# Tema 5: Morfología







Primera parte

### Morfología

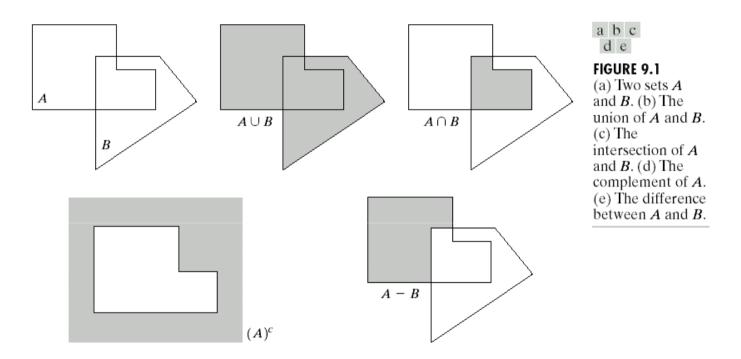
- La morfología matemática se basa en operaciones de teoría de conjuntos. En el caso de imágenes binarias, los conjuntos tratados son subconjuntos de Z² y en el de las imágenes en escala de grises, se trata de conjuntos de puntos con coordenadas en Z³.
- Las operaciones morfológicas simplifican imágenes y conservan las principales características de forma de los objetos.
- Un sistema de operadores de este tipo y su composición, permite que las formas subyacentes sean identificadas y reconstruidas de forma óptima a partir de sus formas distorsionadas y ruidosas.
- La morfología matemática se puede usar, entre otros, con los siguientes objetivos:
  - Pre-procesamiento de imágenes (supresión de ruidos, simplificación de formas).
  - Destacar la estructura de los objetos (extraer el esqueleto, detección de objetos, envolvente convexa, ampliación, reducción,...)
  - Descripción de objetos (área, perímetro,...)

### Morfología

### 1. Imágenes binarias

- Operaciones morfológicas:
  - » Dilatación, erosión, Transformada Hit-or-Miss, apertura y cierre.
- Aplicaciones:
  - » Extracción de fronteras y componentes conexas, rellenado de regiones, adelgazamiento y engrosamiento, esqueleto y poda.
- 2. Imágenes en escala de grises
  - Operaciones morfológicas: dilatación, erosión, apertura, cierre.
  - Aplicaciones:
    - Gradiente morfológico, transformada Top-Hat, texturas y granulometrías.

#### Operaciones básicas sobre conjuntos



Por ejemplo, la *diferencia* de dos conjuntos A y B se define:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$

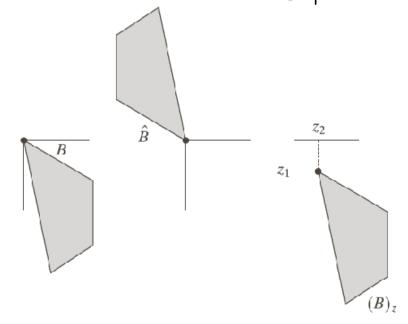
### Operaciones básicas sobre conjuntos

☐ La *traslación* de A por z se define como

$$A_z = \{ x \mid x = a + z, \quad a \in A \}$$

☐ La *reflexión* de B se define como

$$\hat{B} = \{ x \mid x = -b, \quad b \in B \}$$



a b c

#### FIGURE 9.1

(a) A set, (b) its reflection, and(c) its translation by z.

### **Dilatación**

Dada una imagen A, y un elemento estructural B, (ambos imágenes binarias con fondo blanco), la dilatación de *A por B se define como:* 

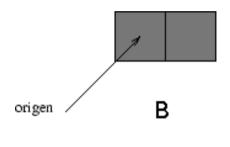
$$A \oplus B = \left\{ x | (\hat{B})_x \cap A \neq \emptyset \right\}$$

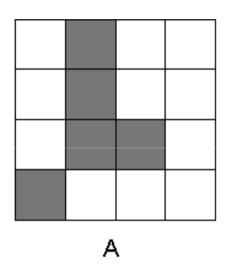
Tengamos en cuenta que, para la intersección sólo consideramos los píxeles negros de A y B.

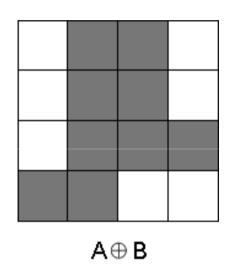
El primer elemento de la dilatación, A, está asociado con la imagen que se está procesando y el segundo recibe el nombre de elemento estructural, la forma que actúa sobre A en la dilatación para producir  $A \oplus B$ .

**Dilatación** 

#### **EJEMPLO**



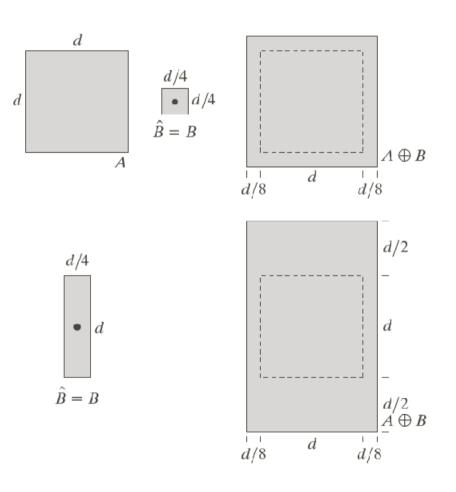




OBSERVACIÓN: Es importante tener en cuenta que el sistema de coordenadas que se usará en este tema es (fila, columna).

### **Dilatación**

#### **EJEMPLO**





#### FIGURE 9.6

- (a) Set A.(b) Square structuring element (the dot denotes the origin).
- (c) Dilation of *A* by *B*, shown shaded.
- (d) Elongated structuring element. (e) Dilation of A using this element. The dotted border in (c) and (e) is the boundary of set A, shown only for reference

### **Dilatación**

#### **EJEMPLO** de aplicación

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



#### FIGURE 9.5

- (a) Sample text of poor resolution with broken characters (magnified view). (b) Structuring
- element.
  (c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were
- joined.

0	1	0
1	1	1
0	1	0

### **Dilatación**

#### **PROPIEDADES**

1.Se cumple que: 
$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b$$

2. Propiedad conmutativa: 
$$A \oplus B = B \oplus A$$
.  $\bigcup_{a \in A} B_a$ 

3.La dilatación por el trasladado de un elemento estructural es el trasladado de la dilatación:

$$A \oplus B_t = (A \oplus B)_t$$
.

4. Propiedad distributiva respecto a la unión:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C).$$

5. Asociatividad:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

6.La dilatación es creciente: si  $A \subseteq C$  entonces  $A \oplus B \subseteq C \oplus B$ .

### **Erosión**

Dada una imagen A, y un elemento estructural B, (ambos imágenes binarias con fondo blanco), la <u>erosión de una imagen</u>, A, por un elemento estructural, B, es el conjunto de todos los elementos x para los cuales B trasladado por x está contenido en A:

$$A \Theta B = \{x \mid B_x \subseteq A\}$$

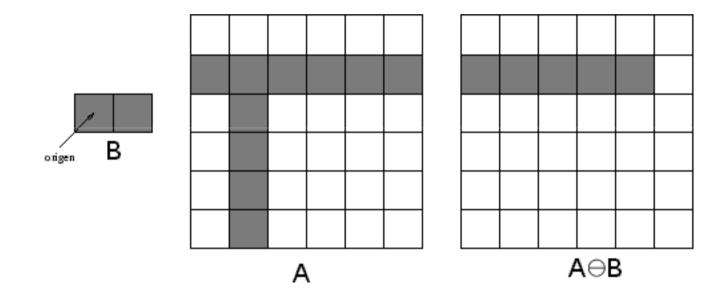
Tengamos en cuenta que, para la condición  $B_x \subseteq A$ , sólo consideramos los píxeles negros de A y B.

La erosión es la operación morfológica dual de la dilatación.

La erosión se concibe usualmente como una reducción de la imagen original.

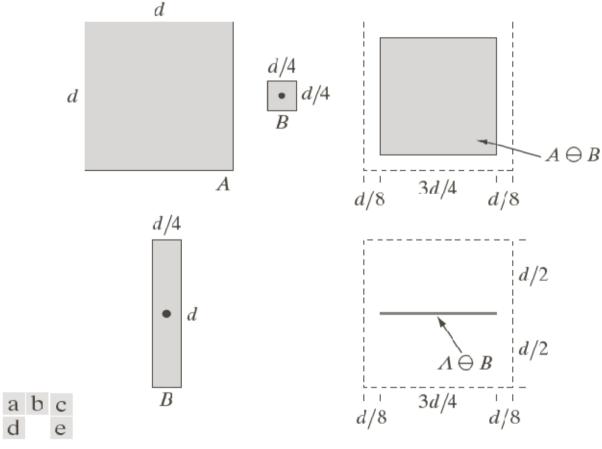
**Erosión** 

#### **EJEMPLO**



**Erosión** 

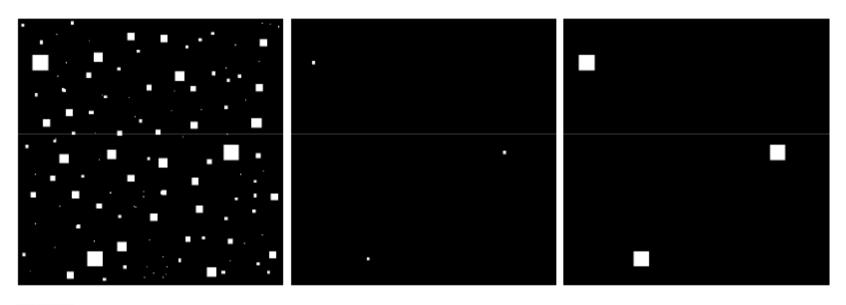
#### **EJEMPLO**



**FIGURE 9.4** (a) Set A. (b) Square structuring element, B. (c) Erosion of A by B, shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A by B using this element. The dotted border in (c) and (e) is the boundary of set A, shown only for reference.



#### EJEMPLO de aplicación



a b c

**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

### **Erosión**

Mientras que la dilatación puede representarse como la unión de los trasladados, la erosión puede representarse como la intersección de los trasladados negativos:

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}$$

La dilatación y la erosión son muy similares en el sentido de que lo que uno hace al objeto el otro lo hace al fondo. Esta relación puede formularse como una relación de dualidad:

Teorema. Dualidad de la erosión y la dilatación.

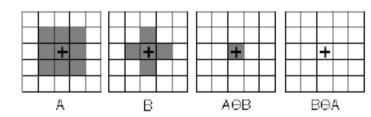
$$(A \ominus B)^{c} = A^{c} \oplus \hat{B}$$

Como consecuencia tenemos:

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

### **Erosión**

#### **PROPIEDADES**



La erosión no es conmutativa.

1. Propiedad Distributiva respecto a la intersección:

$$(A \cap B) \ominus K = (A \ominus K) \cap (B \ominus K)$$

2. Al igual que la dilatación, la erosión es también creciente:

si 
$$A \subseteq C$$
 entonces  $A \ominus B \subseteq C \ominus B$ .

3. Además la erosión por un elemento estructural mayor produce un resultado menor:

```
si K \subseteq L, entonces A \ominus L \subseteq A \ominus K.
```

4. Finalmente, con respecto a la descomposición de elementos estructurales, una regla de la cadena para la erosión se verifica cuando el elemento estructural se puede descomponer mediante dilatación.

$$A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) \ominus C$$

### **Dilatación y Erosión**

#### **Ejercicios:**

- •¿En qué condiciones A ⊆ A ⊕ B? ¿Y A ⊖ B ⊆ A?
- •¿Cuándo se dan las inclusiones contrarias?

#### Para practicar:

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm

### **Dilatación y Erosión**

#### **Aplicaciones**

#### Extracción de la frontera

La frontera de un conjunto A se puede obtener primero erosionando A por un elemento estructural apropiado, B, y realizando posteriormente la diferencia entre A y su erosión. Es decir,

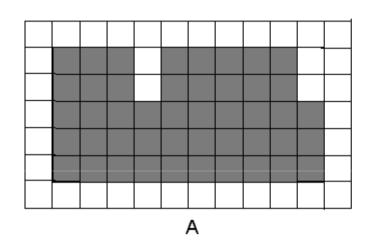
$$F(A) = A - (A \ominus B)$$

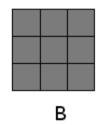
El elemento estructural B usado más frecuentemente es el cuadrado 3x3 (como en el ejemplo que se muestra a continuación). Usando otros tamaños, por ejemplo 5 x 5, se ampliaría el grosor de la frontera a dos o tres píxeles.

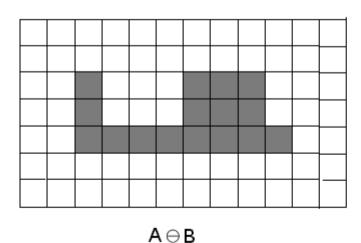
Dilatación y Erosión

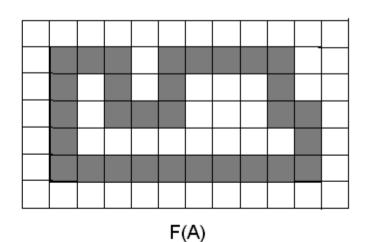
### **Aplicaciones**

#### Extracción de la frontera









### **Dilatación y Erosión**

### **Aplicaciones**

#### Rellenado de regiones

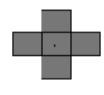
Partimos del borde 8-conexo de una región, A, y de un punto p del interior de A.

El siguiente procedimiento rellena el interior de A:

$$X_0 = p$$

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3...$$

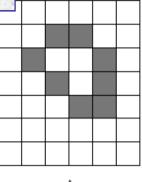
Donde B es el elemento estructural siguiente:



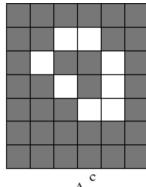
Е

Y el algoritmo termina en la iteración k si  $X_k = X_{k-1}$ . La unión de  $X_k$  y A es la frontera y la región rellena.

Dilatación y Erosión



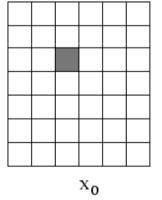
Α



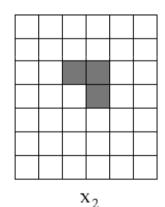


В





 $\mathbf{x}_{1}$ 



Relleno

### Dilatación y Erosión

#### **Aplicaciones**

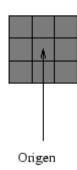
#### Extracción de componentes conexas

Supongamos que *Y* representa una componente conexa contenida en un conjunto *A* y supongamos que conocemos un punto *p* que pertenece a dicha región. Entonces, el siguiente procedimiento puede utilizarse para extraer *Y*:

$$X_0 = p$$
  
 $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \qquad k = 1, 2,...$ 

El algoritmo termina en la iteración k si  $X_{k-1}=X_k$ . Con  $Y=X_k$ .

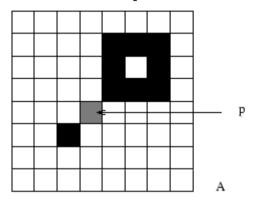
B es el elemento estructural siguiente:

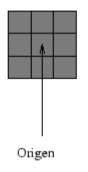


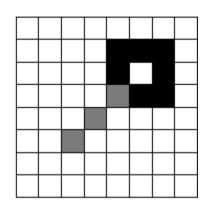
### **Dilatación y Erosión**

### **Aplicaciones**

#### Extracción de componentes conexas

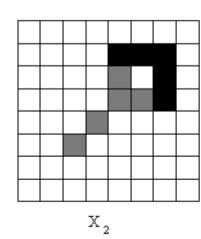


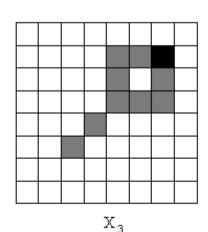


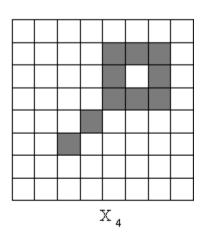












### Dilatación y Erosión

#### **Aplicaciones**

#### Extracción de componentes conexas

#### Ejercicio:

1. Usando la (p,q)-adyacencia (p para negro, q para blanco), recordemos que el borde de una imagen en negro es el conjunto de todos los píxeles negros que son q-vecinos de alguno blanco. Diseñar un algoritmo para calcular el borde de una imagen con la (8,4)-adyacencia mediante dilataciones y/o erosiones.

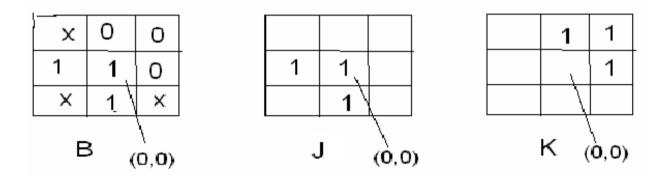
Para practicar:

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm

### Trasformada Hit-or-Miss (ganancia o pérdida)

La transformación morfológica de hit-or-miss es una herramienta básica para la detección de formas. Se usa para buscar una determinada configuración en los píxeles negros y blancos.

Sea B = (J, K) la configuración que queremos buscar, donde J es el conjunto formado por los píxeles negros de B; y K el conjunto formado por los píxeles negros de B<sup>c</sup>. Por ejemplo



Los x indican píxeles que pueden ser indistinguiblemente blancos o negros.

#### **Trasformada Hit-or-Miss**

La transformación hit-or-miss se define como:

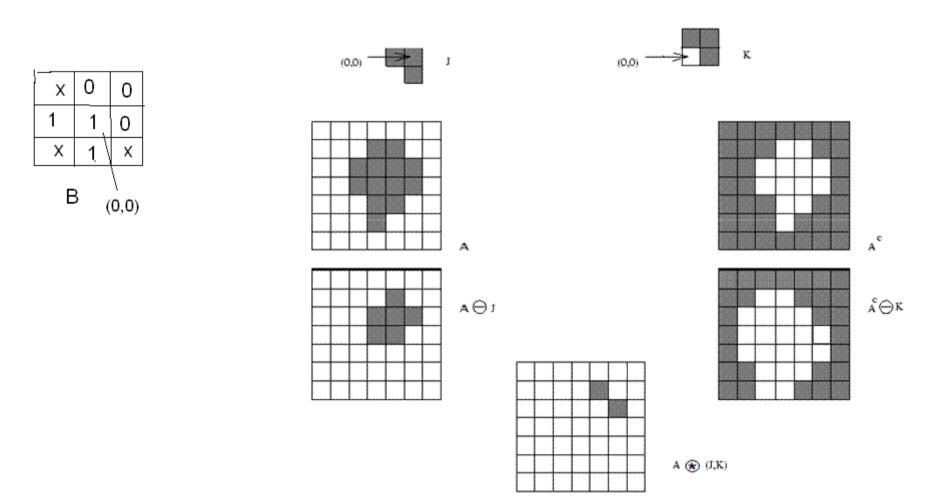
$$A \otimes B = (A \ominus J) \cap (A^{c} \ominus K)$$

Utilizando la definición de diferencia de conjuntos y la relación dual entre la erosión y la dilatación, podemos escribir la ecuación anterior como

$$A \otimes B = (A \ominus J) - (A \oplus \hat{K})$$

**Trasformada Hit-or-Miss** 

#### **EJEMPLO**



Detección de esquinas superiores derechas

### **Trasformada Hit-or-Miss**

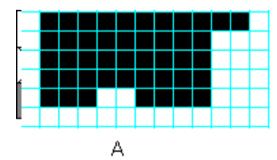
#### **ADELGAZAMIENTO**

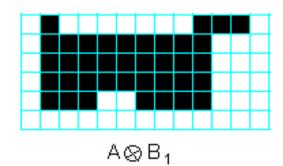
El adelgazamiento de un conjunto A por un elemento estructural B puede ser definido en términos de la transformación ganancia-pérdida como:

$$A \otimes B = A - (A \circledast B) = A \cap (A \circledast B)^{c}$$

#### **Ejemplo**

В





#### **Trasformada Hit-or-Miss**

**APLICACIONES** 

#### **ADELGAZAMIENTO**

Una definición más útil para el adelgazamiento de A simétrico está basado en una sucesión de elementos estructurales:

$$\{B\} = \{B^1, B^2, ..., B^n\}$$

donde  $B^i$  es una versión rotada de  $B^{i-1}$ .

Usando este concepto definimos el adelgazamiento por una sucesión de elementos estructurales como

$$A \otimes \{B\} = ((...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n)$$

En la siguiente transparencia veremos un ejemplo:

### **Trasformada Hit-or-Miss**

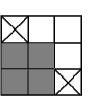
**APLICACIONES** 

**ADELGAZAMIENTO:** Ejemplo

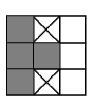
Elementos estructurales usados comúnmente en el proceso de adelgazamiento



**,** 1



 $\mathbf{R}^2$ 



 $\mathbf{R}^{3}$ 



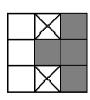
R 4



5



в <sup>б</sup>



в<sup>7</sup>



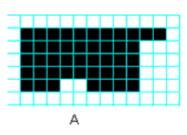
В

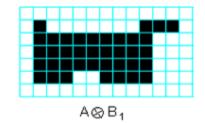
**Trasformada Hit-or-Miss** 

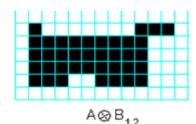
**APLICACIONES** 

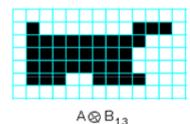
#### **ADELGAZAMIENTO:**

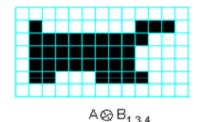
Ejemplo

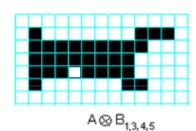


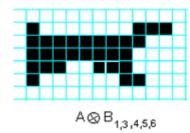


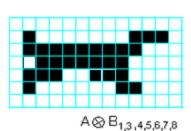


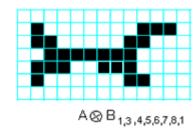


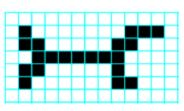












 ${\sf A} \otimes {\sf B}_{1,3,4,5,6,7,8,1,4,6,6}$ 

**Trasformada Hit-or-Miss** 

**APLICACIONES** 

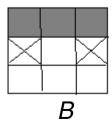
#### **ENGROSAMIENTO**

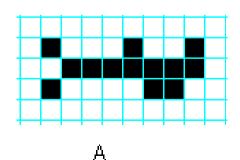
El engrosamiento es el dual morfológico del adelgazamiento y se define mediante la expresión:

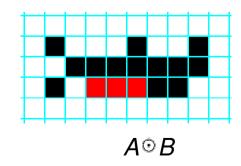
$$A \odot B = A \cup (A \odot B)$$

donde B es un elemento estructural apropiado para la ampliación.

#### **Ejemplo**







**Trasformada Hit-or-Miss** 

**APLICACIONES** 

#### **ENGROSAMIENTO**

Al igual que el adelgazamiento, el engrosamiento se puede definir también secuencialmente,

$$A \odot \{B\} = ((...((A \odot B^1) \odot B^2)...) \odot B^n)$$

En el caso del engrosamiento, los elementos estructurales que se usan son los mismos que en el caso de adelgazamiento, pero cambiando los ceros por unos.

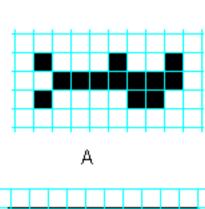
Sin embargo, esta implementación directa no se suele usar, lo que se hace es adelgazar el fondo y luego calcular el complementario.

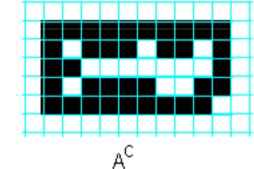
**Trasformada Hit-or-Miss** 

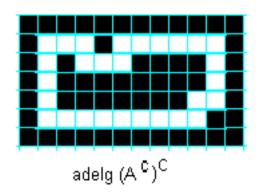
**APLICACIONES** 

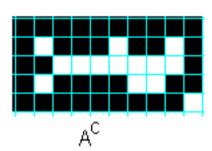
#### **ENGROSAMIENTO**:

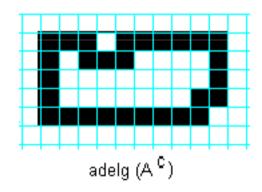
Ejemplo

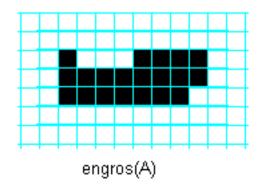












**Trasformada Hit-or-Miss** 

### Para practicar:

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm

### Apertura y Clausura

Como hemos visto, cuando el elemento estructural contiene el origen, la dilatación expande la imagen y la erosión la reduce.

En esta sección discutiremos otras dos importantes operaciones morfológicas:

- 1. Apertura
- 2. Clausura (o cierre).

La apertura generalmente suaviza los contornos de una imagen y elimina pequeños salientes. También puede eliminar franjas o zonas de un objeto que sean "más estrechas" que el elemento estructural.

La clausura elimina pequeños huecos (rellenándolos) y une componentes conexas cercanas.

### **Apertura**

La apertura de A por un elemento estructural K se define como

$$A \circ K = (A \ominus K) \oplus K$$

que, en palabras, establece que la apertura de *A* por *K* es simplemente la erosión de *A* por *K*, seguido de la dilatación del resultado por *K*.

Si A no cambia con la apertura con K, diremos que A es abierto respecto a K.

Ejercicio: Da un ejemplo de un conjunto A y un elemento estructural K de más de un píxel de manera que A sea abierto respecto a K.

### **Apertura**

### Teorema de caracterización:

$$A \circ K = \{x \in A \text{ tal que para algún } t \in A \ominus K, \text{ se tiene que } x \in K_t \text{ y } K_t \subseteq A\}$$

La apertura de A por K selecciona los puntos de A que pueden ser cubiertos por alguna traslación del elemento estructural K que esté contenido completamente en A.

En otras palabras, la apertura A o K se obtiene pasando el elemento estructural K dentro de A y no permitiéndole que salga. Además, de la fórmula anterior se deduce que A o K = A o  $K_x$  para cualquier X.

Reorganizando la información del teorema de caracterización tendremos

$$A \circ K = \bigcup_{y \in A \ominus K} K_y = \bigcup_{K_y \subseteq A} K_y$$

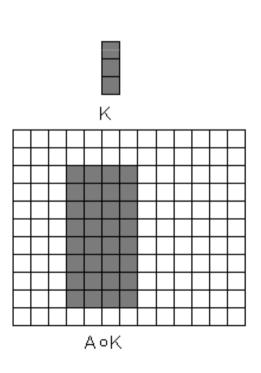
### **Apertura**

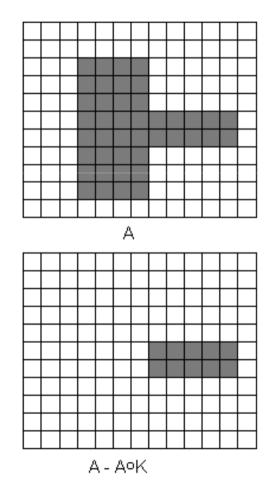
### **Ejemplo**

Aquí se ilustra cómo podemos usar la apertura para descomponer objetos.

Supongamos un cuadrado unido a un asa.

El procedimiento descrito en la figura nos sirve para separar las dos partes.



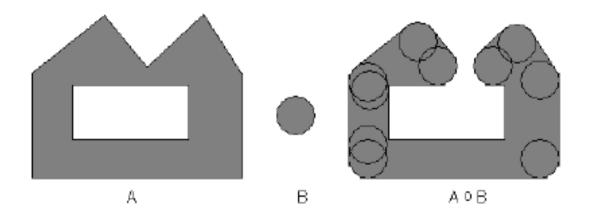


### **Apertura**

### **Ejemplo**

#### Propiedades:

- •La apertura es antiextensiva: A o K⊂A.
- •La apertura es idempotente, es decir, XoB=(XoB)o B.
- •Si tomamos un disco como elemento estructural, la apertura suaviza los contornos, rompe uniones estrechas entre partes de conjuntos y elimina salientes estrechos.



### Clausura

La clausura de A por un elemento estructural K se define como

$$A \bullet K = (A \oplus K) \ominus K$$

que, en palabras, establece que la clausura de A por K es la dilatación de A por K, seguido de la erosión del resultado por K.

Si A no cambia con la clausura por K diremos que A es cerrado respecto a K.

<u>Ejercicio</u>: Da un ejemplo de un conjunto A y un elemento estructural K de más de un píxel de manera que A sea cerrado respecto a K. ¿Es también abierto? Si no lo es, busca un ejemplo de conjunto cerrado y abierto respecto a un mismo elemento estructural.

### Clausura

Se cumple la dualidad entre apertura y cierre, es decir,

$$(A \bullet K)^c = A^c \circ \hat{K}$$

El teorema de caracterización para la apertura y la dualidad entre apertura y la clausura nos lleva a la caracterización de la clausura que establece que

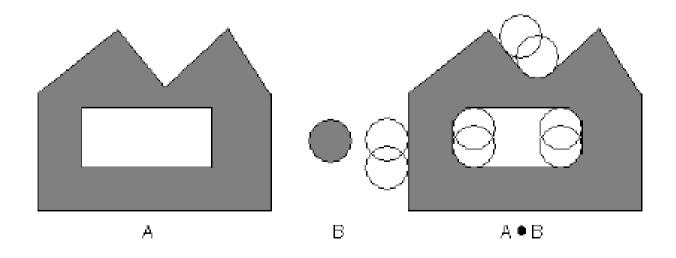
$$A \bullet K = \{x \text{ tal que si } x \in \hat{K}_t \text{ entonces } \hat{K}_t \cap A \neq \emptyset \}$$

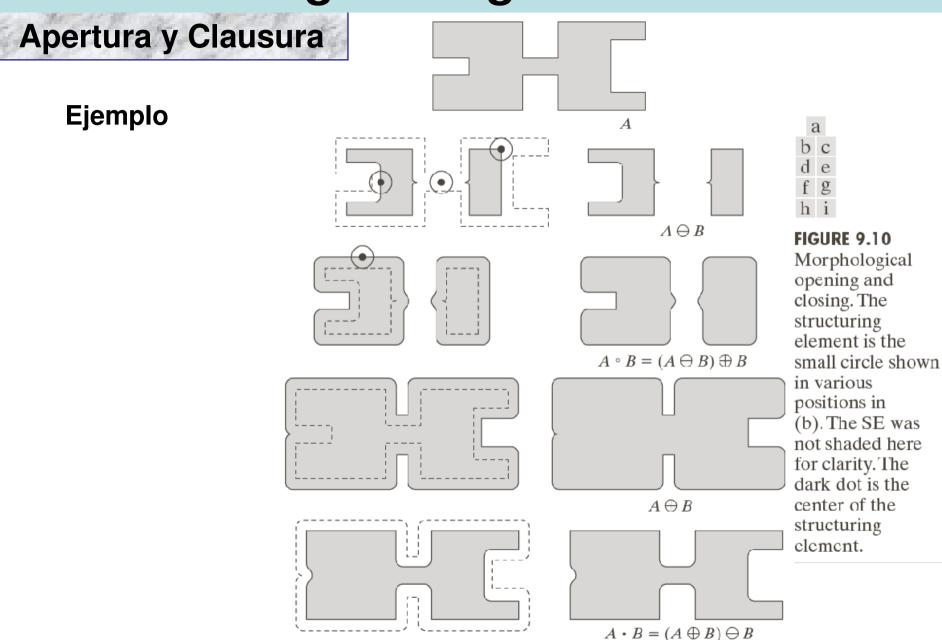
La clausura de *A* incluye todos los puntos que cumplen la condición de que cuando son cubiertos por un trasladado del reflejado del elemento estructural, este trasladado y *A* deben tener intersección no vacía. De nuevo esta transformación es invariante por traslaciones del elemento estructural.

### Clausura

#### **Propiedades**

- La clausura es extensiva, A⊆A•K.
- •La clausura es idempotente, es decir,  $X^{\bullet} B = (X^{\bullet} B)^{\bullet} B$
- •Si tomamos un disco como elemento estructural, la clausura tiende a suavizar las secciones de contornos pero en sentido inverso: une separaciones estrechas, elimina golfos estrechos y elimina huecos.



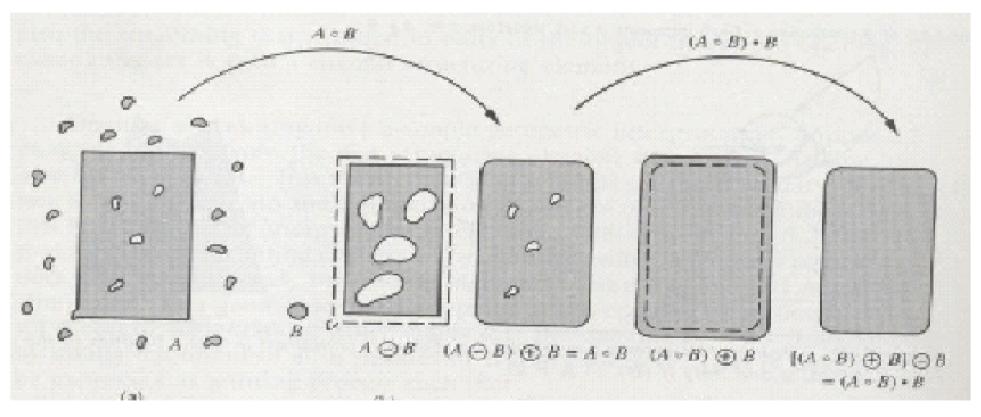


## Apertura y Clausura

### **Aplicaciones**

Filtro morfológico para la eliminación de ruido tipo sal y pimienta:

$$(A \circ B) \bullet B$$



El elemento de estructura B debe ser físicamente mayor que todos los elmentos de ruido.

### **Aplicaciones**

### Cálculo del esqueleto

El esqueleto de un conjunto *A* puede ser expresado en términos de erosiones y aperturas.

Si S(A) denota **el esqueleto** de A, entonces  $S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$ 

$$S_k(A) = (A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B]$$

donde *A* ⊕ *kB* denota la aplicación sucesiva de *k* erosiones a *A*:

$$A \ominus kB = (\cdots ((A \ominus B) \ominus B) \ominus \cdots) \ominus B$$

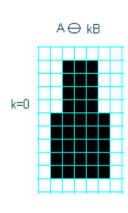
K es el último paso iterativo antes de que A se erosione a un conjunto vacío. En otras palabras,

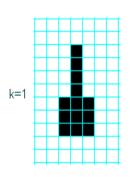
$$K = \max\{k \text{ tal que } A \ominus kB \neq \emptyset\}$$

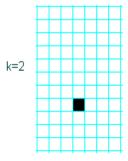
## **Aplicaciones**

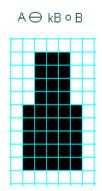
**Ejemplo:** Cálculo del esqueleto

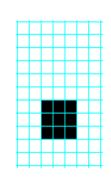


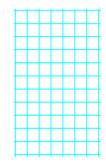


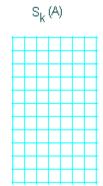


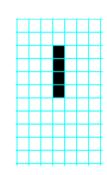


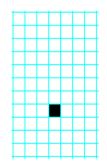




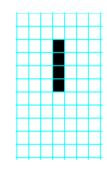


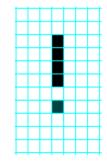










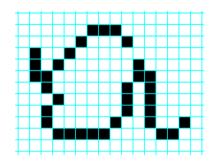


### **Aplicaciones**

#### **Poda**

Este es un paso fundamental a la hora de adelgazar o calcular el esqueleto de una imagen ya que con este proceso se limpia la imagen, eliminando elementos parásitos. Asumimos que la longitud de los elementos parásitos no excede de tres píxeles.

Por ejemplo, queremos hacer una poda de esta imagen para eliminar los tres píxeles negros más a la izquierda.



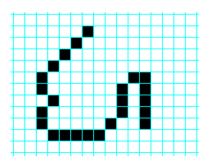
## **Aplicaciones**

#### Poda

Eliminación de elementos parásitos.
 Si {B} denota una sucesión de elementos estructurales dada por

Entonces adelgazando la imagen con dichos elementos estructurales tres veces obtenemos:  $X_1 = A \otimes \{B\}$ 

que elimina todos los elementos parásitos que no excedan de tres píxeles. El problema es que también puede eliminar parte de la imagen.



### **Aplicaciones**

#### **Poda**

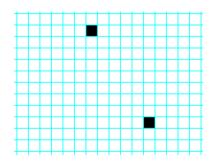
- 2. Reconstrucción de la imagen.
  - a) Buscamos los elementos finales usando la transformada hit-or-miss:

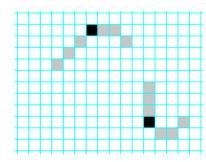
$$X_2 = \bigcup_{k=1}^8 X_1 \otimes B^k$$

b) Para reconstruir la imagen a partir de los puntos finales, en primer lugar, dilatamos tres veces para recuperar los puntos de la imagen que hemos perdido:

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$

donde H es el elemento estructural 3 x 3 con todos los píxeles en negro.





### **Aplicaciones**

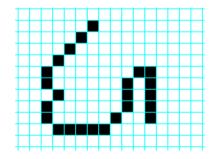
#### **Poda**

3. Imagen podada

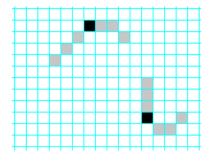
Finalmente, unimos X<sub>1</sub> con X<sub>3</sub> para obtener la imagen sin elementos parásitos:

$$X_4 = X_1 \cup X_3$$

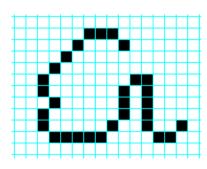
X <sub>1</sub>



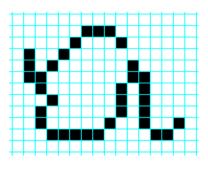
 $X_3$ 



 $X_4$ 



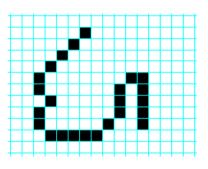
## **Aplicaciones**

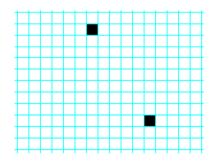


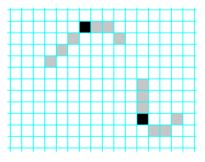


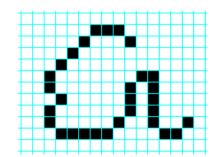












#### **Ejercicios**:

- Diseñar un algoritmo que detecte el código postal en un sobre escrito a mano.
   Pasos necesarios:
  - binarizar la imagen (thresholding).
  - erosionar para separar las posibles uniones entre dos números,
  - dilatar para recomponer números que tengan discontinuidades,
  - calcular el esqueleto de cada componente,
  - realizar una poda.
  - Comparar con una plantilla (estadísticamente, geométricamente, topológicamente,...)
- 2. Investigar más sobre algoritmos de apertura y cierre

#### Para practicar:

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm

Apuntes de morfología