Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Кафедра информационных систем
и программной инженерии

Методы и программные средства вычислений

Методические указания к лабораторным работам

Составитель:
С.Ю. КИРИЛЛОВА

Владимир, 2016

Лабораторная работа № 1
ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАШИННАЯ АРИФМЕТИКА

1. Цель работы

При численном решении математических и прикладных задач почти неизбежно появление на том или ином этапе их решения погрешностей следующих трех типов: 1) *погрешность задачи*; 2) *погрешность метода;* 3) *погрешность округлений* (погрешность действий). Все три описанных типа погрешностей в сумме дают *полную погрешность* результата решения задачи. В данной работе рассматриваются некоторые возможные подходы к учету погрешностей действий.

2. Основные сведения и примеры

Теоретический материал. Пусть a - точное значение, a^* - приближенное значение некоторой величины. *Абсолютной погрешностью* приближенного значения a^* называется величина $\Delta(a^*) = \left|a - a^*\right|$. *Относительной погрешностью* значения a^* (при $a \neq 0$) называется величина $\delta(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|}$. Так как значение a, как правило, не известно, чаще получают оценки погрешностей вида: $\left|a - a^*\right| \le \overline{\Delta}(a^*)$; $\dfrac{\left|a - a^*\right|}{|a|} \le \overline{\delta}(a^*)$. Величины $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\delta}(a^*)$ называют *верхними границами* (или просто *границами*) абсолютной и относительной погрешностей.

Значащую цифру числа a^* называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1.1. Вычислить абсолютную и относительную погрешности приближенного значения числа *e*.

Решение. Число *e* - трансцендентное число, представляется бесконечной непериодической дробью *e* = 2.71828. Приближенное значение числа $e^* = 2.7$. Граница абсолютной погрешности $|\ e - e^*\ | \le 0.019$, относительная погрешность числа

$$\delta(e^*) = \left|e - e^*\right| / \left|e^*\right|, \quad \delta(e^*) \le 0.007\,.$$

Пример 1.2. Определить значащие цифры числа.

Решение. Значащие цифры чисел подчеркнуты: 0.0<u>3589</u>, <u>10.4920</u>, 0.00<u>456200</u>.

Пример 1.3. Определить верные цифры числа.

Решение. Верные цифры числа a^* = 356.78245 подчеркнуты.

Если $\Delta\left(a^*\right)$=0.01, то верных цифр в числе 5: a = <u>356.78</u>245.

Если $\Delta\left(a^*\right)$=0.03, то верных цифр в числе 4: a = <u>356.7</u>8245.

Если $\Delta\left(a^*\right)$=0.00006, то верных цифр в числе 7: a = <u>356.7824</u>5.

Пример 1.4. Вычислить погрешности арифметических действий.

Решение. Приведем фрагменты документа MathCAD. Пусть числа x и y заданы с абсолютными погрешностями Δx и Δy:

x:=2.5378 Δx:=0.0001

y:=2.536 Δy:=0.001

Тогда относительные погрешности чисел:

$$\delta x := \frac{\Delta x}{|x|} \qquad \delta x = 3.94 \cdot 10^{-5} \qquad \delta y := \frac{\Delta y}{|y|} \qquad \delta y = 3.94 \cdot 10^{-4}$$

Найдем погрешности суммы и разности чисел:

S1 := x + y	ΔS1 := Δx + Δy	δS1 := ΔS1 / |S1|
S1 = 5.0738	$\Delta S1 = 1.1 \cdot 10^{-3}$	$\delta S1 = 2.17 \cdot 10^{-4}$
S2 := x - y	ΔS2 := Δx + Δy	δS2 := ΔS2 / |S2|
$S2 = 1.8 \cdot 10^{-3}$	$\Delta S2 = 1.1 \cdot 10^{-3}$	δS2 = 0.61
	$\delta S2 / \delta S1 = 2.8 \cdot 10^{3}$	

Относительная погрешность разности в 2000 раз больше относительной погрешности суммы!

Возьмем теперь другие значения x и y и вычислим погрешности произведения и частного:

x:=2.5378 Δx:=0.0001 $\delta x = 3.94 \cdot 10^{-5}$ y:=0.006 Δy:=0.001 δy = 0.17

Тогда погрешности произведения и частного:

S3 := x · y		S4 := x / y	
S3 = 0.015227		S4 = 422.966667	
δS3 := δx + δy	δS3 = 0.17	δS4 := δx + δy	δS4 = 0.17
ΔS3 := |S3|·δS3		ΔS4 := |S4|·δS4	
$\Delta S3 = 2.54 \cdot 10^{-3}$		ΔS4 = 70.51	
	$\Delta S4 / \Delta S3 = 2.8 \cdot 10^{4}$		

Абсолютная погрешность частного в 20000 раз больше абсолютной погрешности произведения!

Пример 1.5. Определить погрешность функции многих переменных.

Решение. Приведем фрагменты документа MathCAD:

$$f(x,y,z) := x \cdot \sin(y) + \sqrt[3]{z}$$

$$\frac{d}{dx} f(x,y,z) \to \sin(y) \qquad \frac{d}{dy} f(x,y,z) \to x \cdot \cos(y) \qquad \frac{d}{dz} f(x,y,z) \to \frac{1}{3 \cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$

Установим значения переменных:

x:= –3.59 y:= 0.467 z:=563.2

По приведенным начальным условиям считаем, что погрешности равны:

$\Delta x := 0.01$ $\Delta y := 0.001$ $\Delta z := 0.1$

Находим значение и погрешности функции:

f(x,y,z) = 6.64198865

$$\Delta f(x,y,z) := |\sin(y)| \cdot \Delta x + |x \cdot \cos(y)| \cdot \Delta y + \left| \frac{1}{3 \cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \right| \cdot \Delta z$$

$$\Delta f(x,y,z) = 8.196 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta f(x,y,z) := \frac{\Delta f(x,y,z)}{|f(x,y,z)|} \qquad \delta f(x,y,z) = 1.234 \cdot 10^{-3}$$

Пример 1.6. Для пакета MathCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Теоретический материал. Для представления вещественных чисел в компьютере применяют, в основном, два способа: с фиксированной и с плавающей точками.

В основе значительно чаще употребляемого представления с плавающей точкой лежит экспоненциальная форма записи вещественного числа и двоичная система счисления: $x = \mu \cdot 2^p$, $\mu = \pm(\gamma_1 \cdot 2^{-1} + \gamma_2 \cdot 2^{-2} + \ldots + \gamma_t \cdot 2^{-t})$. Здесь μ – мантисса; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ – двоичные цифры, причем всегда $\gamma_1 = 1$, p – целое число, называемое двоичным порядком. Количество t цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Диапазон представления чисел в ЭВМ ограничен конечной разрядностью мантиссы и значением числа

p. Все представимые числа на ЭВМ удовлетворяют неравенствам: $0 < X_0 \le |x| < X_\infty$, где $X_0 = 2^{-(p_{\max}+1)}$, $X_\infty = 2^{p_{\max}}$. Все числа, по модулю большие X_∞, не представимы на ЭВМ и рассматриваются как *машинная бесконечность*. Все числа, по модулю меньшие X_0, для ЭВМ не отличаются от нуля и рассматриваются как *машинный нуль*. Важной характеристикой является число ε_M, называемое *машинное эпсилон* (*macheps*). Эта величина определяется как расстояние между единицей и ближайшим следующим за ней числом системы машинных чисел с плавающей точкой и характеризует относительную точность ЭВМ, то есть границу относительной погрешности представления чисел в ЭВМ. Покажем, что $\varepsilon_M \approx 2^{-t}$. Пусть $x^* = \mu \cdot 2^p$, тогда граница абсолютной погрешности представления этого числа равна $\overline{\Delta}(x^*) \approx 2^{-t-1} \cdot 2^p$. Поскольку $\frac{1}{2} \le \mu < 1$, то величина относительной погрешности представления оценивается так:

$$\overline{\delta}(x^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(x^*)}{|x^*|} \approx \frac{2^{-t-1} \cdot 2^p}{\mu \cdot 2^p} = \frac{2^{-t-1}}{\mu} \le \frac{2^{-t-1}}{2^{-1}} = 2^{-t}.$$

Машинное эпсилон определяется разрядностью мантиссы и способом округления чисел, реализованным на конкретной ЭВМ.

Решение. Примем следующие способы определения приближенных значений параметров, требуемых в задаче:

1. Положим $X_\infty = 2^n$, где n - первое натуральное число, при котором происходит переполнение.

2. Положим $X_0 = 2^{-m}$, где m – первое натуральное число, при котором 2^{-m} совпадает с нулем.

3. Положим $\varepsilon_M = 2^{-k}$, где k – наибольшее натуральное число, при котором сумма вычисленного значения $1+ 2^{-k}$ еще больше 1. Фактически ε_M есть граница относительной погрешности представления числа $x^* \approx 1$.

В результате вычислительного эксперимента получили: машинная бесконечность $X_\infty \approx 10^{307}$; машинный нуль $X_0 \approx 10^{-306}$; машинное эпсилон $\varepsilon_M \approx 10^{-15}$.

Приведем вид документа MathCAD:

Машинная бесконечность : $\mathrm{inf}(n) := 2^n$

$\mathrm{inf}(1019) = 5.618 \cdot 10^{306}$ $\mathrm{inf}(1020) = 1.124 \cdot 10^{307}$ $\mathrm{inf}(1021) =$

Машинный нуль : $\mathrm{zero}(m) := 2^{-m}$ $\mathrm{zero}(1019) = 1.78 \cdot 10^{-307}$ $\mathrm{zero}(1020) = 0$

Машинное эпсилон: $\mathrm{eps}(k) := 2^{-k}$ $\mathrm{res}(k) := 1 + \mathrm{eps}(k)$

res(47) = 1.000000000000007 res(48) = 1.000000000000004

res(49) = 1.000000000000002 res(50) = 1.000000000000001 res(51) = 1

$\mathrm{eps}(50) = 8.8817841970012523 \cdot 10^{-16}$

3. Задачи к работе

Задача 1.1. Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях $N = 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5$.

Порядок решения:

1. Найти сумму ряда S аналитически как предел частичных сумм ряда.

2. Используя функцию $S(N) = \sum_{n=0}^{N} a_n$, вычислить значения частичных сумм ряда при указанных значениях N.

3. Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности $|S(N) - S|$ и определить количество верных цифр в $S(N)$.

4. Представить результаты в виде гистограммы.

Задача 1.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. В каждый из диагональных элементов матрицы A по очереди внести погрешность в 1%. Как изменился определитель матрицы A? Указать количество верных цифр и вычислить величину относительной погрешности определителя в каждом случае.

Задача 1.3. Для заданной матрицы A найти обратную матрицу (если это возможно). Затем в элемент a_{11} внести погрешность в 10% и снова найти обратную матрицу. Объяснить полученные результаты.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧАМ

К задаче 1.1

Вариант	a_n	Вариант	a_n	Вариант	a_n
1	$\frac{2}{n^2+5n+6}$	11	$\frac{60}{11(n^2+12n+35)}$	21	$\frac{24}{7(n^2+8n+15)}$
2	$\frac{36}{11(n^2+5n+4)}$	12	$\frac{144}{5(n^2+6n+8)}$	22	$\frac{36}{n^2+5n+4}$
3	$\frac{9}{n^2+7n+12}$	13	$\frac{36}{n^2+7n+10}$	23	$\frac{46}{n^2+5n+6}$
4	$\frac{48}{5(n^2+6n+8)}$	14	$\frac{48}{n^2+8n+15}$	24	$\frac{96}{n^2+9n+20}$
5	$\frac{48}{5(n^2+6n+5)}$	15	$\frac{20}{n^2+4n+3}$	25	$\frac{60}{n^2+6n+8}$
6	$\frac{72}{5(n^2+6n+8)}$	16	$\frac{32}{n^2+5n+6}$	26	$\frac{72}{n^2+7n+10}$
7	$\frac{24}{n^2+8n+15}$	17	$\frac{144}{n^2+18n+80}$	27	$\frac{24}{n^2+4n+3}$
8	$\frac{32}{n^2+9n+20}$	18	$\frac{24}{n^2+4n+3}$	28	$\frac{96}{n^2+8n+15}$
9	$\frac{216}{7(n^2+8n+15)}$	19	$\frac{180}{n^2+20n+99}$	29	$\frac{72}{n^2+6n+8}$
10	$\frac{84}{13(n^2+14n+48)}$	20	$\frac{112}{15(n^2+16n+63)}$	30	$\frac{12}{5(n^2+6n+8)}$

К задаче 1.2

Вариант	A	Вариант	A	Вариант	A
1	$\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 33 & 28 & 24 \\ 360 & 320 & 270 \end{matrix}$	3	$\begin{matrix} 30 & 34 & 19 \\ 314 & 354 & 200 \\ 2 & 8 & 13 \end{matrix}$	5	$\begin{matrix} 1.3 & 1 & 13 \\ 3.4 & 1.4 & 23 \\ 5 & 3 & 1.5 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 9 & 5 & 6 \\ 17 & 9 & 11 \\ 7 & 4 & 5 \end{matrix}$	4	$\begin{matrix} -7 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix}$	6	$\begin{matrix} 3 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 15 \\ 11 & 5 & 40 \end{matrix}$

К задаче 1.3

Вариант	A	Вариант	A	Вариант	A
1	$\begin{matrix} 2 & 16 & -6 \\ 3 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	3	$\begin{matrix} 2 & 4.4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	5	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 48 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	4	$\begin{matrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 1.1 & 0.2 & 3 \\ 2.3 & 1.2 & 4 \end{matrix}$	6	$\begin{matrix} 5 & 5.5 & 5.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$

4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правила округления приближенных чисел: по дополнению и усечением.

2. Сформулируйте определение верной цифры числа. Приведите примеры.

3. Докажите утверждение об оценке абсолютной погрешности суммы и разности двух чисел.

4. На основании формулы вычисления погрешности функции многих переменных сформулируйте правило вычисления абсолютной и относительной погрешностей функции одной переменной.

5. Типы погрешностей, возникающих при численном решении задач.

6. Что называется абсолютной и относительной погрешностями приближенных чисел?

7. Сформулируйте определение значащей цифры числа. Приведите примеры.

8. Как оцениваются погрешности вычисления значения функции многих переменных?

9. Как в соответствии с принципом Крылова записывается приближенное число?

10. Сформулируйте правила Крылова для выполнения арифметических действий над приближенными числами.

11. Что называется машинной бесконечностью, машинным нулем и машинным эпсилон?