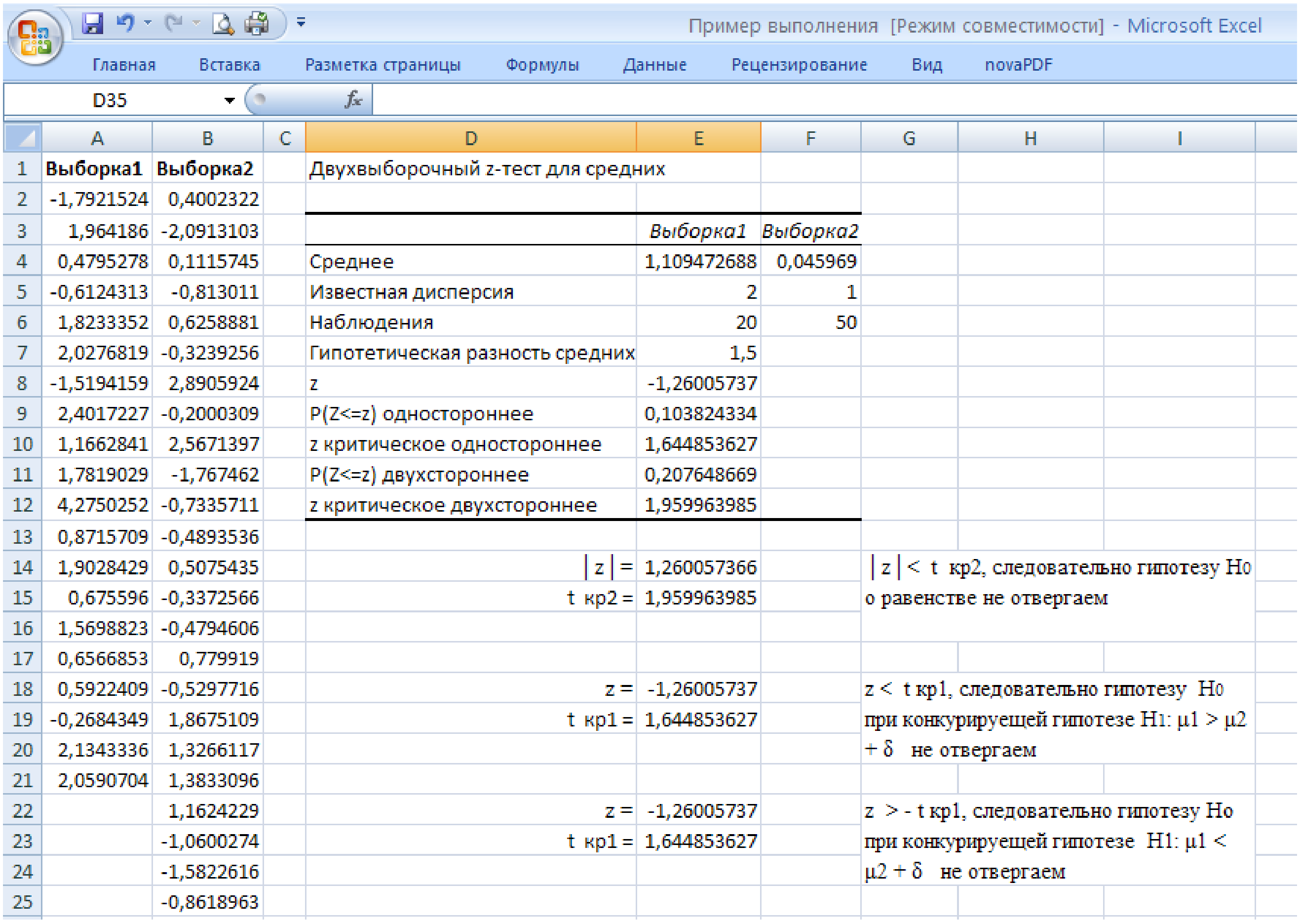
Отметим, что средство требует, чтобы δ, значение которого задается в поле ***Гипотетическая средняя разность***, было неотрицательно. Поэтому первым (в поле ввода ***Интервал переменной 1***) задается адрес диапазона ячеек, содержащий выборку с большим математическим ожиданием, а затем в поле ***Интервал переменной 2*** указывается адрес второй выборки. В полях ввода ***Дисперсия переменной 1*** и ***Дисперсия переменной 2*** вводятся значения дисперсий соответственно первой и второй выборок. В поле ***Альфа*** вводится значение уровня значимости α.

Для удобства анализа результатов сформируем исходные данные таким образом, чтобы выборка с большим математическим ожиданием расположилась в первом столбце. В нашем примере необходимо поменяем местами исходные выборки. Итак, имеем две выборки объемом соответственно 20 и 50 значений, показанные на рис. 2.1б. Обе имеют нормальное распределение, параметры первой — $\mu_2 = 1$ и $\sigma_2^2=2$; вторая имеет стандартное распределение (т.е. $\mu_1 = 0$ и $\sigma_1^2= 1$). Проверим с помощью средства ***Двухвыборочныи z-тест для средних*** нулевую гипотезу, что $\mu_1 — \mu_2 =1{,}5$ для разных случаев конкурирующих гипотез. Заполненное диалоговое окно для этого примера также показано на рис.2.1б. Результат вычислений средства ***Двухвыборочный z-тест для средних*** показан на рис.2.2.



	A	B
1	Выборка1	Выборка2
2	-1,7921524	0,4002322
3	1,964186	-2,0913103
4	0,4795278	0,1115745
5	-0,6124313	-0,813011
6	1,8233352	0,6258881
7	2,0276819	-0,3239256
8	-1,5194159	2,8905924
9	2,4017227	-0,2000309
10	1,1662841	2,5671397
11	1,7819029	-1,767462
12	4,2750252	-0,7335711
13	0,8715709	-0,4893536
14	1,9028429	0,5075435
15	0,675596	-0,3372566
16	1,5698823	-0,4794606
17	0,6566853	0,779919
18	0,5922409	-0,5297716
19	-0,2684349	1,8675109
20	2,1343336	1,3266117
21	2,0590704	1,3833096
22		1,1624229
23		-1,0600274

*Рис.2.1б Исходные данные и диалоговое окно **Двухвыборочныи z-тест для средних***



	A	B	C	D	E	F	G
1	Выборка1	Выборка2		Двухвыборочный z-тест для средних			
2	-1,7921524	0,4002322					
3	1,964186	-2,0913103			Выборка1	Выборка2	
4	0,4795278	0,1115745		Среднее	1,109472688	0,045969	
5	-0,6124313	-0,813011		Известная дисперсия	2	1	
6	1,8233352	0,6258881		Наблюдения	20	50	
7	2,0276819	-0,3239256		Гипотетическая разность средних	1,5		
8	-1,5194159	2,8905924		z	-1,26005737		
9	2,4017227	-0,2000309		P(Z<=z) одностороннее	0,103824334		
10	1,1662841	2,5671397		z критическое одностороннее	1,644853627		
11	1,7819029	-1,767462		P(Z<=z) двухстороннее	0,207648669		
12	4,2750252	-0,7335711		z критическое двухстороннее	1,959963985		
13	0,8715709	-0,4893536					
14	1,9028429	0,5075435		|z| =	1,260057366		|z| < t кр2, следовательно гипотезу Ho
15	0,675596	-0,3372566		t кр2 =	1,959963985		о равенстве не отвергаем
16	1,5698823	-0,4794606					
17	0,6566853	0,779919					
18	0,5922409	-0,5297716		z =	-1,26005737		z < t кр1, следовательно гипотезу Ho
19	-0,2684349	1,8675109		t кр1 =	1,644853627		при конкурирующей гипотезе H1: μ1 > μ2
20	2,1343336	1,3266117					+ δ не отвергаем
21	2,0590704	1,3833096					
22		1,1624229		z =	-1,26005737		z > - t кр1, следовательно гипотезу Ho
23		-1,0600274		t кр1 =	1,644853627		при конкурирующей гипотезе H1: μ1 <
24		-1,5822616					μ2 + δ не отвергаем
25		-0,8618963					

Рис.2.2. Результат вычислений

В итоговой таблице приводятся следующие данные:

- ***Среднее*** — выборочные средние выборок.
- ***Известная дисперсия*** — дисперсии выборок, которые указаны в диалоговом окне.
- ***Наблюдения*** — объемы выборок.
- ***Гипотетическая разность средних*** — значение δ, которое задано в диалоговом окне.
- ***z*** — значение критериальной статистики.
- ***P(Z<=z) одностороннее*** — вероятность $P(X \le z)$, где X — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, z — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***z критическое одностороннее*** — значение квантиля порядка (1 - α/2).
- ***P(Z<=z) двухстороннее*** — вероятность $P(|X| \le |z|)$, где X — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, z — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***z критическое двухстороннее*** — значение квантиля порядка (1 - α).

Как видно из результатов расчета, в данном примере нет оснований отвергать нулевую гипотезу при любых конкурирующих гипотезах.

Статистическая функция ***ZТЕСТ*** вычисляет вероятность ***P(Z ≤ z) двухстороннее***.

2.2. Двухвыборочныи t-тест с одинаковыми дисперсиями (тест Стьюдента)

Это средство реализует критерий проверки гипотезы о равенстве (неравенстве) математических ожиданий распределений двух независимых генеральных совокупностей (малые независимые выборки), имеющих нормальные распределения с неизвестными дисперсиями в предположении, что дисперсии равны. Этот критерий, называется *t*-тестом или тестом Стьюдента.

Рассмотрим выходные данные, вычисляемые этим средством, на примере проверки нулевой гипотезы H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (δ задано) против разных конкурирующих гипотез: H_1: $\mu_1 \ne \mu_2 + \delta$ или H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$, либо H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ (μ_1 и μ_2— неизвестные математические ожидания выборок). Исходные данные и заполненное диалоговое окно ***Двухвыборочныи t-тест с одинаковыми дисперсиями*** показаны на рис.23а. Выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей с одной и той же дисперсией, равной 1, и математическими ожиданиями 0 и 1 соответственно[2]. Проверим гипотезу, что $\mu_1 - \mu_2 = 2$ (на самом деле $\mu_1 - \mu_2 = 1$).

[2] Выборки получены с помощью средства ***Генерация случайных чисел***

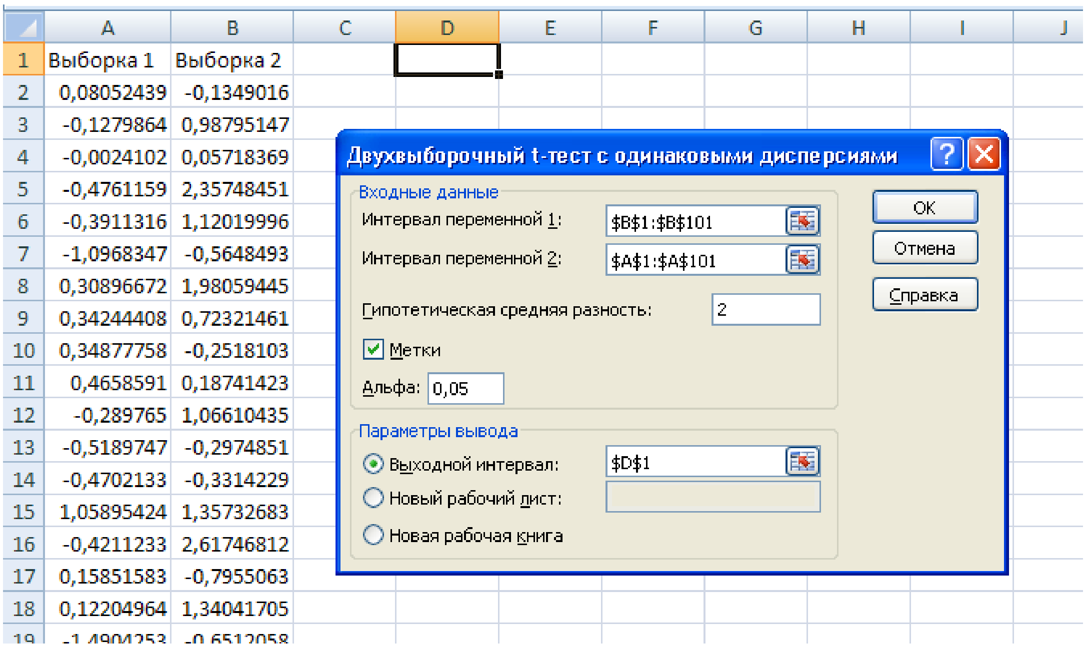
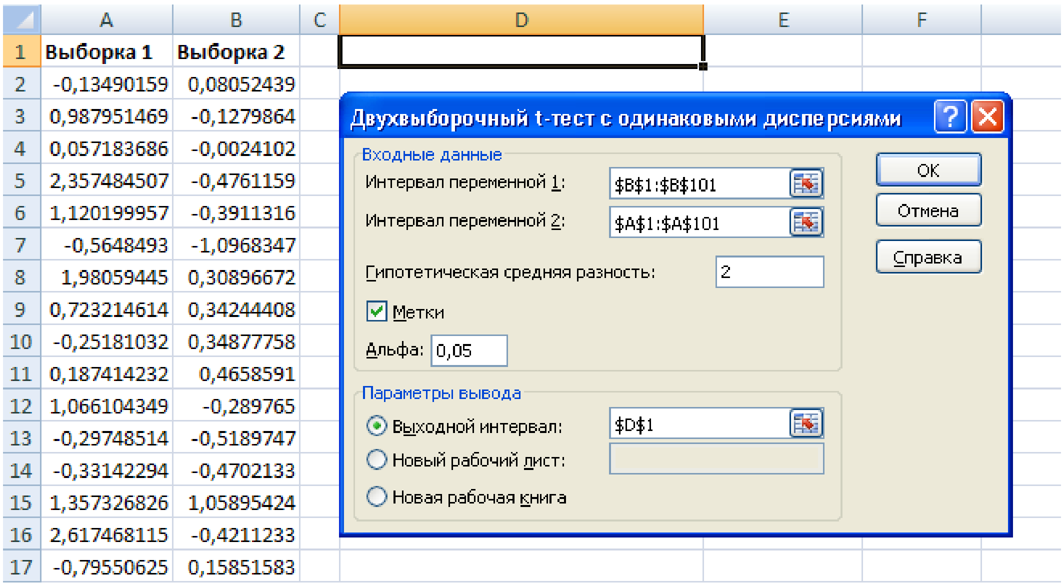


Рис. 2.3а. Исходные данные и диалоговое окно ***Двухвыборочныи t-тест с одинаковыми дисперсиями***

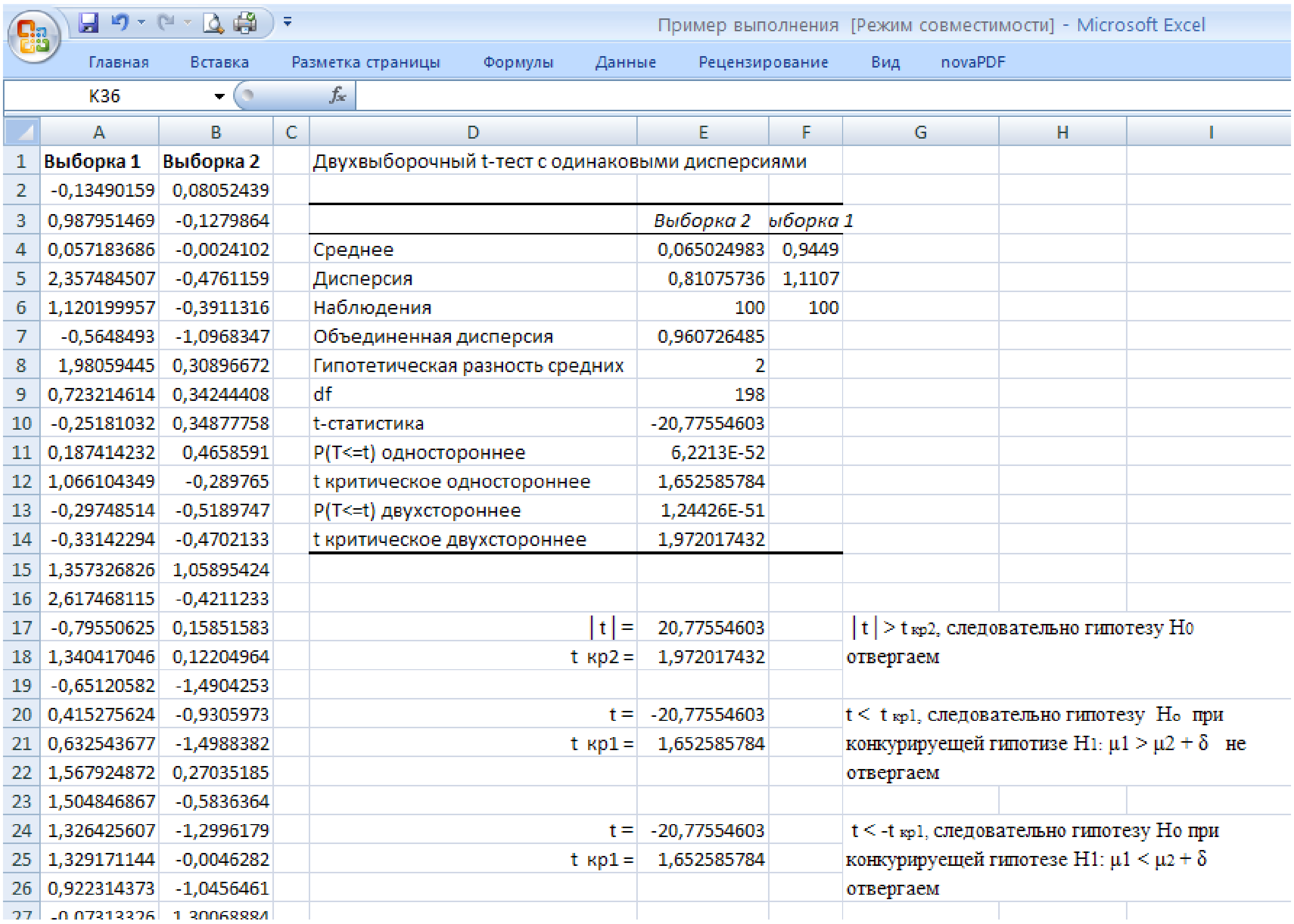
Отметим, что средство требует, чтобы δ, значение которого задается в поле ***Гипотетическая средняя разность***, было неотрицательно. Поэтому первым (в поле ввода ***Интервал переменной 1***) задается адрес диапазона ячеек, содержащий выборку с большим математическим ожиданием, а затем в поле ***Интервал переменной 2*** указывается адрес второй выборки. (Диапазоны должны состоять из одного столбца или одной строки.) В поле ***Альфа*** вводится значение уровня значимости α.

Для удобства анализа результатов сформируем исходные данные таким образом, чтобы выборка с большим математическим ожиданием расположилась в первом столбце. В нашем примере необходимо поменяем местами исходные выборки. Итак, имеем две выборки объемом по 100 значений каждая, показанные на рис. 2.3б. Выборки имеют одинаковую дисперсию, равную 1, и математическими ожиданиями 1 и 0 соответственно. Результат вычислений средства ***Двухвыборочныи t-тест с одинаковыми дисперсиями*** показан на рис.2.4.



	A	B
1	Выборка 1	Выборка 2
2	-0,13490159	0,08052439
3	0,987951469	-0,1279864
4	0,057183686	-0,0024102
5	2,357484507	-0,4761159
6	1,120199957	-0,3911316
7	-0,5648493	-1,0968347
8	1,98059445	0,30896672
9	0,723214614	0,34244408
10	-0,25181032	0,34877758
11	0,187414232	0,4658591
12	1,066104349	-0,289765
13	-0,29748514	-0,5189747
14	-0,33142294	-0,4702133
15	1,357326826	1,05895424
16	2,617468115	-0,4211233
17	-0,79550625	0,15851583

*Рис. 2.3б. Исходные данные и диалоговое окно **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями***



	A	B	C	D	E	F	G
1	Выборка 1	Выборка 2		Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями			
2	-0,13490159	0,08052439					
3	0,987951469	-0,1279864			Выборка 2	ыборка 1	
4	0,057183686	-0,0024102		Среднее	0,065024983	0,9449	
5	2,357484507	-0,4761159		Дисперсия	0,81075736	1,1107	
6	1,120199957	-0,3911316		Наблюдения	100	100	
7	-0,5648493	-1,0968347		Объединенная дисперсия	0,960726485		
8	1,98059445	0,30896672		Гипотетическая разность средних	2		
9	0,723214614	0,34244408		df	198		
10	-0,25181032	0,34877758		t-статистика	-20,77554603		
11	0,187414232	0,4658591		P(T<=t) одностороннее	6,2213E-52		
12	1,066104349	-0,289765		t критическое одностороннее	1,652585784		
13	-0,29748514	-0,5189747		P(T<=t) двухстороннее	1,24426E-51		
14	-0,33142294	-0,4702133		t критическое двухстороннее	1,972017432		
15	1,357326826	1,05895424					
16	2,617468115	-0,4211233					
17	-0,79550625	0,15851583		|t| =	20,77554603		|t| > t кр2, следовательно гипотезу H0
18	1,340417046	0,12204964		t кр2 =	1,972017432		отвергаем
19	-0,65120582	-1,4904253					
20	0,415275624	-0,9305973		t =	-20,77554603		t < t кр1, следовательно гипотезу Но при
21	0,632543677	-1,4988382		t кр1 =	1,652585784		конкурирующей гипотизе H1: μ1 > μ2 + δ не
22	1,567924872	0,27035185					отвергаем
23	1,504846867	-0,5836364					
24	1,326425607	-1,2996179		t =	-20,77554603		t < -t кр1, следовательно гипотезу Но при
25	1,329171144	-0,0046282		t кр1 =	1,652585784		конкурирующей гипотезе H1: μ1 < μ2 + δ
26	0,922314373	-1,0456461					отвергаем

Рис.2.4. Результат вычислений

В итоговой таблице приводятся следующие данные.

- ***Среднее*** — выборочные средние для каждой выборки.
- ***Дисперсия*** — несмещенные выборочные оценки дисперсий выборок.

- ***Наблюдения*** — объемы выборок.
- ***Гипотетическая разность средних*** — значение δ, которое задано в диалоговом окне.
- ***Объединенная дисперсия*** — "средняя" оценка дисперсии; рассчитывается по формуле

  $s^2 = \dfrac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m+2}$, где n и m — объемы выборок, s_i^2 — оценки дисперсий (их значения приводятся в строке ***Дисперсия***).
- ***df*** — число степеней свободы; вычисляется как $(n + m - 2)$.
- ***t-статистика*** — значение критериальной статистики; вычисляется по формуле

  $t = \dfrac{\sqrt{n+m-2}(\bar{x}-\bar{y}-\delta)}{\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}\sqrt{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}}$, имеет распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы.
- ***P(T<=t) одностороннее*** — вероятность $P(X \le t)$, где ***X*** — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы, ***t*** — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***t критическое одностороннее*** — значение квантиля $t_{кр1}$ порядка (1 – α) распределения Стьюдента с ***df*** степенями свободы.
- ***P(T<=t) двухстороннее*** — вероятность $P(|X|<|t|)$, где ***X*** — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы, ***t*** — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***t критическое двухстороннее*** — значение квантиля $t_{кр2}$ порядка (1 - a/2) распределения Стьюдента с ***df*** степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ принимается, если $|t| < t_{кр2}$ (в противном случае отвергается); гипотеза H_o при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$ принимается, если $t < t_{кр1}$; при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ нулевая гипотеза принимается при выполнении неравенства
$t > -t_{кр1}$.

Как видно из результатов расчета, в данном примере нулевую гипотезу H_o: μ1 - μ2 = δ следует отвергнуть при конкурирующей гипотезе о неравенстве μ1 - μ2 ≠ δ и конкурирующей гипотезе H_1: μ1 < μ2 + δ. При конкурирующей гипотезе H_1: μ1 > μ2 + δ нулевую гипотезу H_o: μ1 - μ2 = δ нет оснований отвергать.

Статистическая функция ***ТТЕСТ*** при значении аргумента ***Тип*** = 2 вычисляет вероятности ***P(T<=t) двухстороннее*** и ***P(T<=t) одностороннее***.

2.3. Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями

Это средство реализует критерий проверки гипотезы о равенстве (неравенстве) математических ожиданий распределений двух независимых генеральных совокупностей, имеющих нормальные распределения с неизвестными и различными дисперсиями. Этот критерий также называется f-тестом или тестом Стьюдента для неравных дисперсий, либо критерием Фишера-Беренса.

Рассмотрим выходные данные, вычисляемые этим средством, на примере проверки нулевой гипотезы H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (δ задано) против разных конкурирующих гипотез: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 + \delta$ или H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$, либо H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ (μ_1 и μ_2— неизвестные математические ожидания выборок). Повторим тест на примере данных из предыдущего раздела, т.е. выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей с одной и той же дисперсией, равной 1, и математическими ожиданиями соответственно 0 и 1. Проверим гипотезу, что $\mu_1 - \mu_2 = 2$ (на самом деле $\mu_1 - \mu_2 = 1$). Исходные данные и заполненное диалоговое окно ***Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями*** показаны на рис. 2.5.

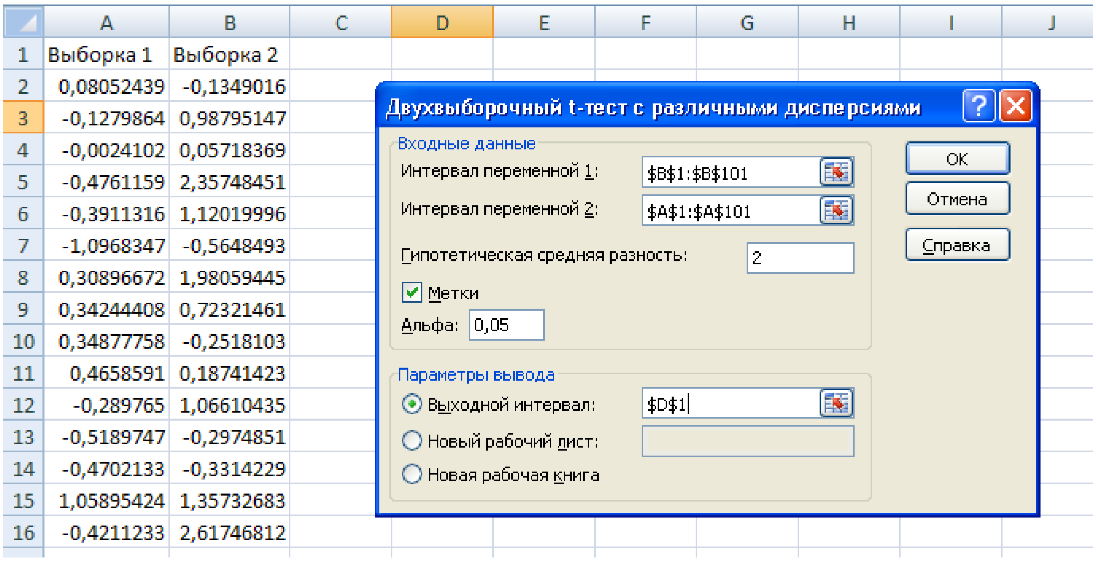


Рис.2.5 Исходные данные и диалоговое окно ***Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями***

Отметим, что средство требует, чтобы δ, значение которого задается в поле ***Гипотетическая средняя разность***, было неотрицательно. Поэтому первым (в поле ввода ***Интервал переменной 1***) задается адрес диапазона ячеек, содержащий выборку с большим математическим ожиданием, а затем в поле Интервал переменной 2 указывается адрес второй выборки. (Диапазоны должны состоять из одного столбца или одной строки.) В поле ***Альфа*** вводится значение уровня значимости α. Результат вычислений средства ***Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями*** показан на рис.2.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Выборка 1	Выборка 2		Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями			
2	0,08052439	-0,1349016					
3	-0,1279864	0,98795147			Выборка 2	Выборка 1	
4	-0,0024102	0,05718369		Среднее	0,944858132	0,065024983	
5	-0,4761159	2,35748451		Дисперсия	1,110695611	0,81075736	
6	-0,3911316	1,12019996		Наблюдения	100	100	
7	-1,0968347	-0,5648493		Гипотетическая разность средних	2		
8	0,30896672	1,98059445		df	193		
9	0,34244408	0,72321461		t-статистика	-8,0810508		
10	0,34877758	-0,2518103		P(T<=t) одностороннее	3,43194E-14		
11	0,4658591	0,18741423		t критическое одностороннее	1,652787069		
12	-0,289765	1,06610435		P(T<=t) двухстороннее	6,86389E-14		
13	-0,5189747	-0,2974851		t критическое двухстороннее	1,972331631		
14	-0,4702133	-0,3314229					
15	1,05895424	1,35732683					
16	-0,4211233	2,61746812					
17	0,15851583	-0,7955063		|t| =	8,081050801		|t| > t кр2, следовательно
18	0,12204964	1,34041705		t кр2 =	1,972331631		гипотезу H0 отвергаем
19	-1,4904253	-0,6512058					
20	-0,9305973	0,41527562		t =	-8,0810508		t < t кр1, следовательно гипотезу H0
21	-1,4988382	0,63254368		t кр1 =	1,652787069		при конкурирующей гипотизе H1: μ1 >
22	0,27035185	1,56792487					μ2 + δ не отвергаем
23	-0,5836364	1,50484687					
24	-1,2996179	1,32642561		t =	-8,0810508		t < -t кр1, следовательно гипотезу H0
25	-0,0046282	1,32917114		t кр1 =	1,652787069		при конкурирующей гипотезе H1: μ1 <
26	-1,0456461	0,92231437					μ2 + δ отвергаем
27	1,30068884	-0,0731333					
28	-0,746245	2,17103582					
29	1,11859208	2,28132569					
30	-0,1357034	-0,0861481					
31	0,49868731	-1,1745473					

Рис.2.6. Результат вычислений

В итоговой таблице приводятся следующие данные.

- ***Среднее*** — выборочные средние для каждой выборки.
- ***Дисперсия*** — несмещенные выборочные оценки дисперсий выборок.
- ***Наблюдения*** — объемы выборок.
- ***Гипотетическая разность средних*** — значение δ, которое задано в диалоговом окне.
- ***df*** — число степеней свободы; вычисляется по формуле $\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n\right)^2}{n-1}+\dfrac{\left(s_2^2/m\right)^2}{m-1}}$, где

  s_1^2 и s_2^2 — несмещенные оценки дисперсий (их значения приводятся в строке ***Дисперсия***),

  n и m — объемы соответственно первой и второй выборок.
- ***t-статистика*** — значение критериальной статистики; вычисляется по формуле $t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$, имеет распределение, близкое к распределению Стьюдента с ***df*** степенями свободы.
- ***P(T<=t) одностороннее*** — вероятность *P(X≤t)*, где X — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы, ***t*** — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***t критическое одностороннее*** — значение квантиля $t_{кр1}$ порядка (1 - α) распределения Стьюдента с ***df*** степенями свободы.

- ***P(T<=t) двухстороннее*** — вероятность $P(|X|\leq|t|)$, где X — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы, ***t*** — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***t критическое двухстороннее*** — значение квантиля $t_{кр2}$ порядка (1 - α/2) распределения Стьюдента с ***df*** степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ принимается, если $|t| < t_{кр2}$, (в противном случае отвергается); гипотеза H_o при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$ принимается, если $t < t_{кр1}$, при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ нулевая гипотеза принимается при выполнении неравенства $t > -t_{кр1}$.

Как видно из результатов расчета, в данном примере нулевую гипотезу H_o: $\mu1 - \mu2 = \delta$ следует отвергнуть при конкурирующей гипотезе о неравенстве $\mu1 - \mu2 \neq \delta$ и конкурирующей гипотезе H_1: $\mu1 < \mu2 + \delta$. При конкурирующей гипотезе H_1: $\mu1 > \mu2 + \delta$ нулевую гипотезу H_o: $\mu1 - \mu2 = \delta$ нет оснований отвергать.

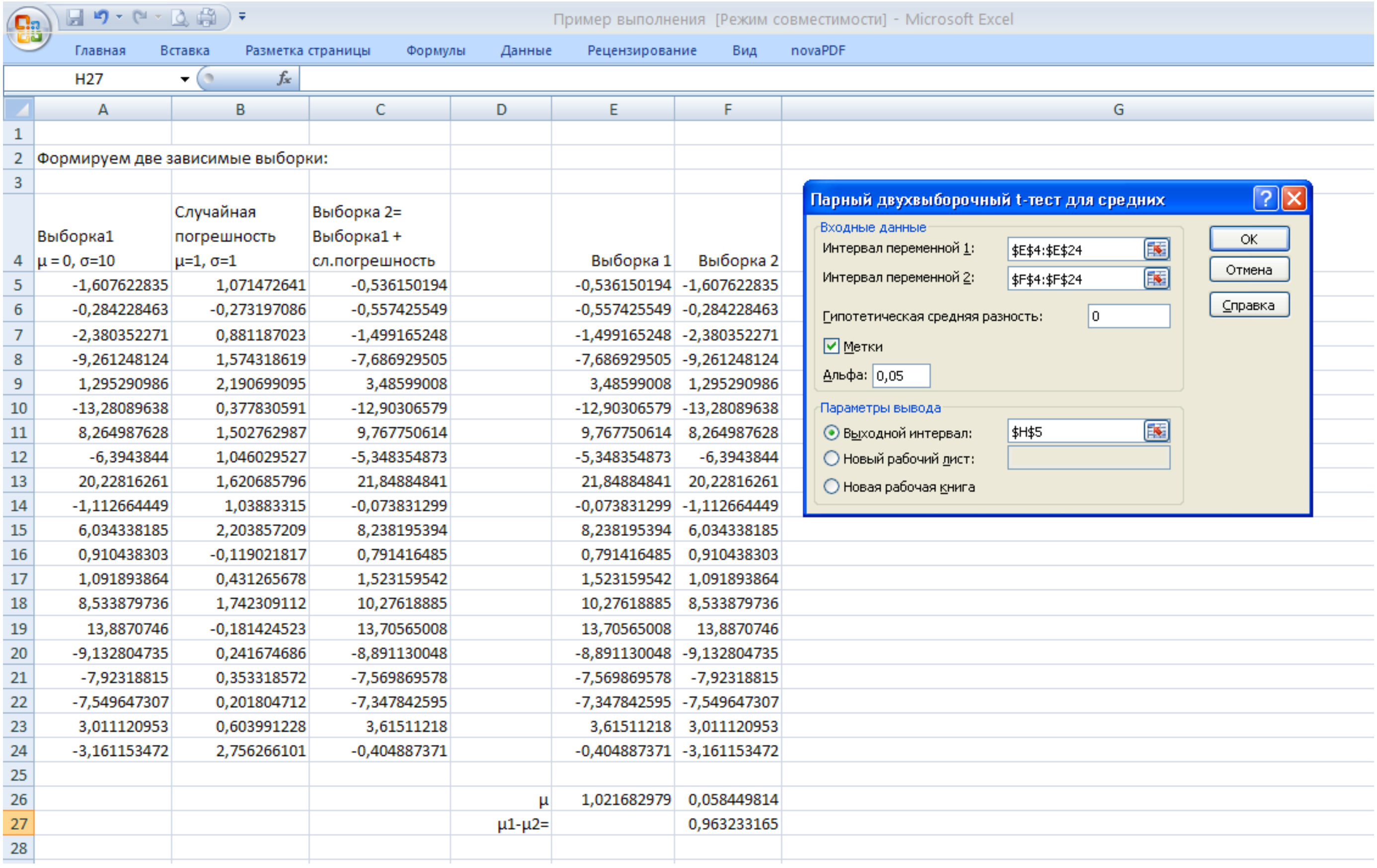
Статистическая функция ***ТТЕСТ*** при значении аргумента ***Тип = 3*** вычисляет вероятности ***P(T<=t) двухстороннее*** и ***P(T<=t) одностороннее***.

2.4. Парный двухвыборочный t-тест для средних (тест Стьюдента для парных наблюдений)

Это средство реализует критерий проверки гипотезы о равенстве (неравенстве) математических ожиданий распределений двух зависимых выборок, имеющих нормальные распределения. Этот критерий также называется *t*-тестом или тестом Стьюдента для парных наблюдений.

Рассмотрим выходные данные, вычисляемые этим средством, на примере проверки нулевой гипотезы H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (δ задано) против разных конкурирующих гипотез: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 + \delta$ или H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$, либо H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ (μ_1 и μ_2— неизвестные математические ожидания выборок). Рассмотрим пример, когда выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей с математическими ожиданиями соответственно 1 и 0.

Проверим гипотезу, что: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (на самом деле $\mu_1 - \mu_2 = 1$). Исходные данные и заполненное диалоговое окно ***Парный двухвыборочныи t-тест для средних*** показаны на рис. 2.7.



	A	B	C	D	E	F
1						
2	Формируем две зависимые выборки:					
3						
4	Выборка1 μ = 0, σ=10	Случайная погрешность μ=1, σ=1	Выборка 2= Выборка1 + сл.погрешность		Выборка 1	Выборка 2
5	-1,607622835	1,071472641	-0,536150194		-0,536150194	-1,607622835
6	-0,284228463	-0,273197086	-0,557425549		-0,557425549	-0,284228463
7	-2,380352271	0,881187023	-1,499165248		-1,499165248	-2,380352271
8	-9,261248124	1,574318619	-7,686929505		-7,686929505	-9,261248124
9	1,295290986	2,190699095	3,48599008		3,48599008	1,295290986
10	-13,28089638	0,377830591	-12,90306579		-12,90306579	-13,28089638
11	8,264987628	1,502762987	9,767750614		9,767750614	8,264987628
12	-6,3943844	1,046029527	-5,348354873		-5,348354873	-6,3943844
13	20,22816261	1,620685796	21,84884841		21,84884841	20,22816261
14	-1,112664449	1,03883315	-0,073831299		-0,073831299	-1,112664449
15	6,034338185	2,203857209	8,238195394		8,238195394	6,034338185
16	0,910438303	-0,119021817	0,791416485		0,791416485	0,910438303
17	1,091893864	0,431265678	1,523159542		1,523159542	1,091893864
18	8,533879736	1,742309112	10,27618885		10,27618885	8,533879736
19	13,8870746	-0,181424523	13,70565008		13,70565008	13,8870746
20	-9,132804735	0,241674686	-8,891130048		-8,891130048	-9,132804735
21	-7,92318815	0,353318572	-7,569869578		-7,569869578	-7,92318815
22	-7,549647307	0,201804712	-7,347842595		-7,347842595	-7,549647307
23	3,011120953	0,603991228	3,61511218		3,61511218	3,011120953
24	-3,161153472	2,756266101	-0,404887371		-0,404887371	-3,161153472
25						
26				μ	1,021682979	0,058449814
27				μ1-μ2=		0,963233165
28						

*Рис. 2.7. Исходные данные и диалоговое окно **Парный двухвыборочныи t-тест для средних***

Отметим, что средство требует, чтобы δ, значение которого задается в поле ***Гипотетическая средняя разность***, было неотрицательно. Поэтому первым (в поле ввода ***Интервал переменной 1***) задается адрес диапазона ячеек, содержащий выборку с большим математическим ожиданием, а затем в поле ***Интервал переменной 2*** указывается адрес второй выборки. (Диапазоны должны состоять из одного столбца или одной строки.) В поле ***Альфа*** вводится значение уровня значимости α. Результат вычислений средства ***Парный двухвыборочныи t-тест для средних*** показан на рис. 2.8.

	Выборка 1	Выборка 2
	-0,536150194	-1,607622835
	-0,557425549	-0,284228463
	-1,499165248	-2,380352271
	-7,686929505	-9,261248124
	3,48599008	1,295290986
	-12,90306579	-13,28089638
	9,767750614	8,264987628
	-5,348354873	-6,3943844
	21,84884841	20,22816261
	-0,073831299	-1,112664449
	8,238195394	6,034338185
	0,791416485	0,910438303
	1,523159542	1,091893864
	10,27618885	8,533879736
	13,70565008	13,8870746
	-8,891130048	-9,132804735
	-7,569869578	-7,92318815
	-7,347842595	-7,549647307
	3,61511218	3,011120953
	-0,404887371	-3,161153472
μ	1,021682979	0,058449814
μ1-μ2=		0,963233165

Парный двухвыборочный t-тест для средних

	Выборка 1	*Выборка 2*	
Среднее	1,021682979	0,058449814	
Дисперсия	73,10150276	69,37172144	
Наблюдения	20	20	
Корреляция Пирсона	0,995083187		
Гипотетическая разность средних	0		
df	19		
t-статистика	4,977091384		
P(T<=t) одностороннее	4,18371E-05		
t критическое одностороннее	1,729132792		
P(T<=t) двухстороннее	8,36741E-05		
t критическое двухстороннее	2,09302405		
|t| =	4,977091384		|t| > t кр2, следовательно
t кр2 =	2,09302405		гипотезу H0 отвергаем
t =	4,977091384		t > t кр1, следовательно гипотезу H0
t кр1 =	1,729132792		при конкурирующей гипотизе H1: μ1 > μ2 + δ отвергаем
t =	4,977091384		t > -t кр1, следовательно гипотезу H0
t кр1 =	1,729132792		при конкурирующей гипотезе H1: μ1 < μ2 + δ не отвергаем

Рис.2.8. Результат вычислений

В итоговой таблице приводятся следующие данные.

- ***Среднее*** — выборочные средние для каждой выборки.
- ***Дисперсия*** — несмещенные выборочные оценки дисперсий выборок.
- ***Наблюдения*** — объемы выборок.
- ***Корреляция Пирсона*** — выборочный коэффициент корреляции; вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}.$$

- ***Гипотетическая разность средних*** — значение δ, которое задано в диалоговом окне.
- ***df*** — число степеней свободы, равное $(n-1)$.
- ***t-статистика*** — значение критериальной статистики; вычисляется по формуле $t=\dfrac{\bar{d}-\delta}{S_n/\sqrt{n}}$, где

$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)$, $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i-\bar{d})^2$, и имеет распределение Стьюдента с ***df*** степенями свободы.

- ***P(T<=t) одностороннее*** — вероятность $P(X\le t)$, где X — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с *df* степенями свободы, t — подсчитанное значение критериальной статистики.

- ***t критическое одностороннее*** — значение квантиля $t_{кр1}$ порядка (1 – α) распределения Стьюдента с ***df*** степенями свободы.
- ***P(T<=t) двухстороннее*** — вероятность P(|X| ≤ |t|), где X — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с *df* степенями свободы, t — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***t критическое двухстороннее*** — значение квантиля $t_{кр2}$ порядка (1 - α/2) распределения Стьюдента с *df* степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_o: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ принимается, если $|t| < t_{кр2}$, (в противном случае отвергается); гипотеза H_o при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 > \mu_2 + \delta$ принимается, если $t < t_{кр1}$, при конкурирующей гипотезе H_1: $\mu_1 < \mu_2 + \delta$ нулевая гипотеза принимается при выполнении неравенства
$t > -t_{кр1}$.

Как видно из результатов расчета, в данном примере нулевую гипотезу H_o: μ1 - μ2 = δ следует отвергнуть при конкурирующей гипотезе о неравенстве μ1 - μ2 ≠ δ и конкурирующей гипотезе H_1: μ1 > μ2 + δ. При конкурирующей гипотезе H_1: μ1 < μ2 + δ нулевую гипотезу H_o: μ1 - μ2 = δ нет оснований отвергать.

Статистическая функция ***ТТЕСТ*** при значении аргумента ***Тип = 1*** вычисляет вероятности ***P(T<=t) двухстороннее*** и ***P(T<=t) одностороннее***.

2.5. Двухвыборочный F-тест для дисперсий

Это средство реализует критерий Фишера проверки равенства дисперсий двух независимых выборок из нормально распределенных генеральных совокупностей с дисперсиями соответственно σ_1^2 и σ_2^2. Рассмотрим выходные данные, вычисляемые этим средством, на примере проверки нулевой гипотезы H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Рассмотрим пример, когда выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей с равными дисперсиями 2. Исходные данные и заполненное диалоговое окно ***Двухвыборочный F-тест для дисперсий*** показаны на рис.2.9.

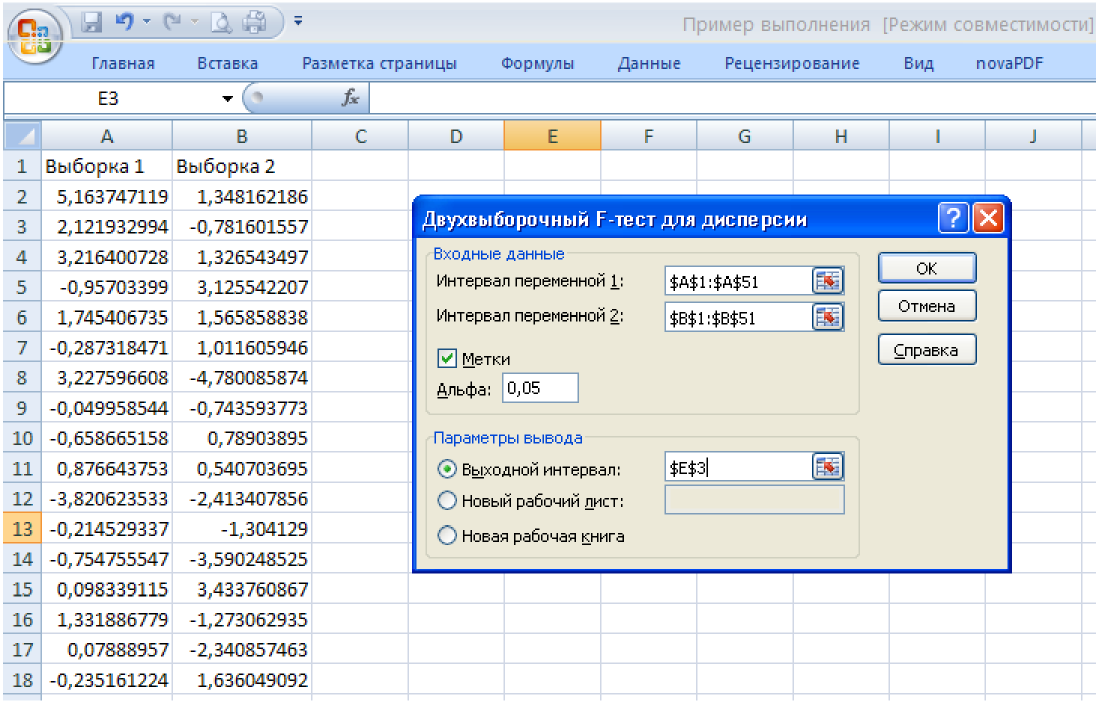


*Рис. 2.9. Исходные данные и диалоговое окно **Двухвыборочный F-тест для дисперсий***

Отметим, что первой (в поле ***Входной интервал 1***) должна задаваться выборка, имеющая большую дисперсию. В поле ***Альфа*** вводится значение уровня значимости α. Результат вычислений средства ***Двухвыборочный F-тест для дисперсий*** показан на рис. 3.1.

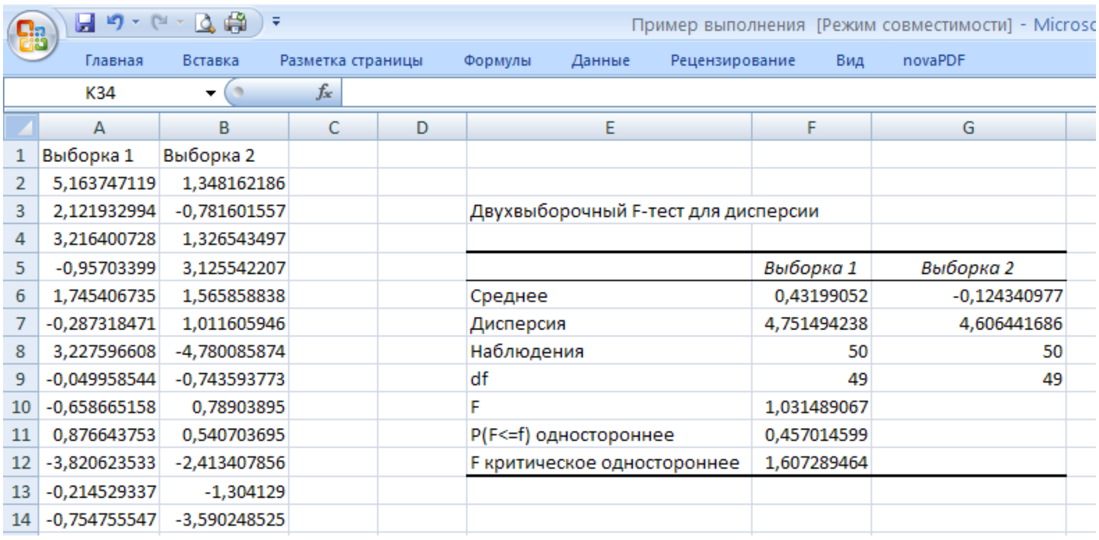


Рис.3.1 Результат вычислений

В итоговой таблице приводятся следующие данные.

- ***Среднее*** — выборочные средние для каждой выборки.
- ***Дисперсия*** — несмещенные выборочные оценки дисперсий выборок.
- ***Наблюдения*** — объемы выборок.

- ***df*** — числа степеней свободы, равные *(n - 1)* и *(m* – 1); *n* и *m* — объемы выборок.
- ***F*** — значение критериальной статистики, вычисляемой по формуле

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \text{ где } S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2,$$

и имеющей F-распределение со степенями свободы $k_1 = n - 1$ и $k_2 = m - 1$.

- ***P(*F<=f*) одностороннее*** — вероятность P(X ≤ F), где X — случайная величина, имеющая F-распределение с *df* степенями свободы, *F* — подсчитанное значение критериальной статистики.
- ***F критическое одностороннее*** — значение квантиля *t* порядка (1 – α) *F*-распределения с *df* степенями свободы.

Нулевая гипотеза H_o принимается, если $F < F_{кр1}$ (в противном случае отвергается). Как видно из результатов расчета, в данном примере нулевую гипотезу следует принять.

Статистическая функция ***ФТЕСТ*** вычисляет удвоенную вероятность ***P(*F<=f*) одностороннее***.

3. Задание к лабораторной работе

3.1 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел разной длины, имеющих нормальное распределение. С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Двухвыборочныи z-тест для средних*** нулевую гипотезу, что $\mu_2 - \mu_1$ = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

3.2 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел одинаковой длины, имеющих нормальное распределение, с одной и той же дисперсией. . С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Двухвыборочныи t-тест с одинаковыми дисперсиями*** нулевую гипотезу, что $\mu_1 - \mu_2$ = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

3.3 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел одинаковой длины, имеющих нормальное распределение и разные дисперсии. . С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями*** нулевую гипотезу, что $\mu_1 - \mu_2$ = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

3.4 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел одинаковой длины, имеющих нормальное распределение и разные дисперсии. С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Парный***

двухвыборочныи t-тест для средних нулевую гипотезу, что μ_1 - μ_2 = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

3.5 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел одинаковой длины, имеющих нормальное распределение и разные дисперсии. С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Двухвыборочный F-тест для дисперсий*** нулевую гипотезу, что μ_1 - μ_2 = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

3.6 Сгенерировать 2 выборки значений случайных чисел разной длины, имеющих нормальное распределение и разные дисперсии. С помощью средств **Пакета анализа** получить дисперсии и математические ожидания каждой выборки. Проверить с помощью средства ***Двухвыборочный F-тест для дисперсий*** нулевую гипотезу, что μ_1 - μ_2 = (произвольное число из [0,5; 50]) для разных случаев конкурирующих гипотез при α=0,05.

Сравнить результаты из п/п 3.5 и 3.6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе выполняется строго в соответствии с «Требованиями к отчету по лабораторным работам».

В части «Последовательность действий выполняемых по ходу лабораторной работы» отчет должен содержать последовательное описание шагов выполнения лабораторной работы согласно заданию (пункт 3) с приведением данных:

1. Для каждой выборки описать параметры, которые были заданы студентом.
2. Привести значения дисперсии и математические ожидания каждой выборки.
3. Для каждого п/п задания привести нулевую гипотезу, которая проверялась, и конкурирующие гипотезы. Указать в каких случаях нулевая гипотеза отвергается, а в каких – нет.
4. Для п/п 3.5 и 3.6 задания к лабораторной работе сравнить результаты полученные при разных условиях.

5. Контрольные вопросы

1. Что такое альтернативная или конкурирующая гипотеза?
2. Что называется статистическим критерием?
3. Дайте определение ошибок первого и второго рода.