

数理情報学輪講 冬学期 第 10 回

# ネットワーク構造を利用した スポーツのランキングシステム (文献紹介)

波多野卓磨

数理情報第 3 研究室 修士課程 1 年

指導教員 鈴木 秀幸 准教授

2013 年 12 月 6 日

## 概要

対戦型スポーツにおいて、対等でない試合状況からチームや選手の実力を反映した順位付けを行うことは困難である。この問題に対し数理工学の分野では、数理モデルを用いたランキングシステムがいくつか提案されている。本文献紹介では、勝敗関係から構成されるネットワーク構造を利用した Park and Newman (2005) の win-lose score と Radicchi (2011) の prestige score、そしてこれらに時間経過の影響を反映させた Motegi and Masuda (2012) の dynamic win-lose score と dynamic prestige score について、その算出方法と性能、比較検討の紹介を行う。

## 1 はじめに

対戦型スポーツでは、試合結果を反映させたランキングシステムが重要になる。プロスポーツでは、チームや選手に順位をつけることは興行に貢献し、アマチュアスポーツでは順位に近い相手と対戦することで、互いにとって有益な試合が実現することが期待できる。チームや選手を順位付けする方法はいくつか知られている。参加するチームや選手が少ない場合は、リーグ戦のように各チームが対等な試合スケジュールで対戦を行い、最終的な勝率や勝ち数で順位を決める、などの方法が考えられる。しかし、参加するチームや選手の数が多い場合、リーグ戦のような対等な試合スケジュールを実現することは難しく、したがって順位をつける際に工夫が必要である。そのため、各スポーツでは、それぞれの競技の特性に応じたランキングシステムの導入、運用が行われている (Stefani, 1997)。

数理工学の分野では、対戦型スポーツで各参加者の実力を数理的に評価し、そして順位付けする手法がいくつか提案されている。例えば、Bradley and Terry (1952) は、各チームで数値化された強さによって勝率が決まると仮定し、試合結果から各チームの強さを表すパラメータの値を推定する Bradley-Terry model を提案している。その後 Bradley-Terry モデルを発展させたモデルが複数提案され、様々なデータについて解析が行われている (Rao and Kupper, 1967; Huang et al., 2006; Cattelan et al., 2013)。また、試合結果を行列として表し、線形代数の手法などを利用して各チームのランク付けを行う手法も提案されている (Massey, 1997; Colley, 2002; Park and Newman, 2005; Radicchi, 2011; Motegi and Masuda, 2012)

今回の文献紹介では、比較的新しい研究から提案された win-lose score (Park and Newman, 2005) と、prestige score (Radicchi, 2011), そして、これらに時間経過の影響を反映させた dynamic win-lose score と dynamic prestige score (Motegi and Masuda, 2012) の4つのランキングシステムを取り上げ、それぞれのランキングシステムの背景とアルゴリズム、性能評価を紹介する。また、Motegi and Masuda (2012) で行われたランキングシステムの性能比較を紹介する。

## 2 ランキングシステム

### 2.1 win-lose score

Park and Newman (2005) はアメリカの大学フットボールリーグについて新しいランキングシステムを提案し、既存ランキングシステムとの比較を行っている。

アメリカの大学フットボールリーグに参加している大学は、地域ごとに区分けされたカンファレンスに所属する。シーズンの約 75%の試合は同カンファレンス内の大学と行い、残りの 25%の試合は他カンファレンスに所属する大学と行う。図 1 に、各カンファレンスと対戦の様子を示した。同カンファレンスに属する大学、あるいは近いカンファレンスに属する大学とは多くの試合が行われるのに対し、遠く離れたカンファレンスに属する大学との試合は少ないことがわかる。

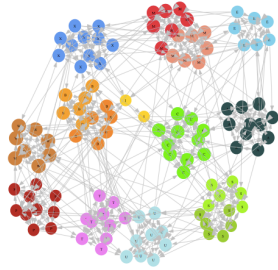


図 1: 大学アメフトの試合状況 (Park and Newman, 2005)

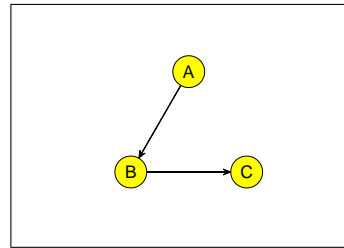


図 2: A が B に、B が C に勝利した状況を表す

この試合状況では、カンファレンス間で所属チームの実力に偏りがある場合、勝ち数や勝率にチームの実力が反映されないことが考えられる。つまり、勝ち数や勝率では正当な順位が付けられない。したがって主要なカンファレンスでは、シーズン後のプレーオフに参加する大学を決めるために、独自のランキングシステムが導入されている。このシステムは Bowl Champion Ship (BCS) ランキングと呼ばれる。BCS ランキングでは、対戦の勝敗関係だけではなく、チーム、メディア関係者による投票結果を反映させたランキング (ハリスランキング)、大学のコーチによる投票結果を反映させたランキング (USA Today ランキング)、そして 6 種類のコンピュータによるランキングを総合的に反映させて、最終的な BCS ランキングを決定している。こうした方式の元でシーズンの勝敗結果からチームをレーティングし、プレーオフ出場校を決めている。しかし投票などの主観的な要素が含まれる点は問題視されることがあり、2008 年シーズンは唯一の全勝校であるユタ大学がプレーオフ出場校に選ばれなかった、という例もある。

そこで、Park & Newman は、対等でない試合状況から客観的、自動的に計算できるランキングシステムを提案している。まず、参加チーム数を  $N$ 、チーム番号  $i$  を割り振る ( $i = 1, \dots, N$ )。そして、全体の試合結果を表す行列を  $A$  とする。 $A_{ij}$  はチーム  $j$  がチーム  $i$  に勝った回数とする。図 2 のよ

うな試合状況では,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

Park and Newman (2005) は対等でない試合状況からランキングをつけるために, 新たに間接勝利という概念を導入している. 図 2 のように, A が B に勝ち, B が C に勝った場合, A は C に間接的に勝利していると考え. そしてこの時, A は, B に対する直接的な勝利に加えて, 間接的な勝利によるスコア  $\alpha$  を得るとする.  $\alpha$  は  $0 < \alpha < 1$  のパラメータで, 直接的な勝利の重みを 1 としたときの間接勝利の重みを表している. 図 2 の状況において A のスコアを考えると, A は B に直接勝利し, さらに C に間接勝利しているので, スコア  $1 + \alpha$  を獲得する.

各チームについてスコアを計算するために, 次のように行列  $W$  を定義する.

$$\begin{aligned} W &= A + \alpha A^2 + \alpha^2 A^3 + \alpha^3 A^4 + \cdots \\ &= A(I - \alpha A)^{-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

$W$  は  $N \times N$  行列で,  $W_{ij}$  はチーム  $j$  がチーム  $i$  に対する直接勝利と間接勝利の点数の合計を表す. 例として図 2 の状況で  $W$  を計算すると,

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.  $W$  の第  $i$  列要素の総和を チーム  $i$  の win score とする. win score によって, 直接勝利と間接勝利を反映させた総合的な勝ち点を算出する.

勝利関係から間接的敗北も同様に導出される. 行列  $L$  を次のように定義する.

$$L = A^T(I - \alpha A^T)^{-1} \quad (2)$$

$L$  は  $N \times N$  行列で,  $L$  の第  $i$  列要素の総和をチーム  $i$  の lose score とする.  $W$  と  $L$  から, 直接的敗北と間接的敗北を反映させた総合的なスコアを計算する. そのために, 行列  $W - L$  の第  $i$  列の総和をチーム  $i$  の win-lose score とする. すなわち, 各チームの win-lose score を表すベクトル  $s$  とする,  $s$  は

$$s = (W^T - L^T) \mathbf{1} \quad (3)$$

とする.  $s$  の  $i$  番目の要素は, チーム  $i$  の win-lose score を表す. win-lose score から各チームのランク付けを行うことで, 直接的, 間接的な勝敗を総合的に反映させた評価が可能になる.

Park and Newman は実際に大学アメフトの各シーズンの勝敗結果から, 各大学の win-lose score を算出した. win-lose score によるランキングと, 実際に利用されている BCS ランキングシステムの結果を比較した結果を図 1 に示す. 1998 年から 2003 年の全てのシーズンにおいて, BCS ランキング上位 5 チームのうち 3 チーム以上が win-lose score によるランキングと一致していることがわかる.

表 1: win-lose score によるランキングと BCS ランキングの比較 (Park and Newman, 2005).

2003		2002		2001	
Our method	BCS	Our method	BCS	Our method	BCS
Oklahoma	Oklahoma	Ohio St.	Miami (FL)	Tennessee (6)	Miami (FL)
Southern Cal	Louisiana St.	Southern Cal	Ohio St.	Miami (FL)	Nebraska
Florid St. (7)	Southern Cal	Miami (FL)	Georgia	Illinois (8)	Colorado
Louisiana St	Michigan (10)	Georgia	Southern Cal	Colorado	Oregon (6)
Miami (FL) (9)	Ohio St. (6)	Oklahoma (7)	Iowa (8)	Nebraska	Florida (7)
2000		1999		1998	
Our method	BCS	Our method	BCS	Our method	BCS
Washington	Oklahoma	Florida St.	Florida St.	UCLA	Tennessee
Oklahoma	Florida St.	Mich. St. (9)	VA Tech (6)	Florida St.	Florida St
Oregon St. (6)	Miami (FL) (8)	Nebraska	Nebraska	Texas A&M (6)	Kansas St.
Florida St.	Washington	Michigan (8)	Alabama	Tennessee	Ohio St. (7)
Oregon (10)	VA Tech (15)	Alabama	Tennessee (8)	Kansas St.	UCLA

## 2.2 dynamic win-lose score

Motegi and Masuda (2012) は Park and Newman (2005) の win-lose score を発展させる形で, dynamic win-lose score を提案している. Park and Newman の win-lose score では, 試合が行われた時刻に関する情報は扱わず, 1 つの行列で全ての試合結果を扱っている. 例えば, ある選手 A がデビュー直後の選手 B との対戦に勝利し, その後に実力を増した B が活躍して勝利を積み重ねた場合を考えると, win-lose score では選手 A が高く評価されることになる. 原因は 2 つ考えられ, 1 つは win-lose score には時間の経過が考慮されていないため, デビュー直後の B とその後に力をつけた B とが同一に扱われていることである. もう 1 つは, Win-score では試合の順序が考慮されていないため, A が B を倒した後に B が他の選手に勝利した場合でも A に間接勝利のスコアが加わることである.

Motegi and Masuda が提案する dynamic win-lose score は, win-lose score を発展させて, 試合が行われた時刻の情報を利用して時間経過と順序の影響を反映させたランキングシステムである. 以下で, dynamic win-lose score のアルゴリズムを説明する.

まず, 時刻  $t_n$  における試合結果を表す行列  $A_{t_n}$  ( $1 \leq n \leq n_{\max}$ ) を定義する.  $A_{t_n}$  の  $i, j$  成分は, 時刻  $t_n$  に参加者  $j$  が  $i$  に勝利すれば 1, それ以外の場合は 0 とする.  $A_{t_n}$  を用いて, 時刻  $t_n$  における dynamic win score を次のように定義する.

まず行列  $W_{t_n}$  を

$$\begin{aligned}
W_{t_n} = & A_{t_n} + e^{-\beta(t_n - t_{n-1})} \sum_{m_n \in \{0,1\}} \alpha^{m_n} A_{t_{n-1}} A_{t_n}^{m_n} \\
& + e^{-\beta(t_n - t_{n-2})} \sum_{m_{n-1}, m_n \in \{0,1\}} \alpha^{m_{n-1} + m_n} A_{t_{n-2}} A_{t_{n-1}}^{m_{n-1}} A_{t_n}^{m_n} \\
& + \dots \\
& + e^{-\beta(t_n - t_1)} \sum_{m_2, \dots, m_n \in \{0,1\}} \alpha^{\sum_{i=2}^n m_i} A_{t_1} A_{t_2}^{m_2} \dots A_{t_n}^{m_n}
\end{aligned} \tag{4}$$

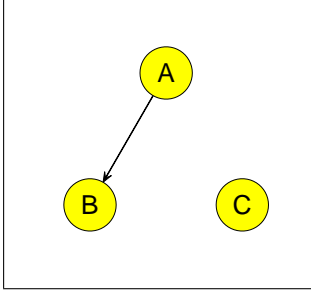


図 3: 時刻  $t = t_1$  の試合結果

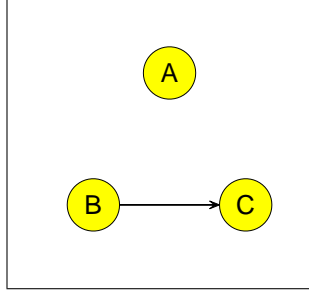


図 4: 時刻  $t = t_2$  の試合結果

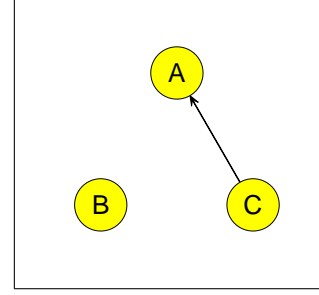


図 5: 時刻  $t = t_3$  の試合結果

として,  $W_{t_n}$  の第  $i$  列の総和を, チーム  $i$  の dynamic win score とする. すなわち, 時刻  $t_n$  における dynamic win score を表すベクトル  $w_{t_n}$  を,

$$w_{t_n} = W_{t_n}^T \mathbf{1} \quad (5)$$

として, 得られた  $w_{t_n}$  の  $i$  番目の要素を, 参加者  $i$  の dynamic win score とする.  $\alpha, \beta$  はパラメータで,  $\alpha$  は  $0 < \alpha < 1$  で間接勝利の重みを表す. また  $\beta (\geq 0)$  は時間経過に伴うスコア減少を反映している.

簡単な例で dynamic win score を計算してみる. 図 3 から図 5 のような試合結果が与えられた時, 時刻  $t_1$  で行列  $W_{t_1}$  は

$$W_{t_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる.

時刻  $t_2$  で行列  $W_{t_2}$  は

$$\begin{aligned} W_{t_2} &= A_{t_2} + e^{-\beta(t_2-t_1)} (A_{t_1} + \alpha A_{t_1} A_{t_2}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-\beta(t_2-t_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される.  $W_{t_2}$  の列和を取ること, チーム A, B, C の dynamic win score はそれぞれ  $e^{-\beta(t_2-t_1)}$ , 1, 0 と表される. A のスコアの観察から, 時刻  $t_1$  での勝利で得たスコアが, 時間の経過によって指数的に減少していること, そして B が C に勝利したことによる間接勝利が A のスコアに反映されていないことがわかる. このように, dynamic win-lose score には時間の経過と試合の順序が反映されていることがわかる.

時刻  $t_3$  で行列  $W_{t_3}$  は

$$\begin{aligned} W_{t_3} &= A_{t_3} + e^{-\beta(t_3-t_2)} (A_{t_2} + \alpha A_{t_2} A_{t_3}) \\ &\quad + e^{-\beta(t_3-t_1)} (A_{t_1} + \alpha A_{t_1} A_{t_2} + \alpha A_{t_1} A_{t_3} + \alpha^2 A_{t_1} A_{t_2} A_{t_3}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^{-\beta(t_3-t_1)} & 0 & \alpha e^{-\beta(t_3-t_1)} \\ 0 & e^{-\beta(t_3-t_2)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。  $W_{t_3}$  の列和を取ることで、A のスコアは  $e^{-\beta(t_3-t_1)}$ 、B は  $e^{-\beta(t_3-t_2)}$ 、C は  $1 + \alpha e^{-\beta(t_3-t_1)}$  となる。C のスコアに間接勝利が反映されているが、これは過去に B に勝利した A の影響である。

次に、スコアの更新について考える。式 (4) は

$$W_{t_n} = A_{t_n} + e^{-\beta(t_n-t_{n-1})} W_{t_{n-1}} (I + \alpha A_{t_n}) \quad (6)$$

と書き換えることができるため、時刻  $t_n$  における dynamic win score を表すベクトル  $w_{t_n}$  は、 $t_{n-1}$  までの計算結果を利用して、

$$w_{t_n} = \begin{cases} A_{t_1}^T \mathbf{1} & (n = 1), \\ A_{t_n}^T \mathbf{1} + e^{-\beta(t_n-t_{n-1})} (I + \alpha A_{t_n}^T) w_{t_{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases} \quad (7)$$

と表せる。

同様に、時刻  $t_n$  における dynamic lose score を表すベクトル  $l_{t_n}$  として、 $l_{t_n}$  の更新式を考える。敗北関係は  $A^T$  から得られるため、(7) において  $A_{t_n}$  を  $A_{t_n}^T$  で置き換えることで、 $l_{t_n}$  は

$$l_{t_n} = \begin{cases} A_{t_1} \mathbf{1} & (n = 1), \\ A_{t_n} \mathbf{1} + e^{-\beta(t_n-t_{n-1})} (I + \alpha A_{t_n}) l_{t_{n-1}} & (n > 1) \end{cases} \quad (8)$$

と表せる。

最後に、時刻  $t_n$  における dynamic win-lose score を表すベクトル  $s_{t_n}$  を

$$s_{t_n} = w_{t_n} - l_{t_n} \quad (9)$$

とする。  $s_{t_n}$  の  $i$  番目の要素は、 $i$  番目の参加者の時刻  $t_n$  における dynamic win-lose score を表す。図 3 から図 5 のような試合結果での dynamic win-lose score を計算すると、

$$s_{t_3} = \left( (1 - \alpha^2) e^{-\beta(t_3-t_1)} - \alpha e^{-\beta(t_3-t_2)} - 1, e^{-\beta(t_3-t_1)} - e^{-\beta(t_3-t_2)}, 1 - e^{-\beta(t_3-t_2)} \right)$$

となり、 $s_{t_3}$  の各要素が A, B, C の dynamic win-lose score になる。

Motegi and Masuda は男子プロテニスの試合結果データを利用して、dynamic win-lose score の算出を行っている。男子プロテニスでは ATP ランキングと呼ばれるシステムによってランク付けが行われている。1984 年 7 月 23 日から 2011 年 8 月 15 日までに行われた ATP world Tour tournaments の試合結果である全 137842 試合、5039 選手を計算の対象としている。dynamic win-lose score の算出に際して、各パラメータの値を定める必要がある。実験の際は  $\alpha = 0.13$ 、 $\beta = 1/365$  としている。これは、dynamic win-lose score の予測性能が最も高くなる値に定めている。予測性能とパラメータの関係については、次節で述べる。試合結果のデータから dynamic win-lose score を算出し、主要な 4 選手のスコアの推移と、各選手の ATP ランキングの推移を図 6 に示す。dynamic win-lose score の推移と ATP ランキングの推移の様子は似通っていて、また順位の逆転の時期もほぼ同じであることから、dynamic win-lose score によって選手の実力の推移がよく捉えられていると言える。

dynamic win-lose score の算出に際して、パラメータ  $\alpha$  と  $\beta$  の値を定める必要がある。Motegi and Masuda (2012) は、パラメータの値によって、得られるランキングの上位 300 人がどの程度変わるかを調べている。

ここで、上位  $k$  人のランキングの変動を定量化するために、2 つのランキングの類似度を表す際に用いられるケンドールの順位相関係数 (Fagin et al., 2003) を定義する。2 つのランキングの上位  $k$  人のリストを  $R_1, R_2$  とする。  $R_1 \cup R_2$  に含まれる任意の選手の組  $(r_1, r_2)$  について、次の 3 つの条件のいずれかを満たすとき  $\bar{K}_{r_1, r_2}(R_1, R_2) = 1$  とする。

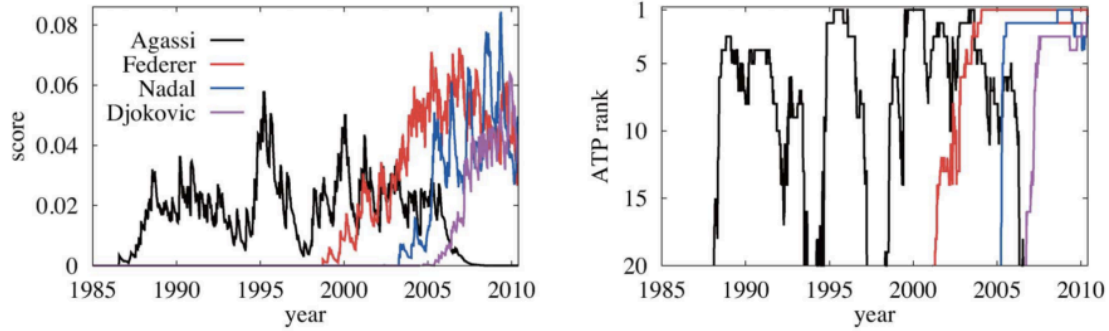


図 6: dynamic win-lose score の推移 (左) と ATP ランキングの推移 (Motegi and Masuda, 2012)

1.  $r_1, r_2$  が両方のランキングに存在するが, 順位が逆になっている.
2. 一方のランキングで  $r_1$  が  $r_2$  よりも上の順位にあり, もう一方のランキングでは  $r_2$  が存在するが  $r_1$  は存在しない.
3.  $r_1$  が 1 つのランキングにのみ存在し,  $r_2$  がもう 1 つのランキングにのみ存在する.

条件を満たさなければ  $\bar{K}_{r_1, r_2}(R_1, R_2) = 0$  とする.  $(r_1, r_2)$  の全ての組について,  $\bar{K}_{r_1, r_2}(R_1, R_2)$  の和をとったものを  $K_r^{(0)}(R_1, R_2)$  として, 2 つランキング  $R_1$  と  $R_2$  の距離とみなす. すなわち,

$$K_r^{(0)}(R_1, R_2) = \sum_{r_1, r_2 \in R_1 \cup R_2} \bar{K}_{r_1, r_2}(R_1, R_2) \quad (10)$$

とする. ランキングの距離を規格化して, 順位相関係数  $K$  を

$$K = 1 - \frac{K_r^{(0)}(R_1, R_2)}{k^2} \quad (11)$$

と表す.  $K$  は  $0 \leq K \leq 1$  であり,  $K$  の値が 1 に近いほど, 2 つのランキングの上位  $k$  人のリストが類似していることを示している.

パラメータの値によって最終的なランキングの上位 300 人のリストがどの程度変動しているかを調べるために, Motegi and Masuda (2012) では, パラメータの値を動かしてランキングを算出し, それぞれの順位相関係数の値を調べている.

図 7 では,  $\beta=1/365$  と定めて,  $\alpha$  の値を動かした時のランキングの変動の様子を表している.  $\alpha \geq 0.06$  より大きい値の場合は 2 つの順位の相関係数が 1 に近く, つまりランキングの変動が極めて小さいことが分かる. また, 図 8 では,  $\beta$  の値を  $1/365$  から動かした時のランキング変動の様子を表している.  $0 \leq \beta \leq 2/365$  の範囲では,  $\alpha$  の値に依らずに相関係数が 1 に近く, つまりランキングの変動が極めて小さいことが分かる. 以上より,  $\alpha \geq 0.06, \beta = 1/365$  として得られるランキングが, パラメータの変動に対してロバストであることが実験的に確認された.

### 2.3 prestige score

Radicchi (2011) は Web ページのランキングをつける手法である PageRank を対戦型スポーツに応用した prestige score を提案している. 本節ではまず, PageRank のアルゴリズムを紹介する.

PageRank は, Brin and Page (1998) が提案した手法で, Web ページの重要度の算出方法として Google 検索エンジンなどで利用されている. PageRank では重要な Web ページの指標として,

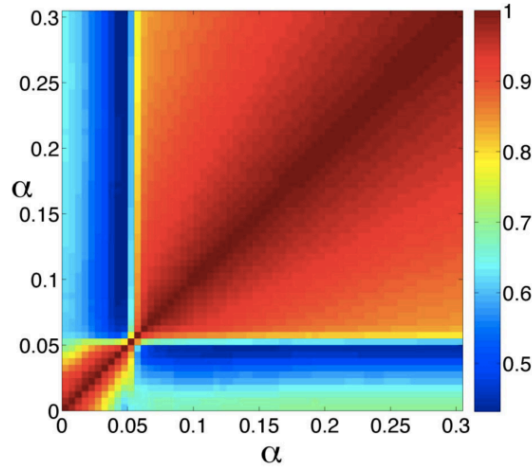


図 7:  $\beta = 1/365$  とした時の順位相関 (Motegi and Masuda, 2012)

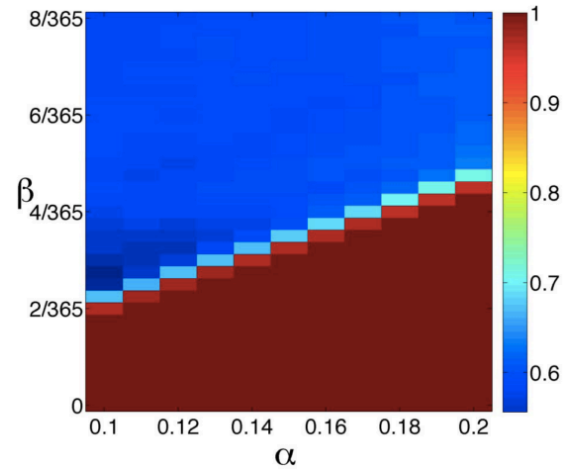


図 8:  $\beta = 1/365$  と比較した時の順位相関 (Motegi and Masuda, 2012)

1. 多くの Web ページからリンクが張られているか
2. 重要な Web ページからリンクを張られているか
3. 乱発されたリンクでなく、貴重なリンクを張られているか

などを考え、ランダムサーファーマデル (Brin and Page, 1998) に基づいて PageRank を定式化している。ランダムサーファーマデルとは、Web ページ閲覧者の遷移の様子を抽象化したものである。ランダムサーファーマデルの遷移は、閲覧している Web ページが他の Web ページにリンクを張っているかどうかによって異なる。他の Web ページにリンクを張っている場合、リンクをランダムに選んで遷移するか、リンクに関係なくランダムに選んだ他の Web ページに遷移する。他の Web ページにリンクを貼っていない場合、遷移を終了するか、ランダムに選んだ他の Web ページに遷移する。無限回遷移を行った後に、Web ページにランダムサーファーマデルが存在する確率を、その Web ページの PageRank とする。この考え方に基いて PageRank の定式化を行う。まず Web ページの数を  $N$  として、 $i$  番目の Web ページの PageRank を  $PR_i$  とする。  $PR_i$  は

$$PR_i = (1 - q) \sum_{j \in V_i} \frac{PR_j}{s_j^{\text{out}}} + \frac{q}{N} \quad (12)$$

と表される。  $q$  はダンピングファクターと呼ばれるパラメータで、ランダムサーファーマデルは一定の確率  $q$  で、ランダムに選ばれた Web ページへと遷移することを表している。習慣的に  $q = 0.15$  がよく用いられる。  $V$  は  $i$  にリンクを張っている Web ページの集合で、  $s_j^{\text{out}}$  は  $j$  が張っているリンクの総数である。PageRank を実際に計算する際には、初期値として  $PR_i = 1/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を与え、式 (12) を、  $PR_i$  の値が収束するまで繰り返し適用する。

## 2.4 prestige score

PageRank のアルゴリズムでは、Web ページのリンク、被リンクの関係を利用して順位付けを行ったが、Radicchi (2011) はスポーツの勝敗関係を利用して順位付けを行う prestige score という手法を提案している。



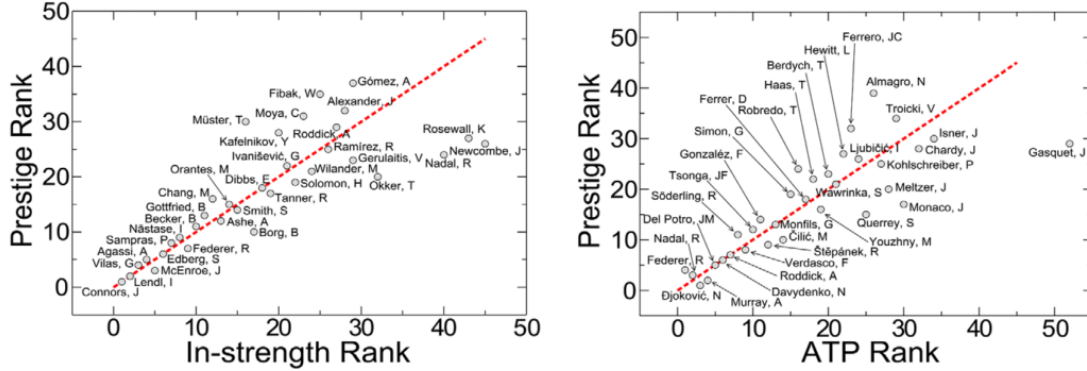


図 9: prestige score でのランキングと勝利数でのランキング (右), prestige score によるランキングと現役選手の ATP ランキング (Radicchi, 2011)

Radicchi が提案する prestige score は, PageRank と同様のアルゴリズムで算出される. まず, 参加者の総数を  $N$  とし,  $i$  番目の参加者のスコアを  $P_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) とする.  $P_i$  は

$$P_i = (1 - q) \sum_{j \notin V} \frac{w_{ji}}{s_j^{\text{lose}}} P_j + \frac{q}{N} + (1 - q) \sum_{j \in V} \frac{P_j}{N} \quad (13)$$

と定義する.  $q$  はパラメータであり, PageRank の習慣に基づいて  $q = 0.15$  と定める.  $V$  は一度も負けたことがない要素の集合を表し,  $s_j^{\text{lose}}$  は  $j$  番目の参加者が  $i$  に負けた回数を表す. 式 (13) の第 1 項は  $i$  が他のチームに勝利した回数から計算され, 第 2 項は PageRank のアルゴリズムと同様, 一定確率  $q$  でランダムにジャンプすることを表し, 第 3 項は  $s_j^{\text{lose}} = 0$  になる場合の項である. 実際に prestige score を計算する際には, 初期値として  $P_i = 1/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を与え, 値が収束するまで式 (13) を適用する.

Radicchi (2011) は男子プロテニスのデータを利用して Prestige score を算出している. 1968 年から 2010 年までの男子プロテニスについて, 全試合結果を利用して各選手の prestige score を計算し, ランキングを付けている. 図 9 に, Prestige score によるランキングと, 他の手法によるランキングの比較結果を表す. 図 9 左は, 主要な選手で通算勝利数の順位と prestige score による順位をプロットしたものである. prestige score によるランキングは通算勝利数にほぼ比例していることが分かる. しかし, 2011 年シーズンで現役の選手である Rafael Nadal は通算勝利数では 40 位であるが, prestige score では 24 位と大きな差があることなどから, 近年の活躍が目覚ましい選手が prestige score によって高く評価されていることが分かる.

## 2.5 dynamic prestige score

Motegi and Masuda (2012) では prestige score の発展として, 時間経過の影響を考慮した dynamic prestige score を提案している. dynamic prestige score を算出する際は, 過去の勝利の影響が時間経過とともに指数的に減少させる. 時刻  $t$  で  $\tilde{w}_{ji}(t)$  を

$$\tilde{w}_{ji}(t) = \sum_n (A_{t_n})_{ji} e^{-\beta(t-t_n)} \quad (14)$$

と定義する.  $A_{t_n}$  は, Motegi and Masuda (2012) の提案する dynamic win-lose score と同様, 時刻  $t_n$  における試合結果を表す行列である.  $\beta$  はパラメータで, 減衰の早さを反映している. 式 (13) の

$w_{ji}$  を  $\tilde{w}_{ji}$  で置き換えることで、時間経過を反映させたスコアの算出を行う。つまり、参加者  $i$  の時刻  $t$  における dynamic prestige score を  $DP_i$  とすると、

$$DP_i(t) = (1 - q) \sum_{j \notin V} \frac{\tilde{w}_{ji}(t)}{\sum_k \tilde{w}_{jk}(t)} DP_j + \frac{q}{N} + (1 - q) \sum_{l \in V} \frac{DP_l}{N} \quad (15)$$

と表せる。

### 3 ランキングシステムの比較

Motegi and Masuda (2012) ではランキングシステムの性能比較のために、各ランキングシステムの予測能力を調べている。時刻  $t_{n+1}$  で行われる試合について、時刻  $t_n$  におけるランキングの上位の参加者が勝利すると予測する。ただし、順位が等しい参加者の対戦については、予測を行わないものとする。このとき、ランキング下位の参加者が勝利した回数を  $v$ 、行われた試合数を  $n$  として、同じランキングの参加者が対戦した試合数を  $e$  とすると正答率は  $(n - e - v) / (n - e)$  と表せる。このように定義した正答率によって、各ランキングの性能を定量的に比較する。Motegi and Masuda (2012) で利用した男子プロテニスの試合結果のデータを用いて算出された、各ランキングシステムの正答率の推移を図 10 に示す。

図 10 (a) は、dynamic win-lose score の正答率の推移を表している。最終的な正答率は  $\alpha = 0.13$  のときに最も大きくなっている (0.661)。しかし、 $\alpha$  の値を動かした時も正答率は大きく変わらないことも分かる ( $\alpha = 0.08, 0.20$  のときの正答率はそれぞれ 0.659, 0.661)。これは 2.2 節で紹介した、dynamic win-lose score のパラメータに対するロバスト性によるものだと考えられる。

図 10 (b) は、win-lose score の正答率の推移を表している。win-lose score ではパラメータ  $\alpha$  の値を定める必要があるが、式 (1) が成立するためには、試合結果を表す行列のスペクトル半径  $\lambda$  について、 $\alpha < 1/\lambda$  でなくてはならない。実験に用いたデータで、試合結果を表す行列のスペクトル半径は 206.80 であったので、 $\alpha < 1/206.80 = 0.0048355$  となる。図 10 (b) では、 $\alpha = 0.004835$  と  $\alpha = 0$  のときの正答率の推移が表されている。また、正答率は  $\alpha$  の値について単調に減少することも確認されていて、 $\alpha = 0$  のときの正答率は 0.623 になる。

図 10 (c) は、prestige score の正答率の推移を表している。prestige score の算出の際は、式 (13) でパラメータ  $q$  の値を定める必要がある。図 10 (c) から、 $q = 0.05$  の時の正答率が 0.631 で最も良くなることが分かる。

図 10 (d) は、dynamic prestige score の正答率の推移を表している。dynamic prestige score の算出の際も、式 (15) でパラメータ  $q$  の値を定める必要がある。図 10 (d) から、 $q = 0.05$  の時の正答率が 0.668 で最も良くなることが分かる。

以上の結果をまとめると、dynamic win-lose score の正答率は、 $0.08 \leq \alpha \leq 0.20$ 、 $\beta = 1/365$  の時に、win-lose score と prestige score の正答率を上回るが、dynamic prestige score で  $q = 0.05$  としたときは、dynamic win-lose score の正答率よりも僅かに高くなる。

### 4 まとめ

ネットワーク構造を利用したスポーツのランキングシステムとして提案されている、win-lose score (Park and Newman, 2005)、prestige score (Radicchi, 2011)、これらのランキングシステムで時間の情報を利用した dynamic win-lose score と dynamic prestige score (Motegi and Masuda,

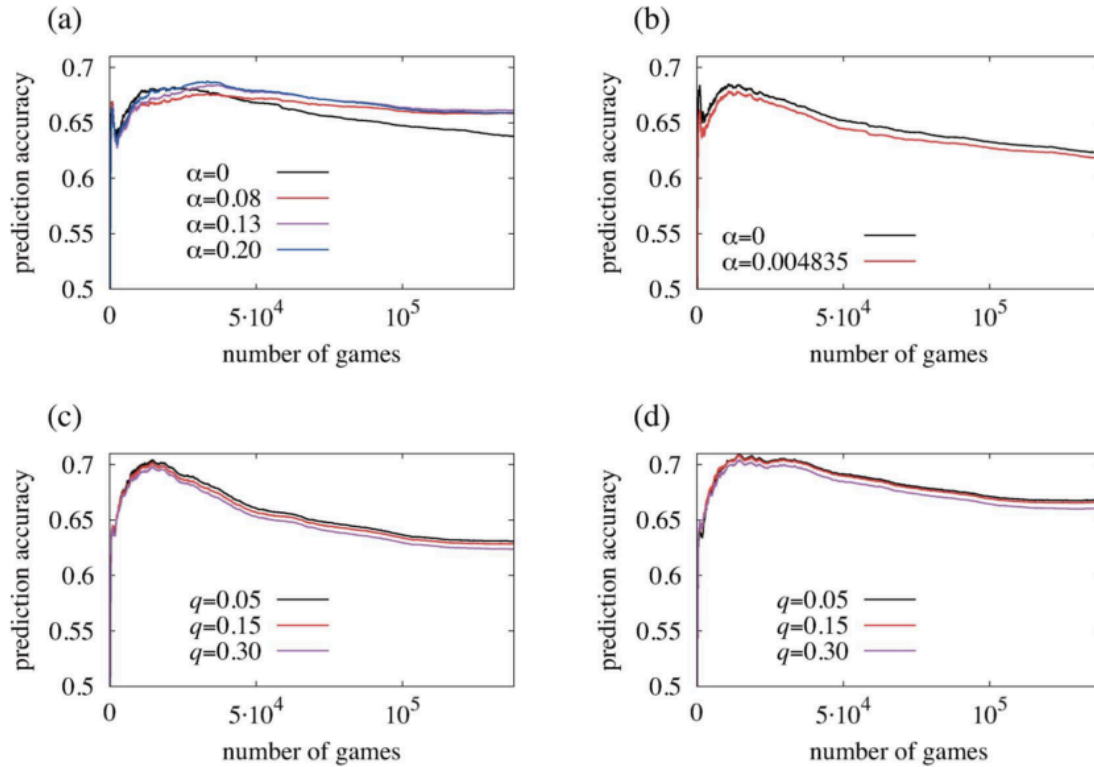


図 10: 各種ランキングシステムの正答率の推移 (Motegi and Masuda, 2012).

2012) について, それぞれのランキングの算出方法と性能評価を紹介した. また, Motegi and Masuda (2012) で行われた, ランキングシステムの性能比較を紹介した.

今後の課題として, 試合の勝敗関係以外で同様の手法を利用することが挙げられる. 例としては, 野球の打率や安打数には対戦した投手の成績が加味されていないが, 今回紹介したランキングシステムと同様の手法が利用できれば, 強い投手から好成績を上げる選手がより高く評価されるような指標が得られるのではないかと考えられる. 野球に限らずその他のスポーツにおいても, チームの攻撃力や守備力の評価などが可能になれば, より豊かな知見が得られるのではないかと期待している.

## 参考文献

- Bradley, R. A. and Terry, M. E. (1952). Rank analysis of incomplete block designs: I. the method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3/4):324–345.
- Brin, S. and Page, L. (1998). The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30(1-7):107–117.
- Cattelan, M., Varin, C., and Firth, D. (2013). Dynamic bradley-terry modelling of sports tournaments. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 62(1):135–150.
- Colley, W. N. (2002). Colley’s bias free college football ranking method: the colley matrix explained. *Princeton University*.

- Fagin, R., Kumar, R., and Sivakumar, D. (2003). Comparing top k lists. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 17(1):134–160.
- Huang, T. K., Weng, R. C., and Lin, C. J. (2006). Generalized bradley-terry models and multi-class probability estimates. *The Journal of Machine Learning Research*, 7:85–115.
- Massey, K. (1997). Statistical models applied to the rating of sports teams. *Bluefield College*.
- Motegi, S. and Masuda, N. (2012). A network-based dynamical ranking system for competitive sports. *Scientific reports*, 2:904.
- Park, J. and Newman, M. E. J. (2005). A network-based ranking system for US college football. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(10):P10014.
- Radicchi, F. (2011). Who is the best player ever? A complex network analysis of the history of professional tennis. *PloS one*, 6(2):e17249.
- Rao, P. and Kupper, L. L. (1967). Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the bradley-terry model. *Journal of the American Statistical Association*, 62(317):194–204.
- Stefani, R. T. (1997). Survey of the major world sports rating systems. *Journal of Applied Statistics*, 24(6):635–646.