Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL

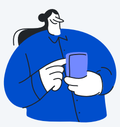
Unidade 1

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Aula 1

Matrizes: definição e operações

Matrizes: definição e operações



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer alguns tópicos da matemática das matrizes. Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois ele é uma parte fundamental da álgebra linear. As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como física, estatística, ciência da computação, engenharia e economia, entre outras. Uma das aplicações mais comuns é na resolução de sistemas de equações lineares pelo método da eliminação de Gauss. Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Nesta aula serão estudadas as matrizes. As matrizes têm uma ampla variedade de aplicações em diversas áreas, como matemática, física, estatística, ciência da computação, engenharia e muitos outros campos.

Para fixarmos os conceitos que veremos nesta aula, considere o seguinte problema: você é proprietário de uma confeitaria, e no seu dia a dia ocorrem diversas situações que necessitam de um tratamento de informações de maneira organizada para facilitar a gestão dos negócios. Para saber que preços serão repassados ao consumidor final, você decidiu investigar seus custos por meio de matrizes para estabelecer preços e obter os lucros desejados. Você recebeu uma encomenda de três tipos diferentes de doces: brigadeiro, beijinho e pé de moleque, e utilizou, nessas receitas, quatro ingredientes

$$(x,\ y,\ z,\ t)$$

Bloco 1

Doces	x	y	z
Brigadeiro	3	6	1
Beijinho	4	4	2
Pé de moleque	0	1	1

Bloco 2

t
3
2
6

Tabela 1 | Doces. Fonte: elaborada pela autora.

Ingredientes	**Preço**
x	R$ 0,20
y	R$ 0,80
z	R$ 1,20
t	R$ 2,80

Tabela 2 | Ingredientes. Fonte: elaborada pela autora.

A partir das informações fornecidas, como determinar a matriz que registra o preço final de cada receita?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos de matrizes e suas operações.

Então, vamos lá?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Matrizes: definição e operações

As matrizes podem ser entendidas como tabelas retangulares de elementos, nas quais cada entrada depende de dois índices (Lipschutz; Lipson, 2006).

Sejam m e n números naturais não nulos. Uma matriz $m \times n$ (lê-se: m por n) é uma tabela de $m.n$ números reais, com m linhas (fileiras horizontais) e n colunas (fileiras verticais).

m

n

$m \times n$

m

n

$m.n$

m

n

Consideremos uma matriz A do tipo, ordem ou tamanho $m \times n$. Qualquer elemento dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, em que o índice i se refere à linha em que o elemento se encontra, e o índice j se refere à coluna. Note que cada elemento da matriz deve conter dois índices para poderem ser encontrados dentro da matriz.

A

$m \times n$

$$a_{ij}$$

$$i$$

$$j$$

De maneira mais geral, representamos a matriz A do tipo $m \times n$ por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que i e j são números positivos, e a_{ij} é um elemento qualquer de A.

$$A$$

$$m \times n$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$i$$

$$j$$

$$a_{ij}$$

$$A$$

Exemplos:

1. A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 3×2, pois tem 3 linhas e 2 colunas.
2. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é do tipo 3×3, pois tem 3 linhas e 3 colunas.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}$$

$$a_{12}$$

$$a_{21}$$

$$a_{22}$$

$$a_{31}$$

$$a_{32}$$

Exemplo: Uma indústria tem quatro fábricas, A, B, C e D, e cada uma delas produz três produtos, 1, 2 e 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana: a linha apresenta a produção e as colunas, as fábricas:

$$F = \begin{bmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{bmatrix}$$

. Quantas unidades do produto foram fabricadas pela fábrica

$$C$$

?

$$F = \begin{bmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{bmatrix}$$

$$C$$

Resolução: Queremos o termo

$$a_{23}$$

, portanto, 420 produtos.

$$a_{23}$$

Podemos destacar alguns **tipos especiais de matrizes**:

- **Matriz nula:** todos os seus elementos são iguais a zero: $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- **Matriz linha (vetor linha):** contém uma única linha: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- **Matriz coluna (vetor coluna):** contém uma única coluna: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- **Matriz quadrada de ordem n:** matriz com n linhas e n colunas. Chamamos de diagonal principal de A a diagonal em que os elementos com índices da linha são iguais aos índices da coluna, ou seja, diagonal formada pelas entradas a_{11}, a_{22}, . . ., a_{nn}:
$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$
Exemplo: $T = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 3 & 2 \\ 5 & \mathbf{8} & 1 \\ 2 & 2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. A diagonal principal é dada pelos elementos: -1, 8, 0.
- **Matriz identidade:** matriz quadrada em que todos os elementos que estão na sua diagonal principal são iguais a 1, e os demais são nulos: $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- **Matriz transposta:** a transposta da matriz A, denotada por A^t, é a matriz obtida escrevendo as colunas de A, na ordem, como linhas. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ então $A^t = (b_{ij})$ é a matriz $n \times m$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$.
Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
Observe que se a matriz A é do tipo 3×2, a sua transposta será 2×3.

Antes de discutirmos as operações com matrizes, precisamos falar da **identidade entre matrizes**. Duas matrizes

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A = B$$

$$a_{ij} = b_{ij}$$

$$i \in \{1,2,3,\ldots,m)$$

$$j \in \{1,2,3,\ldots,n)$$

Exemplo: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} d & 3 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$A = B$$

Resolução: Para que as matrizes A e B sejam iguais:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = 2$$

$$d = 1$$

Siga em Frente...

Operações com matrizes

A **soma** das matrizes *A* e *B* de mesma ordem resulta na matriz *C*, também de mesma ordem, tal que cada um de seus elementos é a soma dos elementos correspondentes de *A* e *B*. Mais formalmente: sejam

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$C = (c_{ij})_{m \times n}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$1 \leq i \leq m$$

$$1 \leq j \leq n$$

Exemplo: Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C$$

$$C = A + B$$

Resolução:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 1+1 & 2+1 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A adição de matrizes tem as seguintes **propriedades**: sejam

$$A$$

$$B$$

$$C$$

- Comutativa: $A + B = B + A$.
- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- Existência do elemento neutro: existe N tal que $A + N = N + A = A$, qualquer que seja A do tipo $m \times n$.
  Veja que N é a matriz nula do tipo $m \times n$, isto é, $N = O_{m \times n}$.
- Existência do oposto ou simétrico: existe $A"$ tal que $A + A" = O_{m \times n}$, ou seja, $A"$ é o oposto ou simétrico de A.

Antes de falarmos da operação de subtração, precisamos definir a **matriz oposta**. Sendo

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$-A$$

$$A$$

$$A + (-A) = 0_{m\times n}$$

$$0_{m\times n}$$

$$-A$$

Exemplo: se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sejam

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A$$

$$B$$

$$A - B$$

$$A$$

$$B$$

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo: Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C$$

$$C = A + B$$

Resolução:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 0-3 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix} \rightarrow A - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se

$$A$$

$$k$$

$$kA$$

$$A$$

$$k$$

Exemplo: Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = 3A$$

Resolução:

$$B = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 2.3 & 3.3 \\ 4.3 & 1.3 \\ -1.3 & 5.3 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$$

.

$$B = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 2.3 & 3.3 \\ 4.3 & 1.3 \\ -1.3 & 5.3 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Sejam

$$A$$

$$B$$

$$k$$

$$g$$

1. $k.(g.A) = (k.g).A$
2. $k.(A + B) = kA + kB$
3. $(k + g).A = kA + gA$
4. $1.A = A$

Finalizando as operações com matrizes, temos **produto matricial**, uma das mais importantes operações entre matrizes.

Dada as matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$B = (b_{jk})_{n \times p}$$

$$C = (c_{ik})_{m \times p}$$

$$c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \ldots + a_{in}.b_{nk}$$

$$i \in \{1{,}2, \ldots, m\}$$

$$k \in \{1{,}2, \ldots, p\}$$

A definição de multiplicação de matrizes só garante a existência do produto

$$A \cdot B$$

$$A$$

$$B$$

$$A$$

$$B$$

$$A$$

$$2 \times 3$$

$$B$$

$$3 \times 5$$

$$C$$

$$3 \times 5$$

Exemplo: Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B$$

Resolução:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & 3+(-1) & 0+(-1) \\ 0+10 & 0+2 & 0+2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & 3+(-1) & 0+(-1) \\ 0+10 & 0+2 & 0+2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sejam as matrizes

$$A_{m\times n}$$

$$B_{n\times p}$$

$$C_{p\times q}$$

$$D_{r\times m}$$

$$E_{m\times n}$$

- Associativa: $(\mathrm{A}.\mathrm{B}).\mathrm{C}=\mathrm{A}.(\mathrm{B}.\mathrm{C})$.
- Distributiva à direita em relação à adição: $(\mathrm{A}+\mathrm{E}).\mathrm{B}=\mathrm{A}.\mathrm{B}+\mathrm{E}.\mathrm{B}$.
- Distributiva à esquerda em relação à adição: $D.(A+E)=D.A+D.E$.

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, geralmente

$$A.B\neq B.A$$

Vamos Exercitar?

Para fixarmos os conceitos vistos, propusemos o seguinte problema: você recebeu uma encomenda de três tipos diferentes de doces: brigadeiro, beijinho e pé de moleque. Você utilizou, nessas receitas, quatro ingredientes

$$(x,\ y,\ z,\ t)$$

A resposta a esse problema será uma nova matriz obtida efetuando o produto dos valores contidos na Tabela 1 e na Tabela 2.

Bloco 1

Doces	x	y	z
Brigadeiro	3	6	1
Beijinho	4	4	2
Pé de moleque	0	1	1

Bloco 2

t
3
2
6

Tabela 1 | Doces. Fonte: elaborada pela autora.

Ingredientes	**Preço**
x	R$ 0,20

y	R$ 0,80
z	R$ 1,20
t	R$ 2,80

Tabela 2 | Ingredientes. Fonte: elaborada pela autora.

Vamos escrever as Tabelas 1 e 2 na forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}80 \\ 1{,}20 \\ 2{,}80 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

A partir das informações fornecidas, vamos determinar a matriz que registra o preço final de cada receita da seguinte forma:

$$C_{3\times 1} = A_{3\times 4}.\,B_{4\times 1}$$

$$A$$

$$B$$

$$C = \begin{bmatrix} 3.0{,}20 + 6.0{,}80 + 1.1{,}20 + 3.2{,}80 \\ 4.0{,}20 + 4.0{,}80 + 2.1{,}20 + 2.2{,}80 \\ 0.0{,}20 + 1.0{,}80 + 1.1{,}20 + 6.2{,}80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 + 4{,}80 + 1{,}20 + 8{,}40 \\ 0{,}80 + 3{,}20 + 2{,}40 + 5{,}60 \\ 0 + 0{,}80 + 1{,}20 + 16{,}80 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 15{,}00 \\ 12{,}00 \\ 18{,}80 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$C$$

Saiba mais

Para aprofundar seus conhecimentos, acesse o material *Matrizes*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

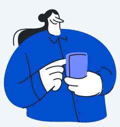
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; DOHERTY, A.; ANDRADE, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Aula 2

Determinantes

Determinantes



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer os métodos para o cálculo de determinantes de matrizes. O determinante é uma propriedade numérica associada a uma matriz quadrada.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois tem várias aplicações em diferentes áreas da matemática e disciplinas relacionadas. Determinantes são utilizados, por exemplo, para verificar se um sistema de equações lineares tem solução.

Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Olá, estudante. Seja bem-vindo!

As matrizes quadradas se relacionam com um tipo de função, a função determinante, que associa um número real a uma matriz quadrada. Os determinantes simplificam e sistematizam a resolução de sistemas de equações lineares, e dentre as várias aplicações dos determinantes na matemática, temos o cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

Para fixarmos os conceitos, considere o seguinte problema: imagine que você recebeu em sua confeitaria mais uma encomenda, agora para uma grande festa. Serão servidos 600 pedaços de bolo como os da Figura 1.

Figura 2 | Rascunho da base do bolo. Fonte: Portes e Farias (2016, p. 26).

E agora, o que fazer para calcular o volume de bolo?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos que tratam de determinantes e, mais especificamente, algumas regras que lhe permitirão calculá-los.

Então, vamos lá?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Determinantes

Determinante é um tipo de função que associa um número real

$$f(X)$$

$$X$$

$$|A|$$

$$A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Em alguns livros podemos encontrar

$$\det(A)$$

$$\det[a_{ij}]$$

$$A$$

Tenha o cuidado de não confundir a notação

$$|A|$$

Seja

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$n$$

$$n \in \mathbb{N}$$

1. O determinante de A se anula se:
   - a matriz A apresentar uma linha ou uma coluna nula, ou seja, todos os elementos da linha ou da coluna iguais a zero;
   - a matriz A apresentar duas linhas ou duas colunas iguais;
   - a matriz A tiver duas linhas ou duas colunas proporcionais, isto é, os elementos de uma são múltiplos da outra.
2. Se A é uma matriz triangular superior ou triangular inferior, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, valendo a propriedade, também, se A é uma matriz diagonal.
3. Seja k um escalar não nulo. Se B é uma matriz resultante da multiplicação de somente uma linha ou somente uma coluna de A por k, então $|B| = k|A|$.

4. Se B é a matriz que resulta quando permutamos duas linhas ou duas colunas de A, então $|B| = -|A|$.
5. Se somarmos uma linha ou uma coluna com um múltiplo de outra, obtemos uma nova matriz B. Nesse caso, A e B são ditas equivalentes, e $|B| = |A|$.
6. $|A^t| = |A|$.
7. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$, com $|A| \neq 0$.
8. $|A.\,B| = |A|.\,|B|$.

Cálculo de determinantes

Conseguimos obter o determinante de uma matriz quadrada executando operações com seus elementos.

- **Matrizes de ordem $\mathbf{1 \times 1}$:** sendo A uma matriz de ordem $n = 1$, o determinante de A será seu único elemento.
  Exemplo: Se $A = [a_{11}]$, então $|A| = a_{11}$.
- **Matrizes de ordem $\mathbf{2 \times 2}$:** sendo A uma matriz de ordem $n = 2$, ou seja, uma matriz do tipo 2×2, o determinante da matriz A é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.
  Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então $|A| = a_{11}.\,a_{22} - a_{12}.\,a_{21}$.
- **Matrizes de ordem $\mathbf{3 \times 3}$:** sendo A uma matriz de ordem $n = 3$, ou seja, uma matriz do tipo 3×3, podemos definir seu determinante por meio de um método prático chamado **regra de Sarrus**.
- **Matrizes $\boldsymbol{n \times n}$, com $\boldsymbol{n \geq 3}$:** sendo A uma matriz de ordem $n \geq 3$, utilizamos o **Teorema de Laplace** para definirmos o seu determinante.

Siga em Frente...

Regra de Sarrus

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Escrever as duas primeiras colunas da matriz

$$A$$

$$A$$

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Iniciando de cima, da esquerda para a direta, devemos somar os produtos dos elementos das diagonais de mesma direção que a principal. Também de cima, da direita para a esquerda, devemos subtrair os produtos dos elementos das diagonais de mesma direção que a secundária:

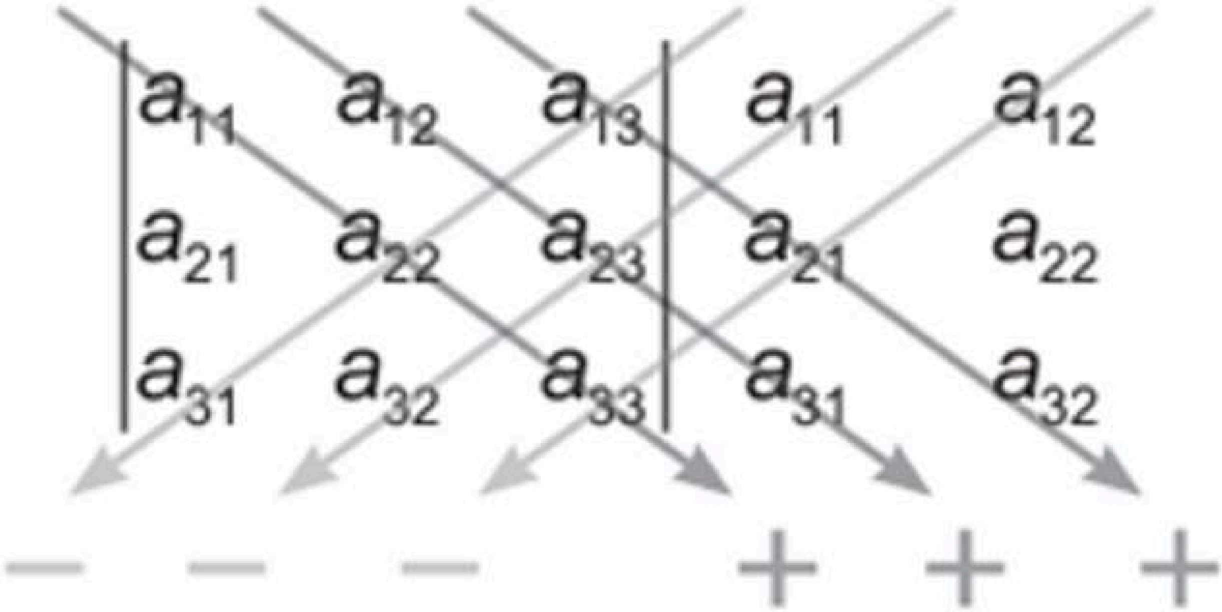


Figura 3 | Método de Sarrus. Portes e Farias (2016, p. 28).

3. Agora, realizando cálculos elementares, o determinante da matriz *A* é definido por:

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a$$

Exemplo: Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$|A| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

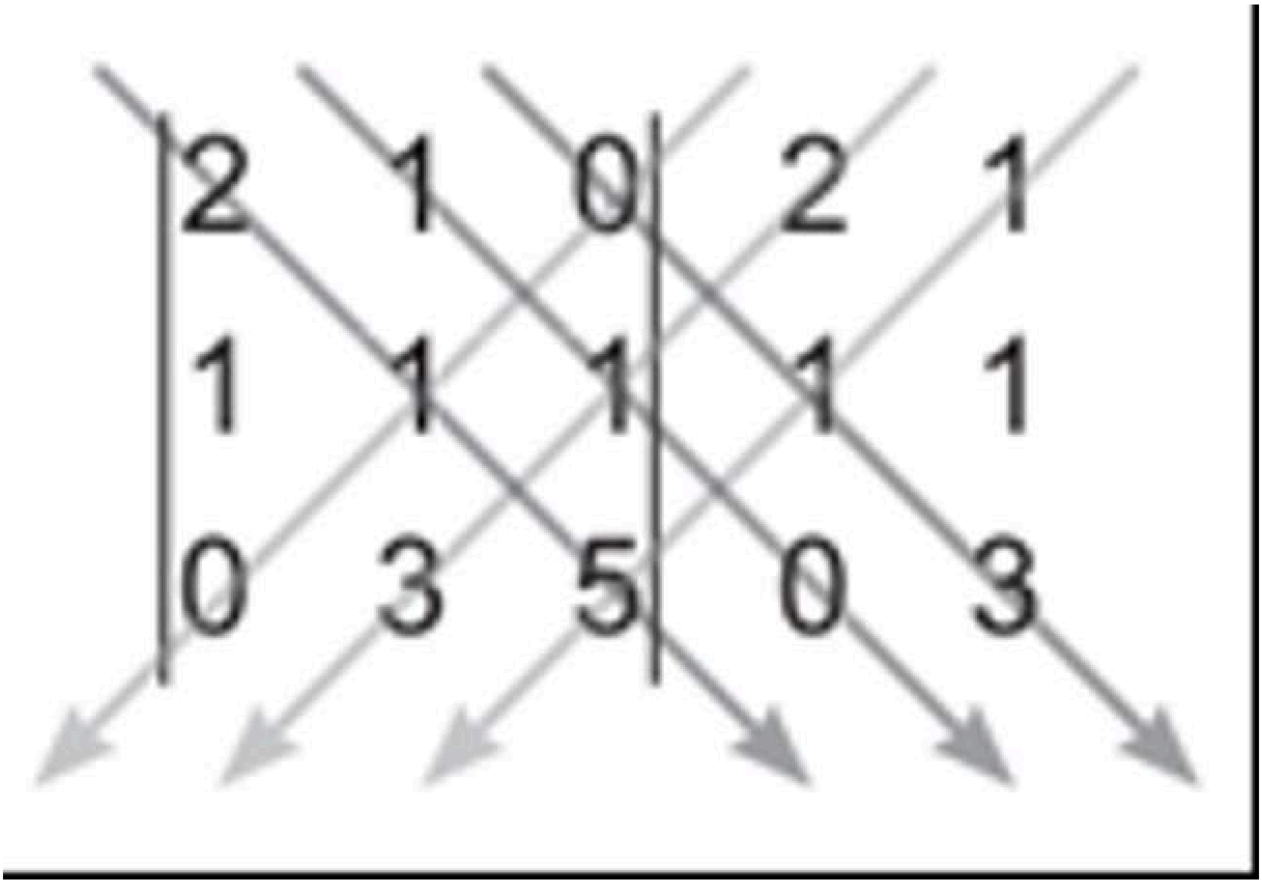


Figura 4 | Método de Sarrus: exemplo. Portes e Farias (2016, p. 29).

$$|A| = 2.1.5 + 1.1.0 + 0.1.3 - 0.1.0 - 2.1.3 - 1.1.5 = -1$$

Teorema de Laplace

Seja

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$n \geq 3$$

$$a_{ij}$$

$$i$$

$$j$$

$$D_{ij}$$

$$a_{ij}$$

$$A$$

Exemplo: Determine o menor complementar do elemento

$$a_{32}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Eliminando a linha 3 e a coluna 2 de

$$A$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{3} & 2 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Então

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 2.2 = -2$$

Assim, o menor complementar do elemento

$$a_{32}$$

$$-2$$

Seja

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$n$$

$$n \geq 3$$

$$a_{ij}$$

$$(-1)^{i+j}$$

$$D_{ij}$$

$$a_{ij}$$

$$A$$

$$a_{ij}$$

$$A_{ij}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Com base nas definições de menor complementar e de cofator, podemos descrever o **Teorema de Laplace**.

O determinante de

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$n$$

$$n \geq 3$$

Deste modo, dada a matriz

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \; . \, A_{11} + a_{21} . \, A_{21} + \cdots + a_{n1} . \, A_{n1}$$

Podemos empregar o Teorema de Laplace escolhendo como referência qualquer linha ou qualquer coluna da matriz dada. Para facilitar os cálculos, é conveniente escolhermos a linha ou a coluna com a maior quantidade de zeros.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos escolher a primeira linha da matriz:

$$|A| = \mathbf{2}.\,(\mathbf{-1})^{1+1}A_{11} + \mathbf{1}\cdot(\mathbf{-1})^{1+2}A_{12} + \mathbf{1}\cdot(\mathbf{-1})^{1+3}A_{13}$$

$$|A| = 2A_{11} - A_{12} + A_{13}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(20-6) - (2) + (-5)$$

$$|A| = 21$$

Vamos Exercitar?

Retornando ao problema proposto no início desta aula: para sabermos qual será o volume de bolo a ser preparado, precisamos, antes de tudo, calcular a área da base do mesmo nas dimensões do rascunho feito pelo cliente.

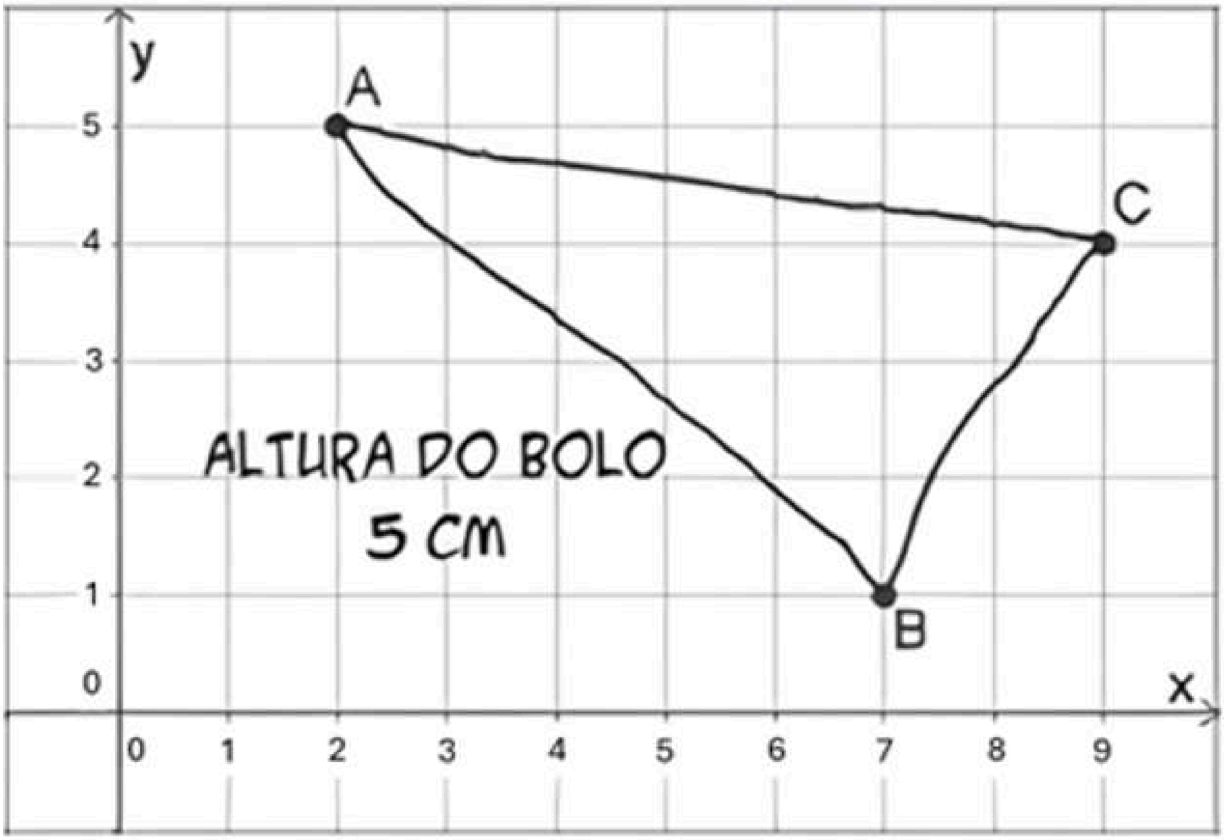


Figura 2 | Rascunho da base do bolo. Fonte: Portes e Farias (2016).

Faremos uso do método de cálculo de área por determinantes utilizando as coordenadas dos pontos. A área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left| det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$x_i$$

$$y_i$$

$$x$$

$$y$$

$$A = \frac{1}{2}\left| det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}[(2+45+28)-(9+8+35)] = \frac{23}{2} = 11{,}5$$

Ou seja, a área da base de cada pedaço de bolo é 11,5 cm^2. Como a altura do bolo é 5 cm, o volume de cada bolo será de 57,5 cm^3. Mas a confeitaria precisa preparar 600 pedaços iguais, então:

$$V_{total} = 600\ .\ 57{,}5 = 34500$$

Conhecendo o volume de bolo, em centímetros cúbicos, é possível determinar um orçamento para o cliente.

Saiba mais

Acesse o material *Determinantes* para aprofundamento dos estudos de **determinantes e o Teorema de Laplace**.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

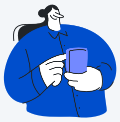
SANTOS, N. M.; DOHERTY, A.; ANDRADE, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Aula 3

Sistemas de Equações Lineares

Sistemas de equações lineares

Este conteúdo é um vídeo!



Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você
Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer alguns métodos de resolução de sistemas de equações lineares. Sistemas de equações lineares são conjuntos de equações lineares que compartilham as mesmas variáveis.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois os sistemas de equações lineares têm uma ampla variedade de aplicações práticas em diversas áreas, como engenharia, física, economia, ciência da computação, estatística e muitas outras.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Dando sequência ao estudo de matrizes, abrimos caminho para explorar outras fascinantes possibilidades. Nesta etapa, vamos mergulhar na estreita relação entre as matrizes e os sistemas lineares. É a esse ponto que direcionaremos nossa atenção, dedicando esforços à compreensão e aplicação dessa conexão.

Ao explorarmos a interseção entre matrizes e sistemas lineares, descobriremos uma ferramenta poderosa que nos permitirá encontrar soluções para sistemas de equações. Essa ferramenta expande nosso entendimento matemático e nos capacita a resolver problemas do cotidiano por meio de métodos analíticos e sistemáticos.

Imagine que sua confeitaria tenha recebido mais uma encomenda de doces para uma festa, e como você já havia calculado anteriormente o preço de custo de cada receita, pode estabelecer os preços de venda de cada tipo de doce. Ficou decidido que a unidade de brigadeiro custaria R$ 1,50, de beijinho R$ 2 e de pé de moleque R$ 3,50. A taxa de entrega é R$ 10. Para essa festa, foi encomendado um total de 250 unidades de doces e, ao fazer a entrega, você recebeu um cheque de R$ 570. Sabendo que a quantidade de pés de moleque corresponde a 2/3 do número de brigadeiros, qual foi a quantidade de beijinhos?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário que veja alguns conceitos de sistemas de equações lineares, mais especificamente, do método que lhe permitirá resolvê-los.

Vamos lá?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Sistemas de equações lineares

O que é uma **equação linear**? Equação linear é uma equação em que os expoentes de todas as incógnitas (ou variáveis) são sempre iguais a 1, e, mais ainda, em uma equação linear não há termo misto, isto é, ela não pode apresentar o produto de duas ou mais variáveis.

Exemplos:

- $x + 5t - 350z = 9 \rightarrow$ equação linear.
- $x^2 + 2\boldsymbol{y^2} - z = 1 \rightarrow$ equação não linear.
- $x + \boldsymbol{yz} = 5 \rightarrow$ equação não linear.

De modo mais preciso, equação linear é toda equação nas variáveis

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$a_1 . x_1 + a_2 . x_2, \ldots, a_n . x_n = b$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$b$$

Sistema linear é um conjunto

$$m \times \ n$$

$$m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow$ sistema linear com três equações e três incógnitas.
- $\begin{cases} x - 2y - z + w = 1 \\ -x + y - z + 2w = 7 \end{cases} \rightarrow$ sistema linear com duas equações e quatro incógnitas.

Estamos interessados no estudo dos métodos de resolução de sistemas lineares do tipo

$$m \times \ n$$

$$m \ \geq n > 2$$

$$2 \times 2$$

Solução de um sistema de equações lineares

Uma sequência

$$S=\{s_1, s_2, \ldots,\ s_n\}$$

$$n$$

Exemplo: O par ordenado

$$(3,\ 2)$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \\ 4x+5y=22 \end{cases}$$

Resolução: Substituindo

$$x$$

$$y$$

$$\begin{cases} 3+2 \\ 2.3-2 \\ 4.3+5.2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} =5(V) \\ =4(V) \\ =22\ (V) \end{cases}$$

Como todas as sentenças são verdadeiras, então o par ordenado (3, 2) é solução do sistema dado.

Uma pergunta que você pode estar fazendo é: é sempre possível encontrar a solução de um sistema linear? Com relação à solução de um sistema linear, temos três possibilidades:

- O sistema tem uma única solução e é classificado com **sistema possível e determinado (SPD):** $\begin{cases} 2x+3y=18 \\ 3x+4y=25 \end{cases} \rightarrow\ x=3$ e $y=4$.
- O sistema tem infinitas soluções e é classificado como **sistema possível e indeterminado (SPI):** $\begin{cases} 4x+2y=100 \\ 8x+4y=200 \end{cases} \rightarrow y=50-2x$.

O sistema não tem solução e é classificado como **sistema impossível (SI)**, sendo $S=\emptyset$

(conjunto vazio) o seu conjunto solução:

$$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$$

.

$$S = \emptyset$$

$$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$$

Siga em Frente...

Matrizes associadas a um sistema

Considere o conjunto de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O conjunto é composto por

$$m$$

$$n$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Podemos identificar quatro matrizes:

1. Matriz incompleta ou matriz dos coeficientes: formada somente pelos coeficientes que acompanham as incógnitas: Observe que os números à direita da igualdade (

$$b_i$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Matriz completa ou matriz aumentada: formada pelos coeficientes das variáveis mais os termos independentes de cada equação do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

3. Matriz das incógnitas: essa é uma matriz coluna formada pelas incógnitas do sistema.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4. Matriz dos termos independentes: essa é uma matriz coluna formada pelos termos independentes de cada equação.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo: Determine a representação matricial associada ao sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

Resolução: Escrevendo o produto da matriz dos coeficientes com a matriz das incógnitas e igualando à matriz dos termos independentes, temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & | & 2 \\ 4 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Determine o sistema associado à representação matricial dada:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 7y + 2z = 14 \\ -x + y + 3z = 13 \end{cases}$$

Sistemas escalonados e matriz triangular superior

Um sistema linear

$$m \times n$$

$$B_{(m \times (n+1))}$$

Considerando a matriz completa associada ao sistema

$$\begin{cases} x - y + 2 = 5 \\ 0x + 2y - 3z = 7 \\ 0x + 0y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2 = 5 \\ 2y - 3z = 7 \\ 4z = 2 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ \mathbf{0} & 2 & -3 & 7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \end{bmatrix}$$

Uma ferramenta para resolver sistemas lineares é o **método da eliminação de Gauss** com pivoteamento, que consiste em transformar o sistema dado em outro sistema triangular superior, facilitando sua resolução. Para isso, realizamos algumas operações chamadas **operações elementares**: permutar (trocar de posição) duas equações do sistema; multiplicar uma das equações por uma constante não nula; substituir uma equação multiplicando-a por um escalar e adicionando (ou subtraindo) com alguma outra equação.

Ao efetuarmos qualquer uma das operações elementares sobre as equações do sistema, as soluções continuarão sendo as mesmas. Veja que essas operações são aplicadas somente sobre os coeficientes do sistema; as variáveis não se alteram. Assim, podemos utilizar somente a matriz aumentada do sistema para efetuarmos os cálculos e transformá-la em uma matriz na forma de escada.

Logo, valem as operações elementares também sobre as linhas da matriz aumentada associada ao sistema:

- Permutar (trocar de posição) duas linhas da matriz:
  Exemplo: trocar a linha 1 pela linha 2: $L_1 \leftrightarrow L_2$.
- Multiplicar uma das linhas da matriz aumentada por uma constante não nula.
  Exemplo: multiplicar os elementos da linha 2 por 3: $3L_2$.
- Substituir uma linha da matriz aumentada multiplicando-a por um escalar e adicionando (ou subtraindo) com alguma outra linha:

Exemplo: subtrair os elementos da linha 2 pelos elementos da linha 1 multiplicados por 2: $L_2 - 2L_1$.

Algoritmo para o método de eliminação de Gauss

Para triangularizar a matriz aumentada do sistema, temos que zerar todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal da matriz dos coeficientes. Para zerar os primeiros termos das linhas 2 e 3, utilizamos os elementos da linha 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ \mathbf{2} & 5 & -2 & | & 19 \\ \mathbf{3} & 4 & 2 & | & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2$$

$$L_2 - 2L_1$$

$$L_2$$

$$L_3 - 3L_1 \rightarrow L_2$$

$$L_3 - 3L_1$$

$$L_3$$

Para zerar o segundo termo da linha 3, utilizamos os elementos da linha 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & | & 7 \\ 0 & -2 & -1 & | & -5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -4 & | & 7 \\ 0 & 0 & -9 & | & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ y - 4z = 7 \\ -9z = 9 \end{cases}$$

Por retrossubstituição (de baixo para cima):

$$z = -1$$

$$y = 7 + 4z = 7 + 4.(-1) = 3$$

$$x = 6 - 2y - z = 6 - 2.(3) - (-1) = 1$$

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear e dito homogêneo ocorre quando os termos independentes de cada uma de suas equações são iguais a zero.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 14y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Vamos Exercitar?

Vamos retornar o problema proposto no início da seção. Como não sabemos as quantidades de cada um dos doces, vamos atribuir

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$x + y + z = 250$$

$$1{,}5x + 2y + 3{,}5z + 10 = 570$$

$$z = 2x/3$$

Temos três equações lineares e podemos montar com elas o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 250 \\ 1{,}5x + 2y + 3{,}5z = 560 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 1{,}5 & 2 & 3{,}5 & 560 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando operações elementares sobre linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 1{,}5 & 2 & 3{,}5 & 560 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1{,}5L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \\ 2L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -185 \\ 0 & 2 & 5 & 500 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -185 \\ 0 & 0 & -3 & -240 \end{bmatrix}$$

Fazendo a retrossubstituição:

$$-3z = -240 \ \rightarrow z = \frac{240}{3} \ \rightarrow z = 80$$

$$-0{,}5y - 2z = -185 \ \rightarrow \ -0{,}5y - 2.80 = -185 \ \rightarrow y = \frac{25}{0{,}5} \ \rightarrow y = 50$$

$$x + y + z = 250 \ \rightarrow x + 50 + 80 = 250 \ \rightarrow x = 120$$

Portanto, foram entregues 120 unidades de brigadeiro, 50 unidades de beijinho e 80 unidades de pé de moleque.

Saiba mais

Para saber mais a respeito de **resolução de sistemas lineares e suas aplicações**, acesse o material *Solução de sistemas lineares e inversão de matrizes* e também *A modelagem matemática no ensino* de matrizes e sistemas lineares.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

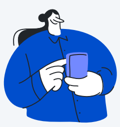
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; DOHERTY, A.; ANDRADE, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Aula 4

Matriz Inversa

Matriz inversa



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você
Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer as técnicas para se obter uma matriz inversa. A matriz inversa é uma matriz que, quando multiplicada por uma matriz original, produz a matriz identidade.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a matriz inversa tem várias aplicações em diversas áreas, especialmente em álgebra linear e disciplinas relacionadas. Uma das

principais aplicações inclui a resolução de sistemas lineares.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Na aula anterior, estudamos sistemas de equações lineares e aplicamos seus novos conhecimentos, além dos conceitos de matrizes e determinantes, para controlar e aumentar o fluxo de vendas de doces da sua confeitaria ao fazer uma promoção de fim de semana. Agora, imagine que sua avó deixou para você, como herança, uma doce receita de família que certamente será um sucesso de vendas na sua confeitaria (Portes; Farias, 2016). Entretanto, o envelope entregue por sua tia continha uma folha de papel em que se via escrito apenas o seguinte: “Querido neto, para ter acesso ao nosso tesouro, você precisa descobrir o segredo que abre o cofre localizado atrás do armário na casa da tia Lourdes. Decodifique, digite a palavra secreta e pegue a receita, ela é sua!”.

A palavra codificada é

$$S = \begin{bmatrix} 29 & 11 & 42 & 31 \\ 16 & 06 & 30 & 16 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C.P = S$$

$$P$$

Bloco 1

A	B	C	D
01	02	03	04
P	Q	R	S
16	17	18	19

Bloco 2

E	F	G	H
05	06	07	08
T	U	V	W
20	21	22	23

Bloco 3

I	J	K	L

09	10	11	12
X	Y	Z	#
24	25	26	27

Bloco 4

M	N	O
13	14	15
.	!	?
28	29	30

Tabela 1 | Correspondências. Fonte: Portes e Farias (2016, p. 53).

Qual é a palavra secreta que dá acesso à receita? Para resolver esse problema, é necessário que vejamos alguns conceitos de matriz inversa e como encontrá-la.

Bons estudos!

Vamos Começar!

Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita invertível (ou invisível) se existir uma matriz quadrada B, de mesmo ordem, tal que: $A.B = B.A = I_n$. A matriz $\boldsymbol{I}_{\mathbf{n}}$ é a matriz identidade de ordem n.

A

n

A

B

$$A.B = B.A = I_n$$

$$\boldsymbol{I_n}$$

$$n$$

A matriz B é chamada de matriz inversa de A e indicamos por A^{-1} e:

$$B$$

$$A$$

$$A^{-1}$$

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Teorema: uma matriz A admite inversa se, e somente se, $|A| \neq 0$.

$$A$$

$$|A| \neq 0$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz invertível. A matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, pois:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}.\,A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 2-2 \\ -3+3 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As **propriedades da matriz inversa** são:

1. Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} também é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. Se A e B são duas matrizes invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}.\,A^{-1}$. Observe que a inversa do produto é igual ao produto das inversas na posição contrária.
3. Se A é uma matriz invertível, então $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$.
4. Se A é uma matriz invertível, então $|A| \neq 0$.
5. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

Seja
A
uma matriz do tipo

$$A$$

$$n \times n$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

Para determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada de ordem , podemos utilizar vários métodos, entretanto, após o estudo dos sistemas de equações lineares e do estudo de determinantes, daremos mais atenção a dois métodos em particular:

- Método baseado na resolução de sistemas.
- Método da matriz adjunta.

Siga em Frente...

Método baseado na resolução de sistemas

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2$$

$$A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}e + a_{12}g & a_{11}f + a_{12}h \\ a_{21}e + a_{22}g & a_{21}f + a_{22}h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade de matrizes, formam-se os sistemas de equações lineares e, assim, encontra-se a matriz inversa.

$$\begin{cases} a_{11}e + a_{12}g = 1 \\ a_{21}e + a_{22}g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}f + a_{12}h = 0 \\ a_{21}f + a_{22}h = 1 \end{cases}$$

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}$$

Resolução: Se

$$A^{-1}$$

$$A.\,A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que resolver dois sistemas:

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 3b+2d=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b+2d=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} 3a+2c=1 & I \\ a+c=0 & II \end{cases}$
   De II: $a=-c$.
   Substituindo em I: $-3c+2c=1$, logo: $c=-1$ e $a=1$.
2. $\begin{cases} 3b+2d=0 & I \\ b+d=1 & II \end{cases}$
   De II: $b=1-d$.
   Substituindo em I: $3-3d+2d=0$, logo: $d=3$ e $b=-2$.
   Logo: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
   Portanto, a inversa da matriz A existe e é única. Logo, A é uma matriz não singular.

Método da matriz adjunta

Para inverter uma matriz

$$A$$

$$n \times n$$

$$A$$

$$A$$

$$adj(A)$$

Com esse método, a inversa

$$A^{-1}$$

$$A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Para que uma matriz

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$|A| \neq 0$$

$$A$$

Para compreensão do método, é necessário definirmos matriz adjunta.

Na aula anterior, você estudou cofator

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

$$D_{ij}$$

$$a_{ij}$$

$$A_{n \times n}$$

$$A_{n \times n}$$

$$\boldsymbol{A}$$

$$cof(A)$$

$$adj(A)$$

$$adj(A) = (cof(A))^t$$

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A)$$

Resolução: O primeiro passo para encontrar a matriz adjunta de

$$A$$

$$A$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Portanto, temos que

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A$$

Com base na definição de matriz adjunta, podemos voltar ao método de determinação da matriz inversa.

Vamos retomar o exemplo anterior.

Como já determinamos a matriz adjunta de

$$A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\left(A\right)$$

$$A$$

Pelo Teorema de Laplace, escolhendo a linha 2 da matriz, temos:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$|A| = 2.(-7) + 1.2 + 1.4$$

$$|A| = -8 \neq 0$$

Portanto, a inversa de

$$A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-8)} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 7/8 & -1/8 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vamos Exercitar?

Vamos retornar ao problema proposto no início da aula. Veremos que um método simples para codificar e decodificar mensagens compreende utilizar as matrizes

$$C$$

e

$$C$$

$$C^{-1}$$

$$n$$

O remetente (sua avó) utilizou a matriz

$$C$$

$$C^{-1}$$

$$P$$

$$C.P = S$$

$$C.P = S \Longrightarrow C^{-1}.C.P = C^{-1}.S \Longrightarrow I_2.P = C^{-1}.S \Longrightarrow P = C^{-1}.S$$

Lembre-se de que as ordens das matrizes são

$$C_{2\times 2}$$

$$P_{2\times 4}$$

$$S_{2\times 4}$$

$$C_{2\times 2}^{-1}$$

$$C^{-1}.\ C = I_2$$

$$I_2.P = P$$

$$P = C^{-1}.S$$

$$P$$

$$C^{-1}.S$$

$$C^{-1}$$

$$C$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes formamos dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ a+c=0 \end{cases} \rightarrow a=-1,\ c=1 \qquad \begin{cases} b+2d=0 \\ b+d=1 \end{cases} \rightarrow b=2,\ d=-1$$

Portanto,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P$$

$$C^{-1}$$

$$S$$

$$C^{-1}, S = P$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 29 & 11 & 42 & 31 \\ 16 & 06 & 30 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 03 & 01 & 18 & 01 \\ 13 & 05 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Relacionado a matriz P às letras do alfabeto na Tabela 1 combinada, temos:

$$\frac{03}{C}, \frac{01}{A}, \frac{18}{R}, \frac{01}{A}, \frac{13}{M}, \frac{05}{E}, \frac{12}{L}, \frac{15}{0}$$

Portanto, a palavra secreta é **caramelo**.

Saiba mais

Para ampliar seus conhecimentos, acesse *Criptografia de dados utilizando matrizes*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

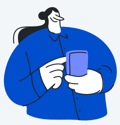
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; DOHERTY, A.; ANDRADE, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Aula 5

Encerramento da Unidade

Videoaula de Encerramento



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, serão retomados os principais conceitos abordados nesta unidade. São eles: matrizes e suas operações; determinante de uma matriz quadrada; resolução de sistemas de equações lineares; método de eliminação de Gauss; matrizes inversas e matrizes adjuntas.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois vai ajudá-lo a identificar algum tema que mereça ser revisado por você.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Chegada

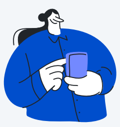
Para desenvolver a competência desta Unidade, que é conhecer e aplicar os conceitos e as operações com matrizes e sistemas de equações lineares nas resoluções de problemas do dia a dia, você precisa, primeiramente, conhecer os conceitos fundamentais de matrizes: tipos e operações, matriz inversa, matriz adjunta, determinantes e sistemas de equações lineares.

Matrizes e sistemas de equações lineares estão inter-relacionados e são conceitos fundamentais em álgebra linear. A álgebra linear, incluindo o uso de matrizes na resolução de sistemas lineares, é uma ferramenta poderosa em muitas disciplinas.

Algumas questões e reflexões

1. As matrizes têm uma ampla gama de aplicações em várias disciplinas, incluindo matemática, física, ciência da computação, engenharia e muitos outros campos. Sua versatilidade as torna uma ferramenta para modelar e resolver uma variedade de problemas complexos. Uma das principais aplicações de matrizes está na área de **criptografia, em que** matrizes são usadas em algoritmos de criptografia para codificar e decodificar mensagens. Quais são os passos para se trabalhar com criptografia (usando matrizes)?
2. Sistemas de equações lineares são conjuntos de equações lineares que compartilham as mesmas variáveis. As equações lineares são aquelas que podem ser representadas graficamente como linhas retas em um plano cartesiano e têm a forma geral. Um sistema de equações lineares pode ser representado na forma matricial como $A.X = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, X é o vetor das variáveis e b é o vetor dos termos independentes. Em sistemas de ordem maior do que 2, podemos utilizar o método de eliminação de Gauss para resolvê-lo, mas, e se o sistema tiver, por exemplo, ordem 5? O número de eliminações para triangularizar a matriz será muito grande. Que método usaria para resolvê-lo?
3. A matriz inversa é uma matriz que, quando multiplicada pela matriz original, resulta na matriz identidade. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e I é a matriz identidade de ordem n, então a matriz inversa de A (se existir) é denotada por A^{-1}, e a propriedade fundamental da matriz inversa é $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz inversa é frequentemente usada para resolver sistemas de equações lineares. Qual é a expressão matemática que permite a resolução de um sistema utilizando a matriz inversa?

É Hora de Praticar!



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares que compartilham as mesmas variáveis. Uma equação linear é uma equação de primeiro grau, em que as variáveis têm expoente 1. Geralmente, um sistema de equações lineares é representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para resolver um sistema de equações lineares, você pode usar métodos como substituição, eliminação ou matriz inversa. A solução é um conjunto de valores para as variáveis que satisfaz todas as equações do sistema.

Existem sistemas que têm uma única solução, sistemas que não têm solução e sistemas que têm infinitas soluções, dependendo da relação entre as equações.

Considere o seguinte problema: Uma loja vende certo componente eletrônico que é fabricado por três marcas diferentes: A, B e C. Um levantamento sobre as vendas desse componente, realizado durante três dias consecutivos, revelou que no 1º dia foram vendidos dois componentes da marca A, um da marca B e um da marca C, resultando um total de vendas igual a R$ 150; no 2º dia foram vendidos quatro componentes da marca A, três da marca B e nenhum da marca C, em um total de R$ 240; no último dia não houve vendas da marca A, mas foram vendidos cinco da marca B e três da marca C, totalizando R$ 350.

Qual é o preço do componente fabricado por A, por B e por C (respectivamente)?

Escrevendo as equações lineares.

a. No 1º dia foram vendidos dois componentes da marca A, um da marca B e um da marca C, resultando um total de vendas igual a R$ 150: $2A + 1B + 1C = 150$.
b. No 2º dia foram vendidos quatro componentes da marca A, três da marca B e nenhum da marca C, m total de R$ 240: $(\mathrm{b})\ 4A + 3B + 0C = 240{,}00$.
c. No último dia não houve vendas da marca A, mas foram vendidos cinco da marca B e três da marca C, totalizando R$ 350: $0A + 5B + 3C = 350{,}00$.

Temos, então, o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2A + 1B + 1C = 150 \\ 4A + 3B + 0C = 240 \\ 0A + 5B + 3C = 350 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 0 & 240 \\ 0 & 5 & 3 & 350 \end{bmatrix}$$

Escalonando o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 0 & 240 \\ 0 & 5 & 3 & 350 \end{bmatrix} 2L_1 - L_2 \rightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 2 & 60 \\ 0 & 5 & 3 & 350 \end{bmatrix} L_3 + 5L_2 \rightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & 13 & 650 \end{bmatrix}$$

Utilizando a retrossubstituição:

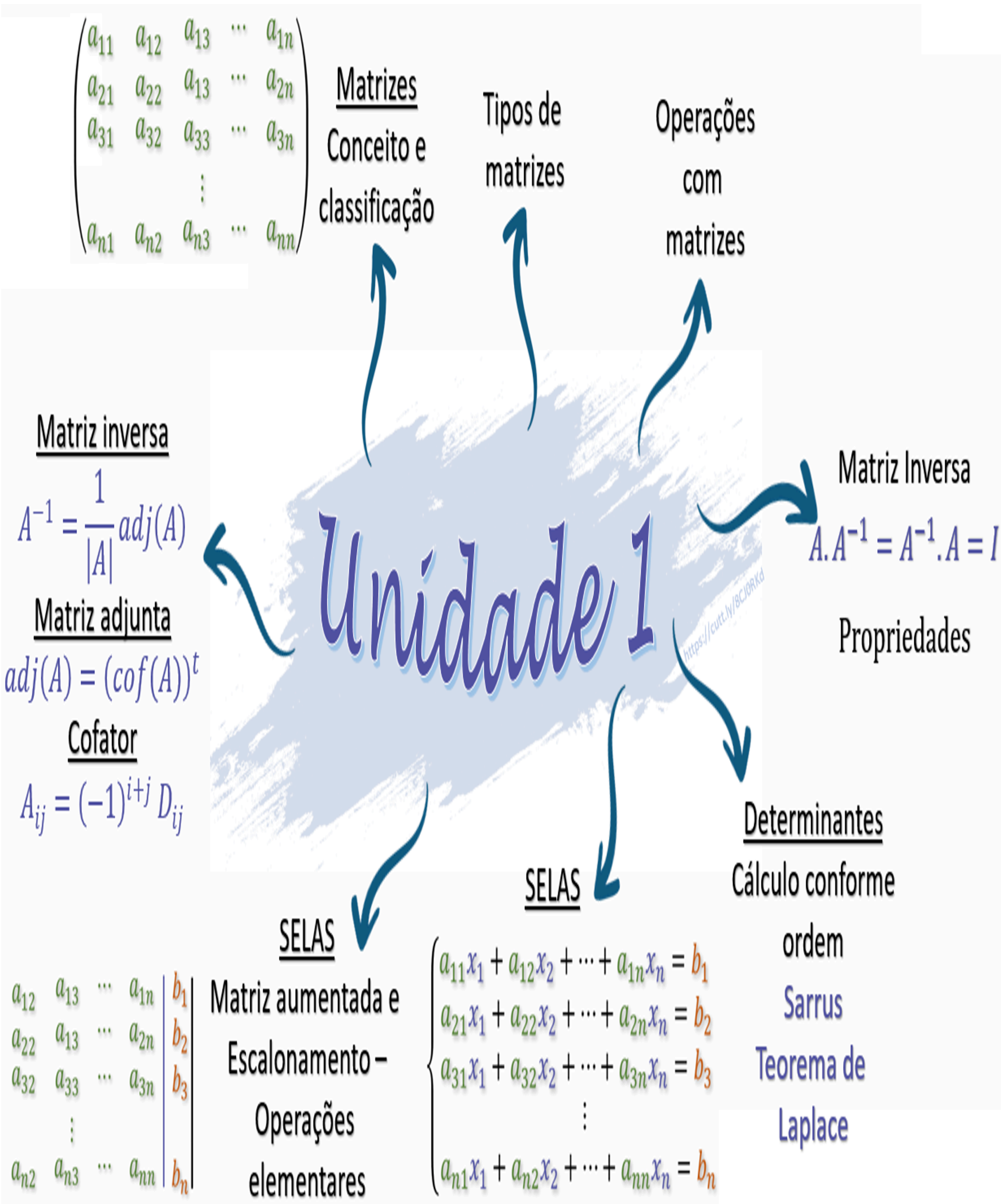
$13C = 650 \quad C = 50$

$-B + 2C = 60 \quad -B = 60 - 2C \quad -B = 60 - 2.50 \quad B = 40$

$A + B + C = 150 \quad 2A = 150 - B - C \quad 2A = 150 - 40 - 50 \quad A = 30$

$S : \{30; 40; 50\}$

O mapa mental a seguir sintetiza os principais conceitos abordados na Unidade. Você deve percorrê-lo da esquerda para a direita, a partir de “Matrizes”. Um mapa mental é uma representação gráfica e visual de ideias e conceitos, geralmente centrado em torno de uma palavra-chave ou ideia central. É uma ferramenta eficaz para organizar informações, estimular a criatividade e facilitar o aprendizado.



ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.
SANTOS, N. M.; DOHERTY, A.; ANDRADE, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

,

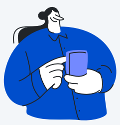
Unidade 2

Vetores no Plano e no Espaço

Aula 1

Vetores: Definição e Segmentos Orientados

Vetores: definição e segmentos orientados



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você
Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula você vai conhecer, principalmente, os segmentos orientados. Segmentos orientados são segmentos de reta nos quais a direção é considerada. Isso significa que a ordem dos pontos nos extremos do segmento é relevante, indicando uma orientação específica. O conhecimento dos segmentos orientados é importante para falarmos de vetores. Um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos que têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, o conjunto de segmentos equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.
Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois os vetores são amplamente aplicados em física, engenharia, computação gráfica e estatística, entre outras disciplinas. Eles são fundamentais para descrever movimento, forças e campos, entre outras grandezas físicas. Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Vetores são entidades matemáticas que representam grandezas que têm magnitude e direção. Eles são comumente usados em diversas áreas, como física, matemática, informática e engenharia. Um vetor pode ser representado graficamente por uma seta; o comprimento da seta indica a magnitude do vetor, e a direção aponta para a direção do vetor.

Vetores e segmentos orientados estão intimamente relacionados, pois um segmento orientado pode ser representado por um vetor. Essencialmente, os vetores fornecem uma maneira eficaz de representar e manipular segmentos orientados matematicamente.

A respeito da relação entre vetores e segmentos orientados, considere o exemplo a seguir.

Na Figura 1 está reproduzido um prisma reto de base retangular com vértices A, B, C, D, E, F, G e H:

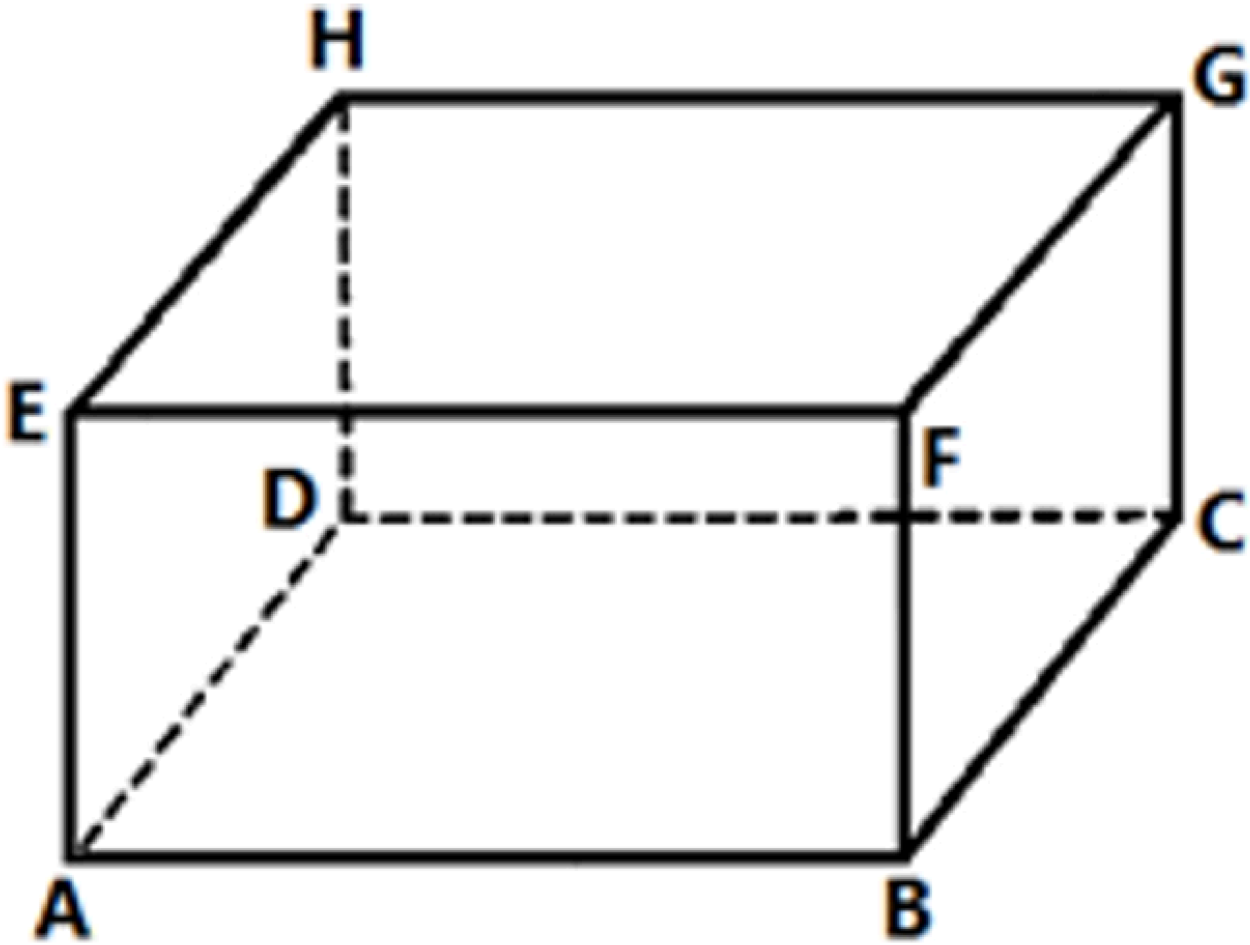


Figura 1 | Prisma reto de base retangular. Fonte: elaborada pela autora.

A partir dessa figura, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

( ) Os vetores

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GH}$$

( ) Os vetores

$$\overrightarrow{FG}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

( ) Os vetores

$$\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{BC}$$

Para responder a essas afirmativas, são necessários alguns conhecimentos a respeito de segmentos orientados e vetores.

Vamos começar?

Bons estudos.

Vamos Começar!

Ponto, reta e plano

São conceitos primitivos e, portanto, aceitos sem definição. Para denotar um ponto, usamos uma letra maiúscula do nosso alfabeto; para reta usaremos uma letra minúscula do nosso alfabeto; e para plano usaremos letras minúsculas do alfabeto grego.

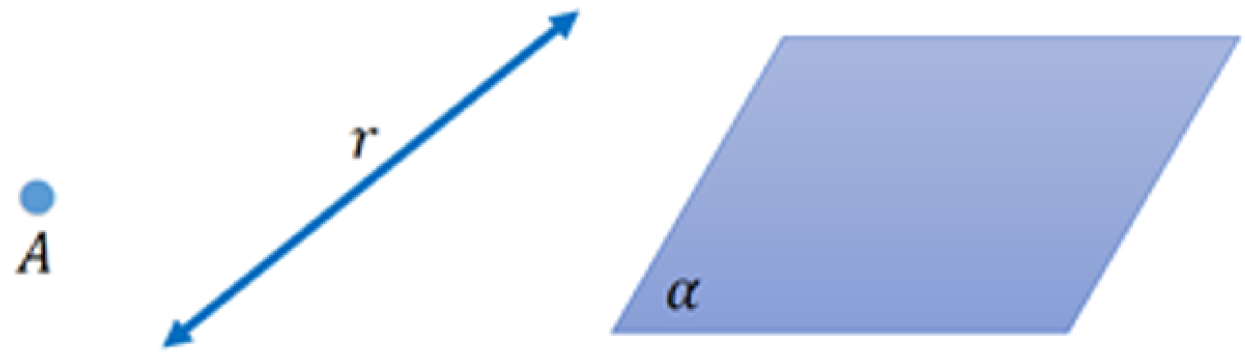


Figura 2 | Ponto, reta e plano. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 70).

Apesar de não podermos definir esses elementos, podemos descrevê-los facilmente.

Um **ponto** é uma entidade sem dimensões. Ele é representado apenas por uma localização no espaço, sem largura, altura ou profundidade. Uma **reta** é uma coleção infinita de pontos que se estende indefinidamente em ambas as direções. Ela tem comprimento infinito. Um **plano** é uma superfície bidimensional que se estende infinitamente em todas as direções. Ele contém infinitos pontos e linhas.

Em resumo, pontos são entidades sem dimensões, retas são coleções infinitas de pontos que se estendem indefinidamente, e planos são superfícies bidimensionais que contêm infinitas retas e pontos.

Segmento e segmento orientado

Segmento é qualquer trecho de uma reta delimitado por dois pontos, A e B, por exemplo. Costuma-se denotá-lo pelas letras correspondentes aos pontos que o delimitam. Em um segmento de reta AB podemos adotar duas orientações: de A (origem) para B (extremidade); de B (origem) para A (extremidade). Indicamos essa orientação inserindo uma seta sobre AB.

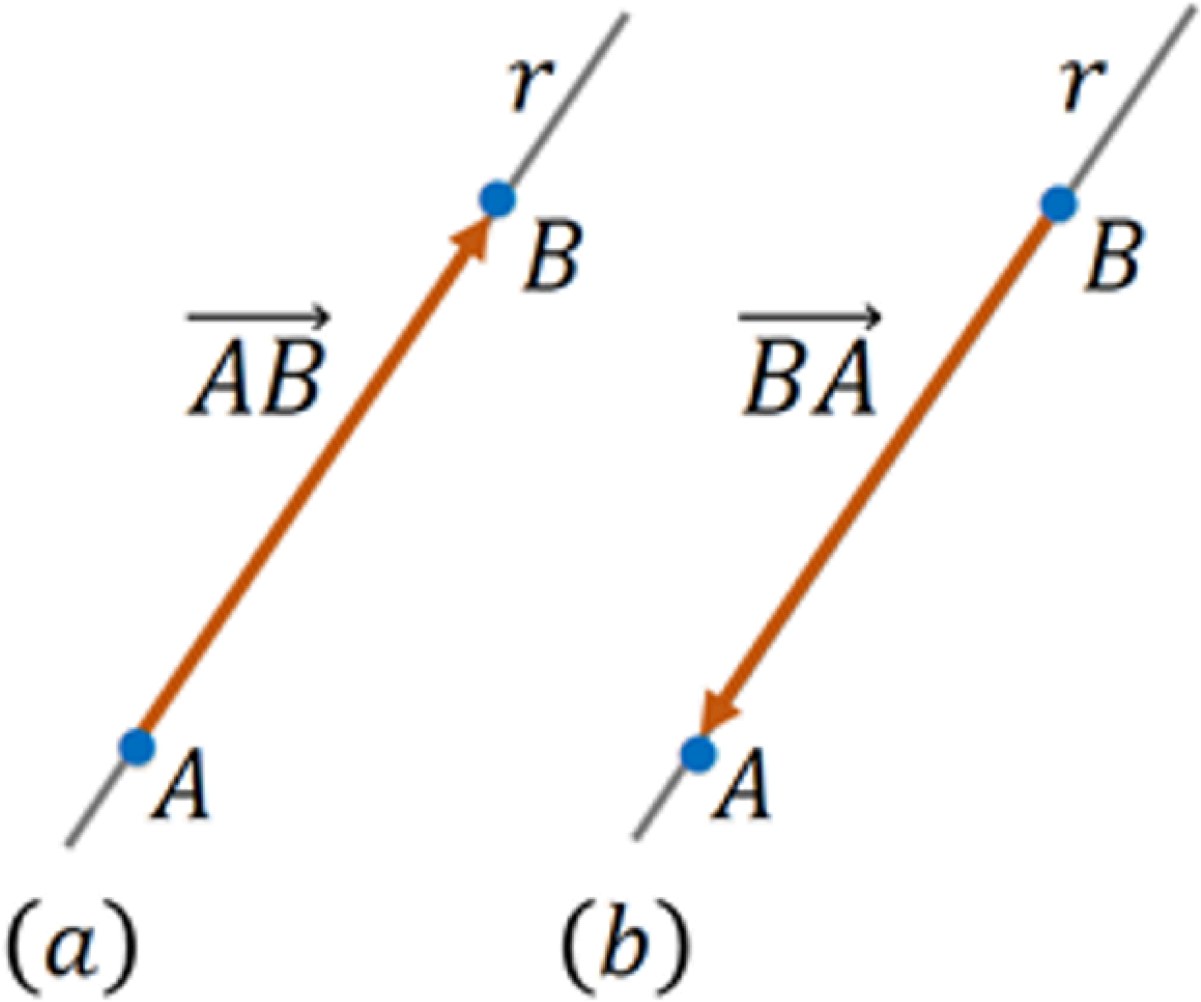


Figura 3 | Segmentos orientados: (a) de A para B; (b) de B para A. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 71).

Dizemos que a distância do ponto *A* até o ponto *B* é o **módulo** do segmento

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

A **direção** do segmento orientado

$$\overrightarrow{AB}$$

$$r$$

Exemplo: Observe o segmento

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\theta$$

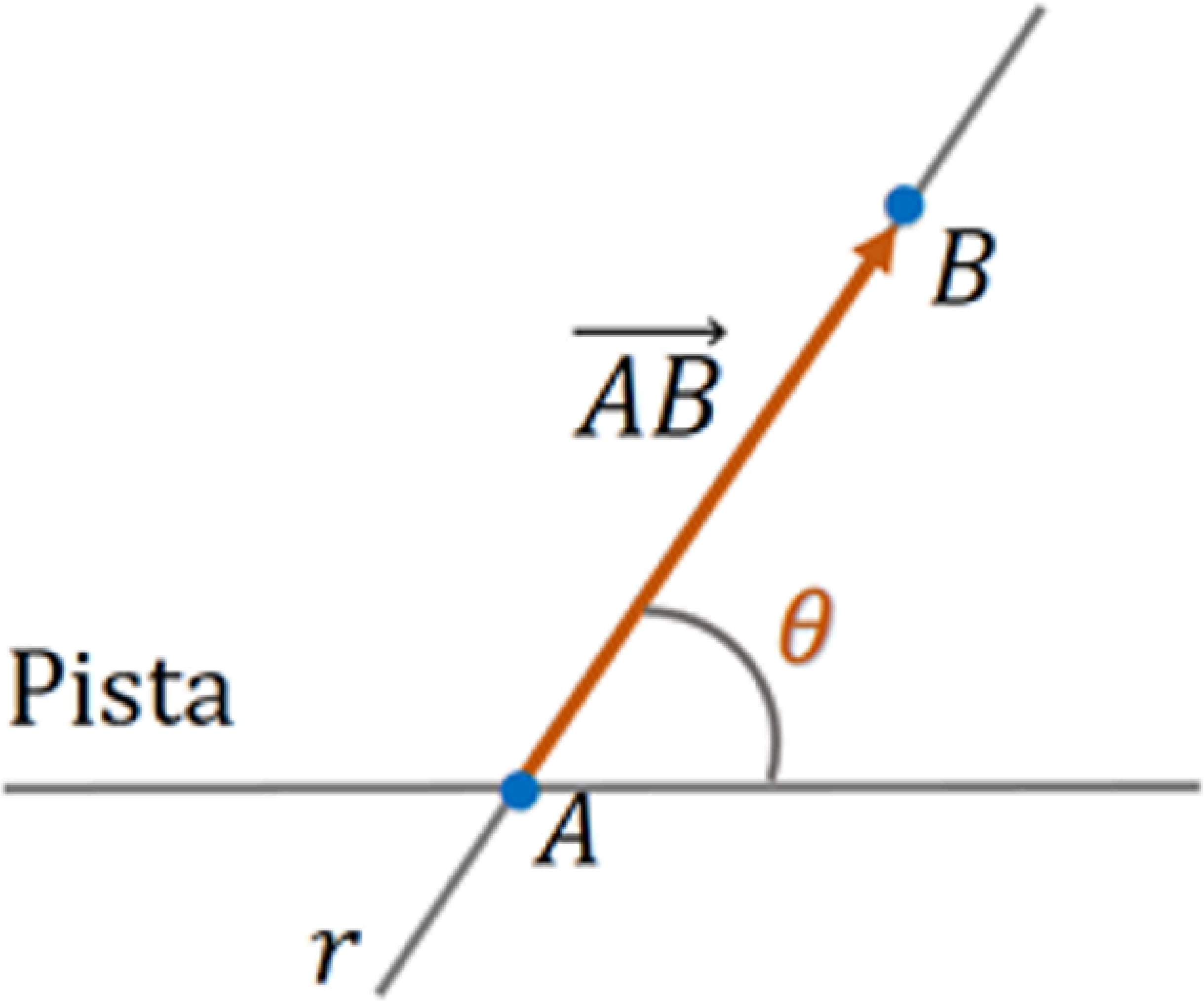


Figura 4 | Decolagem. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 72).

Definimos o **sentido** do segmento

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

Tipos de segmentos orientados

Segmento nulo

São segmentos cujo módulo é igual a zero. Nesse caso, o segmento se reduz a um único ponto.

Segmentos opostos

Considere que

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$AB$$

$$CD$$

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

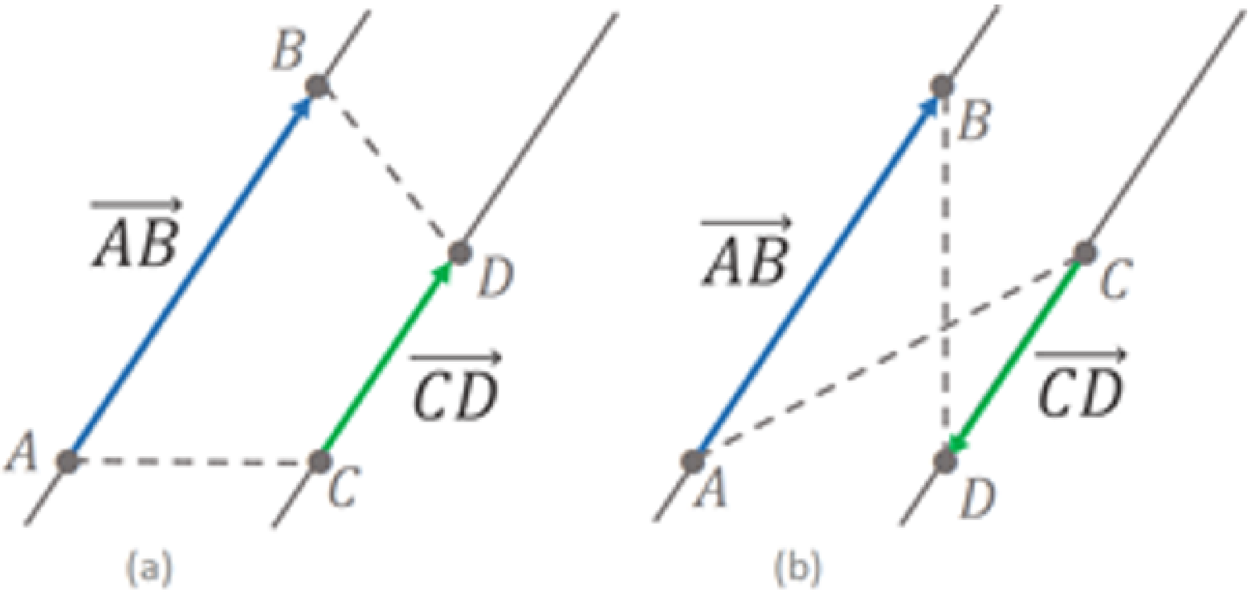


Figura 5 | Segmentos orientados: (a) de mesma direção; (b) opostos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 73).

Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}\text{~}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}$$

$$ABDC$$

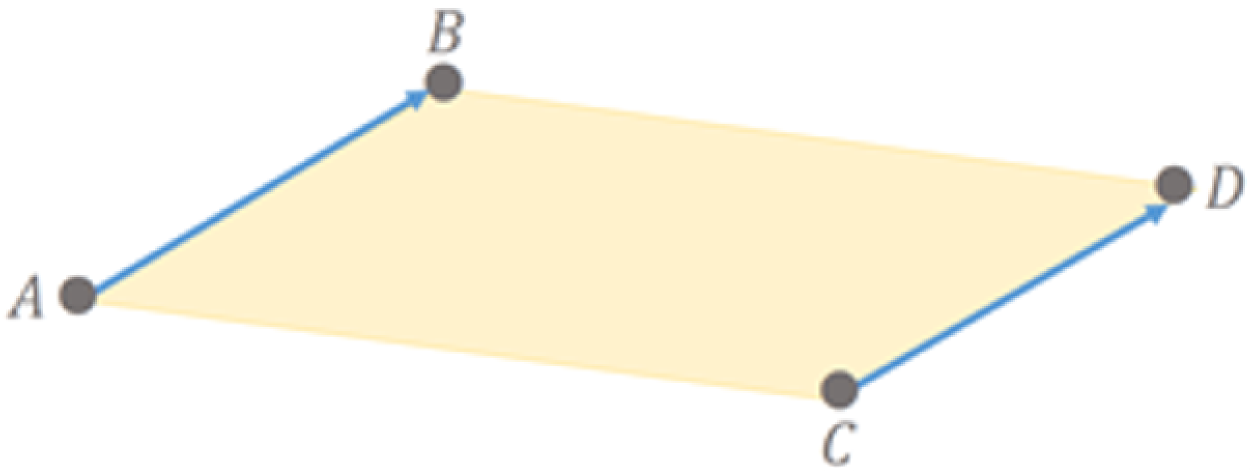


Figura 6 | Segmentos equipolentes. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 73).

Exemplo: Considere os segmentos mostrados na Figura 7, em que estão representados os segmentos:

$$\overrightarrow{AB}$$

,
$\overrightarrow{CD}$
,
$\overrightarrow{EF}$
,
$\overrightarrow{GH}$
,
$\overrightarrow{MN}$
e
$\overrightarrow{OP}$
.

$\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{GH}$

$\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{OP}$

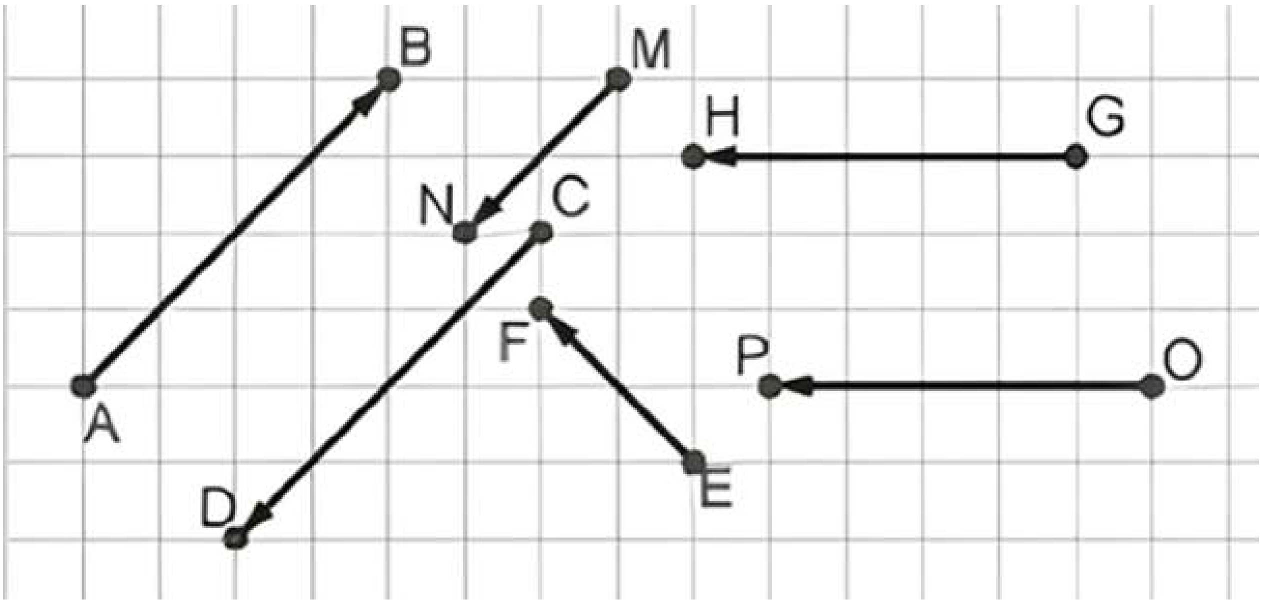


Figura 7 | Segmentos. Fonte: Portes e Farias (2016, p. 75).

Agora, responda:

a. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são segmentos opostos?
Os dois segmentos têm o mesmo módulo, mesma direção, mas os sentidos são opostos.

b. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{MN}$ são segmentos de módulos iguais, direção e sentidos diferentes?
Os dois segmentos têm módulos e sentidos diferentes, mas mesma direção.

c. $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{EF}$ são segmentos de mesmo módulo, direção e sentido?
Os dois segmentos não têm nem módulo, nem direção, nem sentido iguais.

d. $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{OP}$ são segmentos equipolentes?
Os dois segmentos são equipolentes pois têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

Siga em Frente...

Vetor

Os vetores são fundamentais em muitos campos, como física, em que representam deslocamentos, velocidades, forças etc., e em gráficos computacionais, nos quais são usados para representar direções e movimentos em ambientes tridimensionais.

Vetor é constituído por três coisas: um número positivo que dá seu comprimento (módulo), uma direção e um sentido. A notação matemática padrão para um vetor é geralmente representada por uma letra em negrito (como

$$\boldsymbol{v}$$

$$\vec{v}$$

Denominamos vetor

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

Casos particulares

- **Vetor nulo:** representado por $\vec{0}$ o vetor nulo tem a origem coincidindo com sua extremidade.
- **Vetores paralelos:** indicamos por $\vec{x}//\vec{y}$ dois vetores paralelos, pois têm a mesma direção, não necessariamente tendo o mesmo módulo e sentido. Quando dois vetores forem paralelos, o ângulo entre eles será de 0° ou 180°.
- **Vetores perpendiculares:** o ângulo entre os vetores é igual à 90°.

Observação: O ângulo entre dois vetores é o menor ângulo formado entre dois representantes dos respectivos vetores que tenham mesma origem.

Os vetores podem ser operados por meio de diversas operações, como soma, subtração, multiplicação por escalar, produto escalar e produto vetorial, cada uma com suas propriedades e significados específicos

Diferença entre vetor e segmento de reta orientado

Enquanto o vetor é uma entidade matemática que pode ser representada em um espaço tridimensional, o segmento orientado é uma parte específica de uma linha que tem uma direção definida.

Um vetor pode ser associado a um segmento orientado, mas o vetor também pode representar outras grandezas além do deslocamento ou segmento de reta orientado.

A notação para vetores e segmentos orientados pode diferir, mas muitas vezes usa setas para indicar a direção.

Em resumo, enquanto um vetor é uma entidade matemática mais geral com magnitude e direção, um segmento orientado é uma representação específica de uma linha com um ponto inicial e um ponto final, indicando uma direção específica ao longo do segmento. O vetor pode ser usado para representar o segmento orientado, mas também pode representar outras grandezas vetoriais.

Vamos Exercitar?

Vamos retomar ao exemplo do começo da nossa aula.

A partir da Figura 1, devemos classificar algumas afirmações como verdadeiras ou falsas.

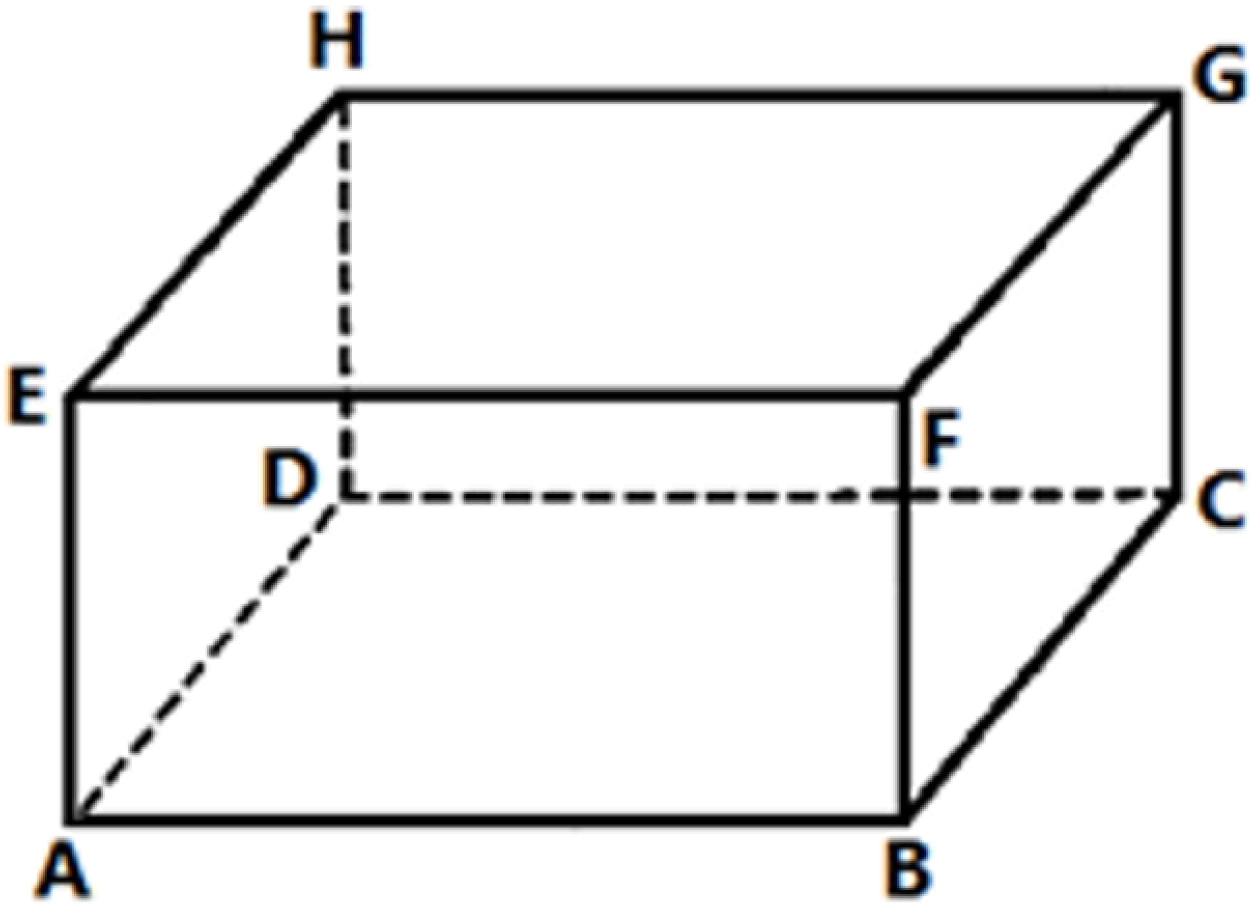


Figura 1 | Prisma reto de base retangular. Fonte: elaborada pela autora.

Vamos refazer a figura mostrando os vetores necessários para a resolução do exercício.

A Tabela 1 foi feita para ajudarmos a desenhar os vetores.

Vetor	Origem	Extremidade

$\overrightarrow{AB}$	A	B
$\overrightarrow{AD}$	A	D
$\overrightarrow{BC}$	B	C
$\overrightarrow{DH}$	D	H
$\overrightarrow{FG}$	F	G
$\overrightarrow{GH}$	G	H

Tabela 1 | Alguns vetores do prisma reto de base quadrada. Fonte: elaborada pela autora

A Figura 8 apresenta os vetores discriminados na Tabela 1.

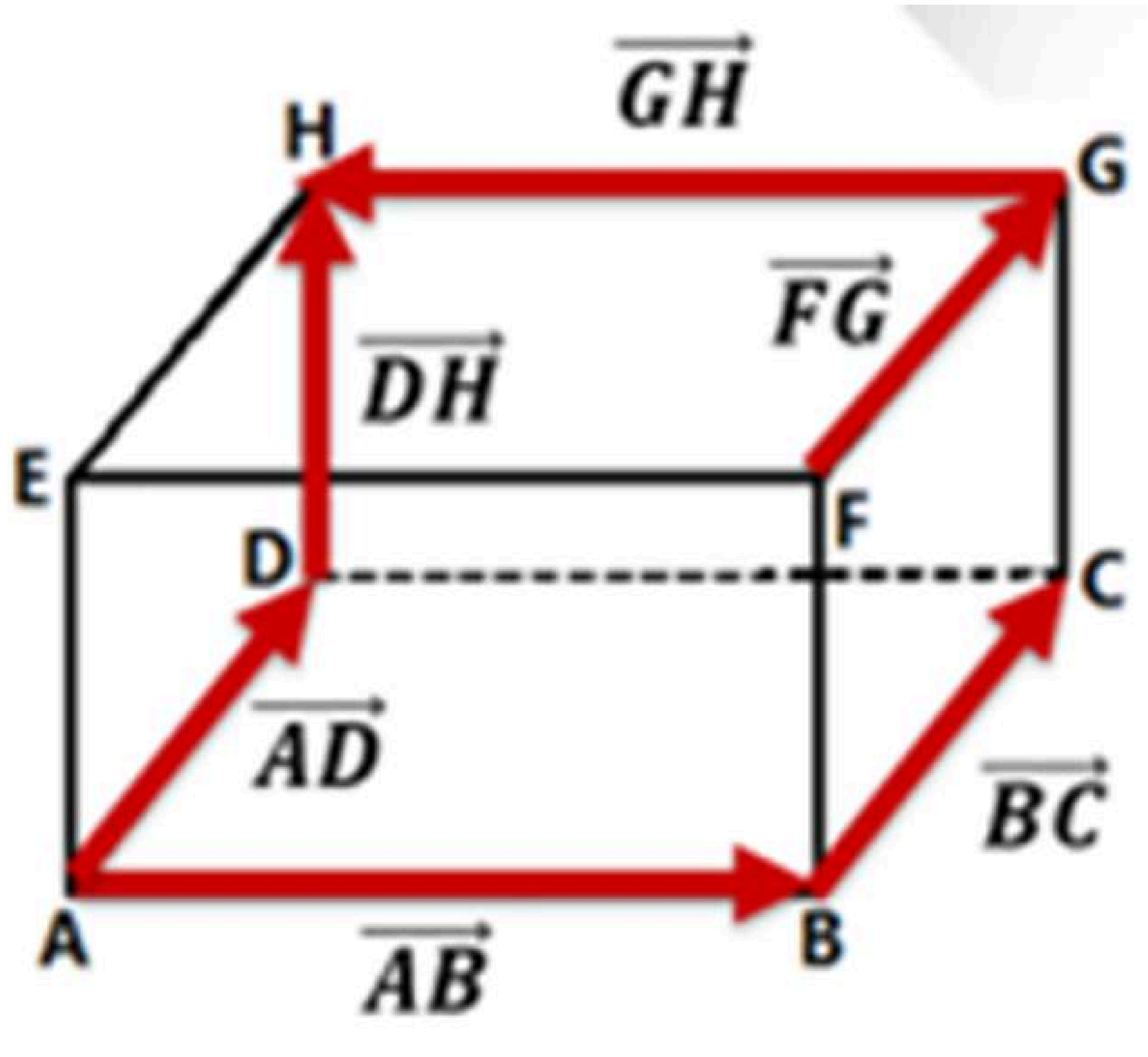


Figura 8 | Prisma reto de base retangular. Fonte: elaborada pela autora.

A partir da Figura 8, podemos afirmar:

I. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{GH}$ têm a mesma direção, mas sentidos contrários.
II. Os vetores $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{AD}$ são de mesmo sentido.
III. Os vetores $\overrightarrow{DH}$ e $\overrightarrow{BC}$ não têm a mesma direção.

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Não confunda **segmento orientado** com **vetor**! Entenda o conceito de representante acessando o material intitulado *Capítulo 1 – Vetores*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

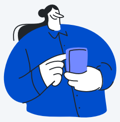
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 2

Módulo ou Norma de um Vetor

Módulo ou norma de um vetor



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer os vetores. Um vetor é uma entidade matemática que apresenta magnitude (ou comprimento) e direção. Vetores são utilizados para representar grandezas que tenham essas características, e são fundamentais em várias áreas da matemática, física e engenharia. Eles são frequentemente representados geometricamente por setas: o comprimento da seta representa a magnitude, e a direção da seta representa a direção do vetor. Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois várias grandezas são vetoriais, ou seja, apresentam módulo, direção e sentido, portanto, é necessário saber como representar um vetor e como determinar seu módulo, sua direção e seu sentido.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Vetores são entidades matemáticas com módulo, direção e sentido. Eles são usados em várias áreas da matemática, física, engenharia e ciências computacionais para representar grandezas que têm essas características.

Nesta seção, vamos dar continuidade ao estudo dessas entidades. Trabalharemos principalmente com o módulo de vetores.

Lembre-se de que um vetor é frequentemente denotado por uma letra com uma seta sobre ela, como

$$\vec{V}$$

$$\vec{V}$$

$$\left|\vec{V}\right|$$

Para praticar o que você está prestes a aprender, vamos considerar o seguinte problema: uma cidade A está situada em um mapa sobre o ponto de coordenadas (63,152), dada em quilômetros. Uma outra cidade B está situada no mesmo mapa sobre o ponto de coordenadas (73,182). Qual a distância entre essas duas cidades?

Vamos começar?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Quantidades que têm magnitude e orientação, como velocidade, aceleração e força, são chamadas de vetores. Quantidades com magnitude, mas sem uma orientação associada, como rapidez e tempo, são chamadas de escalares.

Vetores são descrições matemáticas de grandezas que têm módulo, direção e sentido. O módulo de um vetor é um número não negativo, geralmente combinado com uma unidade. Muitas grandezas vetoriais são importantes em física e, de fato, em todas as ciências.

Exemplo: Se um objeto se desloca de uma posição A para uma posição B, podemos representar o seu deslocamento por uma seta que aponta de A para B. O comprimento da seta representa a distância, ou magnitude, entre as duas posições. A orientação da seta representa a orientação de A para B. Um vetor deslocamento é um segmento de reta, orientado da posição inicial para a posição final, que representa a mudança de posição de um objeto. Ele não necessariamente representa o caminho descrito pelo objeto.

Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados que têm mesmo módulo, direção e sentido. Um segmento orientado é a imagem geométrica ou representante de um vetor.

Coordenadas de um vetor

Um vetor pode ser decomposto em componentes ao longo dos eixos coordenados.

Seja o vetor

$$\overrightarrow{u}$$

$$(a, b)$$

$$(c, d)$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$(c-a, d-b)$$

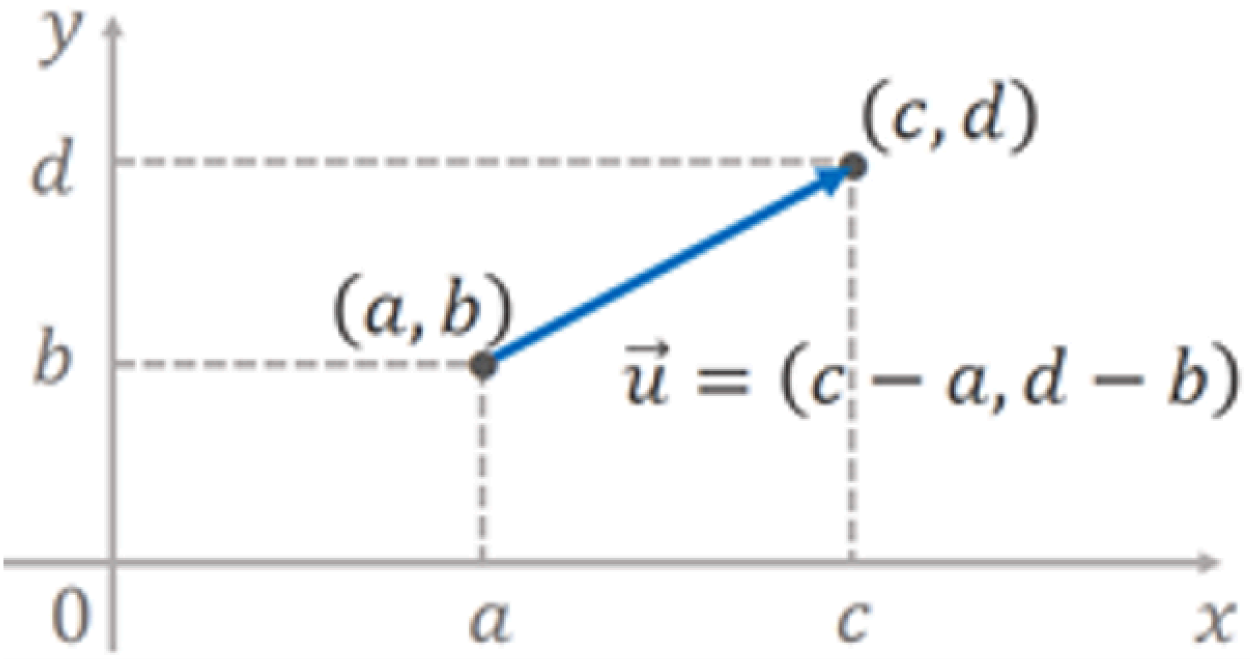


Figura 1 | Vetor

$$\overrightarrow{u} = (c-a, d-b)$$

Exemplo: Um vetor tem origem no ponto e extremidade em . Logo, dizemos que esse vetor tem coordenadas . Este vetor está fora da origem .

Módulo ou norma de um vetor no plano

Antes de definirmos módulo ou norma de um vetor, vamos recordar o teorema de Pitágoras. O teorema é geralmente enunciado da seguinte forma: em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Matematicamente, se

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para calcularmos o módulo de um vetor, basta utilizarmos o teorema de Pitágoras como mostra a Figura 2.

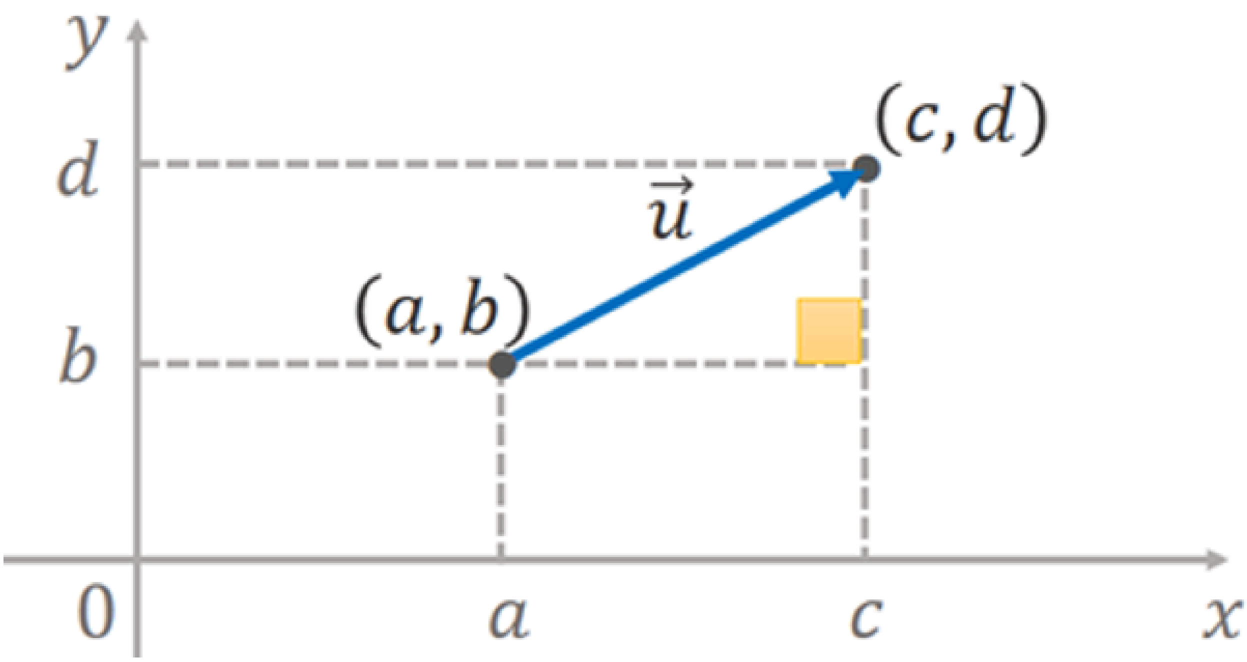


Figura 2 | Triângulo retângulo definido a partir de $\vec{u}$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 85).

$\vec{u}$

Observe que o vetor $\vec{u}$ representa a hipotenusa do triângulo retângulo, sendo seus catetos $(c-a)$ e $(d-b)$. Logo, o módulo de $\vec{u}$ é dado por:

$\vec{u}$

$(c-a)$

$(d-b)$

$\vec{u}$

$$\left|\overrightarrow{u}\right|^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Essa fórmula para calcular o módulo de um vetor só serve para vetores no plano.

Note que o comprimento de um vetor é numericamente igual à distância entre os pontos que compõem a sua origem e a sua extremidade. Logo, se você precisar obter a distância entre esses pontos, você pode fazê-lo por meio do cálculo do módulo do vetor que os tem como extremidades.

Exemplo: Um vetor

$$\overrightarrow{u}$$

$$(1{,}2)$$

$$(4{,}6)$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{3^2+4^2} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{25} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{u}\right| = 5$$

Assim, o módulo de

$$\overrightarrow{u}$$

Exemplo: Determine o módulo dos vetores a seguir.

a. Vetor com origem em (0,0) e extremidade (-5,12).
b. Vetor com origem em (-3,10) e extremidade (-2,3).
c. $\overrightarrow{u} = (0, -1)$.

Resolução:

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

a. $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{((-5)-0)^2 + (12-0)^2} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{25+144} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = 13$

b. $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{((-2)-(-3))^2 + (3-10)^2} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{1+49} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{50}$

c. $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{1} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = 1$

Siga em Frente...

Vetor perpendicular e vetor horizontal

Dois casos particulares sobre módulo de vetores são analisados na Figura 3.

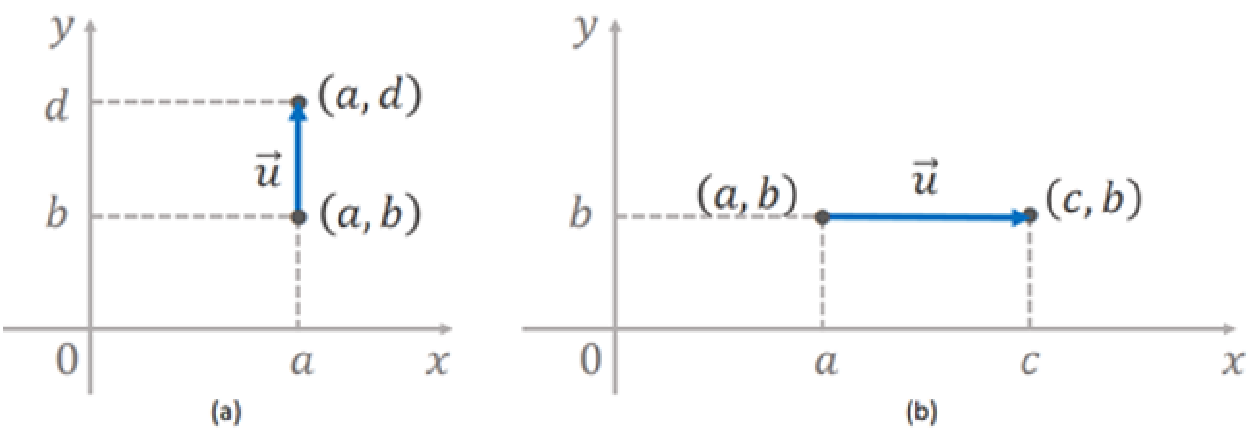


Figura 3 | Vetor (a) perpendicular e (b) horizontal. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 85-86).

Quando o vetor está na vertical (Figura 3a), o seu módulo é dado por $(d-b)$. Quando ele está na horizontal (Figura 3b), o seu módulo é dado por $(c-a)$.

$$(d-b)$$

$$(c-a)$$

Versor de um vetor

Seja

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = 1$$

A palavra "versor" é frequentemente usada como sinônimo de "vetor unitário". Ambos os termos se referem a um vetor com magnitude igual a 1, que indica apenas a direção e o sentido de um vetor original sem levar em consideração sua magnitude. Em outras palavras, é um vetor que aponta na mesma direção e sentido de um vetor original, mas sua magnitude é normalizada para 1. Esses vetores são úteis em várias áreas da matemática, física e engenharia.

Lembra quando dissemos que vetores paralelos são aqueles que formam ângulos de 0° ou 180°? Pois bem, quando dois vetores formam esses ângulos entre si, eles têm a mesma direção e vice-versa. Com isso, você também pode pensar que um dado vetor e o seu versor são paralelos.

Por convenção, o vetor nulo é paralelo a qualquer outro.

Exemplo: Na Figura 4 estão representados três vetores

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 3$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{w}\right| = 1$$

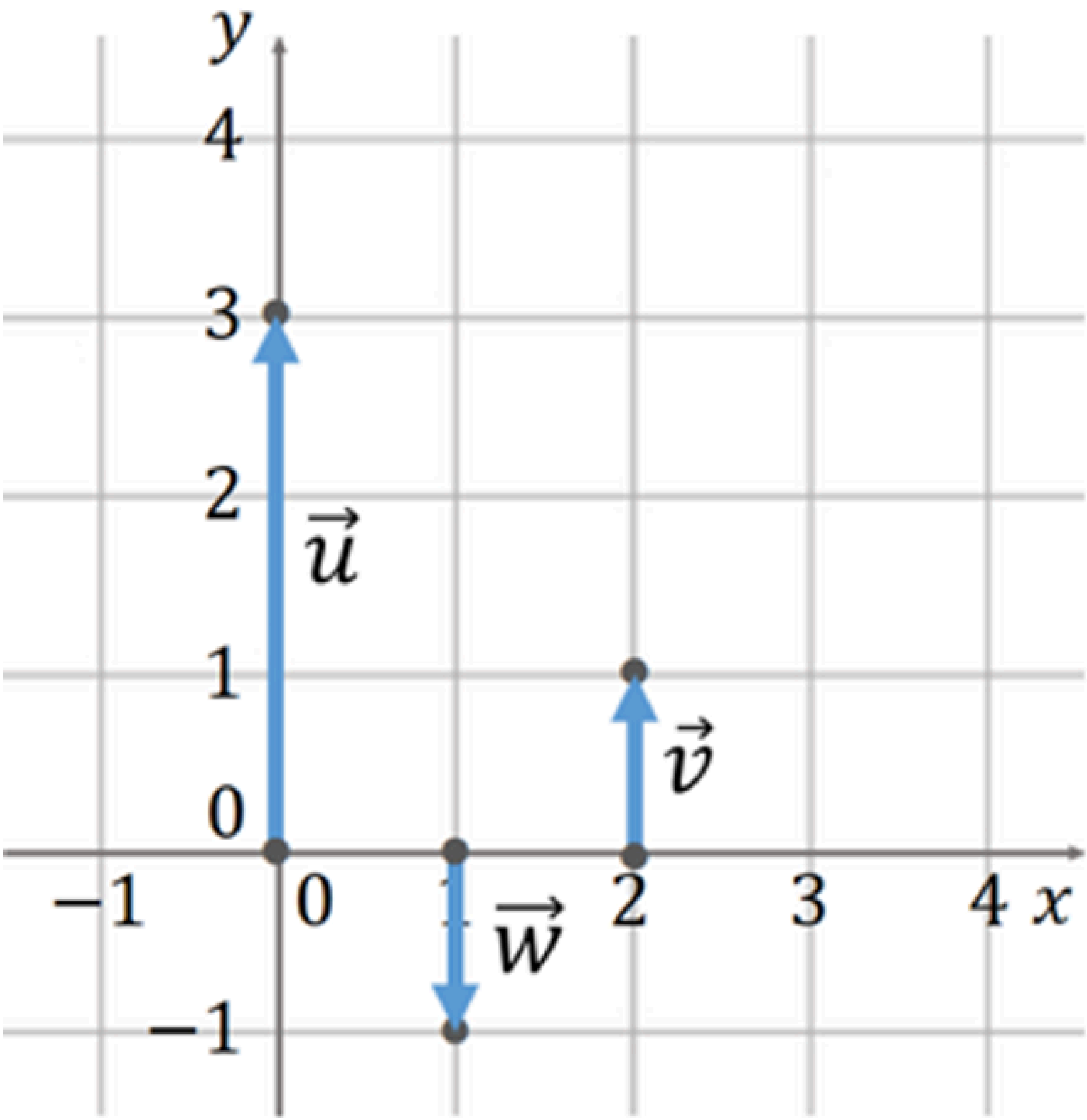


Figura 4 | Representação dos vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

Resolução: Observe na Figura 4 que

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 3$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{w}\right| = 1$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{u}$$

Para encontrar o versor de um vetor

$$\overrightarrow{u} = (a, b)$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right|$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u}/\left|\overrightarrow{u}\right|$$

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \left(\frac{a}{\left|\overrightarrow{u}\right|}, \frac{b}{\left|\overrightarrow{u}\right|}\right)$$

A notação de versor é comumente representada colocando um "chapéu" (um acento circunflexo) sobre o símbolo do vetor original. Isso indica que estamos lidando com um vetor unitário, ou seja, um vetor com magnitude igual a 1 e apontando na mesma direção do vetor original.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{a}{|\vec{u}|}, \frac{b}{|\vec{u}|} \right)$$

Exemplo: Encontre o versor do vetor

$$\vec{u} = (3{,}4)$$

Resolução: Primeiro vamos calcular o módulo do vetor

$$\vec{u}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \ \rightarrow \ |\vec{u}| = \sqrt{25} \ \rightarrow \ |\vec{u}| = 5$$

Agora podemos calcular o versor de

$$\vec{u}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

Vetores no espaço

Seja o plano de eixos coordenados

$$\overrightarrow{0x}$$

$$\overrightarrow{0y}$$

$$\overrightarrow{0z}$$

$$\vec{u}$$

$$(a, b, c)$$

$$(d, e, f)$$

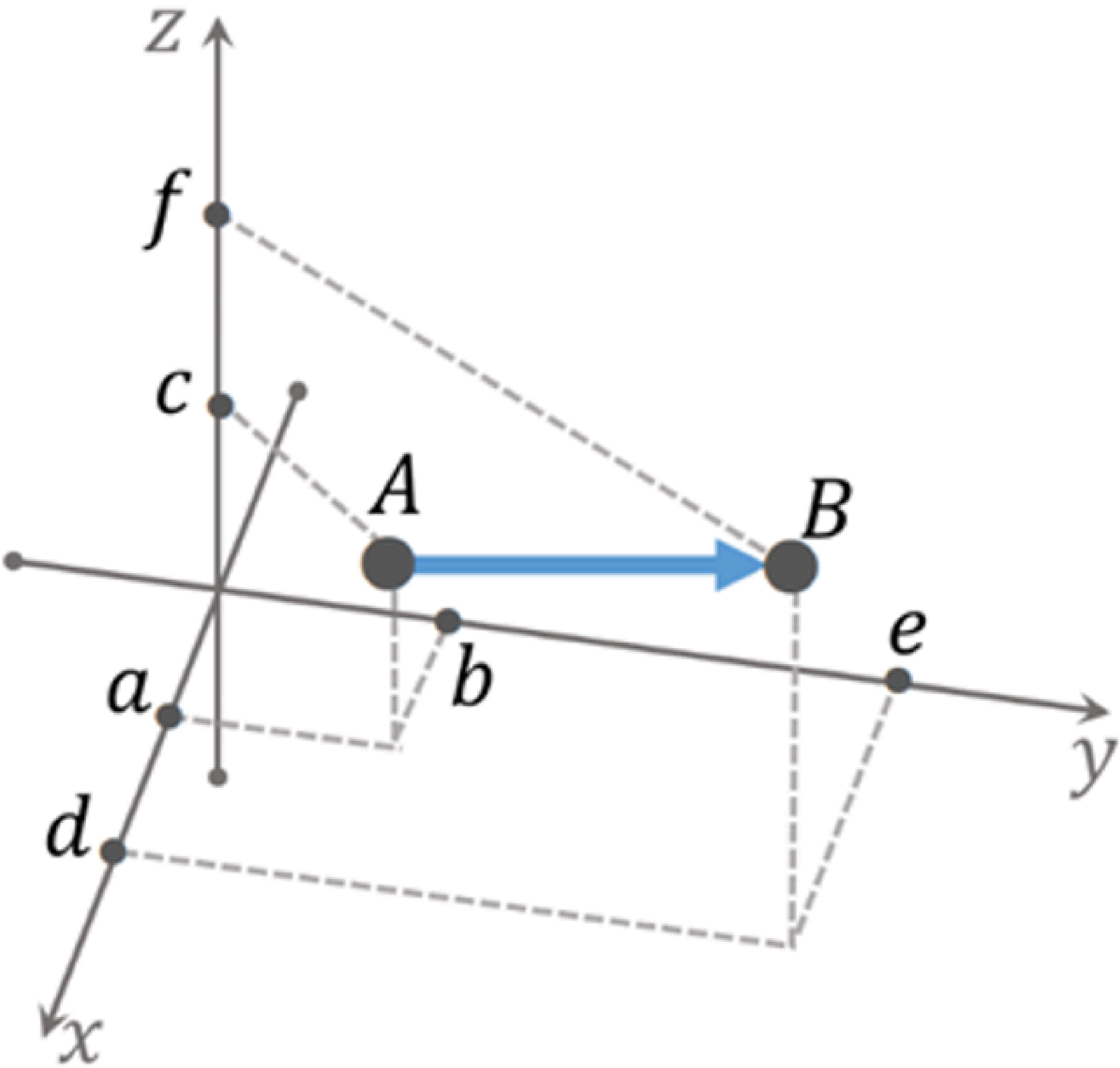


Figura 5 | Vetor no espaço. Fonte: elaborada pela autora. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 88).

Para calcular o módulo de vetores no espaço, basta tomarmos sua origem (a, b, c) e extremidades (d, e, f), analogamente aos vetores do plano:

$$(a, b, c)$$

$$(d, e, f)$$

$$\overrightarrow{u} = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$$

Para encontrar o versor de um vetor

$$\overrightarrow{u} = (a, b, c)$$

basta dividi-lo pelo seu módulo,

$$\overrightarrow{u} = (a, b, c)$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right|$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\hat{u} = \frac{\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \left(\frac{a}{\left|\overrightarrow{u}\right|}, \frac{b}{\left|\overrightarrow{u}\right|}, \frac{c}{\left|\overrightarrow{u}\right|}\right)$$

Vamos Exercitar?

Vamos retomar o problema proposto no início desta aula: uma cidade A está situada em um mapa sobre o ponto de coordenadas (63,152), dada em quilômetros. Uma outra cidade B está situada no mesmo mapa sobre o ponto de coordenadas (73,182). Qual a distância entre essas duas cidades?

Para calcular a distância entre as duas cidades, precisamos calcular a distâncias entre os pontos de coordenadas (63,152) e (73,182). Para isso, devemos encontrar o módulo do vetor com origem em um dos pontos dados e extremidade no outro.

Considerando o vetor

$$\overrightarrow{d}$$

$$\overrightarrow{d} = ((73-63) + (182-152))$$

$$\overrightarrow{d} = (10 + 30)$$

Precisamos calcular o módulo

$$\overrightarrow{d}$$

$$\left|\overrightarrow{d}\right| = \sqrt{10^2 + 30^2}$$

$$\left|\overrightarrow{d}\right| = \sqrt{10^2 + 30^2}$$

$$\left|\overrightarrow{d}\right| = \sqrt{1000}$$

$$\left|\overrightarrow{d}\right| = 31{,}6\ km$$

Logo, a distância entre as cidades é de aproximadamente

$$31{,}6\ km$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Acesse o capítulo 1 do livro *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*, de Tuanny Maciel (2022). Faça login na sua biblioteca virtual e acesse-o.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

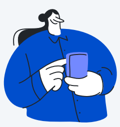
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 3

Decomposição de Vetores

Decomposição de vetores



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer como decompor um vetor em suas componentes, seja no plano ou no espaço. A decomposição vetorial refere-se ao processo de representar um vetor em termos de seus componentes em direções específicas. Isso é frequentemente realizado ao longo dos eixos coordenados em um sistema de referência.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a decomposição vetorial é útil em diversas aplicações, como análise de movimento em física, resolução de forças em mecânica, e visualização de dados em computação gráfica. Ela oferece uma maneira eficaz de lidar com vetores em sistemas coordenados.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento!
Vamos lá!

Ponto de Partida

A decomposição de vetores refere-se ao processo de dividir um vetor em componentes que apontam ao longo de direções específicas. Isso é frequentemente feito em relação aos eixos coordenados, como

x

y

x

y

z

Para fixar os conteúdos que serão vistos nesta aula, vamos trabalhar com o seguinte problema: Carlos precisa chegar ao local do seu emprego. Para tanto, ele resolve ir na direção Sudoeste-Nordeste, percorrendo 20 km, conforme Figura 1. Por meio de vetores, podemos determinar a distância que Carlos andou em relação ao Norte e a Leste.

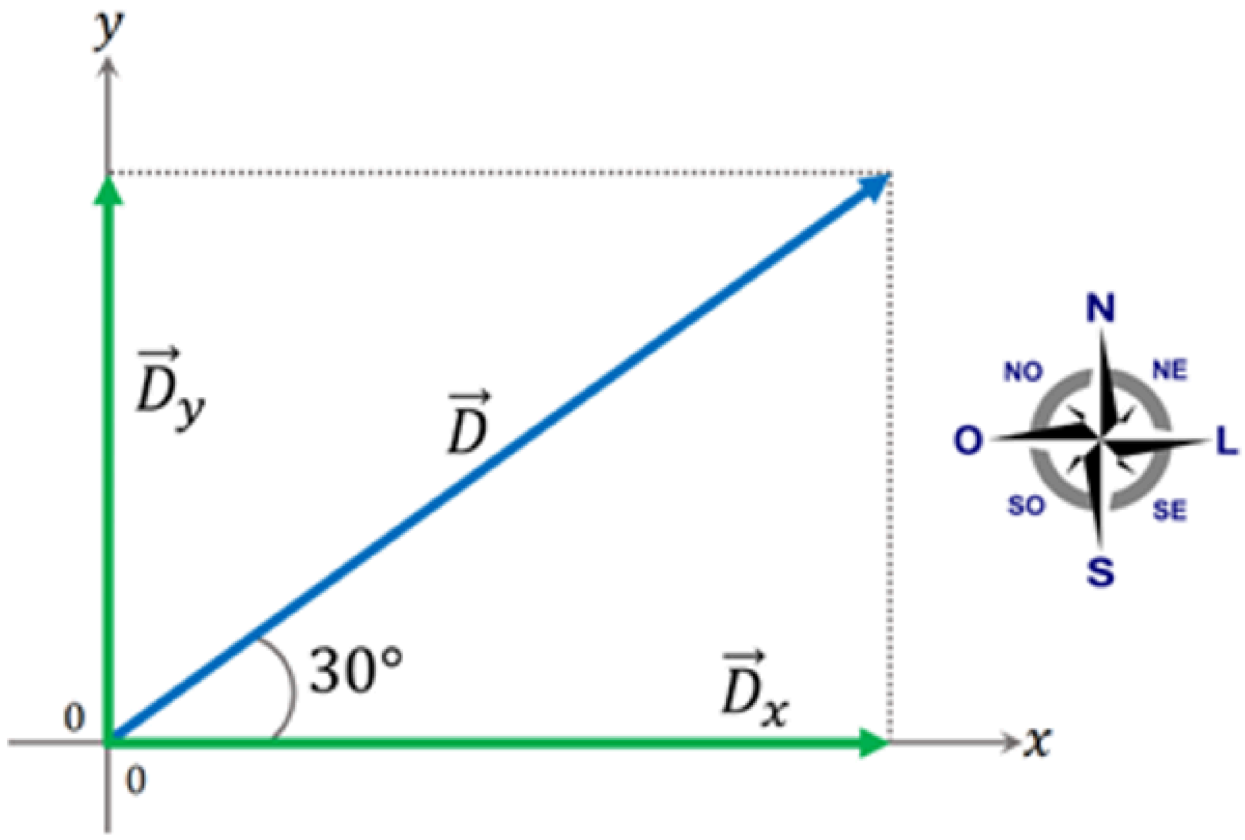


Figura 1 | Distância percorrida por Carlos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 93).

Quais são essas distâncias?

Para que você consiga resolver esse e outros problemas, é necessário ver alguns conceitos sobre vetores e decomposição de vetores, e mais especificamente, analisar e utilizar algumas ferramentas diferentes que lhe permitirão determinar os módulos de seus componentes

$$\overrightarrow{D}_x$$

$$\overrightarrow{D}_y$$

Vamos começar?

Bons estudos!

Vamos Começar!

A decomposição vetorial, ou decomposição em vetores, é um conceito matemático que envolve a representação de um vetor como a combinação linear de outros vetores.

Uma decomposição vetorial comum é a decomposição de um vetor em suas componentes ao longo dos eixos coordenados, seja no espaço bidimensional ou tridimensional.

Componentes de um vetor no plano ($\mathbb{R}^2$)

Seja $\overrightarrow{D}$ um vetor no plano xy e que faz um ângulo α qualquer com o eixo das abscissas (x). Podemos representar o vetor $\overrightarrow{D}$ por meio de suas componentes $\overrightarrow{D}_x$ (projeção no eixo x) e $\overrightarrow{D}_y$ (projeção no eixo y).

$$\overrightarrow{D}$$

$$xy$$

α

x

$\overrightarrow{D}$

$\overrightarrow{D}_x$

x

$\overrightarrow{D}_y$

y

A Figura 2 mostra o vetor
$\overrightarrow{D}$
sendo representado por suas componentes
$\overrightarrow{D}_x$
e
$\overrightarrow{D}_y$
no plano
xy
.

$\overrightarrow{D}$

$\overrightarrow{D}_x$

$\overrightarrow{D}_y$

xy

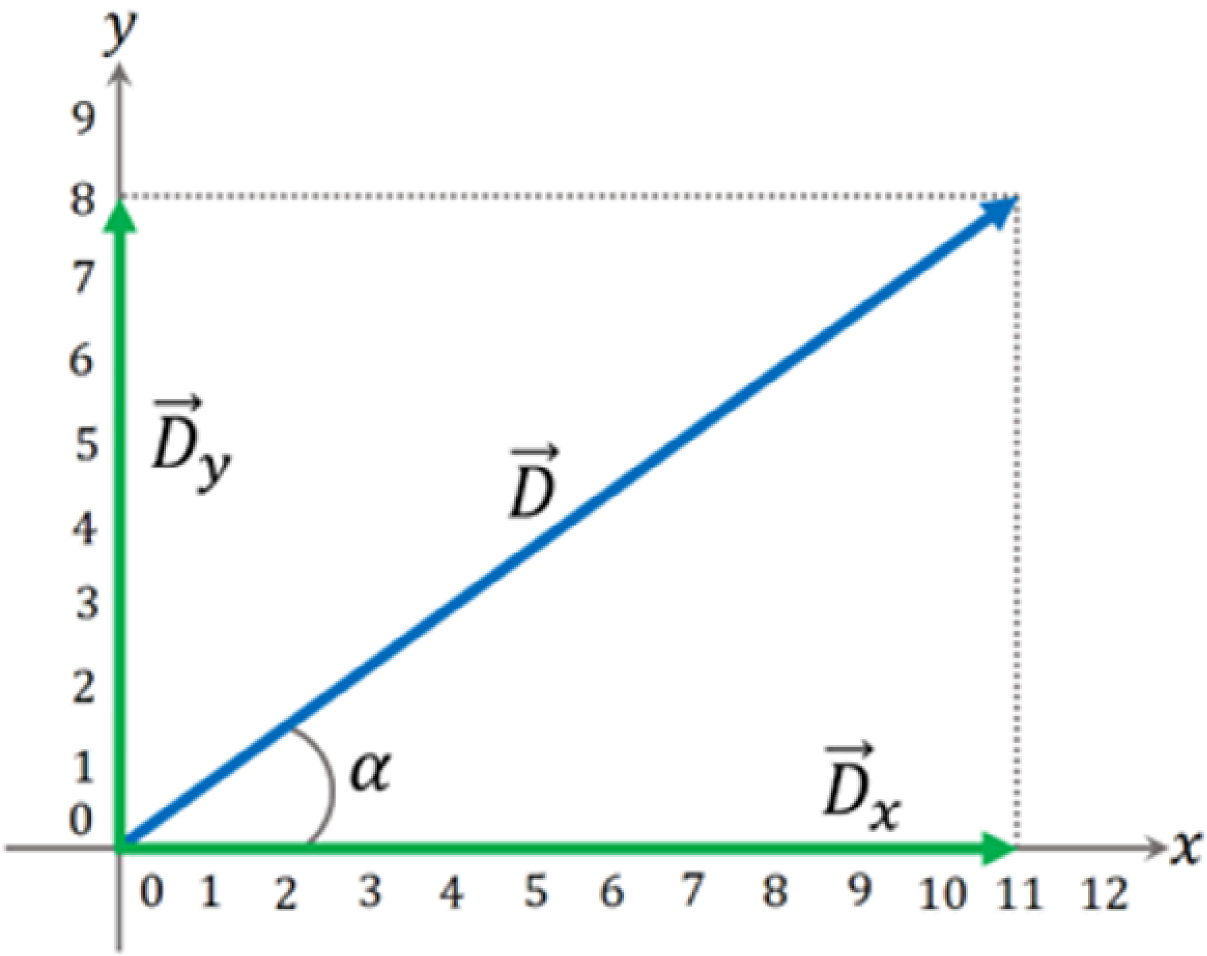


Figura 2 | Componentes do vetor

$$\vec{D}$$

Uma observação importante: as componentes de um vetor são grandezas escalares que tanto podem ser positivas quanto negativas.

Se deslocarmos a componente

$$\vec{D}_y$$

do vetor

$$\vec{D}$$

de modo que ele esteja paralelo ao eixo y, os três vetores,

$$\vec{D}_x$$

,

$$\vec{D}_y$$

e

$\overrightarrow{D}$

formam um triângulo retângulo, mostrado na Figura 3, em que valem as propriedades geométricas de triângulos.

$\overrightarrow{D}_y$

$\overrightarrow{D}$

$\overrightarrow{D}_x$

$\overrightarrow{D}_y$

$\overrightarrow{D}$

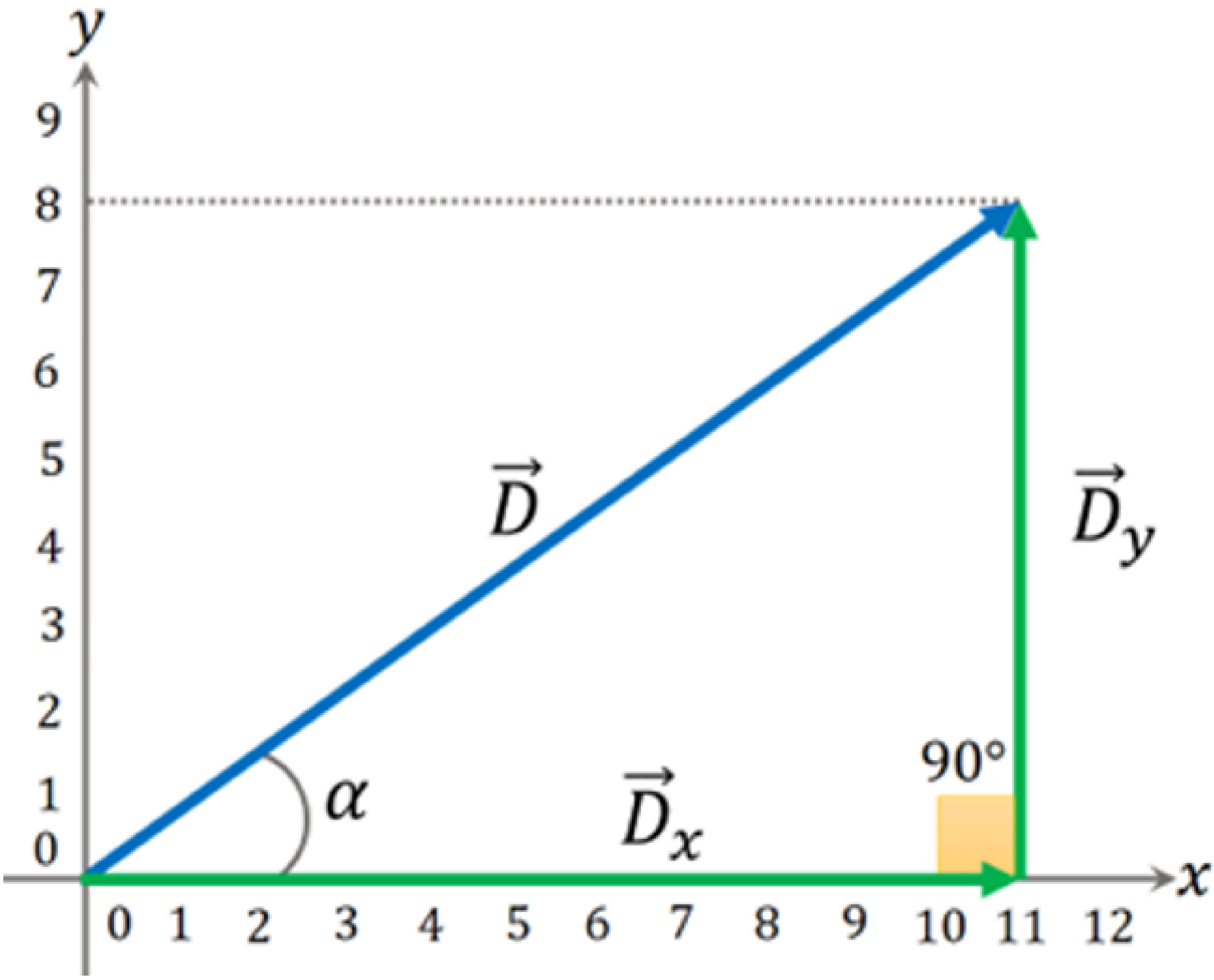


Figura 3 | Triângulo retângulo formado por

$$\vec{D}$$

e suas componentes. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 95).

$$\vec{D}$$

Vamos escrever as relações trigonométricas na decomposição de vetores no plano.

Observe a Figura 3. A partir das definições de seno e cosseno de um ângulo, podemos escrever:

$$cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow cos\alpha = \frac{D_x}{\left|\vec{D}\right|}$$

$$cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow cos\alpha = \frac{D_x}{\left|\vec{D}\right|}$$

Portanto, o módulo da componente
D_x
do vetor
$\vec{D}$
é determinado por:

$$D_x$$

$$\vec{D}$$

$$D_x = \left|\vec{D}\right| cos\alpha$$

$$D_x = \left|\vec{D}\right| cos\alpha$$

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \rightarrow \quad sen\alpha = \frac{D_y}{\left|\vec{D}\right|}$$

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \rightarrow \quad sen\alpha = \frac{D_y}{\left|\vec{D}\right|}$$

Assim, o módulo da componente
D_y
do vetor
$\vec{D}$
é determinado por:

$$D_y$$

$$\vec{D}$$

$$D_y = \left|\vec{D}\right| sen\alpha$$

Tendo as componentes do vetor
$\vec{D}$
, podemos escrever:

$$\vec{D}$$

$$\vec{D} = (D_x, D_y) \;\; \rightarrow \;\; \vec{D} = \left(\left|\vec{D}\right| cos\alpha, \left|\vec{D}\right| sen\alpha\right)$$

Para calcular o ângulo
α
:

$$\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{D_y}{D_x} \;\; \rightarrow \;\; \alpha = arctg\left(\frac{D_y}{D_x}\right)$$

A função
$\alpha = arctg(a)$
é a função inversa da função
$tg(\alpha) = a$
, ela retorna o ângulo cuja tangente é
α
. Na sua calculadora ela aparece como
tan^{-1}
.

$$\alpha = arctg(a)$$

$$tg(\alpha) = a$$

$$\alpha$$

$$tan^{-1}$$

Uma observação importante: a relação

$$D_x = \left|\vec{D}\right| cos\alpha$$

$$\alpha$$

$$cos\alpha \geq 0$$

$$\alpha > 90^\circ$$

$$cos\alpha < 0$$

$$D_x = \left|\overrightarrow{D}\right| cos\alpha$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

$$D_x = \left|\overrightarrow{D}\right| |cos\alpha|$$

$$D_y = \left|\overrightarrow{D}\right| sen\alpha$$

$$sen\alpha \geq 0$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Exemplo: Observe a Figura 4 e determine as coordenadas do vetor resultante, sabendo que $D = 20\ m$.

$$D = 20\ m$$

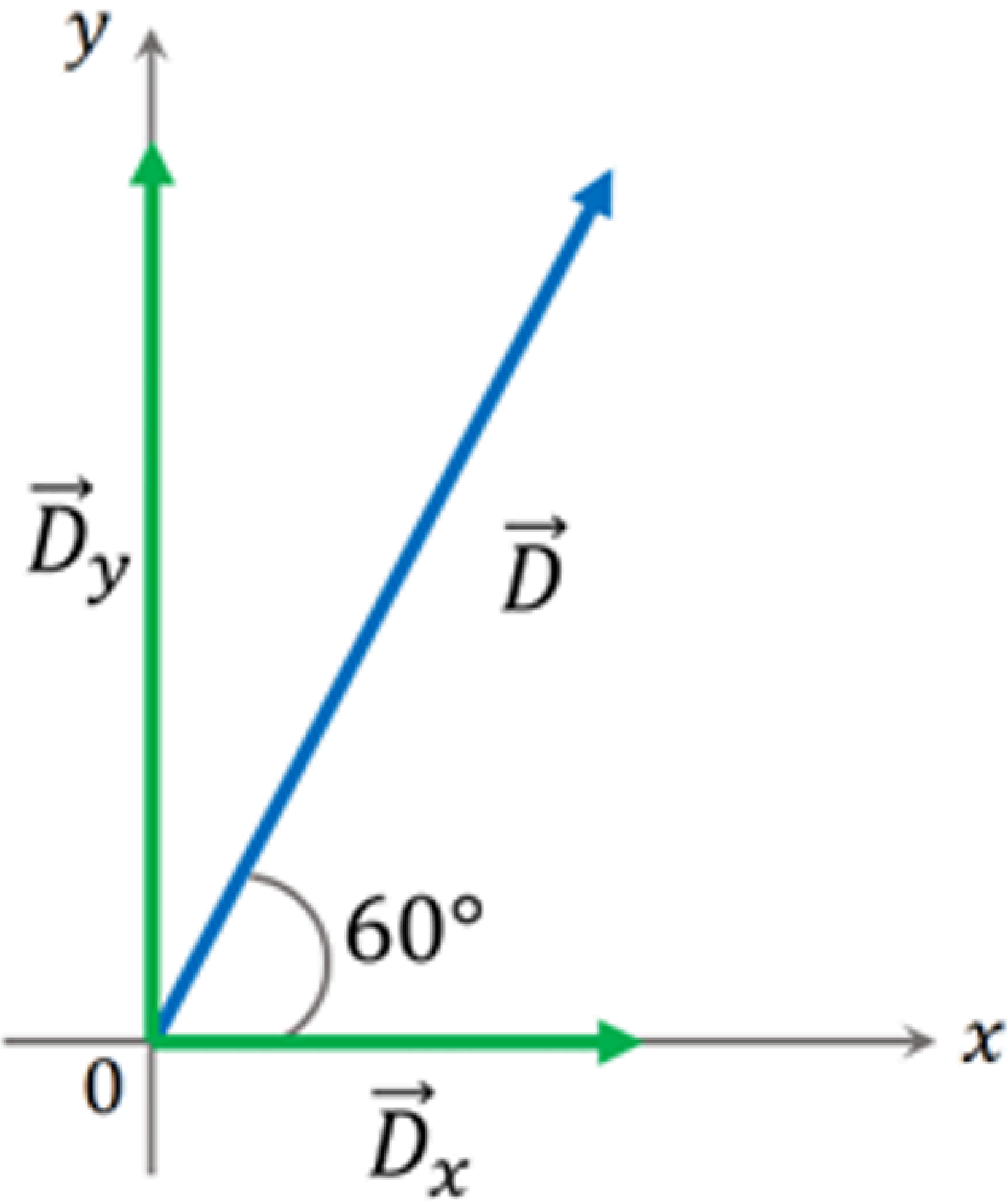


Figura 4 | Vetor $\vec{D}$ e suas componentes. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 96).

$\overrightarrow{D}$

Resolução: As coordenadas de
$\overrightarrow{D}$
são
(D_x, D_y)
:

$\overrightarrow{D}$

(D_x, D_y)

$$D_x = Dcos\alpha \quad \rightarrow \quad D_x = 20cos60^\circ \quad \rightarrow \quad D_x = 10\ m$$

$$D_x = Dcos\alpha \quad \rightarrow \quad D_x = 20cos60^\circ \quad \rightarrow \quad D_x = 10\ m$$

$$D_y = Dsen\alpha \quad \rightarrow \quad D_y = 20sen60^\circ \quad \rightarrow \quad D_y = 17{,}3\ m$$

$$D_y = Dsen\alpha \quad \rightarrow \quad D_y = 20sen60^\circ \quad \rightarrow \quad D_y = 17{,}3\ m$$

Portanto:

$$\overrightarrow{D} = (10; 17{,}3)$$

$$\overrightarrow{D} = (10; 17{,}3)$$

Exemplo: Determine as componentes vetoriais do vetor resultante
$\overrightarrow{D}$
que faz um ângulo de 45° com o eixo
x
e cujo módulo é igual a .

$\overrightarrow{D}$

x

Resolução: As coordenadas de
$\overrightarrow{D}$
são

$$(D_x, D_y)$$
$$:$$

$$\overrightarrow{D}$$

$$(D_x, D_y)$$

$$D_x = Dcos\alpha \quad \rightarrow \quad D_x = 12cos45^\circ \quad \rightarrow \quad D_x = 8{,}64\ m \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{D}_x = (8{,}64; 0)$$

$$D_x = Dcos\alpha \quad \rightarrow \quad D_x = 12cos45^\circ \quad \rightarrow \quad D_x = 8{,}64\ m \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{D}_x = (8{,}64; 0)$$

$$D_y = Dsen\alpha \quad \rightarrow \quad D_y = 12sen45^\circ \quad \rightarrow \quad D_y = 8{,}64\ m \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{D}_y = (0; 8{,}64)$$

Expressão analítica de vetores – vetores no plano ($\mathbb{R}^2$)

Um par ordenado é uma estrutura matemática que consiste em dois elementos organizados em uma ordem específica. Essa ordem é importante, o que significa que trocar a ordem dos elementos geralmente resulta em um par diferente. Os pares ordenados são comumente usados para representar pontos em um plano cartesiano, em que o primeiro elemento denota a coordenada horizontal (eixo

$$x$$

$$y$$

Um par ordenado

$$(x, y)$$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{u} = (x, y)$$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\hat{i} = (1{,}0)$$

$$\hat{j} = (0{,}1)$$

$$\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = 1$$

$0x$

$0y$

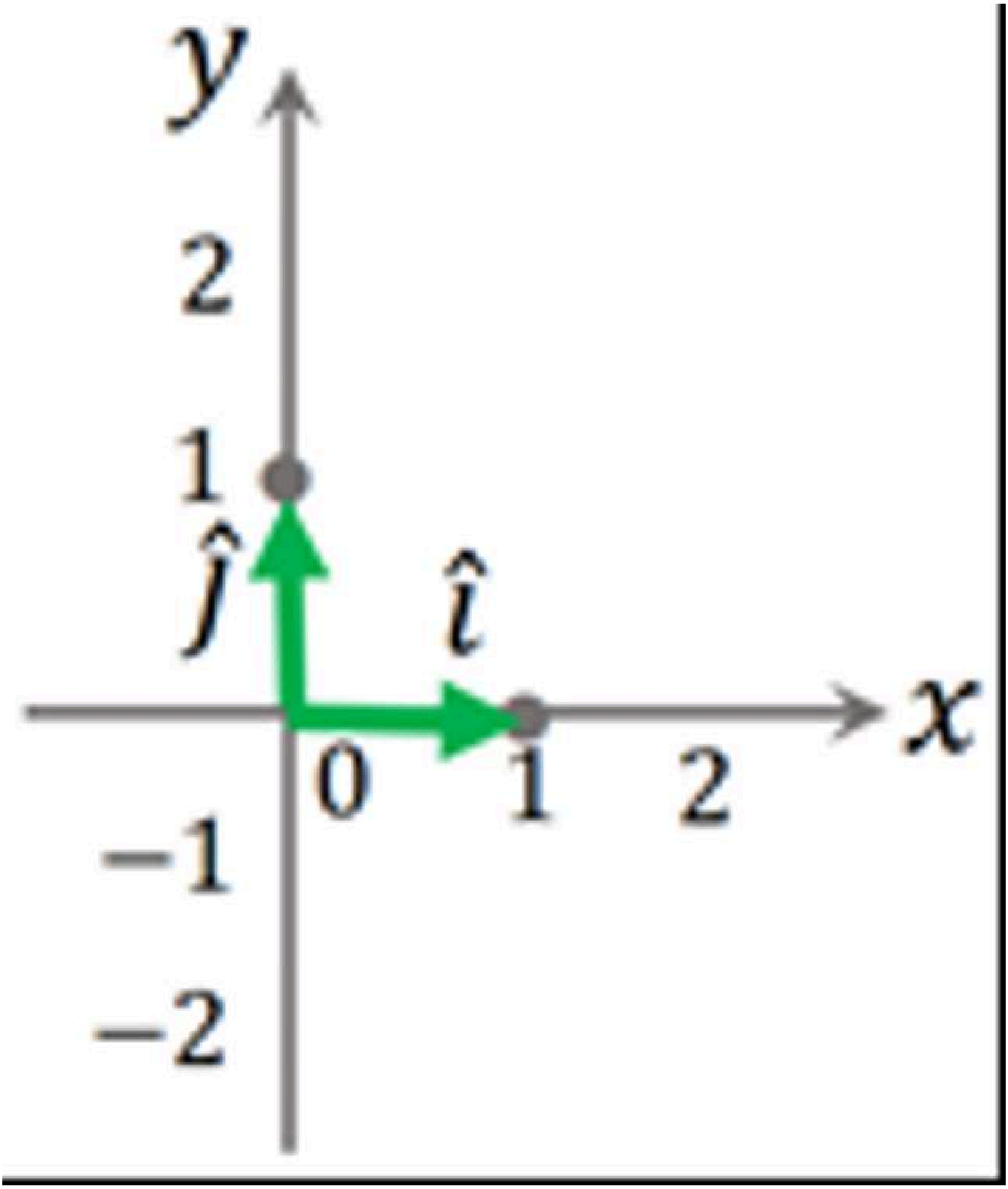


Figura 5 | Base canônica em

$$\mathbb{R}^2$$

O conjunto de versores

$$\left\{\hat{i}, \hat{j}\right\} = \{(1{,}0), (0{,}1)\}$$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$x$$

$$y$$

$$\overrightarrow{u}$$

A forma

$$\overrightarrow{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\overrightarrow{u}$$

Exemplo: Seja o vetor

$$\overrightarrow{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{A} = (4,\ \ -3)$$

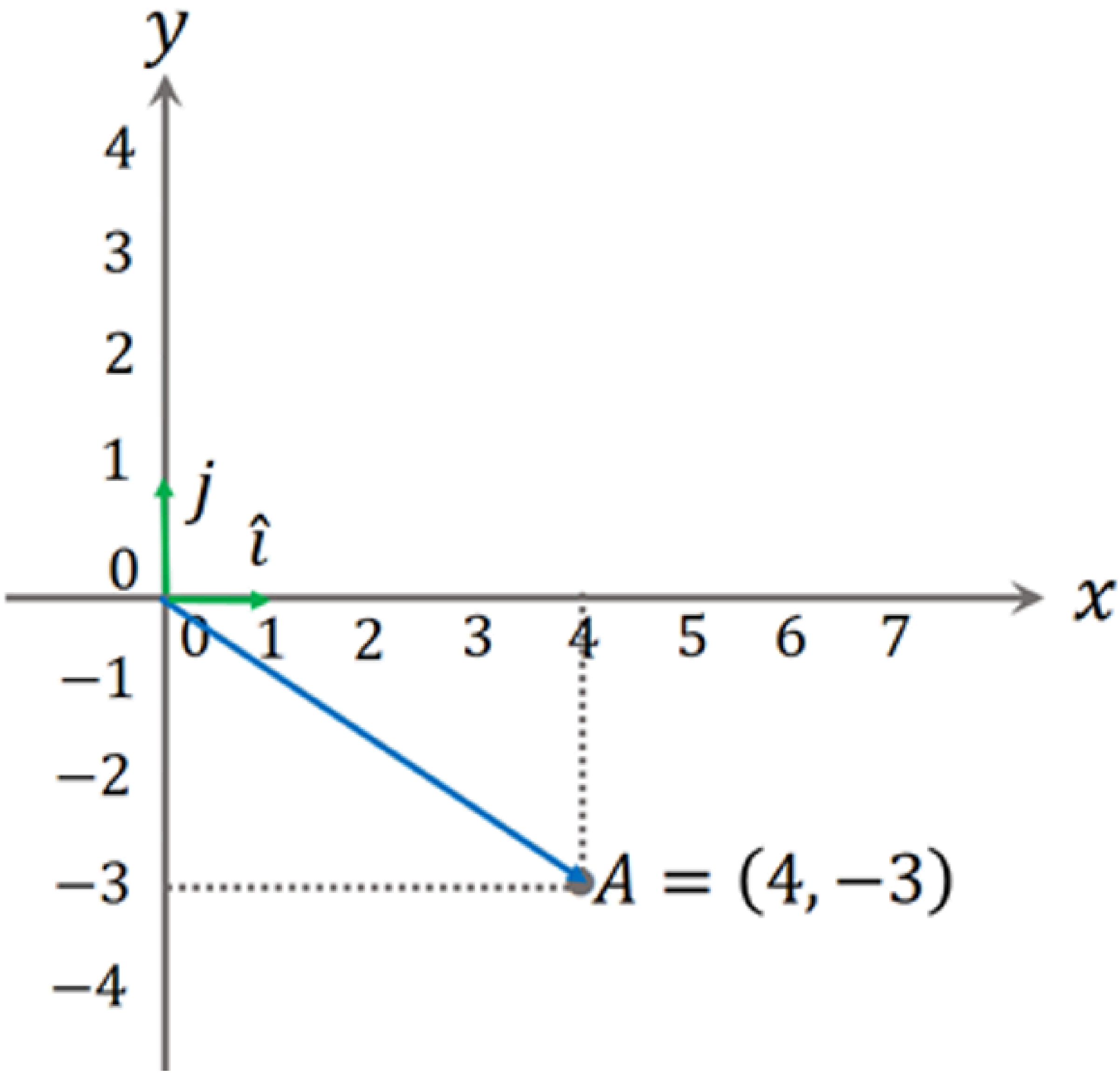


Figura 6 | Vetor

$$\vec{A} = (4, \ -3) = 4\hat{i} - 3\hat{j}$$

Siga em Frente...

Vetores no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$)

Um vetor

$$\overrightarrow{v}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{v} = (x, y, z)$$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\hat{i} = (1{,}0, 0)$$

$$\hat{j} = (0{,}1, 0)$$

$$\widehat{k} = (0{,}0, 1)$$

$$\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = \left|\widehat{k}\right| = 1$$

$$0x$$

$$0y$$

$$0z$$

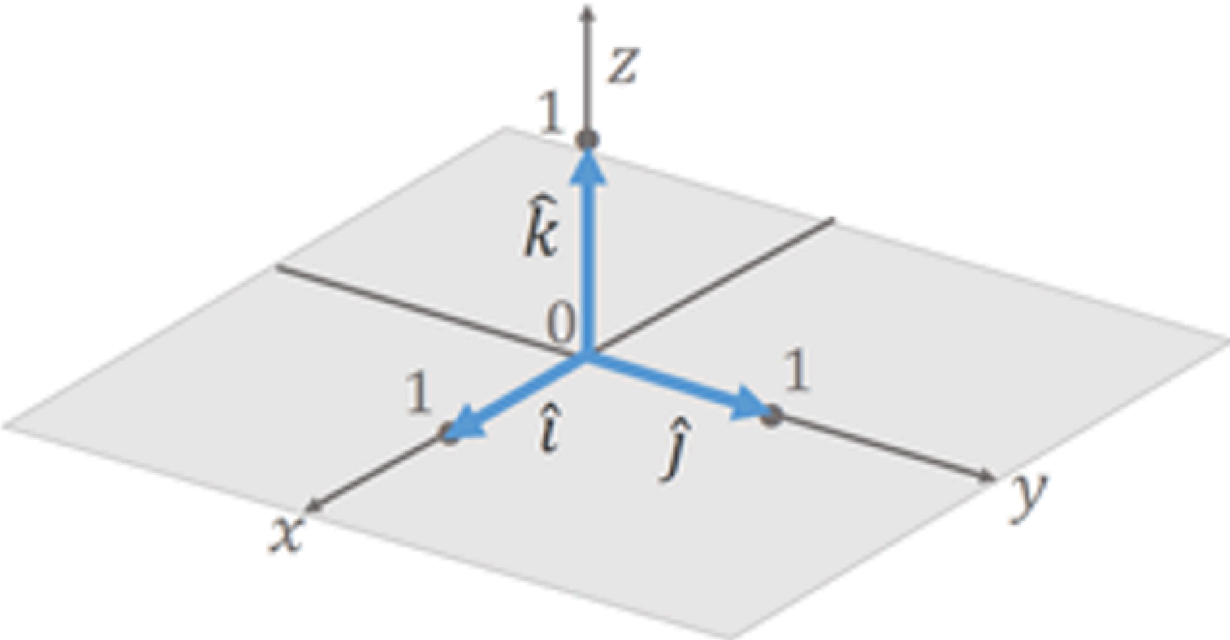


Figura 7 | Versores em

$$\mathbb{R}^3$$

O conjunto de versores

$$\left\{\hat{i}, \hat{j}, \widehat{k}\right\} = \{(1{,}0,0),\ (0{,}1,0), (0{,}0,1)\}$$

é a **base canônica do espaço**. Desse modo, um vetor no

$$\left\{\hat{i}, \hat{j}, \widehat{k}\right\} = \{(1{,}0,0),\ (0{,}1,0), (0{,}0,1)\}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\widehat{k}$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$\overrightarrow{v}$$

Exemplo: Se

$$\overrightarrow{v} = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 5\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{v} = (7{,}4, 5)$$

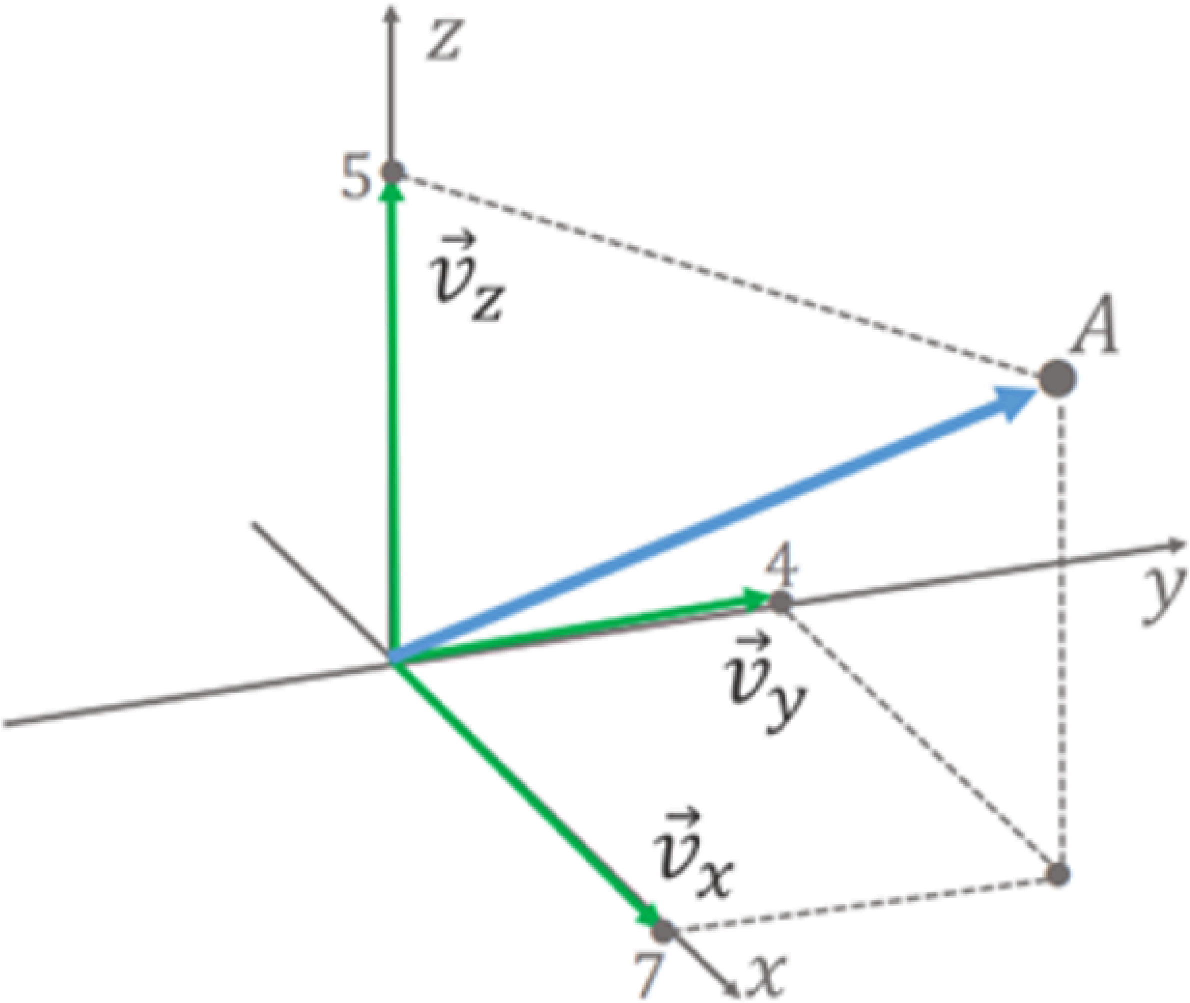


Figura 8 | Vetor

$$\overrightarrow{v} = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 5\widehat{k}$$

Decomposição de vetores no espaço ($\mathbb{R}^3$)

Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor no espaço de coordenadas xyz

e θ_x, θ_y e θ_z os ângulos que $\overrightarrow{v}$ faz com cada um dos eixos x, y e z. Podemos encontrar as componentes $\overrightarrow{v_x}$, $\overrightarrow{v_y}$ e $\overrightarrow{v_z}$ adotando o mesmo processo definido para vetores no plano. Desse modo:

$\overrightarrow{v}$

xyz

θ_x

θ_y

θ_z

$\overrightarrow{v}$

x

y

z

$\overrightarrow{v_x}$

$\overrightarrow{v_y}$

$\overrightarrow{v_z}$

$$\overrightarrow{v_x} = (vcos\theta_x, 0{,}0) \quad \overrightarrow{v_y} = (0, vcos\theta_y, 0) \quad \overrightarrow{v_z} = (0{,}0, vcos\theta_z)$$

Exemplo: Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor no espaço de coordenadas xyz e θ_x, θ_y e θ_z os ângulos que $\overrightarrow{v}$ faz com cada um dos eixos x, y e z. Sabendo que $\theta_x = 30^\circ$, $\theta_y = 50^\circ$, $\theta_z = 40^\circ$ e $\left|\overrightarrow{v}\right| = 5$, calcule as componentes do vetor.

$\overrightarrow{v}$

xyz

θ_x

θ_y

θ_z

$\overrightarrow{v}$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$\theta_x = 30^\circ$$

$$\theta_y = 50^\circ$$

$$\theta_z = 40^\circ$$

$$\left|\vec{v}\right| = 5$$

Resolução: As componentes do vetor
$\vec{v}$
são dadas por:

$$\vec{v}$$

$$\vec{v}_x = (vcos\theta_x, 0{,}0) \quad \rightarrow \quad v_x = vcos\theta_x \quad \rightarrow \quad v_x = 5cos30^\circ \quad \rightarrow \quad v_x = 4{,}35$$

$$\vec{v}_x = (vcos\theta_x, 0{,}0) \quad \rightarrow \quad v_x = vcos\theta_x \quad \rightarrow \quad v_x = 5cos30^\circ \quad \rightarrow \quad v_x = 4{,}35$$

$$\vec{v}_y = (0, vcos\theta_y, 0) \quad \rightarrow \quad v_y = vcos\theta_y \quad \rightarrow \quad v_y = 5cos50^\circ \quad \rightarrow \quad v_y = 3{,}20$$

$$\vec{v}_y = (0, vcos\theta_y, 0) \quad \rightarrow \quad v_y = vcos\theta_y \quad \rightarrow \quad v_y = 5cos50^\circ \quad \rightarrow \quad v_y = 3{,}20$$

$$\vec{v}_z = (0{,}0, vcos\theta_z) \quad \rightarrow \quad v_z = vcos\theta_z \quad \rightarrow \quad v_z = 5cos40^\circ \quad \rightarrow \quad v_z = 3{,}85$$

$$\vec{v}_z = (0{,}0, vcos\theta_z) \quad \rightarrow \quad v_z = vcos\theta_z \quad \rightarrow \quad v_z = 5cos40^\circ \quad \rightarrow \quad v_z = 3{,}85$$

Logo:

$$\vec{v}_x = (4{,}35; 0; 0)$$
,
$$\vec{v}_y = (0; 3{,}20; 0)$$
e
$$\vec{v}_z = (0; 0; 3{,}85)$$

$$\overrightarrow{v_x} = (4{,}35; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{v_y} = (0; 3{,}20; 0)$$

$$\overrightarrow{v_z} = (0; 0; 3{,}85)$$

Vamos Exercitar?

Vamos retomar o exercício proposto no início da nossa aula.

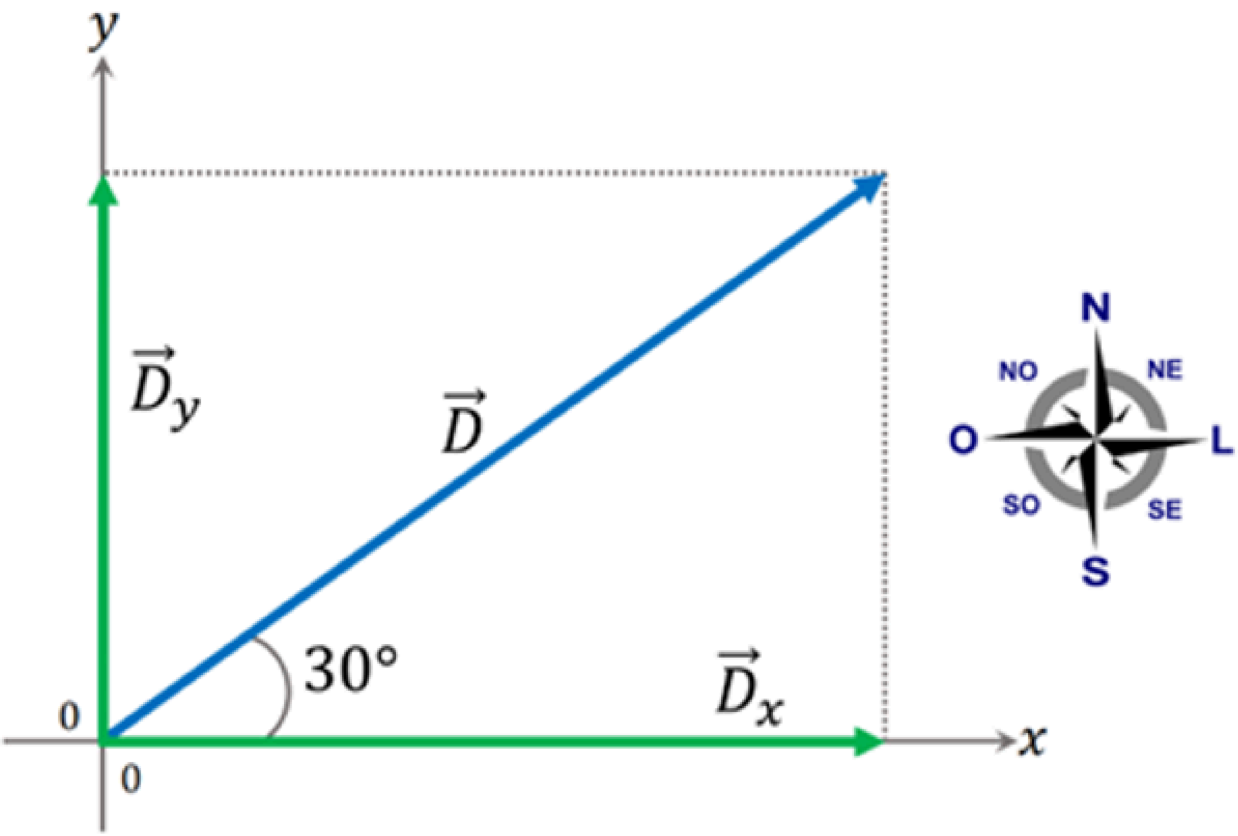


Figura 1 | Distância percorrida por Carlos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 93).

Carlos percorreu uma distância de 20 km na direção Sudoeste-Nordeste, ou seja,

$$\left|\vec{D}\right| = 20\ km$$

$$x$$

$$x$$

$$y$$

A distância percorrida para Leste está representada pelo vetor

$$\overrightarrow{D}_x$$

$$\overrightarrow{D}$$

$$x$$

$$\overrightarrow{D}_y$$

$$\overrightarrow{D}$$

Sabemos que as componentes de um vetor no plano são determinadas por:

$$D_x = Dcos30$$

$$D_y = Dsen30$$

Logo:

$$D_x = 20cos30 \quad \rightarrow \quad D_x = 17{,}3\ km$$

$$D_y = 20sen30 \quad \rightarrow \quad D_y = 10\ km$$

Portanto, Carlos andou um equivalente a 17,3 km para o Leste e 10 km em direção ao Norte.

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Veja mais **operações com vetores** (produto e componentes de vetores) e familiarize-se com o conceito e o uso de versores (vetores unitários). Leia o capítulo 3 do livro *Física para cientistas e engenheiros: volume 1: mecânica*, de Serway e Jewett Jr. Faça login na sua biblioteca virtual e acesse-o.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

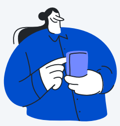
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 4

Operação com Vetores

Operações com vetores



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer algumas operações com vetores: adição, subtração e multiplicação por um escalar. Algumas operações com vetores podem ser feitas geometricamente ou analiticamente. Geometricamente, temos, por exemplo, a regra do polígono. Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a matemática envolvida nas operações de vetores é diferente da envolvida nas grandezas escalares, porque os vetores têm módulo, direção e sentido, características que devem ser levadas em consideração nas operações matemáticas. Logo, entender a distinção entre grandezas escalares e vetoriais é essencial em várias disciplinas científicas, pois influencia a forma como as grandezas são representadas, manipuladas e utilizadas em diferentes contextos.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento!

Vamos lá!

Ponto de Partida

Operações com vetores são comuns em matemática e programação, especialmente em álgebra linear. Como um vetor é uma entidade matemática com módulo, direção e sentido, os procedimentos matemáticos devem ser – e são – mais complexos do que para as grandezas escalares.

Nesta seção, estudaremos algumas operações com vetores. Fique atento à metodologia que será utilizada nessas operações.

Para ilustrar esta seção, considere o seguinte problema: Uma das aplicações de vetores é na representação de forças, como no caso do projeto de estruturas de concreto e estruturas metálicas. Um dos cálculos comumente realizados nesse caso é o da força resultante, que é obtida por meio da adição de todas as forças atuantes.

Considere que o ponto

$$P$$

$$\overrightarrow{F_1}$$

$$\overrightarrow{F_2}$$

$$\overrightarrow{F_3}$$

$$\overrightarrow{F_4}$$

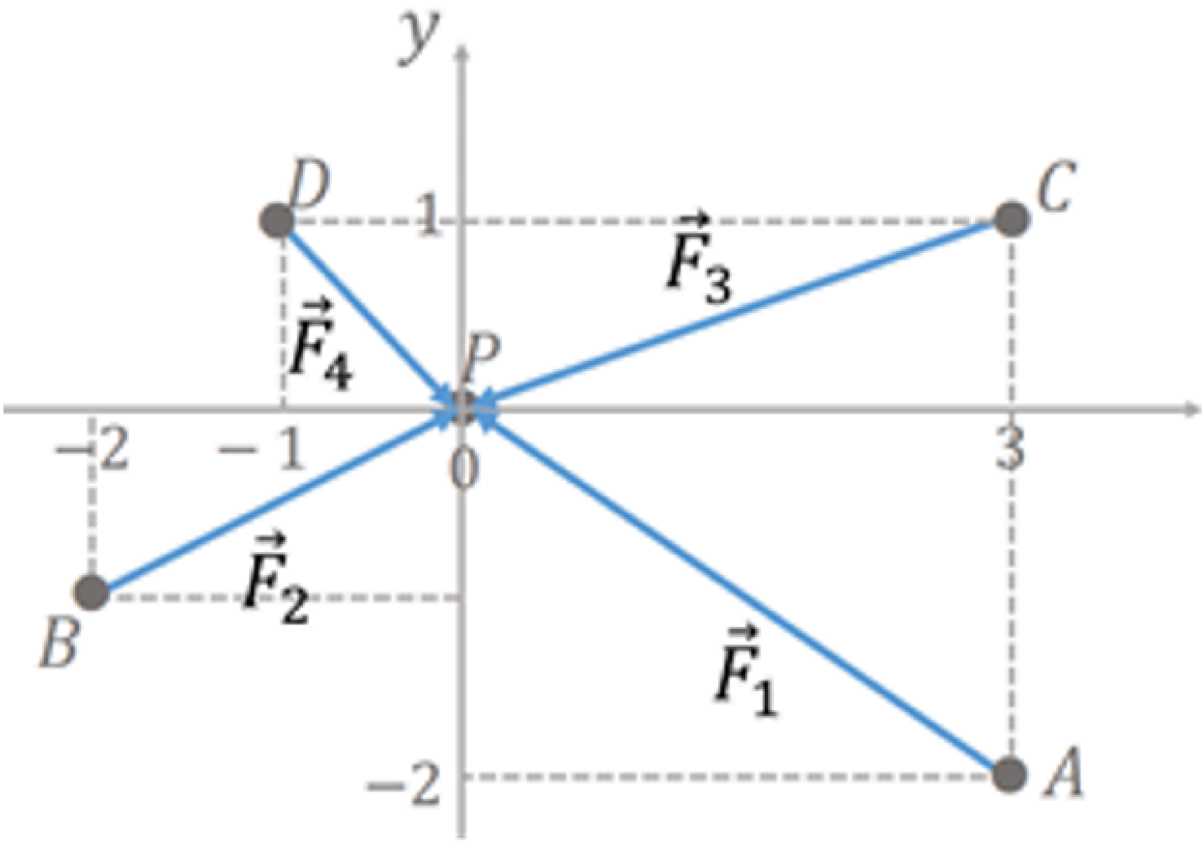


Figura 1 | Forças atuando no ponto

$$P$$

Vamos começar?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Agora, investigaremos as propriedades gerais dos vetores que representam quantidades vetoriais. Também discutiremos como adicionar e subtrair vetores usando tanto métodos algébricos quanto geométricos.

Adição geométrica

Umas das aplicações de vetores é a representação de deslocamentos. A Figura 2, por exemplo, mostra dois deslocamentos sucessivos realizados por Carlos, cada um representado por um vetor.

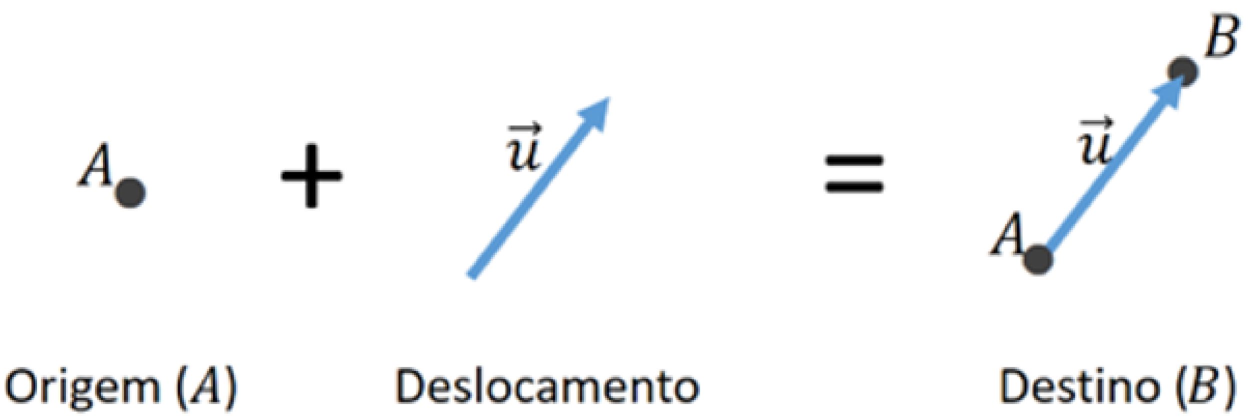


Figura 2 | Deslocamento de um ponto

$$A$$

$$\overrightarrow{u}$$

Seguindo essa ideia, vamos imaginar que um móvel, inicialmente parado em um ponto

$$A$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$B$$

Assim como sugere essa figura, podemos escrever

$$A + \overrightarrow{u} = B$$

Considere ainda que, após realizar o deslocamento $\overrightarrow{u}$, o móvel faça um novo deslocamento $\overrightarrow{v}$, parado no ponto C (Figura 3).

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$C$$

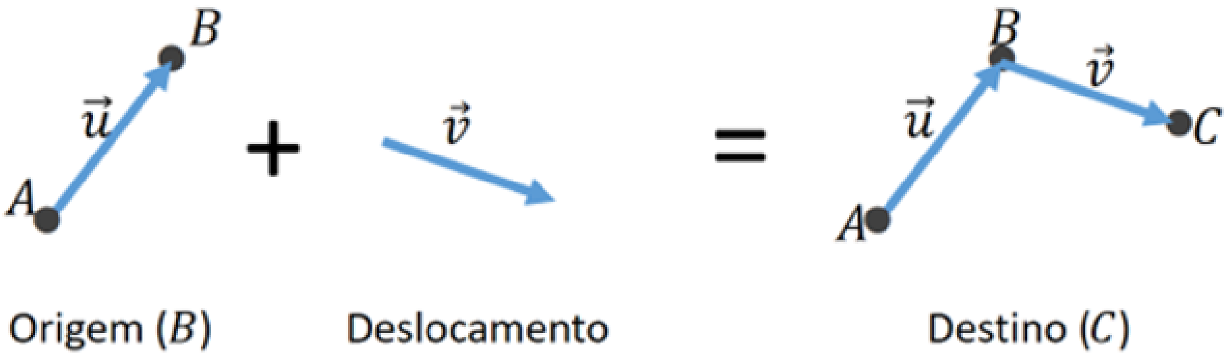


Figura 3 | Deslocamento de um ponto

$$B$$

$$\overrightarrow{v}$$

De acordo com o raciocínio anterior

$$B+\overrightarrow{v}=C$$

; além disso,

$$B+\overrightarrow{v}=C$$

$$A+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=C$$

O móvel poderia ter chegado no ponto

$$C$$

$$\overrightarrow{w}$$

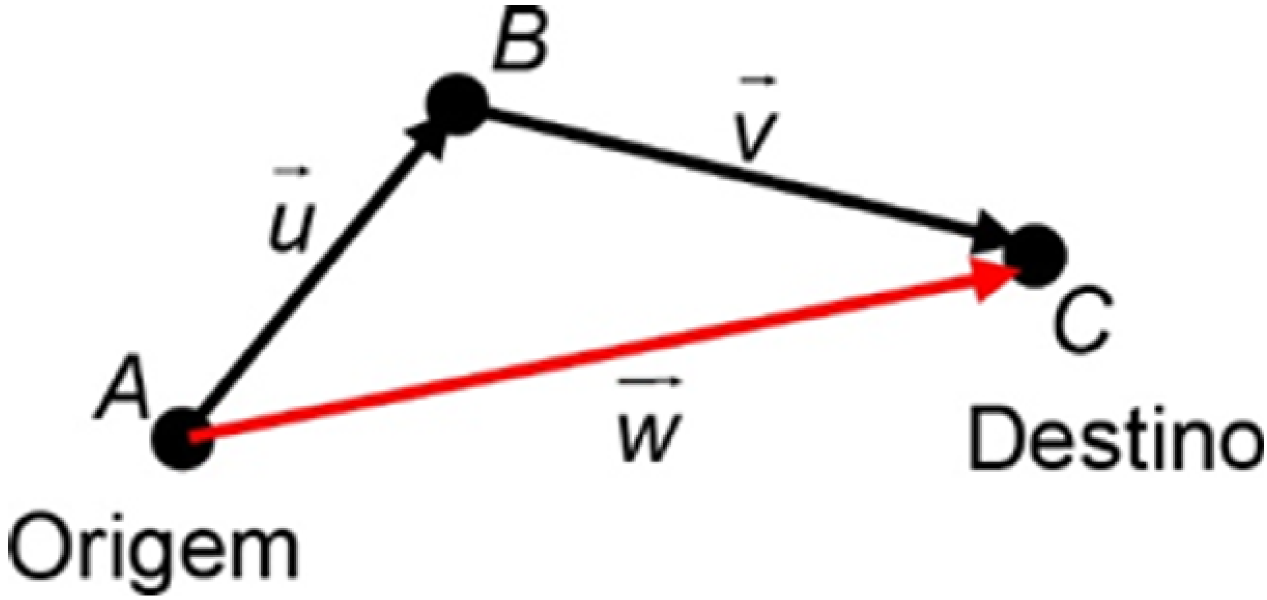


Figura 4 | Deslocamento de A por um vetor $\vec{w}$. Fonte: Portes e Farias (2016, p. 104).

$$A$$

$$\vec{w}$$

Logo,

$$A + \vec{w} = C$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{w}$$

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

O que queremos que perceba com toda essa discussão é que a adição de vetores está associada a um aspecto geométrico que pode ser percebido facilmente ao pensarmos em deslocamentos, por exemplo. Essa interpretação é válida para qualquer aplicação de vetores ao se realizar uma adição geométrica.

Para adicionar geometricamente dois vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

1. Consideramos um ponto de partida, por exemplo A, e escolhemos um representante de $\vec{u}$ que tem A como origem.
2. Determinamos um ponto B que é a extremidade deste representante de $\vec{u}$.
3. Escolhemos um representante de $\vec{v}$ que tem como origem o ponto B.
4. Determinamos o ponto C, extremidade deste representante de $\vec{v}$.
5. A soma geométrica $\vec{u}+\vec{v}$ será o vetor $\vec{w}$ que tem entre seus representantes o vetor com origem A e extremidade B.

Aplicando esse mesmo raciocínio a sucessivos deslocamentos, obtemos a denominada regra da poligonal (Figura 5). Veja na construção da poligonal que a origem de cada vetor (exceto o primeiro) é a extremidade do vetor imediatamente anterior.

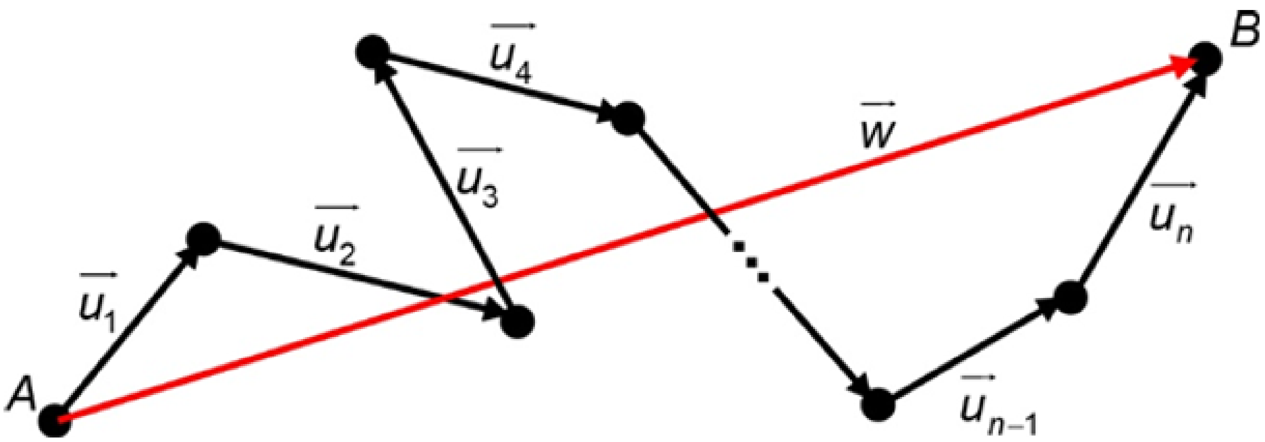


Figura 5 | Regra poligonal

$$\vec{w}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\ldots+\vec{u}_{n-1}+\vec{u}_n$$

Adição algébrica

Além da adição geométrica, podemos também pensar na adição algébrica de vetores, ou seja, adição de suas componentes.

Sejam dois vetores

$\overrightarrow{u} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$

e

$\overrightarrow{v} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$

de

$\mathbb{R}^3$

. Podemos encontrar o vetor soma

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

, também chamado **vetor resultante**, pela adição algébrica de suas componentes em cada direção.

$$\overrightarrow{u} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{v} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{r} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) + \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) + \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\hat{j} + (z_1 + z_2)\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\hat{j} + (z_1 + z_2)\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{r} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{r} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}$$

Temos ainda:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{r} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

$$\vec{r} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

Propriedades da soma de vetores

As propriedades que enunciarmos a seguir são muito importantes no estudo de vetores. Elas são como se fossem "as regras do jogo" ao realizar operações vetoriais.

Para quaisquer vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

$$\mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^3$$

- **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, ou seja, podemos permutar a ordem da soma que o resultado não se altera.
- **Associativa:** $\vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w}$, ou seja, podemos associar os vetores de qualquer maneira que a soma não se altera.
- **Elemento neutro:** existe um vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. O elemento neutro é aquele que desempenha um papel semelhante ao número zero. Qualquer outro somado com ele não tem seu valor alterado.
- **Oposto:** existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \left(-\vec{u}\right) + \vec{u} = \vec{0}$. Geometricamente, o vetor oposto é aquele que tem o mesmo módulo, mesma direção, mas sentido contrário ao vetor em questão.

A propriedade de comutatividade (1) também é conhecida como **regra do paralelogramo**, facilmente compreendida por meio da Figura 6.

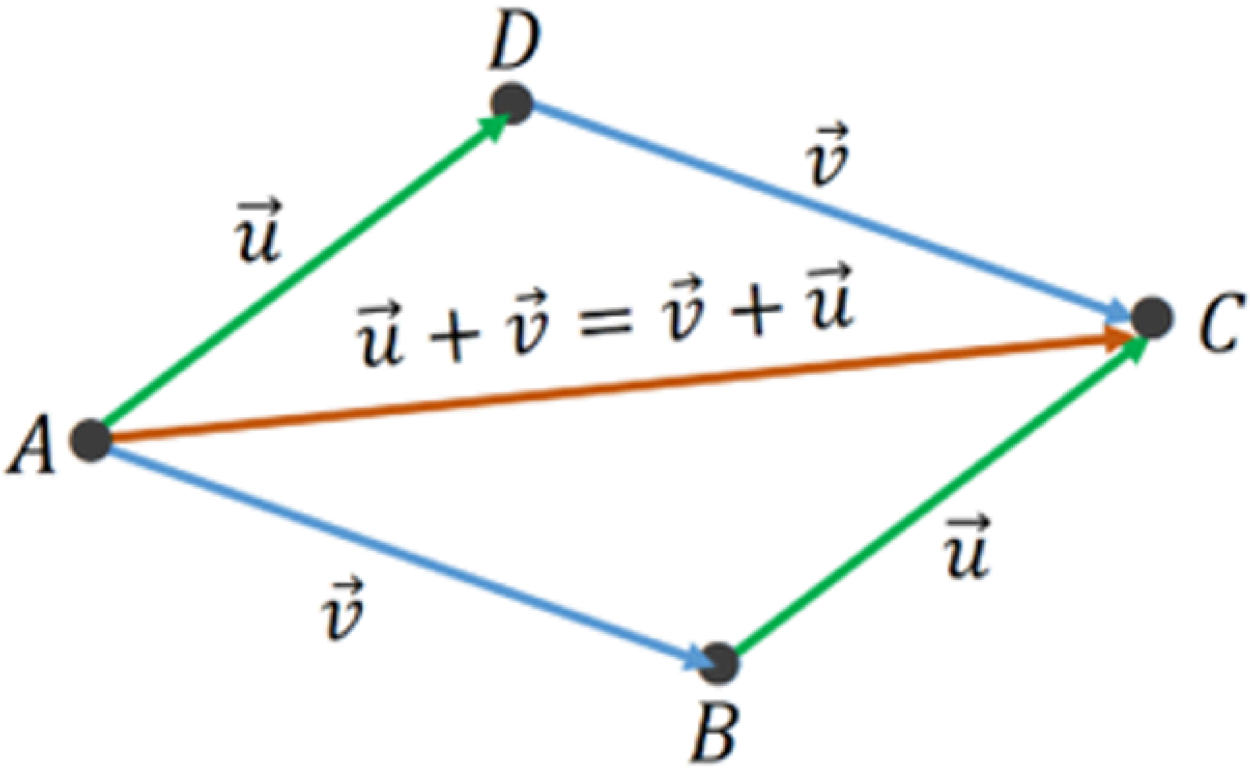


Figura 6 | Regra do paralelogramo. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 107).

A diagonal do paralelogramo construída a partir dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa a soma desses vetores. Associando isso a deslocamentos, qualquer que seja o caminho tomado, o destino é o mesmo, o ponto C.

$\vec{u}$

$\vec{v}$

C

Siga em Frente...

Subtração de dois vetores

A Figura 7 apresenta a interpretação geométrica da subtração de vetores.

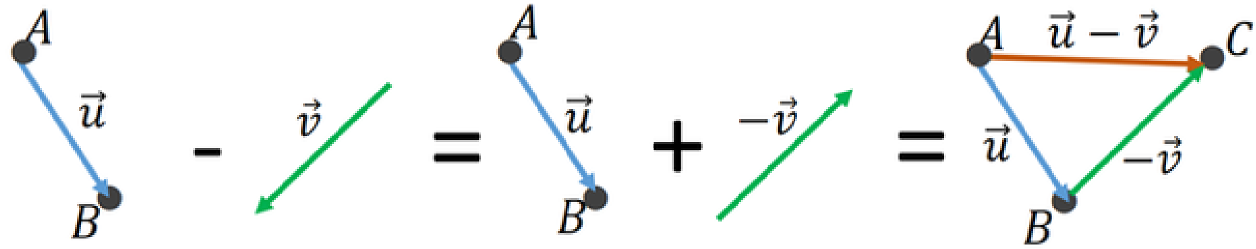


Figura 7 | Subtração de vetores. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 107).

Basicamente, uma subtração de vetores é semelhante a uma adição, uma vez que subtrair o segundo do primeiro é o mesmo que adicionar o primeiro ao oposto do segundo, ou seja:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{v}\right)$$

Algebricamente, dados dois vetores

$$\overrightarrow{u} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{v} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}\right)$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{r} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) - \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) - \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 - x_2)\hat{i} + \left(y_1 - y_2\right)\,\hat{j} + \left(z_1 - z_2\right)\ \widehat{k}$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\ \hat{j} + \left(z_1 - z_2\right)\ \widehat{k}$$

Ou ainda:

$$\overrightarrow{r} = \left(x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = \left(x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$$

$$\overrightarrow{r} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$$

Exemplo: Sejam os vetores

$\overrightarrow{u} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)$

e

$\overrightarrow{v} = \left(7\hat{i} + 6\hat{j}\right)$

, calcule:

$$\overrightarrow{u} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)$$

$$\overrightarrow{v} = \left(7\hat{i} + 6\hat{j}\right)$$

a. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
b. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

Resolução:

a. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{r} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\ \hat{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{r} = (3 + 7)\hat{i} + (5 + 6)\ \hat{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{r} = 10\hat{i} + 11\ \hat{j}$
b. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{r} = (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\ \hat{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{r} = (3 - 7)\hat{i} + \left(5 - 6\right)\ \hat{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{r} = -4\hat{i} - 1\ \hat{j}$

Produto de um escalar por um vetor

O que ocorre se realizarmos três deslocamentos sucessivos de mesmo módulo, direção e sentido? Geometricamente, teríamos o apresentado na Figura 8.

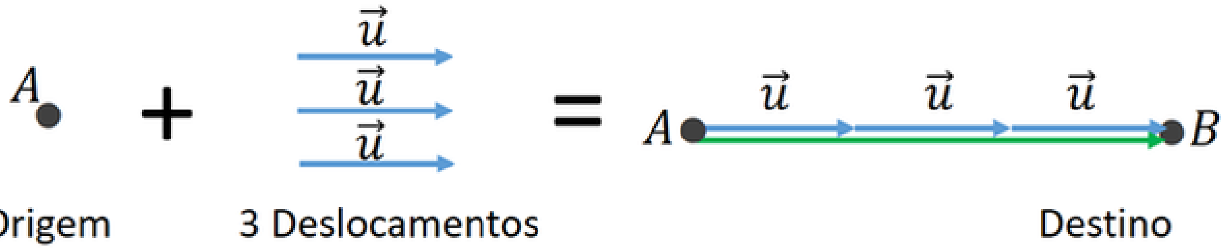


Figura 8 | Três deslocamentos iguais a

$$\vec{u}$$

Note que, assim como a Figura 8 sugere, três deslocamentos iguais a

$$\vec{u}$$

$$3\vec{u}$$

$$3\vec{u}$$

$$\vec{u}$$

$$3\vec{u}$$

$$3\vec{u}$$

$$\vec{u}$$

Dado um número real
k
, também denominado escalar, não nulo, e um vetor
$\vec{u}$
, o produto de
k
por
$\vec{u}$
tem como resultado um novo vetor
$\vec{v} = k\vec{u}$
tal que:

$$k$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$k$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$$

1. $k\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ têm a mesma direção, ou seja, são paralelos;
2. se $k > 0$, então $k\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ têm o mesmo sentido;
3. se $k < 0$, então $k\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ têm sentidos opostos;
4. se $k = 0$, então $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
5. $k\overrightarrow{u}$ tem módulo igual a $|k|.\left|\overrightarrow{u}\right|$, ou seja, o módulo de $\overrightarrow{u}$ multiplicado pelo valor absoluto de k.

Algebricamente, dados
$k \in \mathbb{R}$
e
$\overrightarrow{u} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right)$
, temos:

$$k \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{u} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right)$$

$$k\overrightarrow{u} = k\left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) \quad \rightarrow \quad k\overrightarrow{u} = \left(kx_1\hat{i} + ky_1\hat{j} + kz_1\widehat{k}\right)$$

$$k\overrightarrow{u} = k\left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}\right) \quad \rightarrow \quad k\overrightarrow{u} = \left(kx_1\hat{i} + ky_1\hat{j} + kz_1\widehat{k}\right)$$

Sejam
m
e
n
escalares quaisquer e
$\overrightarrow{u}$

e
$\overrightarrow{w}$
vetores arbitrários.

$$m$$

$$n$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{w}$$

1. **Propriedade associativa** em relação aos escalares: $m\left(n\overrightarrow{u}\right) = n\left(m\overrightarrow{u}\right) = (mn)\overrightarrow{u}.$
2. **Propriedade distributiva** em relação à adição de escalares: $(m+n)\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{u} + n\overrightarrow{u}.$
3. **Propriedade distributiva** em relação à adição de vetores: $m\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = m\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}.$

Vamos Exercitar?

Vamos retomar o exercício proposto no início dessa aula: O ponto

$$P$$

$$\overrightarrow{F_1}$$

$$\overrightarrow{F_2}$$

$$\overrightarrow{F_3}$$

$$\overrightarrow{F_4}$$

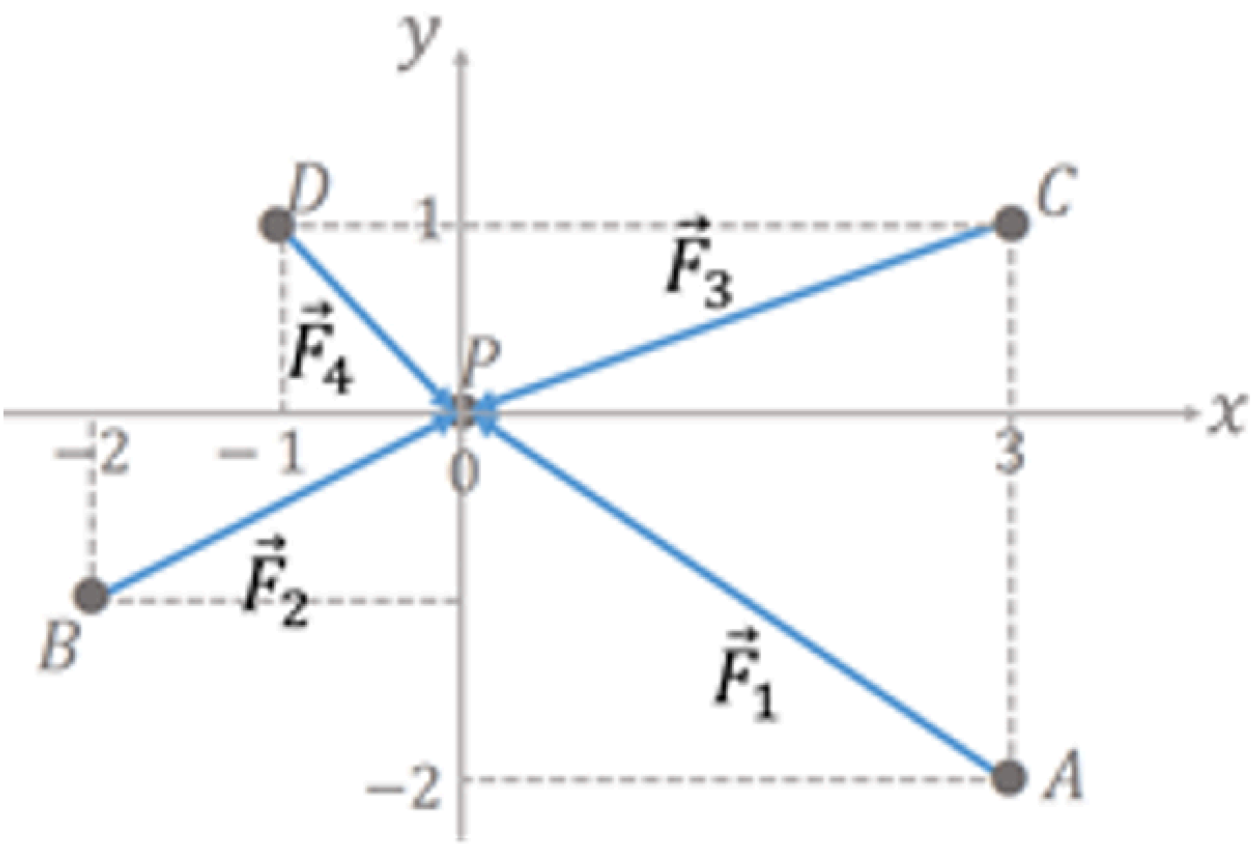


Figura 1 | Forças atuando no ponto. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 112).

Para determinar a força resultante, precisamos determinar as coordenadas de cada um dos vetores que as representam, como segue:

$$\overrightarrow{F_1} = (0 - 3{,}0 - (-2)) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_1} = (-3{,}2) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_1} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_2} = (0 - (-2), 0 - (-1)) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_2} = (2{,}1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_2} = 2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_3} = (0 - 3{,}0 - 1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_3} = (-3, -1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_3} = -3\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{F_4} = (0 - (-1),\ 0 - 1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_4} = (1, -1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_4} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

A força resultante será:

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$$

$$\overrightarrow{F_r} = (-3{,}2) + (2{,}1) + (-3,-1) + (1,-1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_r} = (-3{,}1) \ \rightarrow \ \overrightarrow{F_r} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

O seu módulo será:

$$\left|\overrightarrow{F_r}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (1^2)} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{F_r}\right| = \sqrt{10}\ N \left(\text{Newtons}\right)$$

A força resultante estará no quadrante onde

$$x$$

$$x = -3$$

$$y$$

$$y = 1$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Você já conhece as simulações interativas da Universidade de Colorado? As ***sims*** **PhET** baseiam-se em extensa pesquisa em educação e envolvem os alunos por meio de um ambiente intuitivo, estilo jogo, no qual os alunos aprendem por exploração e descoberta. Acesse, em especial, o simulador “Adição de Vetores”.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

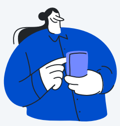
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 5

Encerramento da Unidade

Videoaula de Encerramento



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula serão retomados os principais conceitos abordados na Unidade 2: Vetores no plano e no espaço. Entre eles, estão: como determinar o módulo e a direção de um vetor, como decompô-lo em componentes no plano e no espaço, como realizar a adição (geométrica e algébrica), a subtração e a multiplicação por escalar de vetores.
Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois grandezas vetoriais são muito comuns nas ciências e é necessário o entendimento dos procedimentos matemáticos necessários para trabalhar com uma entidade matemática que tem módulo e direção.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Chegada

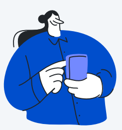
Para desenvolver a competência desta Unidade, que é aplicar as técnicas matemáticas envolvendo grandezas vetoriais e aplicar essas técnicas em situações cotidianas, é de grande importância compreender os vários tópicos da análise vetorial. Vetores são fundamentais em muitas disciplinas, desempenhando um papel crucial na descrição de movimento, força e campos, entre outras grandezas físicas e matemáticas. Para tanto, é necessário entender a própria definição de vetor, como calcular o seu módulo, como encontrar suas componentes e como manipulá-los por meio das regras de suas operações.

Em outras palavras, envolve a compreensão das propriedades, operações e aplicações dos vetores.

Algumas questões e reflexões

1. Observe que $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{C}$ é muito diferente de $A+\ B=C$. A primeira equação é uma soma de vetores, que deve ser manipulada com cuidado, tal como o método gráfico. A segunda é uma adição algébrica simples de números que são tratados com as regras normais de aritmética.
2. Componentes x e y associam o cosseno do ângulo (direção do vetor que está sendo decomposto) à componente x e o seno do ângulo à componente y. Essa associação é verdadeira apenas porque medimos o ângulo θ em relação ao eixo x; portanto, não memorize essas equações. Se θ for medido em relação ao eixo y (como em alguns problemas), essas equações estarão incorretas. Pense sobre qual lado do triângulo contendo as componentes é adjacente ao ângulo e qual lado é oposto, e então atribua o cosseno e o seno de forma correspondente.
3. Vimos que o cálculo da direção (ângulo) de um vetor é feito por meio de uma função tangente. Geralmente, a função arco tangente em calculadoras fornece um ângulo entre -90° e +90°. Como consequência, se o vetor que você está estudando está no segundo ou terceiro quadrante, o ângulo medido a partir do eixo x positivo será o ângulo retornado pela calculadora mais 180°.
4. Um vetor com 7,0 unidades de comprimento e um vetor com 5,5 unidades de comprimento são somados. Sua soma é um vetor com 10,0 unidades de comprimento. Mostre graficamente pelo menos uma maneira pela qual esses vetores podem ser somados.

É Hora de Praticar!



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

As forças são interações que podem causar uma mudança no movimento ou na forma de um objeto. Elas são fundamentais para a compreensão da física e são descritas pelas leis do movimento de Newton. Existem várias formas de classificar as forças, dependendo do contexto em que estão sendo analisadas. As leis de Newton são frequentemente utilizadas para analisar e prever o comportamento dessas forças em diferentes situações.
A variedade de forças na natureza é vasta. Cada tipo de desempenha um papel específico em diferentes fenômenos físicos.

Nesse contexto, vamos considerar um semáforo pesando $122\ N$ que pende de um cabo ligado a dois outros presos a um suporte, como na Figura 1. Os cabos superiores formam ângulos de $\theta_1 = 37{,}0^\circ$ e $\theta_2 = 53{,}0^\circ$ com a horizontal. Estes cabos não são tão fortes quanto o cabo vertical e se quebrarão se a tensão neles for maior que $100\ N$. **O semáforo permanecerá pendurado nesta situação ou um dos cabos quebrará?**

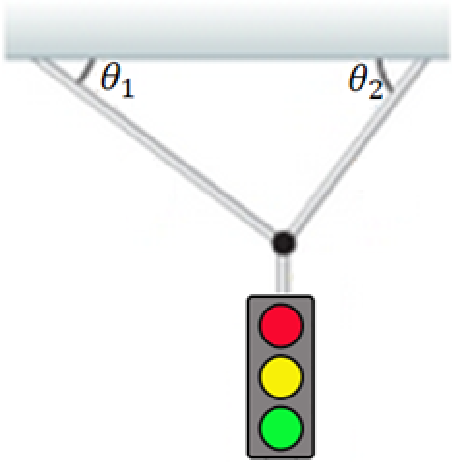


Figura 1 | Um semáforo suspenso por cabos. Fonte: elaborada pela autora.

Os vetores força envolvidos no problema são:

1. força peso ($\overrightarrow{F_g}$): uma força vertical que aponta para baixo e que age no semáforo;

2. força de tração ($\overrightarrow{T}$) : força que age no cabo, tem direção e sentido do cabo. Como há três cabos, teremos três forças de tração.

O diagrama de corpo livre, que mostra todas as forças envolvidas no problema, está na Figura 2.

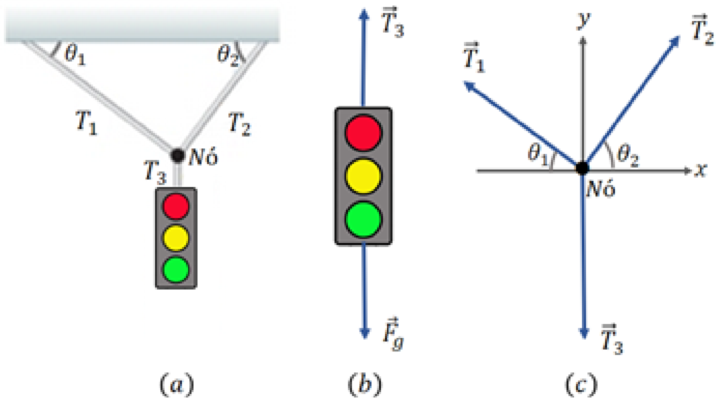


Figura 2 | Diagrama de corpo livre mostrando as forças que agem sobre o semáforo. Fonte: elaborada pela autora.

O sistema está em repouso, logo, a resultante das forças que agem no sistema deve ser nula, em todas as direções, ou seja, $\overrightarrow{F_r} = 0$ o que implica que $\overrightarrow{F}_{r,x} = 0$ e $\overrightarrow{F}_{r,y} = 0$.

Como você responderia à questão apresentada? Se necessário revisite o conteúdo da unidade para solucioná-la!

Construímos um diagrama das forças que agem sobre o semáforo, mostrado na Figura 3b, e um diagrama de corpo livre para o nó que une os três cabos, mostrado na Figura 3c. O nó é um ponto conveniente para escolher, pois todas as forças de interesse agem ao longo de linhas que passam pelo nó.

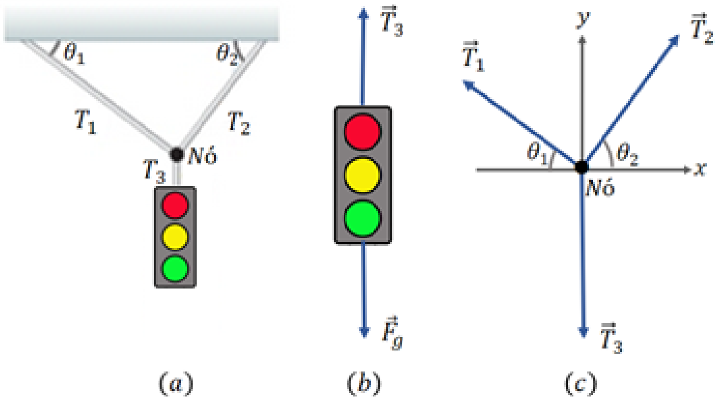


Figura 3 | Diagrama de corpo livre mostrando as forças que agem sobre o semáforo. Fonte: elaborada pela autora.

Podemos então considerar o semáforo uma partícula em equilíbrio, na qual a força resultante é zero. Decompondo as forças que agem sobre o nó em suas componentes:

$$\overrightarrow{T_1} = -T_1 cos\theta_1 \hat{i} + T_1 sen\theta_1 \hat{j} \qquad \overrightarrow{T_2} = -T_2 cos\theta_2 \hat{i} + T_2 sen\theta_2 \hat{j} \qquad \overrightarrow{T_3} = -F_g \hat{j}$$

$$\sum F_x = 0 \ \rightarrow \ -T_1 cos\theta_1 = -T_2 cos\theta_2 \ \rightarrow \ T_2 = T_1 \left(\frac{cos\theta_1}{cos\theta_2} \right)$$

$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow \ T_1 sen\theta_1 + T_2 sen\theta_2 - F_g = 0 \ \rightarrow \ T_1 sen\theta_1 + T_1 \left(\frac{cos\theta_1}{cos\theta_2} \right) sen\theta_2 - F_g = 0$$

$$T_1 = \frac{F_g}{sen\theta_1 + cos\theta_1 tg\theta_2} \ \rightarrow \ T_1 = \frac{122}{sen37^\circ + cos37^\circ \ tg53^\circ} \ \rightarrow \ T_1 = 73{,}4 \ N$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{cos\theta_1}{cos\theta_2} \right) \ \rightarrow \ T_2 = 73{,}4 \left(\frac{cos37^\circ}{cos53^\circ} \right) \ \rightarrow \ T_2 = 97{,}4$$

Temos, então:

$$T_1 = 73{,}4 \ N \qquad T_2 = 97{,}4 \ N \qquad T_3 = 122 \ N$$

Os valores das tensões T_1 e T_2 são menores do que , portanto, os cabos não quebrarão.

O mapa mental a seguir sintetiza os principais conceitos abordados na Unidade. Você deve percorrê-lo da esquerda para a direita, a partir “Grandezas escalares e vetoriais”. Um mapa mental é uma representação gráfica e visual de ideias e conceitos, geralmente centrado em torno de uma palavra-chave ou ideia central. Ele é uma ferramenta eficaz para organizar informações, estimular a criatividade e facilitar o aprendizado.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.
SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

,

Unidade 3

Produto Escalar e Produto Vetorial

Aula 1

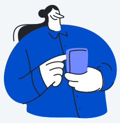
Combinação Linear de Vetores

Combinação linear de vetores

Este conteúdo é um vídeo!

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL



Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer a combinação linear de vetores e aprenderá a identificar se um conjunto de vetores é linearmente dependente ou linearmente independente. Uma combinação linear de vetores é uma expressão matemática que envolve a multiplicação de cada vetor por um escalar correspondente e, em seguida, na soma desses resultados. Se houver uma combinação linear dos vetores que resulta no vetor nulo e pelo menos um dos coeficientes não é zero, então os vetores são linearmente dependentes, caso contrário, eles são linearmente independentes.
Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois as combinações lineares são usadas em álgebra linear, física, computação gráfica, aprendizado de máquina e em muitas outras áreas para modelar e resolver problemas que envolvem múltiplas grandezas.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Uma combinação linear de vetores é uma expressão matemática que resulta da multiplicação de cada vetor por um escalar correspondente e, em seguida, na soma desses resultados. A ideia de combinação linear é central em álgebra linear e tem aplicações em diversas áreas, como resolução de sistemas lineares, transformações lineares e representação de vetores em espaços vetoriais.

Para ilustrar esta aula, considere o seguinte problema: Para fazer a instalação de uma treliça, um engenheiro utilizou um programa que compara cada haste da treliça com um vetor. Colocando os dados no sistema, tem-se que as hastes da treliça se comportam apenas de três maneiras, ou seja, três vetores. Esses vetores são representados por

$$\overrightarrow{u} = (5,1,-2)$$

$$\overrightarrow{v} = \left(2,-4,1\right)$$

$$\overrightarrow{w} = \left(6,1,2\right)$$

Nesse caso, o vetor resultante foi

$$\vec{r} = \left(66, -10{,}9\right)$$

Descubra a quantidade de cada uma das hastes.

Para responder essa e outras perguntas que possam surgir, precisamos conhecer alguns conceitos importantes.

Bons estudos!

Vamos Começar!

Vetores coplanares

Uma combinação linear é uma expressão matemática construída multiplicando cada termo por um coeficiente e somando os resultados. Em álgebra linear, é comum encontrar combinações lineares de vetores.

Dizemos que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores coplanares se eles tiverem representantes em um mesmo plano α, conforme ilustra a Figura 1.

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\vec{w}$

α

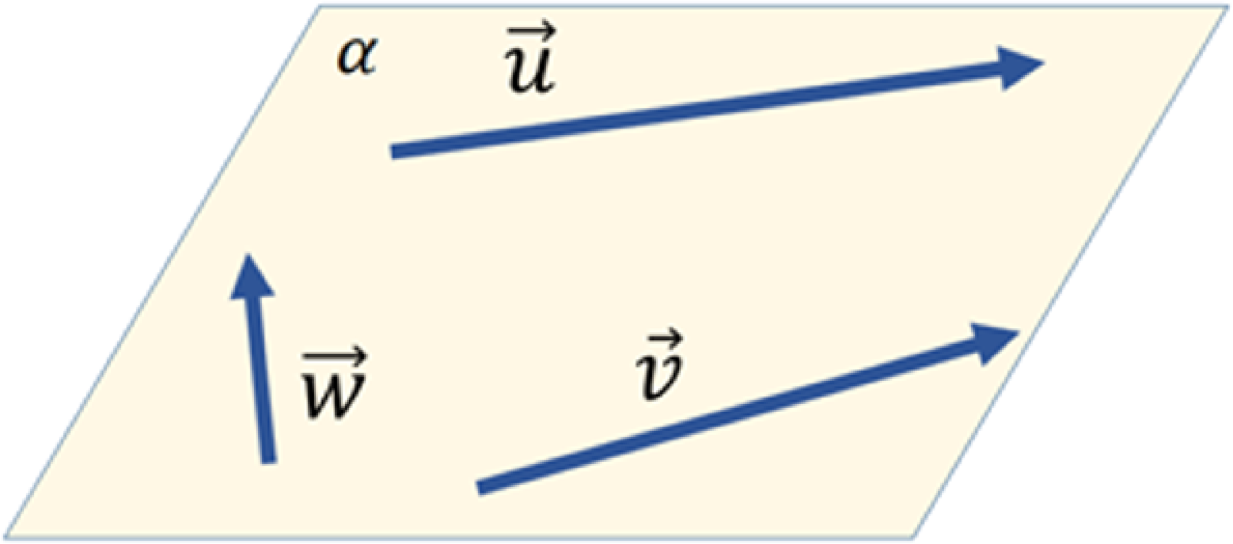


Figura 1 | Vetores coplanares. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 120).

Dois vetores são sempre coplanares. Três vetores podem se coplanares ou não.

Combinação linear de vetores

Dizemos que um vetor $\vec{v}$ é a combinação linear de n vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ se existirem os escalares k_1, k_2, ..., k_n tal que

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n$$

.

$\vec{v}$

$$n$$

$$\overrightarrow{u}_1$$

$$\overrightarrow{u}_2$$

$$\overrightarrow{u}_n$$

$$k_1$$

$$k_2$$

$$k_n$$

$$\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{u}_1 + k_2\overrightarrow{u}_2 + \ldots + k_n\overrightarrow{u}_n$$

Exemplo: Sejam $\overrightarrow{u} = (1, -2{,}0)$, $\overrightarrow{v} = (-3{,}6, 0)$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Se a combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, tal que $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$, quais as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}$?

$$\overrightarrow{u} = (1, -2{,}0)$$

$$\overrightarrow{v} = (-3{,}6, 0)$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

Resolução: Primeiramente, dizemos que 2 e 3 são coeficientes da combinação linear que forma o vetor
$\overrightarrow{w}$
. Calculando o vetor
$\overrightarrow{w}$
, temos:

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w} = 2(1, -2{,}0) + 3(-3{,}6, 0)$$

$$\overrightarrow{w} = (2, -4{,}0) + (-9{,}18{,}0)$$

$$\overrightarrow{w} = (2 - 9, -4 + 18{,}0 + 0)$$

$$\overrightarrow{w} = (-7{,}14{,}0)$$

Logo,
$(-7{,}14{,}0)$
são coordenadas do vetor
$\overrightarrow{w}$
.

$$(-7{,}14{,}0)$$

$$\overrightarrow{w}$$

Sendo
$\overrightarrow{w} = (x_n, y_n, z_n)$
um vetor formado pela combinação linear de
$\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$
e
$\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$
, então
$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$
. Podemos também escrever o vetor
$\overrightarrow{w}$
da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{w} = (x_n, y_n, z_n)$$

$$\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{w} = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$

$$(x_n, y_n, z_n) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} x_n = ax_1 + bx_2 \\ y_n = ay_1 + by_2 \\ z_n = az_1 + bz_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos os coeficientes
a
e
b
da combinação linear.

$$a$$

$$b$$

Um sistema pode ser escrito na forma de equação matricial. Logo, para a combinação linear anterior:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = a. \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + b. \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: O vetor

$$\overrightarrow{w} = (7,2,9)$$

é a combinação linear dos vetores

$$\overrightarrow{u} = (2,1,3)$$

e

$$\overrightarrow{v} = (1,0,1)$$

. Quais os coeficientes dessa combinação?

$$\overrightarrow{w} = (7,2,9)$$

$$\overrightarrow{u} = (2,1,3)$$

$$\overrightarrow{v} = (1,0,1)$$

Resolução: Podemos escrever o vetor

$$\overrightarrow{w}$$

como combinação linear dos vetores

$$\overrightarrow{u}$$

e

$$\overrightarrow{v}$$

, logo:

$$\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w} = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$

$$(x_n, y_n, z_n) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$$

$$(7,2,9) = a(2,1,3) + b(1,0,1)$$

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + 0 = 2 \\ 3a + b = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos da segunda equação que $a = 2$. Substituindo o valor de na primeira ou na terceira equação, temos que $b = 3$. Logo, a solução do sistema é $a = 2$ e $b = 3$, ou seja, $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$.

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$$

Siga em Frente...

Vetores linearmente independentes

Dizemos que um conjunto de vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ... ,

$$\overrightarrow{u}_1$$

$$\overrightarrow{u}_2$$

$$\overrightarrow{u}_n$$

$$a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2 + \ldots + a_n\overrightarrow{u}_n = 0$$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

$$(0{,}0, \ldots, 0)$$

Exemplo: Observe os vetores
$$\overrightarrow{u} = (1{,}1, 1)$$
,
$$\overrightarrow{v} = (1{,}1, 0)$$
e
$$\overrightarrow{w} = (1{,}0, 0)$$
. Para verificar se os vetores são LI, escrevemos a equação
$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0$$
.

$$\overrightarrow{u} = (1{,}1, 1)$$

$$\overrightarrow{v} = (1{,}1, 0)$$

$$\overrightarrow{w} = (1{,}0, 0)$$

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0$$

Resolução:

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0$$

$$a(1{,}1, 1) + b(1{,}1, 0) + c(1{,}0, 0) = 0$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Como $a=0$, substituindo na segunda equação encontramos $b=0$. Substituindo a e b na primeira equação, temos que $c=0$. Então, a única solução do sistema é $\{(0{,}0,0)\}$ e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes.

$a=0$

$b=0$

a

b

$c=0$

$\{(0{,}0,0)\}$

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\vec{w}$

Vetores linearmente dependentes

Um conjunto de vetores
$\overrightarrow{u_1}$
,
$\overrightarrow{u_2}$
, ...,
$\overrightarrow{u_n}$
é **linearmente dependente** (**LD**) se o sistema linear homogêneo
$a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{u_n}$
admitir pelo menos uma solução diferente da trivial
$(0{,}0, 0)$
.

$$\overrightarrow{u_1}$$

$$\overrightarrow{u_2}$$

$$\overrightarrow{u_n}$$

$$a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

$$(0{,}0, 0)$$

Exemplo: Observe os vetores
$\overrightarrow{u} = (1{,}1, 1)$
,
$\overrightarrow{v} = (2, -1{,}3)$
e
$\overrightarrow{w} = (1, -5{,}3)$
. Verifique se os vetores são LD.

$$\overrightarrow{u} = (1{,}1, 1)$$

$$\overrightarrow{v} = (2, -1{,}3)$$

$$\overrightarrow{w} = (1, -5{,}3)$$

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = 0$$

$$x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} = 0$$

$$a(1,1,1) + b(2,-1,3) + c(1,-5,3) = 0$$

$$a(1,1,1) + b(2,-1,3) + c(1,-5,3) = 0$$

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, isolamos
x
na primeira equação obtendo:
$x = -2y - z$
.

$$x$$

$$x = -2y - z$$

Substituindo
x
na segunda equação, obtemos:

$$x$$

$$-2y - z - y - 5z = 0$$

$$-3y - 6z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

$$y = -2z$$

Substituindo
x
na terceira equação, obtemos:

$$x$$

$$-2y - z + 3y + 3z = 0$$

$$-2y - z + 3y + 3z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

$$y = -2z$$

Logo, temos infinitas soluções, tal que
$y = -2z$
. Fazendo
$z = a$
, temos que a solução geral do sistema é qualquer tripla da forma
$\{(3a, \ -2a, a)\}$
. Então, além da solução trivial
$\{(0,0,0)\}$
, o sistema admite infinitas soluções, por exemplo,
$\{(3,-2,1)\}$
, obtida para
$a = 1$
. Portanto, os vetores
$\overrightarrow{u}$
,
$\overrightarrow{v}$
e
$\overrightarrow{w}$
são linearmente dependentes.

$$y = -2z$$

$$z = a$$

$$\{(3a, \ -2a, a)\}$$

$$\{(0,0,0)\}$$

$$\{(3,-2,1)\}$$

$$a = 1$$

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

Observação: O versor de um dado vetor e o próprio vetor são sempre linearmente dependentes. Os versores

$$\hat{i} = (1,0,0)$$

,

$$\hat{j} = (0,1,0)$$

e

$$\hat{k} = (0,0,1)$$

são linearmente independentes.

$$\hat{i} = (1,0,0)$$

$$\hat{j} = (0,1,0)$$

$$\hat{k} = (0,0,1)$$

Além do modo já apresentado, há ainda uma outra maneira prática de verificar se três vetores do

$$\mathbb{R}^3$$

são linearmente independentes ou dependentes. Isso envolve o cálculo de um determinante.

$$\mathbb{R}^3$$

Sejam os vetores

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

,

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

e

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

. Para verificar se
$\overrightarrow{u}$
,
$\overrightarrow{v}$
e
$\overrightarrow{w}$
são linearmente dependentes ou independentes, escrevemos o sistema:

$$\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\overrightarrow{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\begin{cases} au_x + bv_x + cw_x = 0 \\ au_y + bv_y + cw_y = 0 \\ au_z + bv_z + cw_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} au_x + bv_x + cw_x = 0 \\ au_y + bv_y + cw_y = 0 \\ au_z + bv_z + cw_z = 0 \end{cases}$$

Que pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz dos coeficientes do sistema. Temos que:

1. Se

$$detD = 0$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

2. Se

$$detD \neq 0$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

Exemplo: Considere os vetores

$$\overrightarrow{u} = (5{,}1, -1)$$

$$\overrightarrow{v} = (0, -2{,}4)$$

$$\overrightarrow{w} = (-10, -2{,}2)$$

Resolução: Escrevendo a matriz

$$D$$

$$D = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \rightarrow D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, temos:

$$|D| = \left| \begin{matrix} 5 & 0 & -10 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{matrix}$$

$$|D| = (-20 - 40 + 0) - (-20 - 40 + 0)$$

$$|D| = 0$$

Como o determinante é zero, então

$$\vec{u}$$

,

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

Observações:

1. Se

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$a\vec{u} + b\vec{v}$$

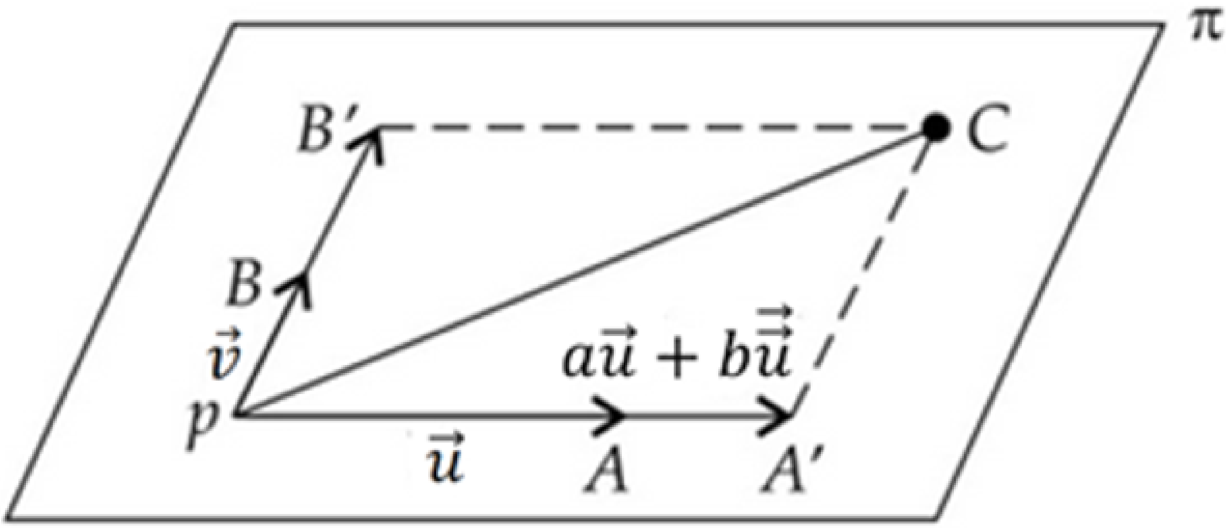


Figura 2 | Vetores linearmente independentes. Fonte: elaborada pela autora.

2. Se os vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

3. Se os vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

Vamos Exercitar?

Vamos retomar o exercício do início da aula.

As hastes da treliça se comportam apenas de três maneiras, ou seja, três vetores:

$$\vec{u} = (5{,}1, -2)$$

,

$$\vec{u} = (5{,}1, -2)$$

$$\vec{v} = \left(2, -\ 4{,}1\right)$$

$$\vec{w} = \left(6{,}1, 2\right)$$

$$\vec{r} = \left(66, -10{,}9\right)$$

Chamando as quantidades de cada haste de

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \rightarrow \left(66, -10{,}9\right) = a(5{,}1, -2) + b\left(2, -4{,}1\right) + c\left(6{,}1, 2\right)$$

$$66 = 5a + 2b + 6c \qquad -10 = a - 4b + c \qquad 9 = -2a + b + 2c$$

Vamos escrever a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 66 \\ 1 & -4 & 1 & -10 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -10 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 6 & 66 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ 5L_1 - L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -7 & 4 & -11 \\ 0 & -22 & -1 & -116 \end{bmatrix} 22L_2 - 7L_3 \rightarrow L_3 \quad = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & -7 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 95 & 570 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$c = \frac{570}{95} \rightarrow c = 6$$

$$-7b + 4.6 = -11 \rightarrow 7b = 11 + 24 \rightarrow b = \frac{35}{7} \rightarrow b = 5$$

$$a - 4b + c = -10 \rightarrow a - 4.5 + 6 = -10 \rightarrow a = -10 + 14 \rightarrow a = 4$$

Logo, foram necessárias 4 hastes do tipo representado pelo vetor

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos! Acesse o capítulo 1.5 do livro de Tuanny Maciel, *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

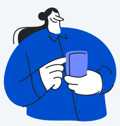
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 2

Produto Escalar e Ângulo entre Dois Vetores

Produto escalar e ângulo entre dois vetores



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer o produto escalar entre dois vetores, também conhecido como produto interno ou produto ponto. Ele é uma operação matemática entre dois vetores que resulta em um número escalar. O produto escalar pode ser utilizado para encontrar o ângulo entre dois vetores.

Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois o produto escalar é uma operação fundamental em álgebra linear e é amplamente utilizado em física, geometria analítica, aprendizado de máquina e muitas outras áreas para expressar relações entre vetores. Em geometria analítica, o produto escalar é usado para definir equações de linhas e planos, bem como para resolver problemas relacionados à posição relativa de objetos geométricos.

Prepare-se para essa jornada de conhecimento!

Vamos lá!

Ponto de Partida

Nesta aula, estudaremos o produto escalar e o ângulo entre vetores. Esses conteúdos têm grandes aplicações, principalmente na engenharia. Com eles podemos calcular ângulos entre estruturas e barras metálicas, por exemplo.

Para ilustrar os conceitos que serão vistos nesta aula, vamos propor a seguinte situação-problema:

Suponha que a empresa em que trabalha precisa montar a estrutura metálica de um galpão e que você deve determinar o ângulo entre as barras metálicas dessa estrutura, como mostra a Figura 1.

Figura 1 | Estrutura metálica. Fonte: Wikimedia Commons.

Suponha que você já conseguiu determinar as direções das barras, e que elas estão representadas pelos vetores

$$\overrightarrow{u} = (2,1,5)$$

$$\overrightarrow{v} = (-1,-3,4)$$

Para conseguir resolver esse problema e outros envolvendo ângulo entre vetores, precisamos saber calcular o produto escalar entre eles.

Vamos começar?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Produto escalar entre vetores

O produto escalar (também conhecido como produto ponto ou produto interno) é uma operação entre dois vetores que resulta em um escalar (um número real).

Dados dois vetores

$$\overrightarrow{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$$

$$\overrightarrow{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$$

Exemplo: Considerando os vetores e , determine o produto escalar entre os vetores dados.

Resolução:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2.8 + 3.(-5) + (-7).6$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2.8 + 3.(-5) + (-7).6$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 16 - 15 - 42$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -41$$

Logo, o produto escalar entre
$\overrightarrow{u}$
e

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

Exemplo: O produto escalar entre os vetores

$$\overrightarrow{u} = (4, x, -1)$$

$$\overrightarrow{v} = (x, 7, -5)$$

x

Resolução: Calculando o produto escalar entre os vetores dados, temos:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 4.x + x.7 + (-1).(-5)$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 11x + 5$$

Mas o produto escalar é igual a 38, logo:

$$38 = 11x + 5$$

$$11x = 38 - 5$$

$$x = \frac{33}{11}$$

$$x = 3$$

Assim, o valor de
x
para que o produto escalar seja
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 38$
é 3.

x

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 38$

Propriedades do produto escalar

As propriedades do produto escalar nos auxiliam na resolução de algumas situações. Para quaisquer vetores

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$k$$

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (comutatividade): inverter a ordem dos vetores em um produto escalar não altera o resultado.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\left|\overrightarrow{u}\right|^2$: o produto escalar de um vetor por ele mesmo é igual ao quadrado de seu módulo.
- $\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$: o produto escalar de um vetor por uma soma de outros dois é igual à soma dos produtos escalares do primeiro com o segundo somado com o produto do primeiro com o terceiro.
- $\left(k\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right)=k\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)$: mudar o escalar de posição não altera o resultado final.
- $\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|\leq\left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right|$: conhecida como desigualdade de Schwarz.
- $\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|\leq\left|\overrightarrow{u}\right|+\left|\overrightarrow{v}\right|$: conhecida como desigualdade triangular. Os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ formam, geometricamente, um triângulo. Essa desigualdade indica que um dos lados desse triângulo nunca terá comprimento maior do que a soma dos outros dois.

Siga em Frente...

Ângulo entre dois vetores

O ângulo θ entre dois vetores é a medida da menor abertura entre esses vetores, com $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$, levando em conta seu sentido. Temos cinco casos de ângulos entre vetores que merecem destaque.

$$\theta$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

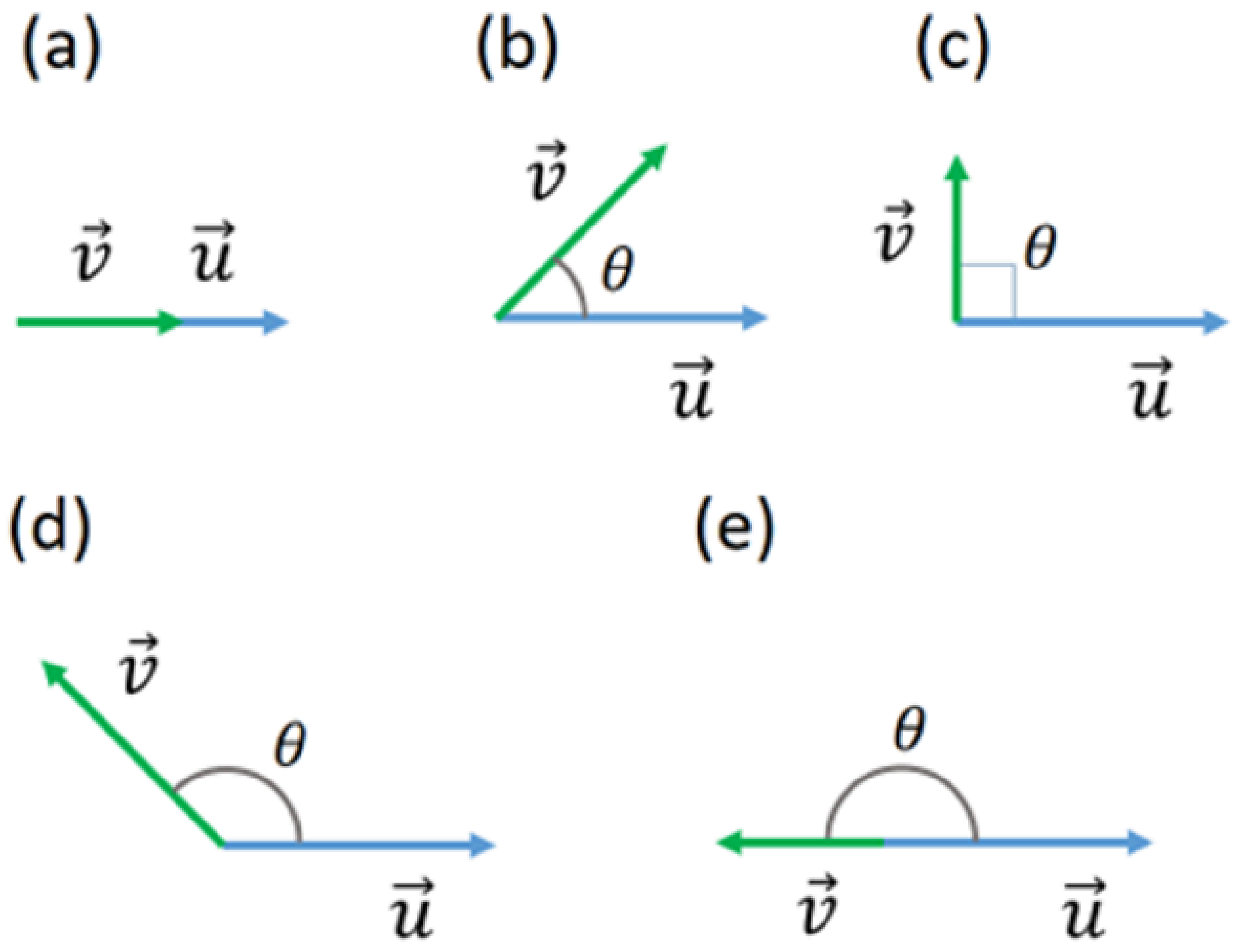


Figura 2 | Ângulos entre vetores: (a)

$$\theta = 0^\circ$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$\theta = 180^\circ$$

Outra maneira de calcular o produto escalar

O produto escalar de dois vetores

$$\overrightarrow{u}$$

e

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right| cos\theta$$

$$\theta$$

Para demostrar essa fórmula, usamos a lei dos cossenos no triângulo da Figura 3.

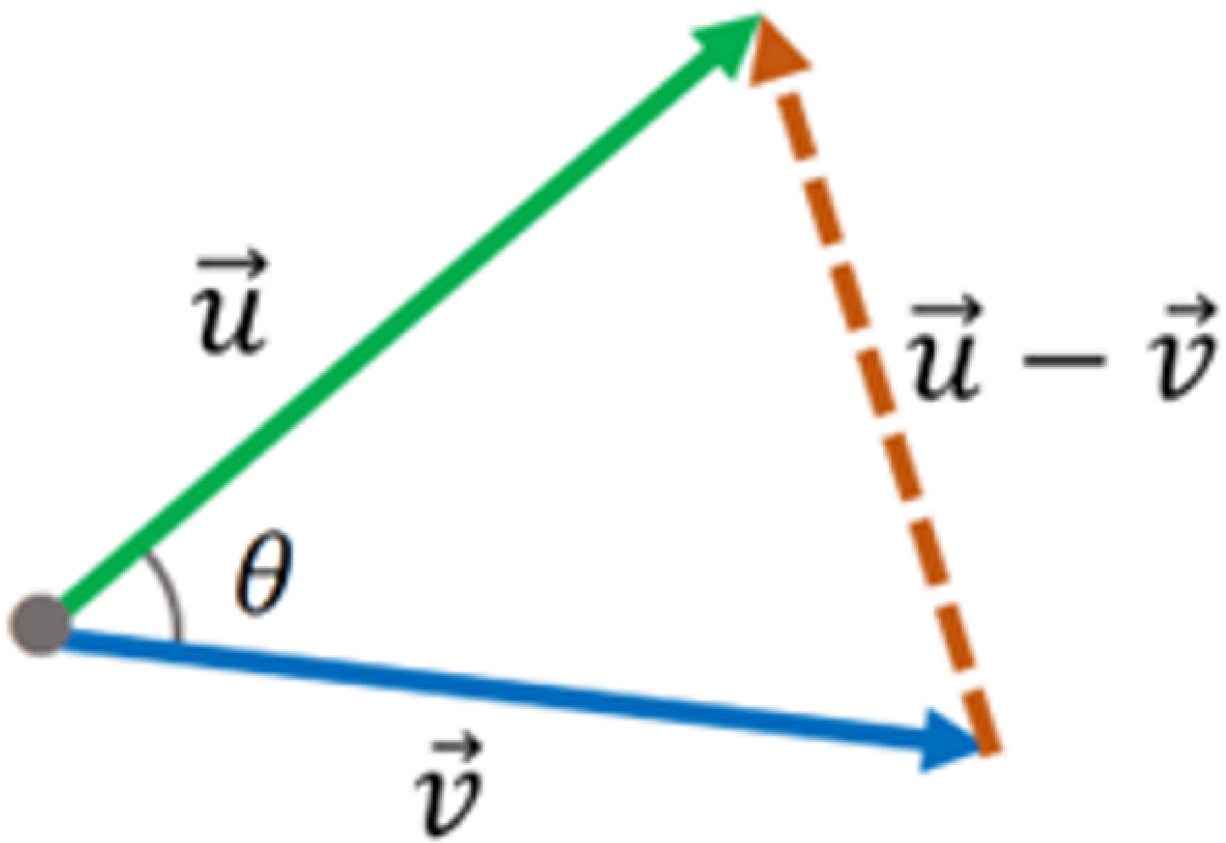


Figura 3 | Produto escalar e ângulo entre vetores. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 132).

Consequentemente, temos:

$$(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2 = \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) + \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - 2\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right| cos\theta$$

$$\left(u_x^2 - 2u_xv_x + v_x^2\right) + \left(u_y^2 - 2u_yv_y + v_y^2\right) + \left(u_z^2 - 2u_zv_z + v_z^2\right) =$$

$$\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) + \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - 2\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|cos\theta$$

$$u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z = \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|cos\theta$$

Mas

$$u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|cos\theta$$

Exemplo: Sejam os vetores

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 4$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = 15$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{w}$$

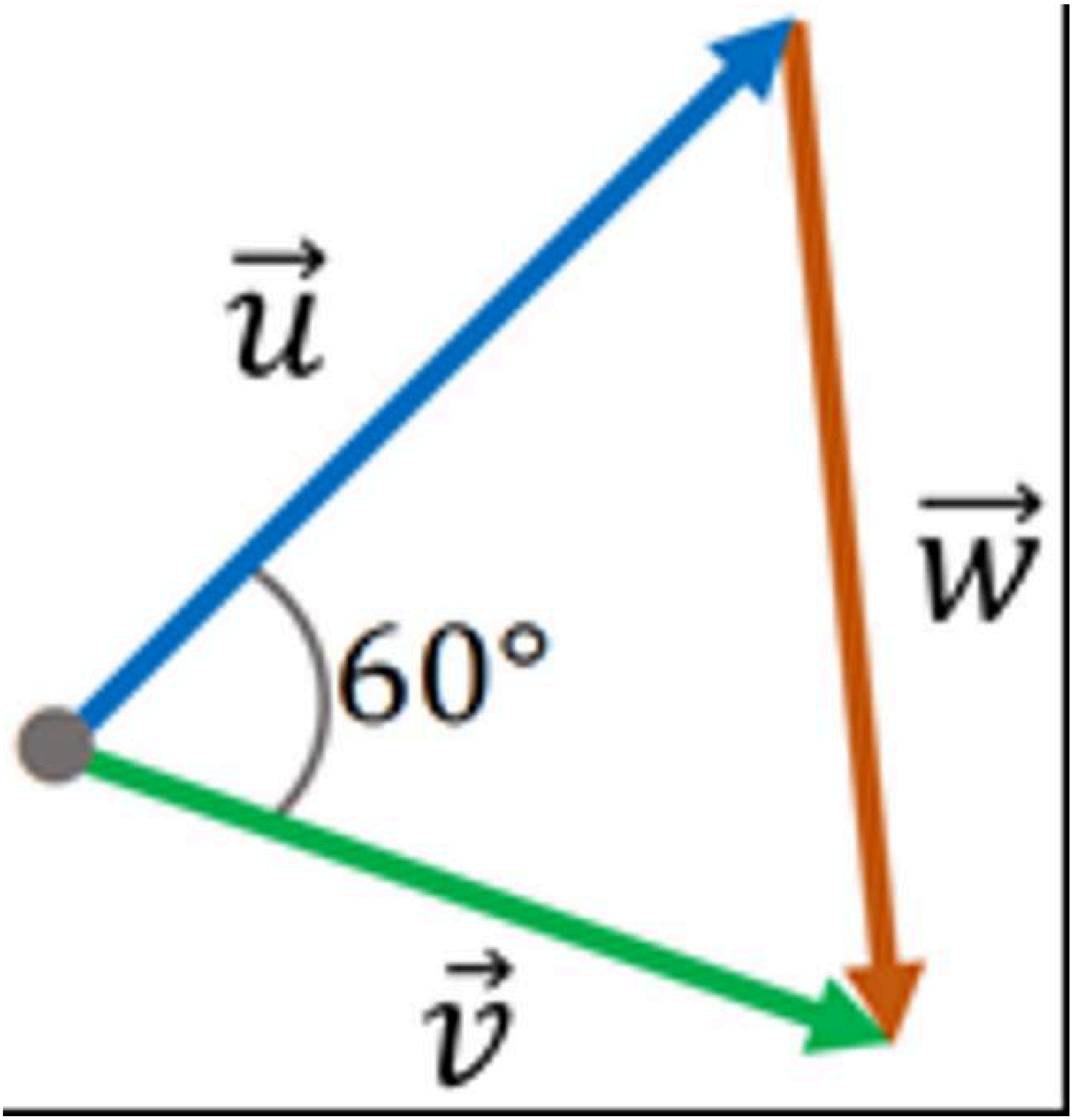


Figura 4 | Vetores

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\vec{w}$

Resolução: Observando a Figura 4, temos que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\theta = 60^{\circ}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

Aplicando a definição do produto escalar e suas propriedades:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta - \left|\overrightarrow{u}\right|^{2}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right| \cos\theta - \left|\overrightarrow{u}\right|^{2}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 4.15.\,cos60^{\circ} - 4^{2}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 4.15.\,cos60^{\circ} - 4^{2}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 60.0{,}5 - 16$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 60.0{,}5 - 16$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 14$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 14$$

Desigualdade de Schwarz

Utilizando a expressão do produto escalar

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \cos\theta$$

e lembrando que

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \cos\theta$$

$$-1 \leq cos\theta \leq 1$$

$$\left|\vec{u}.\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| |\cos\theta|$$

Mas:

$$0 \leq |cos\theta| \leq 1$$

$$0 \leq |cos\theta| \leq 1$$

$$\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.1$$

$$\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$$

Assim fica justificada a desigualdade de Schwarz.

Cálculo do ângulo entre dois vetores

Para determinar o ângulo entre dois vetores

$$\vec{u}$$

e

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| cos\theta$$

Isolando o

$$cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

Logo, o ângulo
θ
:

$$\theta$$

$$\theta = arccos\left(\frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}\right)$$

Observação: O ângulo

$$\theta$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{180^o}$$

$$180^\circ/\pi$$

Exemplo: Encontre o ângulo formado pelos vetores
$\overrightarrow{u} = (1{,}3)$
e

$$\overrightarrow{u} = (1{,}3)$$

$$\overrightarrow{v} = (9, -2)$$

Resolução: Primeiro vamos determinar o módulo de cada um dos vetores:

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{10}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} \ \rightarrow \ \left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{85}$$

Agora, calcularemos o produto escalar:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1.9 + 3.(-2) \ \rightarrow \ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3$$

Por fim, encontramos

$$\theta$$

$$\theta = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}.\sqrt{85}}\right) \ \rightarrow \ \theta = \arccos(0{,}1029) \ \rightarrow \ \theta \cong 1{,}468 \ rad$$

Logo, o ângulo entre os vetores

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$1{,}468 \ radianos$$

$$84{,}09^\circ$$

Vetores ortogonais

Se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então esses vetores são ortogonais, e vice-versa.

Se

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\theta = 90^\circ$$

Se

$$\vec{u} = \vec{0}$$

$$\rightarrow$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}.\vec{v} = 0$$

Se

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\rightarrow$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{0} = 0$$

Se

$$\theta = 90^\circ$$

$$\rightarrow$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| cos 90^\circ = 0$$

$$\rightarrow$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|.0$$

$$\rightarrow$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Exemplo: Mostre que os vetores

$$\vec{u} = (-3{,}8, 1)$$

$$\vec{v} = (6,3,-6)$$

Resolução: Para mostrar a ortogonalidade dos vetores, mostramos que o produto escalar entre eles é zero.

$$\vec{u}.\vec{v} = (-3).6 + 8.3 + 1.(-6)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = -18 + 24 - 6$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Logo

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto no início desta aula, sabemos que os vetores que representam as hastes são $\vec{u} = (2,1,5)$ e $\vec{v} = (-1,-3,4)$. Nesse caso, para calcular o ângulo entre eles utilizamos a fórmula a seguir, que envolve o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, bem como os módulos dos vetores:

$$\vec{u} = (2,1,5)$$

$$\vec{v} = (-1,-3,4)$$

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}\right)$$

Calculando os módulos:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} \;\; \rightarrow \;\; \left|\vec{u}\right| = \sqrt{30}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 4^2} \;\; \rightarrow \;\; \left|\vec{v}\right| = \sqrt{26}$$

Agora vamos calcular o produto escalar de

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 2.(-1) + 1.(-3) + 5.4 \;\; \rightarrow \;\; \vec{u}.\vec{v} = -2 - 3 + 20 \;\; \rightarrow \;\; \vec{u}.\vec{v} = 15$$

Por fim, encontramos o ângulo:

$$\theta = \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{30}.\sqrt{26}}\right) \;\; \rightarrow \;\; \theta = \arccos(0{,}537) \;\; \rightarrow \;\; \theta \cong 1\, radiano$$

Assim, o ângulo entre as hastes, representadas pelos vetores

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$1\, radiano$$

$$57{,}3^\circ$$

Saiba mais

Aprofunde mais seus conhecimentos em **produto escalar de vetores e ângulo entre eles** acessando o material *Geometria analítica e vetorial*, a partir da página 68.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

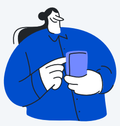
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial**. Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 3

Projeção de um Vetor sobre Outro Vetor

Projeção de um vetor sobre outro vetor



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai aprender como calcular a projeção de vetores.
A projeção de um vetor na direção de outro vetor é uma operação que resulta em um vetor que representa a sombra do primeiro quando projetada sobre a linha definida pelo segundo vetor. Essa projeção é chamada de projeção escalar entre vetores. Também pode-se usar a projeção de um vetor sobre outro para calcular a área de um triângulo.
Esse conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a projeção de vetores fornece uma maneira de decompor um vetor em componentes ao longo de diferentes direções, o que é útil para

analisar o comportamento de vetores em diferentes contextos.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Nesta aula, aprenderemos a calcular a projeção de um vetor sobre outro vetor.

Para tanto, propomos a seguinte situação problema: Suponha que sua empresa esteja terminando de montar a estrutura de um galpão, como na aula anterior, e você precisa instalar uma haste de apoio

$$\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

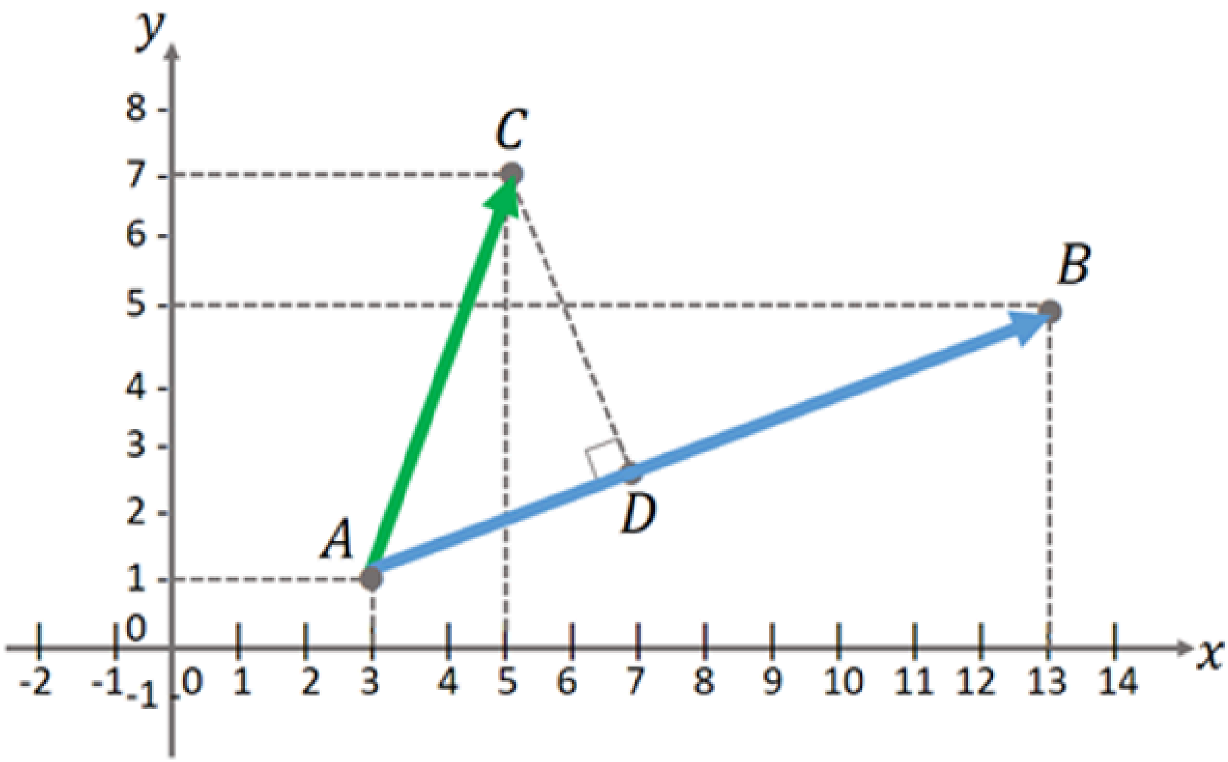


Figura 1 | Haste de sustentação (em

$$m$$

Essa haste será instalada perpendicularmente à barra

$$\overrightarrow{AB}$$

Vamos lá?

Bons estudos.

Vamos Começar!

Um problema bastante comum na engenharia é a determinação da projeção de vetores sobre outros vetores. É como se precisássemos determinar a sombra de um sobre o outro. O cálculo para isso é bastante simples e envolve o que você estudou até o momento.

Projeção de um vetor sobre outro vetor

Considere dois vetores

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$D$$

$$B$$

$$A$$

$$C$$

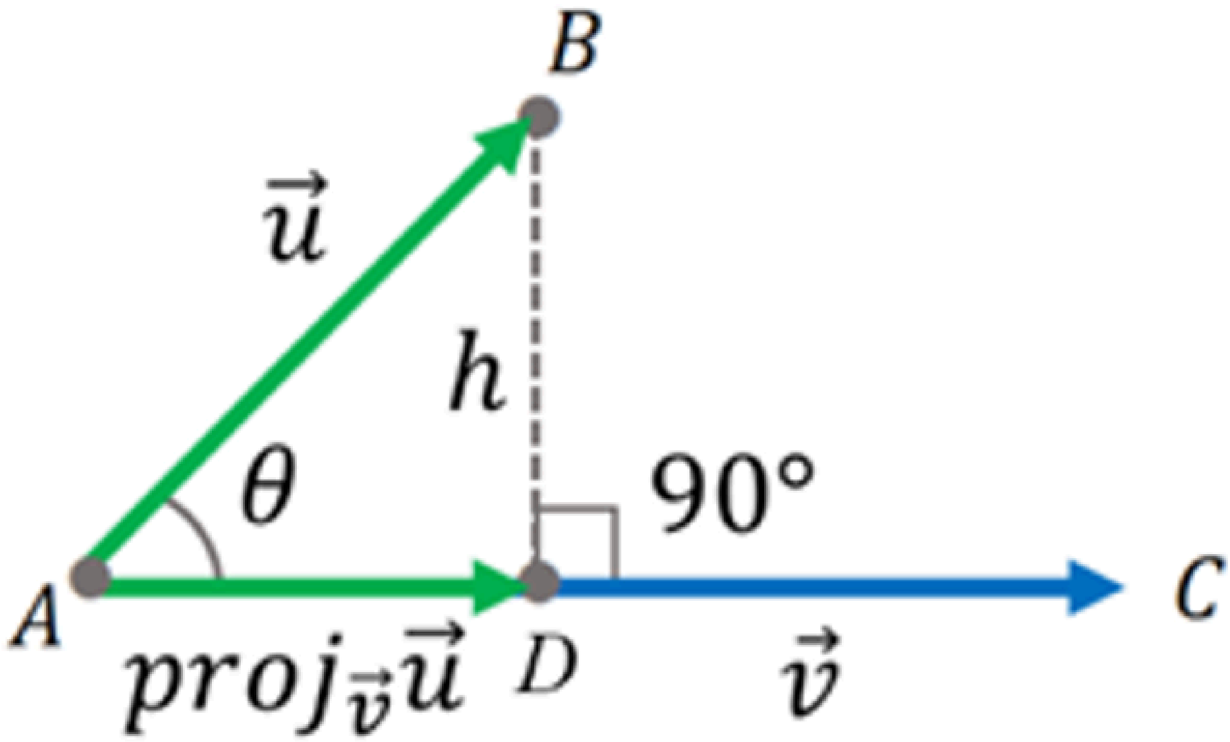


Figura 2 | Vetor projeção. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 142).

Podemos decompor o vetor $\vec{u}$ em dois vetores $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, paralelo a $\vec{v}$, e $\vec{q} = \overrightarrow{DB}$, ortogonal a $\vec{v}$, tal que $\vec{u} = proj_{\vec{v}}\vec{u} + \vec{q}$. Temos que $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \lambda\vec{v}$, sendo $proj_{\vec{v}}\vec{u}$

paralelo a
$\overrightarrow{v}$
, e
$\overrightarrow{q}.\overrightarrow{v} = 0$
devido à ortogonalidade. Logo, podemos escrever a equação anterior como
$\left(\overrightarrow{u} - proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = 0$
. Então:

$$\overrightarrow{u}$$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u} = proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{q}$$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{q}.\overrightarrow{v} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{u} - proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \lambda\left|\overrightarrow{v}\right|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}$$

Substituindo
λ

na equação
$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$
, temos a projeção de
$\overrightarrow{u}$
sobre
$\overrightarrow{v}$
:

λ

$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}$$

O vetor
$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$
é denominado projeção de
$\overrightarrow{u}$
sobre
$\overrightarrow{v}$
(ou na direção de
$\overrightarrow{v}$
). Você pode interpretá-lo como sendo a “sombra” que o vetor
$\overrightarrow{u}$
faz na direção de
$\overrightarrow{v}$
.

$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

A fórmula da projeção também pode ser encontrada em alguns livros da seguinte forma:

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\left\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \right\rangle}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}$$

Isso ocorre porque

$$\left\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \right\rangle$$

Podemos obter o módulo da projeção utilizando as propriedades do produto escalar:

$$\left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}\right| \quad \rightarrow \quad \left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\left|\overrightarrow{v}\right|$$

$$\left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

A projeção do vetor
$\overrightarrow{v}$
na direção do vetor
$\overrightarrow{u}$
(veja que a ordem foi invertida), com
$\overrightarrow{u} \neq 0$
, é dada por:

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \neq 0$$

$$proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}}{\left|\overrightarrow{u}\right|^2}\overrightarrow{u}$$

As projeções de um vetor sobre outro vetor podem ser:

1. Com ângulo $\theta = 0^\circ$ entre os vetores (Figura 3). Observe que, nesse caso, os vetores são paralelos e a projeção de $\overrightarrow{u}$ na direção de $\overrightarrow{v}$ é o próprio vetor $\overrightarrow{u}$.

$\theta = 0^\circ$

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{u}$

Figura 3 | Ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$: $\theta = 0^\circ$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 143).

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

$\theta = 0^\circ$

2. Com ângulo
$\theta = 90^\circ$
entre os vetores (Figura 4). Observe que quando os vetores são ortogonais, a projeção de
$\vec{u}$
na direção de
$\vec{v}$
é um único ponto que está sobre a origem dos vetores. Logo, a projeção será o vetor nulo.

$$\theta = 90^\circ$$

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

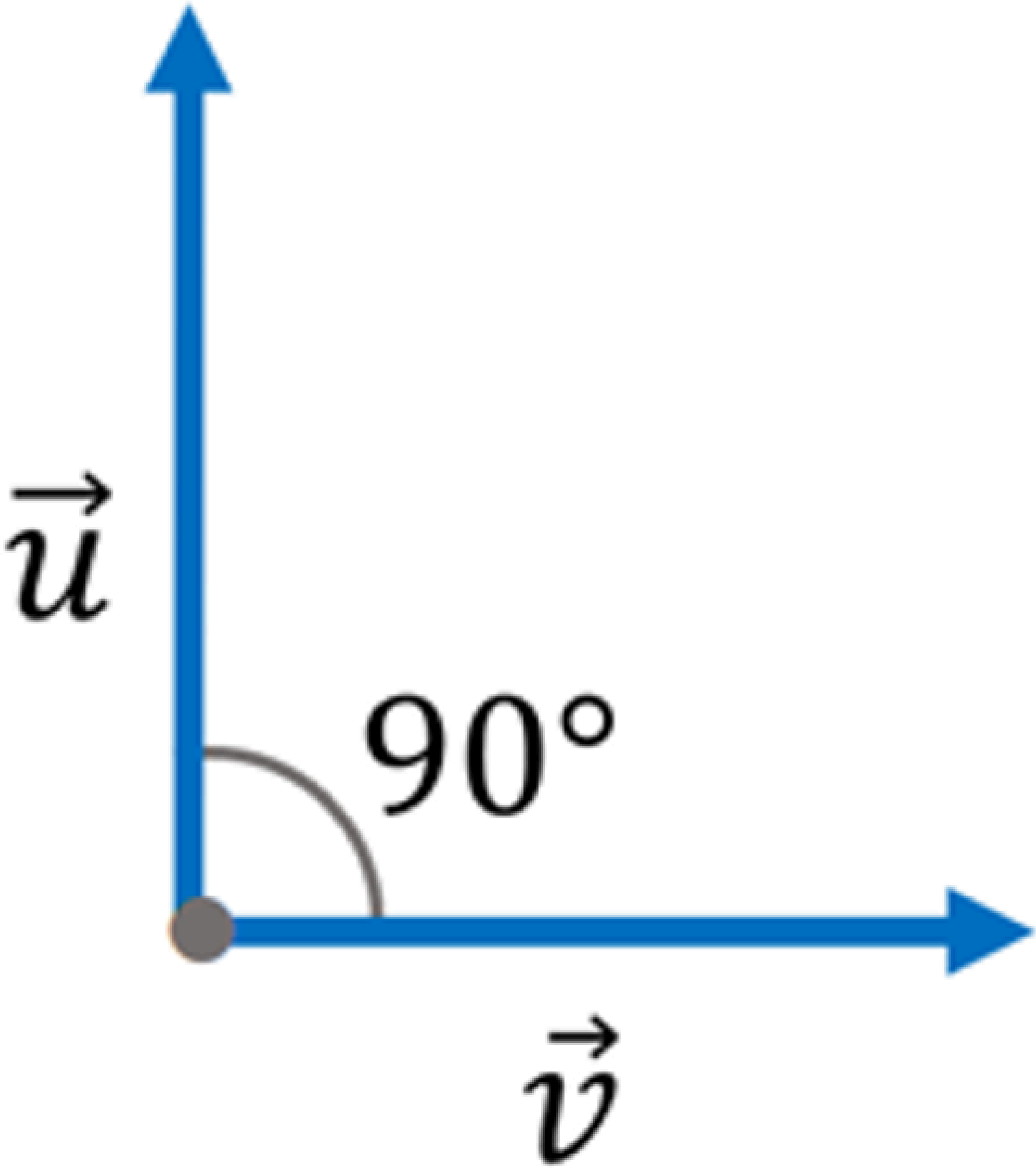


Figura 4 | Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$: $\theta = 90^\circ$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 144).

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\theta = 90^\circ$

3. Com ângulo $\theta = 180^\circ$ entre os vetores (Figura 5). Veja que esse é semelhante à projeção com ângulo de 0°. A projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ é o próprio vetor $\vec{u}$.

$\theta = 180^\circ$

0°

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\vec{u}$

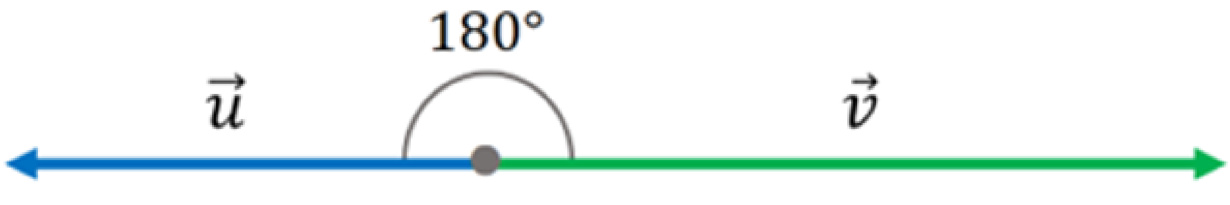


Figura 5 | Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$: $\theta = 180^\circ$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 144).

$\vec{u}$

$$\vec{v}$$

$$\theta = 180^\circ$$

4. Com ângulo obtuso
$90^\circ < \theta < 180^\circ$
entre os vetores (Figura 6). Esse caso se assemelha àquele em que o ângulo é agudo. Há somente uma mudança na interpretação geométrica.

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

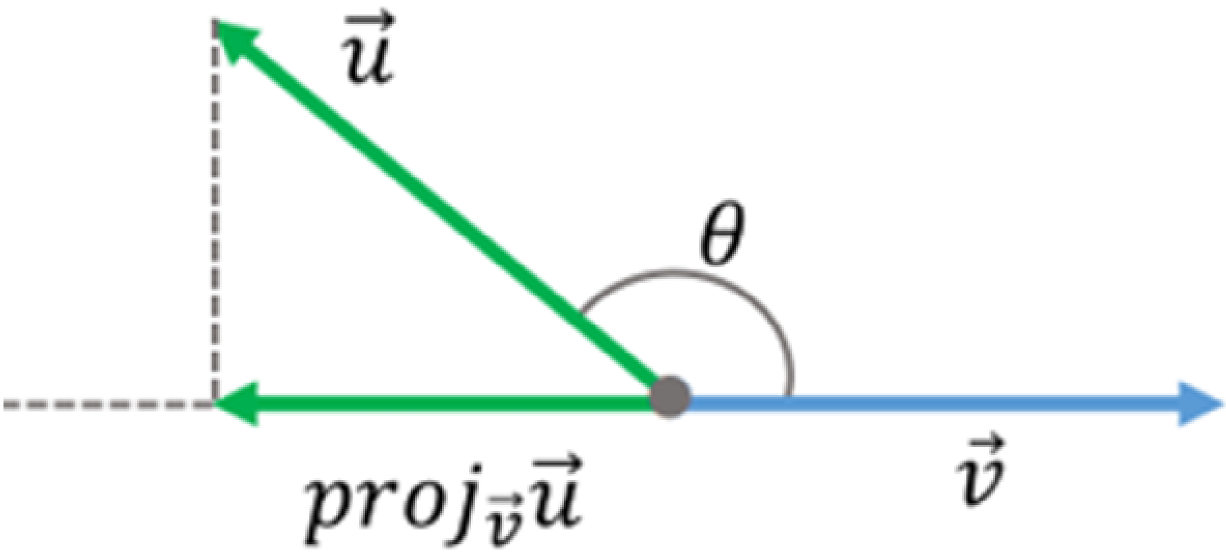


Figura 6 | Ângulo entre
$\vec{u}$
e
$\vec{v}$
:
$90^\circ < \theta < 180^\circ$
. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 144).

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

Projeção sobre um vetor unitário

Se o vetor
$\overrightarrow{v}$
for unitário, ou seja
$\left|\overrightarrow{v}\right| = 1$
, então a projeção de
$\overrightarrow{u}$
na direção de
$\overrightarrow{v}$
é:

$$\overrightarrow{v}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = 1$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v} \rightarrow proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{1^2}\overrightarrow{v}$$

$$proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{v}$$

Exemplo: Determine a projeção do vetor
$\overrightarrow{u} = (3,2)$
na direção de
$\overrightarrow{v} = (2,2)$
.

$$\overrightarrow{u} = (3,2)$$

$$\overrightarrow{v} = (2,2)$$

Resolução: Primeiro, precisamos calcular o produto escalar entre os dois vetores e, depois, calcular o modulo do vetor
$\overrightarrow{v}$
:

$$\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (3.2) + (2.2) \ \rightarrow \ \vec{u}.\vec{v} = 10$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} \ \rightarrow \ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{8}$$

Agora podemos calcular a projeção:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\vec{v} \ \rightarrow \ proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{10}{\left(\sqrt{8}\right)^2}(2{,}2) \ \rightarrow \ proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{5}{4}(2{,}2) \ \rightarrow \ proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{5}{2}, \cdot\right.$$

Essa maneira de calcular a projeção de um vetor sobre outro também é válida para vetores no $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3$$

Exemplo: Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (1{,}0, -4)$ na direção de $\vec{v} = (-1{,}2, 5)$.

$$\vec{u} = (1{,}0, -4)$$

$$\vec{v} = (-1{,}2, 5)$$

Resolução: Primeiro precisamos calcular o produto escalar entre os dois vetores e, depois, o módulo do vetor $\vec{v}$.

$$\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = (1.(-1).) + (0.2) + (-4.5) \ \rightarrow \ \vec{u}.\vec{v} = -1 + 0 - 20 \ \rightarrow \ \vec{u}.\vec{v} = -21$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 5^2} \ \rightarrow \ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{1 + 4 + 25} \ \rightarrow \ \left|\vec{v}\right| = \sqrt{30}$$

Agora podemos calcular a projeção:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{-21}{\left(\sqrt{30}\right)^2}(-1{,}2,5) \rightarrow proj_{\vec{v}}\vec{u} = -\frac{7}{10}(-1{,}2,5) \rightarrow proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{7}{10}, \frac{-7}{5}, \frac{-7}{2}\right)$$

Projeção de um vetor sobre outro, dado o ângulo entre eles

Podemos obter o comprimento da projeção de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$ conhecendo somente o comprimento dos respectivos vetores e o ângulo formado entre eles. Para compreender esse cálculo, considere a Figura 7.

$\vec{u}$

$\vec{v}$

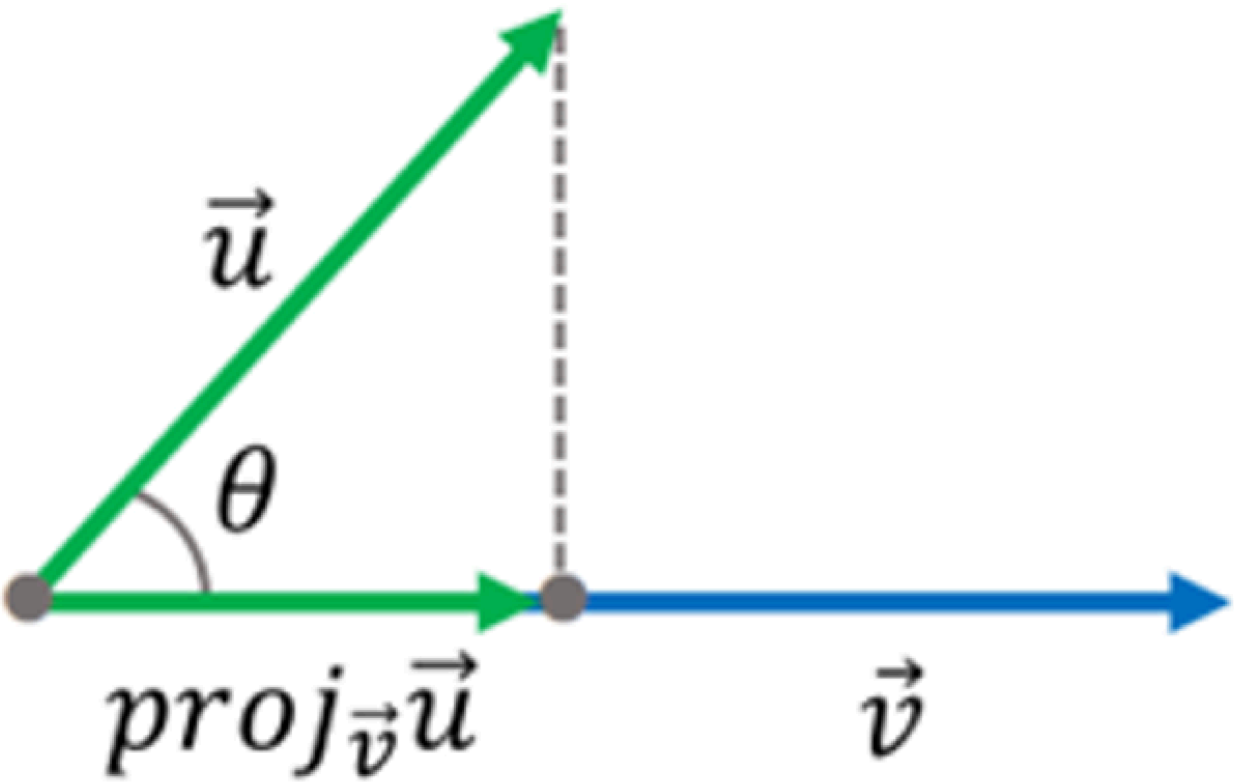


Figura 7 | Projeção de $\vec{u}$

sobre um vetor

$\overrightarrow{v}$

. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 146).

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

Considerando a figura:

$$\left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} \rightarrow \left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|cos\theta}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

$$\left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right|cos\theta$$

Exemplo: Calcule o comprimento da projeção do vetor

$\overrightarrow{u} = (1{,}5, -3)$

sobre o vetor

$\overrightarrow{v}$

, sabendo que o ângulo entre eles é de

60°

.

$\overrightarrow{u} = (1{,}5, -3)$

$\overrightarrow{v}$

60°

Resolução: Primeiro precisamos calcular o módulo do vetor

$\overrightarrow{u}$

.

$\overrightarrow{u}$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{1 + 25 + 9} \rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{35}$$

Então, o comprimento da projeção do vetor

$\overrightarrow{u}$

sobre o vetor
$\vec{v}$
:

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$$\left|proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \left|\vec{u}\right| cos\theta \ \rightarrow \ \left|proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \sqrt{35}\ cos60^{\circ} \ \rightarrow \ \left|proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = 2{,}96$$

Siga em Frente...

Área do triângulo utilizando vetores

Sejam
$A = (a_1, a_2)$
,
$B = (b_1, b_2)$
e
$C = (c_1, c_2)$
pontos no plano que são vértices do triângulo
ABC
(Figura 8). Vamos encontrar a área do triângulo
ABC
.

$A = (a_1, a_2)$

$B = (b_1, b_2)$

$C = (c_1, c_2)$

ABC

ABC

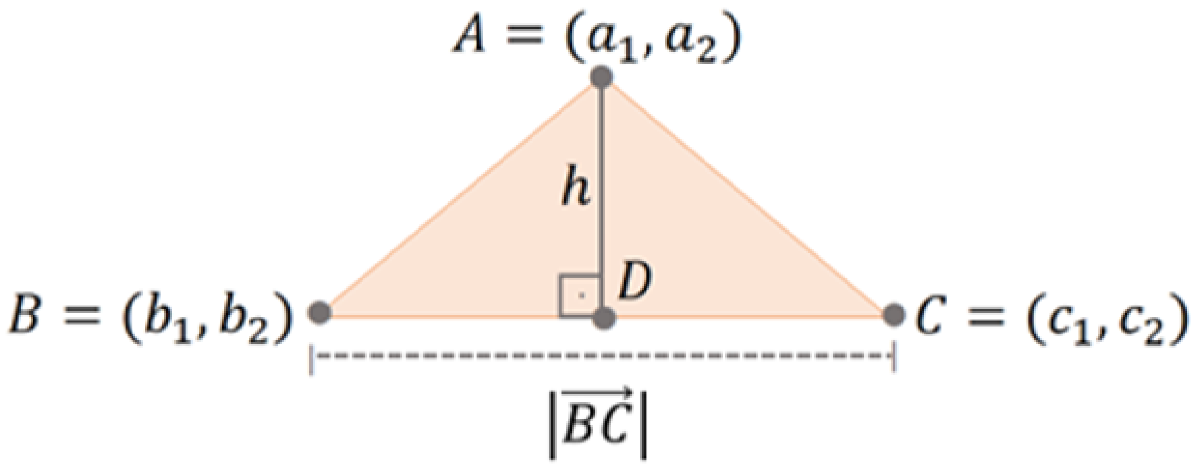


Figura 8 | Triângulo ABC. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 148).

ABC

Temos $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$ e $\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1,\ c_2 - b_2)$ e afirmamos que o vetor $\overrightarrow{v} = (b_2 - c_2, c_1 - b_1)$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{BC}$ e, portanto, paralelo ao vetor $\overrightarrow{AD}$, e de mesmo módulo. Vale destacar ainda que, na geometria, a área de um triângulo é dada por $(base \times altura)/2$. Temos, então, que:

$$\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1,\ c_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{v} = (b_2 - c_2, c_1 - b_1)$$

$$\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

$$(base \times altura)/2$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|h$$

Observe, na Figura 8, que h é a altura relativa ao lado $\overrightarrow{BC}$, ou seja, é medida da projeção de $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$ (lembre que $\overrightarrow{v}$ é paralelo a $\overrightarrow{AD}$). Como $\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, temos que a área do triângulo é:

$$h$$

$$\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{BA}\right| \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\frac{\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA},\overrightarrow{v}\right|$$

$$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{v} = b_1c_2 - a_1c_2 - b_2c_1 + a_2c_1 + a_1b_2 - a_2b_1$$

Essa expressão pode ser obtida pelo seguinte determinante:

$$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Portanto, a área do triângulo
ABC
é:

$$ABC$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA},\overrightarrow{v}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Perceba que, na expressão anterior, nas colunas 1 e 2 dispomos as coordenadas dos vértices do triângulo
ABC
, e na coluna 3 aparecem números 1.

$$ABC$$

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto no início desta aula, devemos encontrar o comprimento da haste
$\overrightarrow{DC}$

. Observe na Figura 1 que a haste

$$\overrightarrow{AD}$$

é a projeção da barra representada pelo vetor

$$\overrightarrow{AC}$$

sobre a barra representada pelo vetor

$$\overrightarrow{AB}$$

. A partir da Figura 1 obtemos as coordenadas dos vetores

$$\overrightarrow{AB}$$

e

$$\overrightarrow{AC}$$

.

$$\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

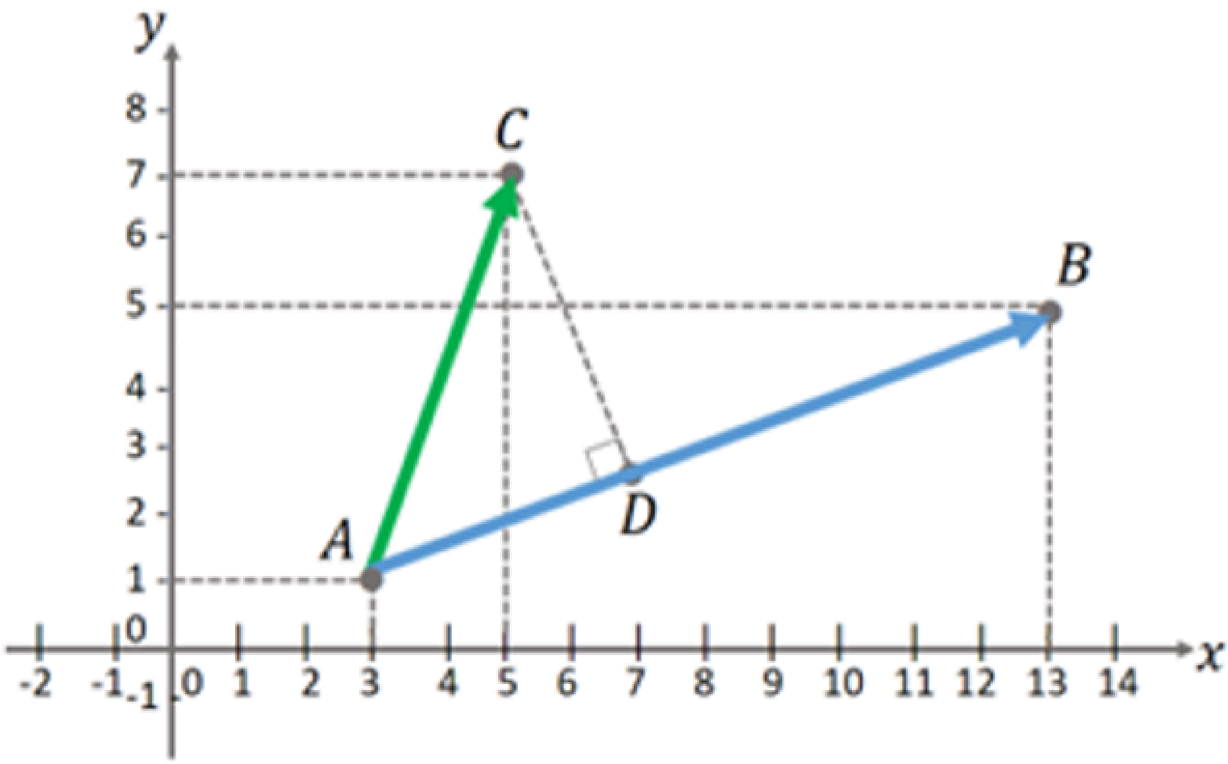


Figura 1 | Haste de sustentação (em

$$m$$

$$\overrightarrow{AC} = (5 - 3{,}7 - 1) = (2{,}6)$$

$$\overrightarrow{AB} = (13 - 3{,}5 - 1) = (10{,}4)$$

Chamando $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, tem-se que o produto escalar de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (2.10) + (6{,}4) = 44$$

e o módulo de

$$\overrightarrow{v}$$

é:

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$$

.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (2.10) + (6{,}4) = 44$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$$

Calculando a projeção de

$$\overrightarrow{AC}$$

sobre

$$\overrightarrow{AB}$$

, segue:

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v} \;\rightarrow\; Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{44}{\left(\sqrt{116}\right)^2}.(10{,}4) \;\rightarrow\; Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \left(\frac{110}{29}, \frac{44}{29}\right)$$

Calculando o comprimento do vetor projeção, temos:

$$\left|Proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{110}{29}\right)^2 + \left(\frac{44}{29}\right)^2} \rightarrow \left|Proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = \sqrt{\frac{14036}{841}} \rightarrow \left|Proj_{\vec{v}}\vec{u}\right| = 4{,}085$$

Logo, a haste de sustentação representada por

$$\overrightarrow{DC}$$

$$4{,}085\ m$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos com o capítulo 2 do livro de Tuanny Maciel, *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

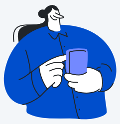
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 4

Produto Vetorial e Aplicações

Produto vetorial e aplicações



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você
Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer dois tipos de produtos entre vetores: produto vetorial e o produto misto. O produto vetorial, também conhecido como produto externo, é uma operação entre dois vetores que resulta em um terceiro vetor, perpendicular ao plano formado pelos vetores originais. O produto misto, também conhecido como produto triplo escalar, é uma operação que envolve três vetores e resulta em um número escalar. Esses tipos de produto entre vetores podem ser usados para calcular a área de um paralelogramo e o volume de um tetraedro.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois o produto vetorial é frequentemente usado em física, geometria analítica e engenharia para modelar e analisar fenômenos tridimensionais. Ele fornece informações importantes acerca da orientação e da perpendicularidade de vetores. Já o produto misto é usado em geometria tridimensional, física e engenharia, especialmente quando se lida com volumes e orientação de objetos no espaço tridimensional.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento!
Vamos lá!

Ponto de Partida

Nesta aula, você aprenderá outra operação de produto entre vetores, denominada produto vetorial. Ela apresenta diferenças em relação ao produto escalar e importantes aplicações, por exemplo, na física, para definir eletromagnetismo; para descrever a força Lorentz e calcular a normal de um triângulo ou outro polígono, o que é importante no ramo da computação gráfica e no desenvolvimento de jogos eletrônicos. Na engenharia civil, especificamente, o produto vetorial é aplicado nas definições de torque e de momento angular.

Suponha que você, ainda trabalhando na metalúrgica, se depare com esta situação: na composição de robôs da linha de produção é necessária a fabricação de 500 peças de aço sólidas. Elas terão formato de paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AE}$$

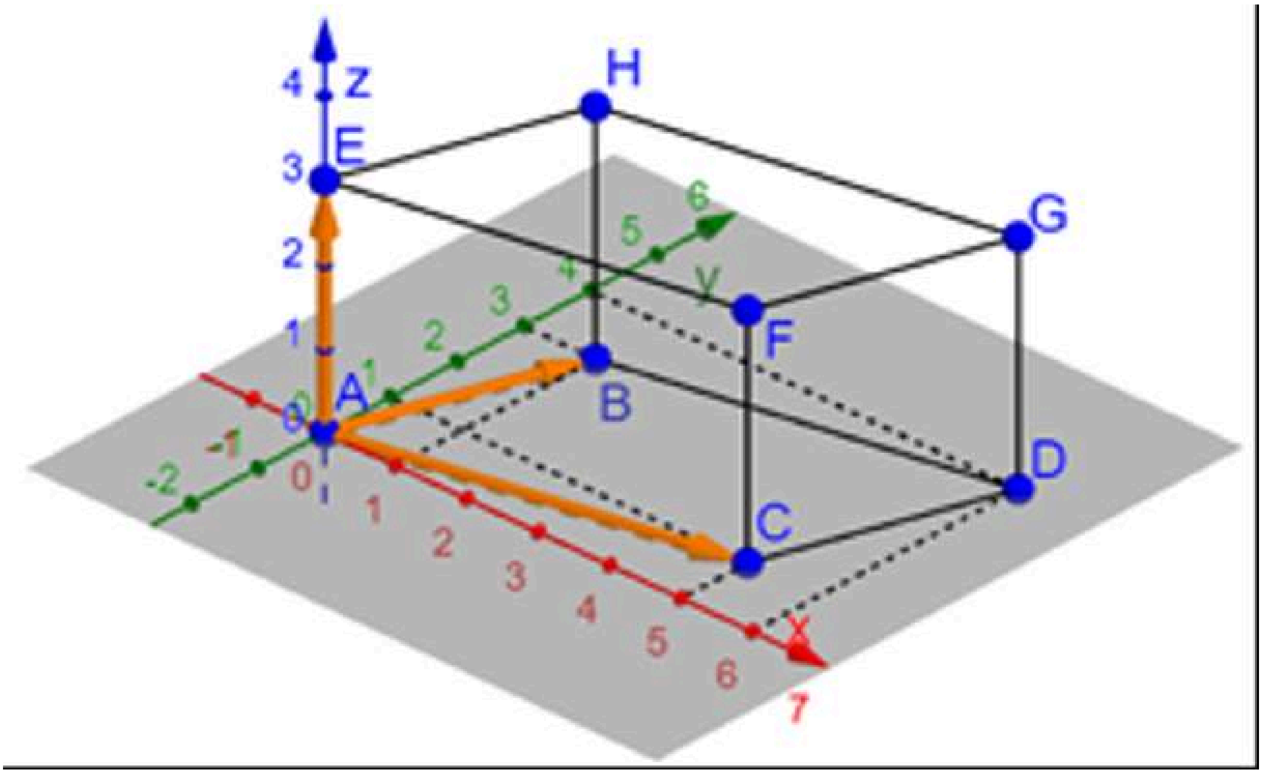


Figura 1 | Representação da peça. Fonte: GeoGebra (c2024).

Essa imagem foi gerada por um dos projetistas da empresa em um software de computador, e agora cabe a você determinar o volume de aço necessário para construir as peças.

Vamos lá?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Produto vetorial

Considere dois vetores

$$\overrightarrow{a}$$

e

$$\overrightarrow{b}$$

. O produto vetorial entre esses dois vetores, representado por

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

, é um vetor com as seguintes características:

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

1. O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ é $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}\right| . sen\theta$, em que θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
2. A direção do vetor resultante do produto $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal ao plano que contém $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
3. O sentido desse vetor é dado pela regra da mão direita.

A **regra da mão direita** é usada para indicar o sentido do vetor

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

. O indicador se posiciona na direção de

$$\vec{a}$$

, o dedo médio na direção de

$$\vec{b}$$

e o produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

terá o sentido do polegar, como na Figura 2.

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

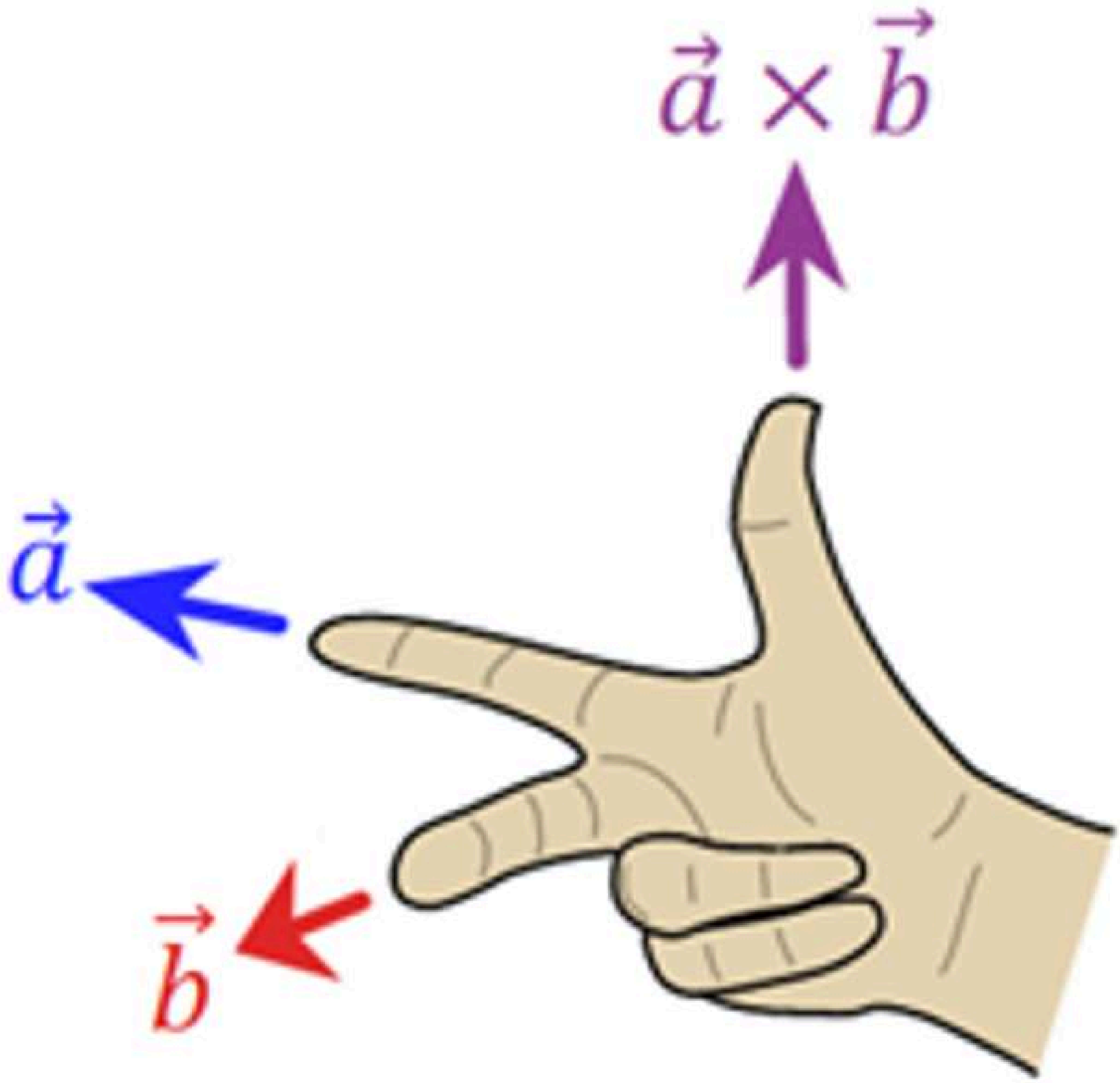


Figura 2 | Regra da mão direita. Fonte: Wikimedia Commons.

Note que os produtos vetoriais

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

e

$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

apresentam sentidos opostos, como na Figura 3. Logo, temos que

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

.

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

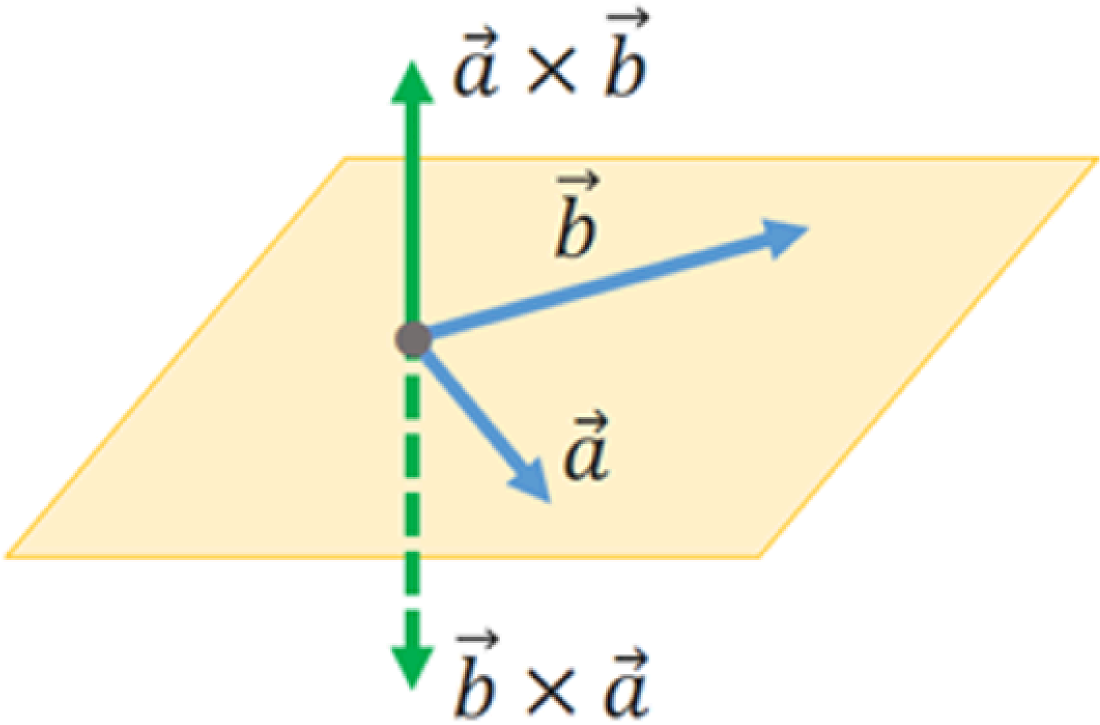


Figura 3 | Produtos vetoriais $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 157).

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} \times \vec{a}$$

Propriedades do produto vetorial

1. O produto vetorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ é nulo, ou seja, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$ para algum $k \in \mathbb{R}$.
2. Temos que $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. A igualdade ocorre somente se um deles for nulo ou se forem paralelos. Em outras palavras, o produto vetorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ não é comutativo, na verdade, ele é anticomutativo $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. Uma consequência dessa propriedade é que o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é nulo: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = 0$.
3. Sejam $m, n \in \mathbb{R}$. Temos que $\left(m\overrightarrow{a}\right) \times \left(n\overrightarrow{b}\right) = (m.n)\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$.
4. Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$, a propriedade distributiva entre esses vetores é igual a:
   $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{c} \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}$

Multiplicação externa de vetores

Para deduzir uma expressão para o produto vetorial, iniciamos pelos versores

$\hat{i}$

,

$\hat{j}$

e

$\hat{k}$

, representados na Figura 4.

$\hat{i}$

$\hat{j}$

$\hat{k}$

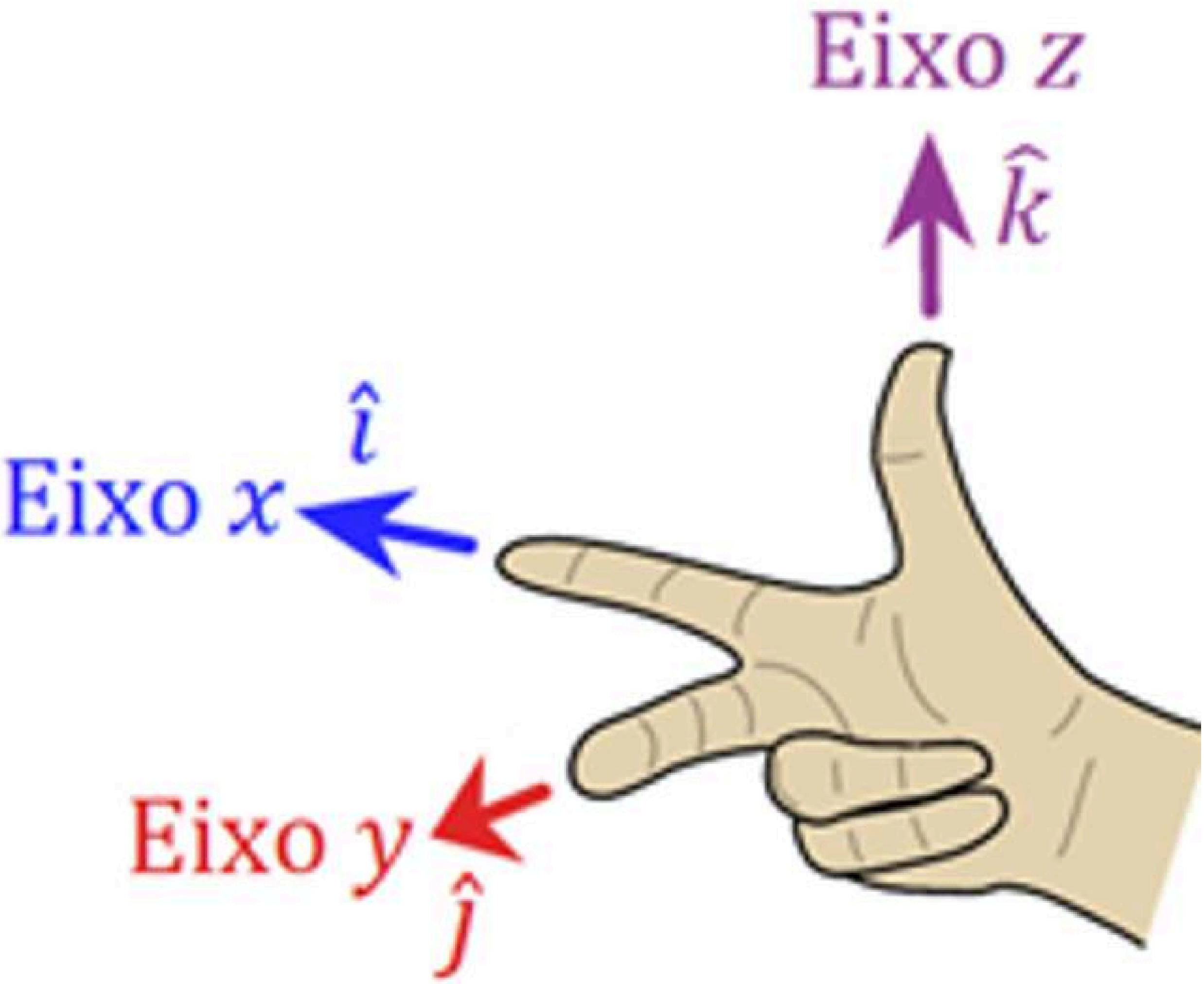


Figura 4 | Multiplicação dos versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\widehat{k}$. Fonte: adaptada de Wikimedia Commons.

$\hat{i}$

$\hat{j}$

$\widehat{k}$

Para multiplicar
$\hat{i}$
com
$\hat{j}$
, ou seja, efetuar
$\hat{i} \times \hat{j}$
, utilizaremos as características apresentadas anteriormente.

$\hat{i}$

$\hat{j}$

$\hat{i} \times \hat{j}$

1. O módulo de $\hat{i} \times \hat{j}$ é $\left|\hat{i} \times \hat{j}\right| = \left|\hat{i}\right| . \left|\hat{j}\right| sen 90^{\circ} = 1.1 = 1.$
2. A direção do vetor resultante do produto $\hat{i} \times \hat{j}$ é ortogonal ao plano que contém $\hat{i}$ e $\hat{j}$, ou seja, tem a direção do eixo z.
3. O sentido desse vetor é dado pela regra da mão direita. Observando a Figura 4, o vetor $\hat{i} \times \hat{j}$ terá o mesmo sentido que o vetor $\widehat{k}$.

Observando essas características, o único vetor que atende a todas elas é exatamente o vetor
$\widehat{k}$
. Logo,
$\hat{i} \times \hat{j} = \widehat{k}$
.

$\widehat{k}$

$\hat{i} \times \hat{j} = \widehat{k}$

Se você repetir esse mesmo raciocínio para os demais versores, poderá constatar que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \widehat{k} \qquad \widehat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{j} \times \widehat{k} = \hat{i} \qquad \hat{i} \times \hat{i} = \overrightarrow{0} \qquad \widehat{k} \times \widehat{k} = \overrightarrow{0}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\widehat{k} \qquad \hat{i} \times \widehat{k} = -\hat{j} \qquad \widehat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \qquad \hat{i} \times \hat{i} = \overrightarrow{0} \qquad \hat{j} \times \hat{j} = \overrightarrow{0}$$

Tendo obtido as igualdades anteriores, considere
$\overrightarrow{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$

e
$\overrightarrow{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$
vetores do
$\mathbb{R}^3$
. Qual seria a expressão
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
?

$$\overrightarrow{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

O produto vetorial
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
é obtido calculando o determinante:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Comparando com o Teorema de Laplace, na teoria de matrizes e determinantes, podemos escrever:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\widehat{k}$$

Exemplo: Sejam
$\overrightarrow{a} = (1{,}5, -2)$
e
$\overrightarrow{b} = (-3{,}4, 0)$
, determine

$$\vec{a} \times \vec{b}$$
.

$$\vec{a} = (1{,}5, -2)$$

$$\vec{b} = (-3{,}4, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Resolução: Para determinar o produto vetorial
$\vec{a} \times \vec{b}$
, utilizamos:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{0} + 6\hat{j} + 4\widehat{k}\right) - \left(-8\hat{i} + \vec{0} - 15\widehat{k}\right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 8\hat{i} + 6\hat{j} + 19\widehat{k}$$

Siga em Frente...

Área do paralelogramo e do triângulo

Sejam os vetores
$\vec{a}$
e
$\vec{b}$
formando o paralelogramo da Figura 5.

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

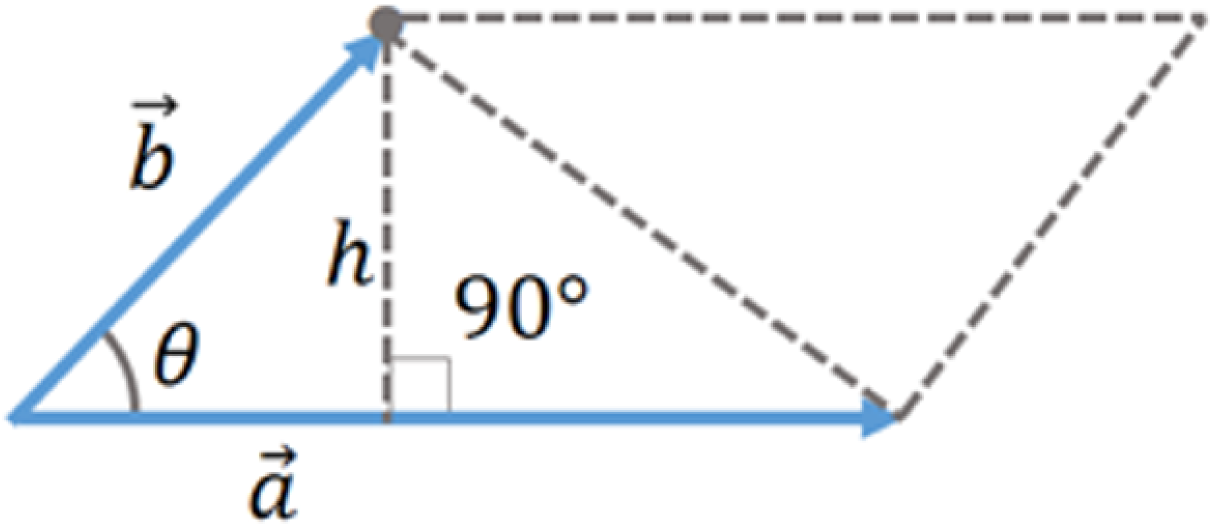


Figura 5 | Paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 160).

$\vec{a}$

$\vec{b}$

De acordo com a figura, constata-se que o **paralelogramo** é dividido em dois triângulos, iguais e formados pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Sabemos que a área de um triângulo é:

$\vec{a}$

$\vec{b}$

$$A_t = \frac{base.altura}{2}$$

Na Figura 5, a base é

$$\left|\overrightarrow{a}\right|$$

e a altura é dada por

$$h = \left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

. Logo, a área do paralelogramo é dada por:

$$\left|\overrightarrow{a}\right|$$

$$h = \left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

$$A_p = 2\frac{\left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta}{2}$$

$$A_p = 2\frac{\left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta}{2}$$

$$A_p = \left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

$$A_p = \left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

Mas

$$\left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

é o módulo do produto vetorial

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

, logo:

$$\left|\overrightarrow{a}\right|.\left|\overrightarrow{b}\right| sen\theta$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

$$A_p = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$$

A **área do triângulo** determinado por esses mesmos vetores é a metade de
A_p
:

$$A_p$$

$$A_t = \frac{\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|}{2}$$

Exemplo: Calcule a área do paralelogramo, em
m^2
, cujos vetores
$\overrightarrow{a} = (3{,}0, 7)$
e
$\overrightarrow{b} = (2, -5{,}1)$
são dois lados consecutivos desse paralelogramo.

$$m^2$$

$$\overrightarrow{a} = (3{,}0, 7)$$

$$\overrightarrow{b} = (2, -5{,}1)$$

Resolução: Sabemos que a área do paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores que compõem dois lados consecutivos desse polígono.

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ 2 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{0} + 14\hat{j} - 15\widehat{k}\right) - \left(-35\hat{i} + 3\hat{j} + 0\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = 35\hat{i} + 11\hat{j} - 15\widehat{k}$$

$$A_p = \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right| \rightarrow A_p = \sqrt{35^2 + 11^2 + (-15)^2}$$

$$A_p = 39{,}64\ m^2$$

Produto misto

Considere os vetores
$\overrightarrow{a}$
,
$\overrightarrow{b}$
e
$\overrightarrow{c}$
. O produto misto entre esses vetores é um número real representado por
$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$
, tal que
$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \overrightarrow{a}. \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$
.

$\overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{c}$

$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$

$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \overrightarrow{a}. \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$

Sejam
$\overrightarrow{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$
,
$\overrightarrow{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$
e
$\overrightarrow{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}$
vetores do
$\mathbb{R}^3$
. Temos então:

$\overrightarrow{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\widehat{k}$

$$\overrightarrow{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\widehat{k}$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \overrightarrow{a}. \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = (x_1, y_1, z_1). \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo: Considere os vetores

$$\overrightarrow{a} = 7\hat{i} + 5\hat{j} - 2\widehat{k}$$

,

$$\overrightarrow{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\widehat{k}$$

e

$$\overrightarrow{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + \widehat{k}$$

. Calcule o produto misto

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

.

$$\overrightarrow{a} = 7\hat{i} + 5\hat{j} - 2\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + \widehat{k}$$

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (21 + 20 - 12) - (-6 - 84 - 10) = 129$$

Logo,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 129$$

.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 129$$

O produto misto pode ser utilizado para calcular o volume de sólidos como o paralelepípedo e o tetraedro.

O volume do **paralelepípedo** (Figura 6) determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto vetorial:

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\vec{w}$$

$$V_p = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$$

$$V_p = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$$

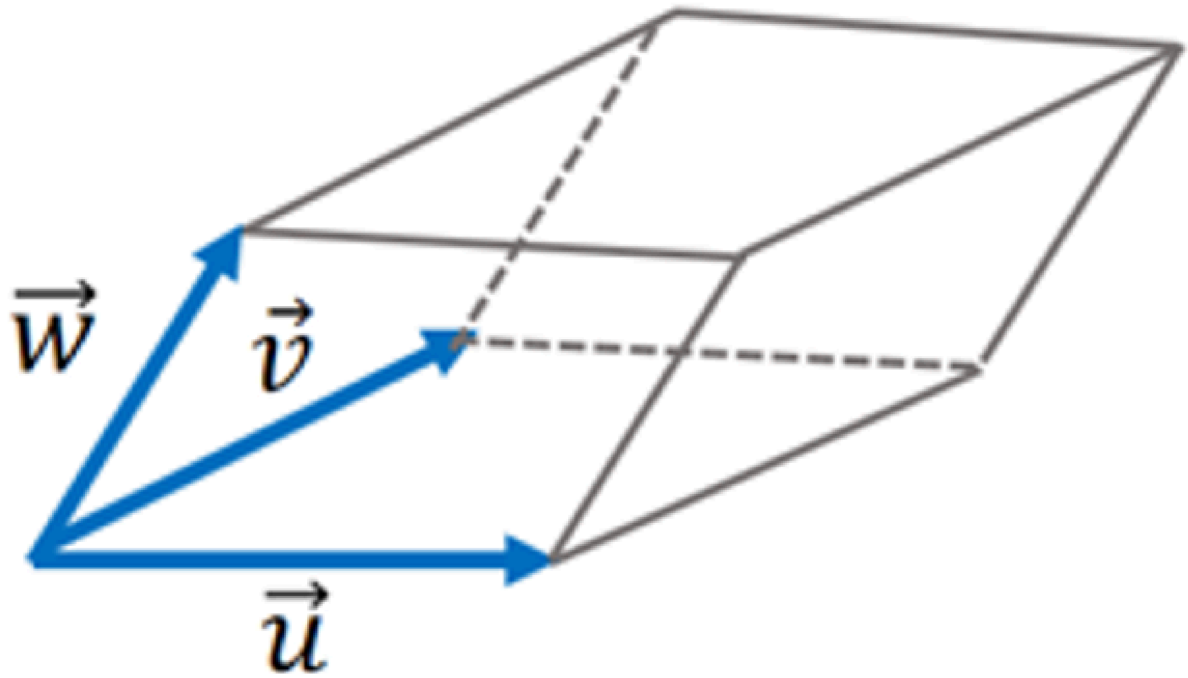


Figura 6 | Volume do paralelepípedo. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 162).

O volume do **tetraedro** (Figura 7) formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por:

$\vec{u}$

$\vec{v}$

$\vec{w}$

$$V_t = \frac{\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]}{6}$$

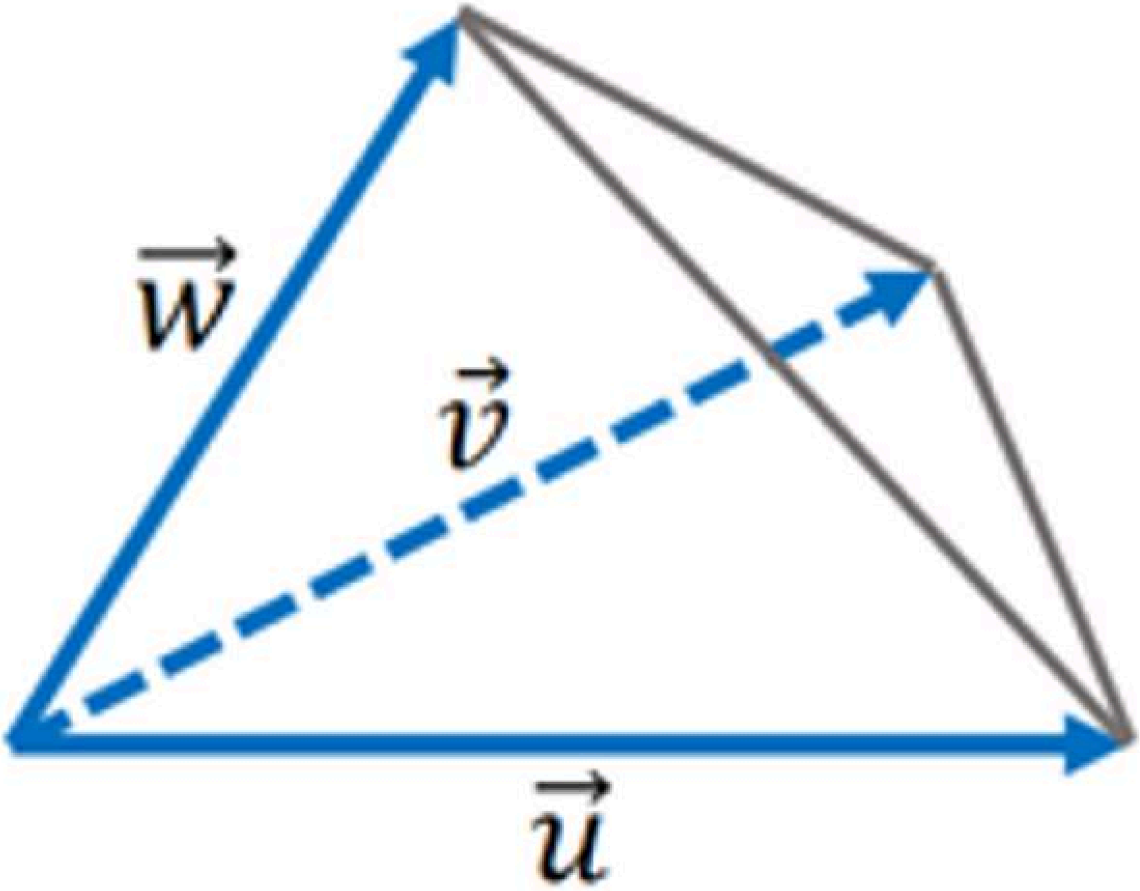


Figura 7 | Volume do tetraedro. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 163).

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto no início desta aula, sabemos que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares, o valor absoluto do produto misto $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$ é o volume do paralelepípedo determinado por eles.

$\vec{u}$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{w}$$

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right]$$

Logo, para determinarmos o volume de uma das peças, basta calcularmos o produto misto entre $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$. Observando a Figura 1, temos que: $\overrightarrow{AC} = (5,1,0)$, $\overrightarrow{AB} = (1,3,0)$ e $\overrightarrow{AE} = (0,0,3)$.

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AC} = (5,1,0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,0)$$

$$\overrightarrow{AE} = (0,0,3)$$

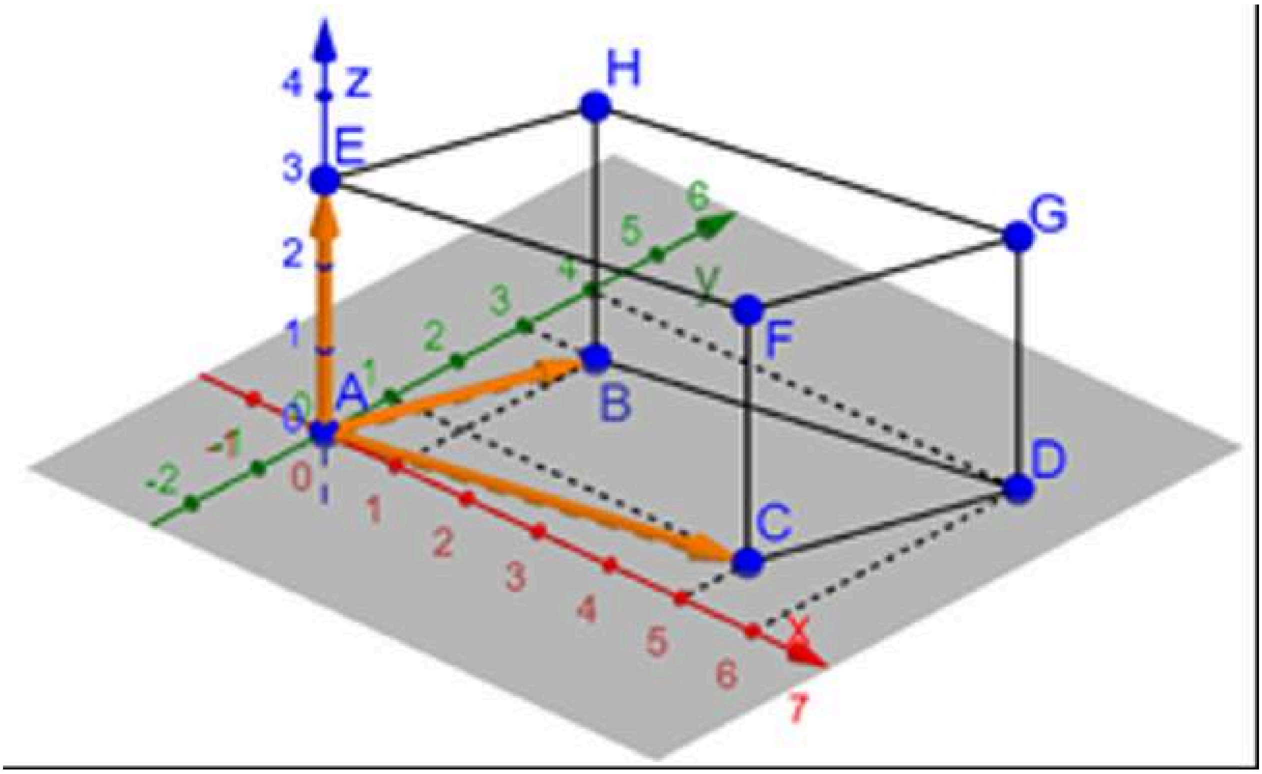


Figura 1 | Representação da peça. Fonte: Wikimedia Commons.

Calculando o produto misto entre

$$\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AE}$$

$$\left[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (45 + 0 + 0) - (0 + 0 + 3)$$

$$\left[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right] = 42$$

Portanto, o volume de uma peça é

$$42\ cm^3$$

$$500.42 = 21000\ cm^3$$

$$0,021 m^3.$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos! Acesse o capítulo 2 do livro de Tuanny Maciel, *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

GEOGEBRA. **Peça metálica**. GeoGebra, c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/UVRpBpqC. Acesso em: 15 jan. 2024.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

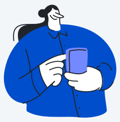
Aula 5

Encerramento da Unidade

Videoaula de Encerramento

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, serão retomados os principais conceitos abordados na Unidade 3: Produto escalar e vetorial. São eles: produto escalar, produto vetorial, produto misto e suas aplicações. O produto escalar e o produto vetorial são descritos tanto na forma geométrica como na forma analítica.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois esses produtos são fundamentais em álgebra linear, geometria, física e diversas outras disciplinas. Cada um deles tem propriedades específicas e aplicações em contextos diferentes.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Chegada

Para desenvolver a competência desta Unidade, que é aplicar as técnicas matemáticas envolvendo grandezas vetoriais e aplicar essas técnicas a problemas que envolvam o produto escalar e o produto vetorial, é de grande importância estudar os vários tópicos da análise vetorial. Vetores são fundamentais em muitas disciplinas, desempenhando um papel crucial na descrição de movimento, força e campos, entre outras grandezas físicas e matemáticas. Para tanto, é necessário entender, além das operações de adição, subtração, multiplicação por escalar, os produtos escalares e vetoriais.

Enquanto o produto escalar produz um número escalar e é útil para calcular grandezas escalares, o produto vetorial produz um vetor e é usado em situações em que a direção e a orientação são importantes.

Junto com os conceitos dos produtos escalares e vetoriais, também é importante analisar a combinação linear de vetores, a dependência linear de um vetor e a projeção de um vetor sobre outro vetor.

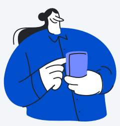
É um conteúdo rico e que pode ser aplicado em várias situações cotidianas.

Algumas questões e reflexões

Analise as seguintes afirmativas:

1. Dados quaisquer dois vetores, eles serão LD se, e somente se, forem paralelos. Dados quaisquer três vetores, eles serão coplanares se, e somente se, forem LD. Em um grupo de vetores $\overrightarrow{w}_1$, $\overrightarrow{w}_2$, ... , $\overrightarrow{w}_n$, se algum dos vetores for múltiplo de outro vetor do mesmo grupo, então a sequência será linearmente dependente. Em um conjunto de vetores $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, ... , $\overrightarrow{u}_n$, se algum dos vetores for gerado pelos demais vetores, ou seja, for combinação linear de outros desses vetores, então a sequência será linearmente dependente.
2. Sabemos que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ e que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right| cos\theta$. Se $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$, então $cos\theta < 0$, logo $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, ou seja, o ângulo θ é obtuso. Se $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$, então $cos\theta > 0$, logo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, ou seja, o ângulo θ é agudo. Se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então esses vetores são ortogonais, e vice-versa.
3. Utilizar a palavra determinante para a expressão do produto vetorial não é formalmente correto, visto que o determinante é para matrizes contendo números ou escalares. Contudo, o abuso na terminologia é cometido por diversos autores e permite organizar os elementos de um modo fácil de memorizar.

É Hora de Praticar!



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Suponha que a siderúrgica onde você trabalha fabrica uma chapa de metal no formato de um paralelogramo formada a partir dos vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1{,}1)$ e $\overrightarrow{v} = (2, -3{,}4)$, com medidas dadas em metros. O material dessa chapa custa $R\$\ 28{,}00$ por m^2. Qual o custo na produção de dez chapas iguais a essa?

Como você responderia à questão apresentada? Se necessário revisite o conteúdo da unidade para solucioná-la!

Para calcular a área da chapa devemos, antes, calcular o produto vetorial entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e o seu módulo.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(-4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) - \left(-3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

Logo, o módulo $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$:

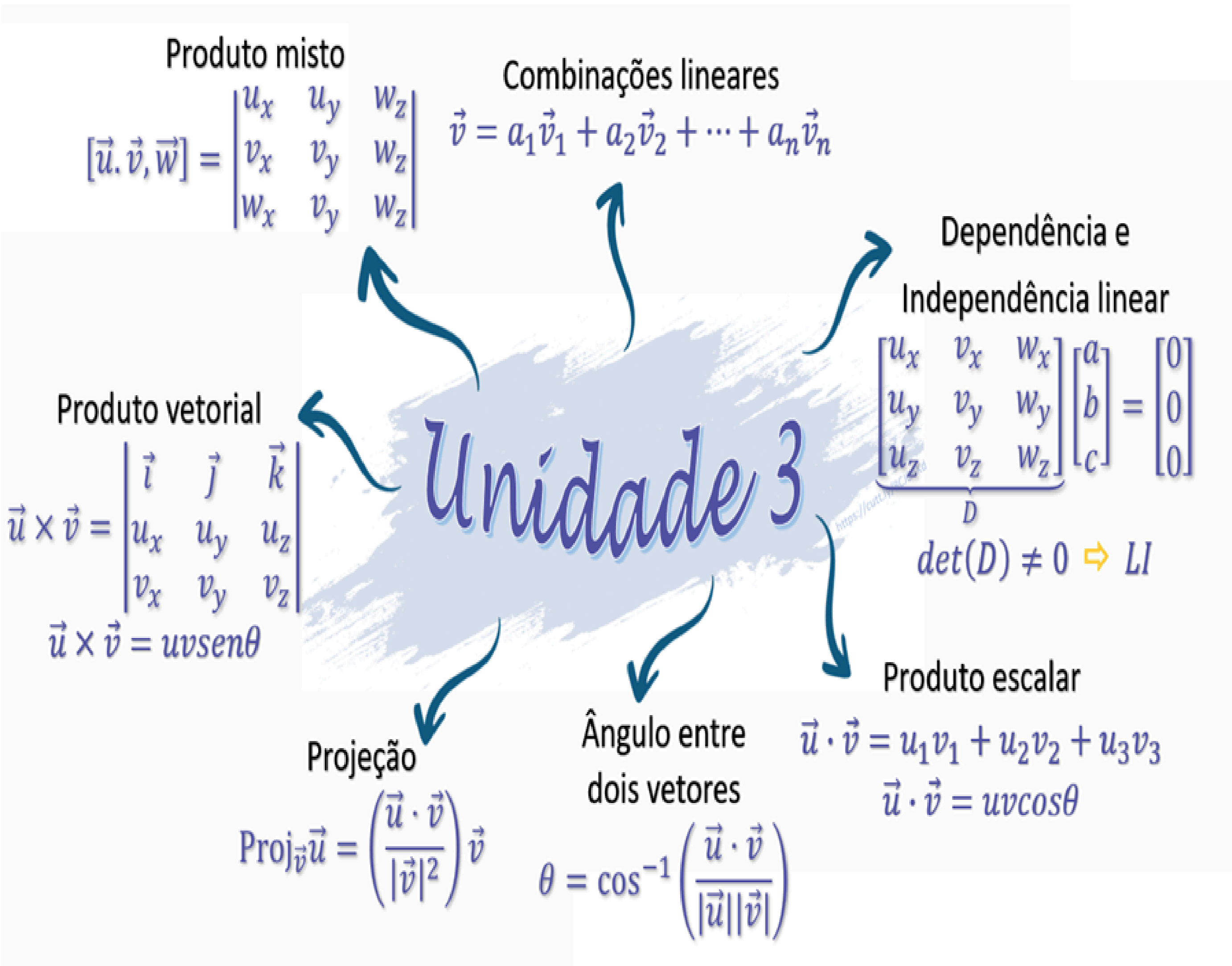
$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{6}$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| \cong 2{,}45$$

Logo, uma chapa tem aproximadamente $2{,}45\ m^2$. O preço dessa chapa é cerca de $(2{,}45).(28) = 68{,}6\ reais$, ou seja, $R\$\ 68{,}60$. Como são dez chapas iguais, o valor total é de $R\$\ 686{,}00$.

O mapa mental a seguir sintetiza os principais conceitos abordados na Unidade. Você deve percorrê-lo da esquerda para a direita, a partir “Combinações lineares”. Um mapa mental é uma representação gráfica e visual de ideias e conceitos, geralmente centrado em torno de uma palavra-chave ou ideia central. Ele é uma ferramenta eficaz para organizar informações, estimular a criatividade e facilitar o aprendizado.



ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.
SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

,

Unidade 4

Equações de Retas e Planos

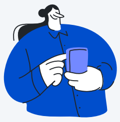
Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL

Aula 1

Equação Vetorial de uma Reta

Equação vetorial de uma reta



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer várias formas de escrever a equação de uma reta e, também, como calcular o ângulo formado entre duas retas.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a equação de uma reta é de suma importância nos cálculos matemáticos e na engenharia. Ela ajuda a definir se os pontos estão alinhados e a encontrar um ponto diferente que esteja na direção desejada. Por meio da equação geral da reta, podemos determinar infinitos pontos que pertencem a ela e calcular seu coeficiente angular, que fornece o grau de inclinação.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

A equação de uma reta é de suma importância nos cálculos matemáticos e na engenharia. Ela ajuda a definir se os pontos estão alinhados e a encontrar um ponto diferente que esteja na direção desejada. Por meio da equação geral da reta, podemos determinar infinitos pontos que pertencem a ela e calcular seu coeficiente angular, que fornece o grau de inclinação.

Em relação à engenharia, ela pode ajudar a definir se os pilares estão alinhados, a inclinação de uma viga e muitos outros casos. Por todas essas aplicações, é a equação geral da reta que vai ajudá-lo na situação seguinte: suponha que sua empresa precise fazer uma instalação de placas solares em uma casa. Para tanto, cabe a você determinar o ângulo da inclinação da placa, para fazer a programação correta da captação de energia.

Analisando a placa lateralmente, você pode determinar que, a

$15\ cm$

$68\ cm$

$40\ cm$

$1{,}68\ m$

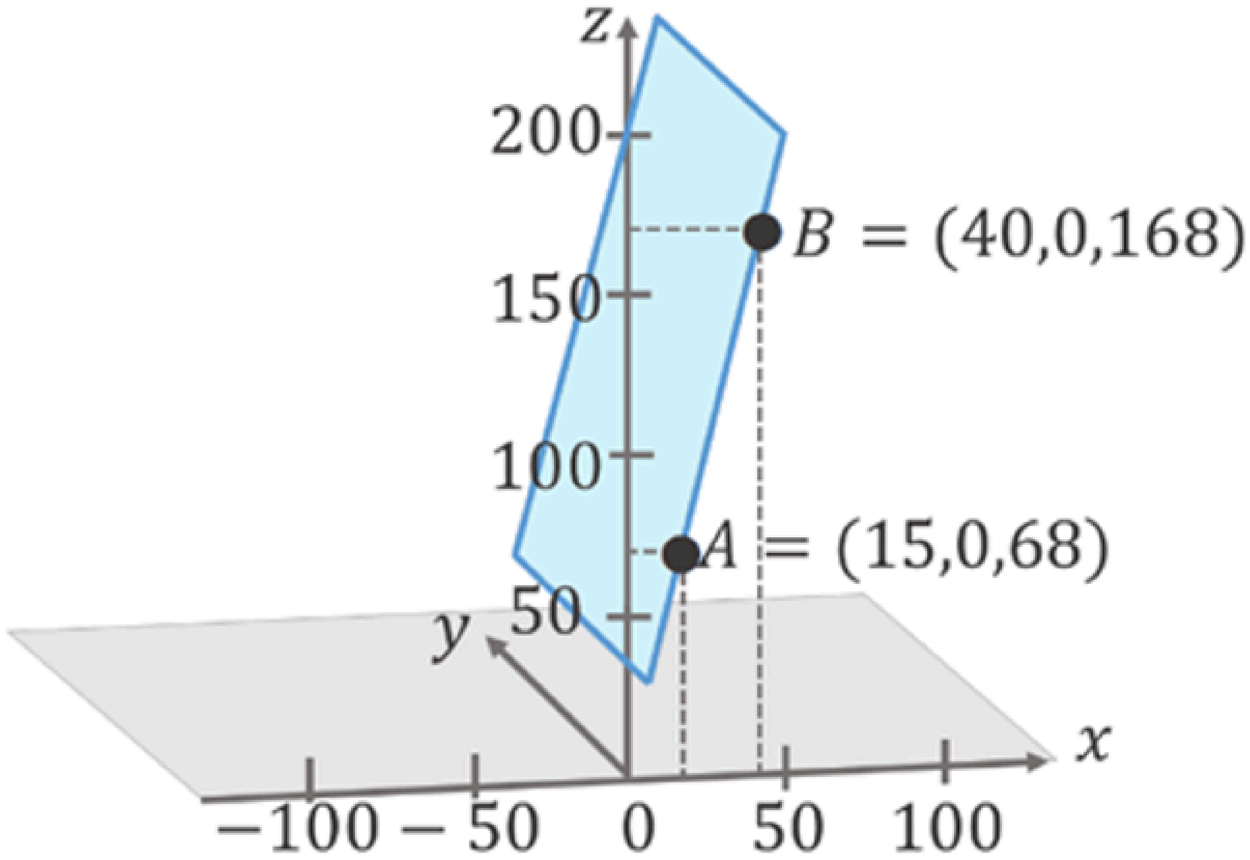


Figura 1 | Placa solar. Fonte: adaptada de Dias (c2024).

Você precisa calcular o ângulo de inclinação da placa.

Para resolver esse problema, você deverá conhecer a equação da reta e saber como determinar o coeficiente angular.

Logo, precisamos de alguns conceitos importantes, como a equação geral da reta e o ângulo formado entre duas retas.

Vamos Começar!

Equação vetorial da reta

Sejam r uma reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_o)$ e um vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Sabemos, devido a um axioma conhecido como axioma de incidência, que só existe uma reta que passa pelo ponto P e tem a mesma direção do vetor $\overrightarrow{v}$. Um ponto $Q(x, y, z)$ pertencerá à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{v}$, para algum t pertencente aos números reais.

$$r$$

$$P(x_0, y_0, z_o)$$

$$\overrightarrow{v} = (a, b, c)$$

$$P$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$Q(x, y, z)$$

$$r$$

$$\overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{v}$$

$$t$$

Como

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

, temos que:

$$Q - P = t\overrightarrow{v} \;\; \Rightarrow \;\; Q = P + t\overrightarrow{v}$$

. Substituindo, temos:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$Q - P = t\overrightarrow{v} \;\; \Rightarrow \;\; Q = P + t\overrightarrow{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

que é chamada de **equação vetorial da reta**.

O vetor

$\overrightarrow{v}$

é o vetor diretor da reta

r

e

t

é o parâmetro da equação.

$$\overrightarrow{v}$$

$$r$$

$$t$$

Exemplo: A reta

r

passa pelo ponto

$B(2,3,5)$

e tem a direção do vetor

$\overrightarrow{v} = (1, -1,3)$

. Qual é a equação vetorial da reta ?

$$r$$

$$B(2,3,5)$$

$$\vec{v} = (1, -1{,}3)$$

Resolução: Para encontrar a equação da reta, basta substituirmos os valores dados:

$$(x, y, z) = (2{,}3, 5) + t(1, -1{,}3)$$

Para encontrar pontos dessa reta, basta atribuir valores para
t
. Por exemplo:

$$t$$

- Para $t = 1$: $P_1 = (2{,}3, 5) + 1(1, -1{,}3) \quad \rightarrow \quad P_1 = (3{,}2, 8)$.
- Para $t = 2$: $P_1 = (2{,}3, 5) + 2(1, -1{,}3) \quad \rightarrow \quad P_1 = (4{,}1, 11)$.

Equações paramétricas da reta

Quando conhecemos apenas uma coordenada da reta
r
e precisamos determinar as outras coordenadas, utilizamos as equações paramétricas. Para compreendê-las, partimos da equação vetorial de uma reta:

$$r$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Multiplicando o vetor
(a, b, c)
por
t
, temos:

$$(a, b, c)$$

$$t$$

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Pela igualdade entre os pontos, temos que:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Essas são as **equações paramétricas da reta**
$\boldsymbol{r}$
.

$$\boldsymbol{r}$$

Exemplo: Escreva as equações paramétricas da reta
r
que passa pelos pontos
$A(4{,}6,-8)$
e
$B(2,-1{,}3)$
.

$$r$$

$$A(4{,}6,-8)$$

$$B(2,-1{,}3)$$

Solução: Primeiro determinamos o vetor:

$$\overrightarrow{AB}=(2,-1{,}3)-(4{,}6,-8)\ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}=(-2,-7{,}11)$$

Escolhendo o ponto
A
e tendo o vetor
$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-2,-7{,}11)$
, temos as equações:

$$A$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-2,-7{,}11)$$

$$\begin{cases} x=4-2t \\ y=6-7t \\ z=-8+11t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4-2t \\ y=6-7t \\ z=-8+11t \end{cases}$$

Equações simétricas da reta

Isolando o parâmetro
t
nas equações paramétricas, temos:

t

$$\begin{cases} x = x_0 + ta & \rightarrow & t = \frac{x-x_0}{a} \\ y = y_0 + tb & \rightarrow & t = \frac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 + tc & \rightarrow & t = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta & \rightarrow & t = \frac{x-x_0}{a} \\ y = y_0 + tb & \rightarrow & t = \frac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 + tc & \rightarrow & t = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

Como o valor de
t
é o mesmo em ambas as equações anteriores, podemos igualá-las, encontrado as **equações simétricas da reta**:

t

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Casos particulares

1. Se um dos denominadores é nulo, a reta é paralela ao plano que contém os outros eixos. Por exemplo, se
$c = 0$
, a reta é paralela ao plano
xy
, e sua equação será:

$c = 0$

xy

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \end{cases}$$

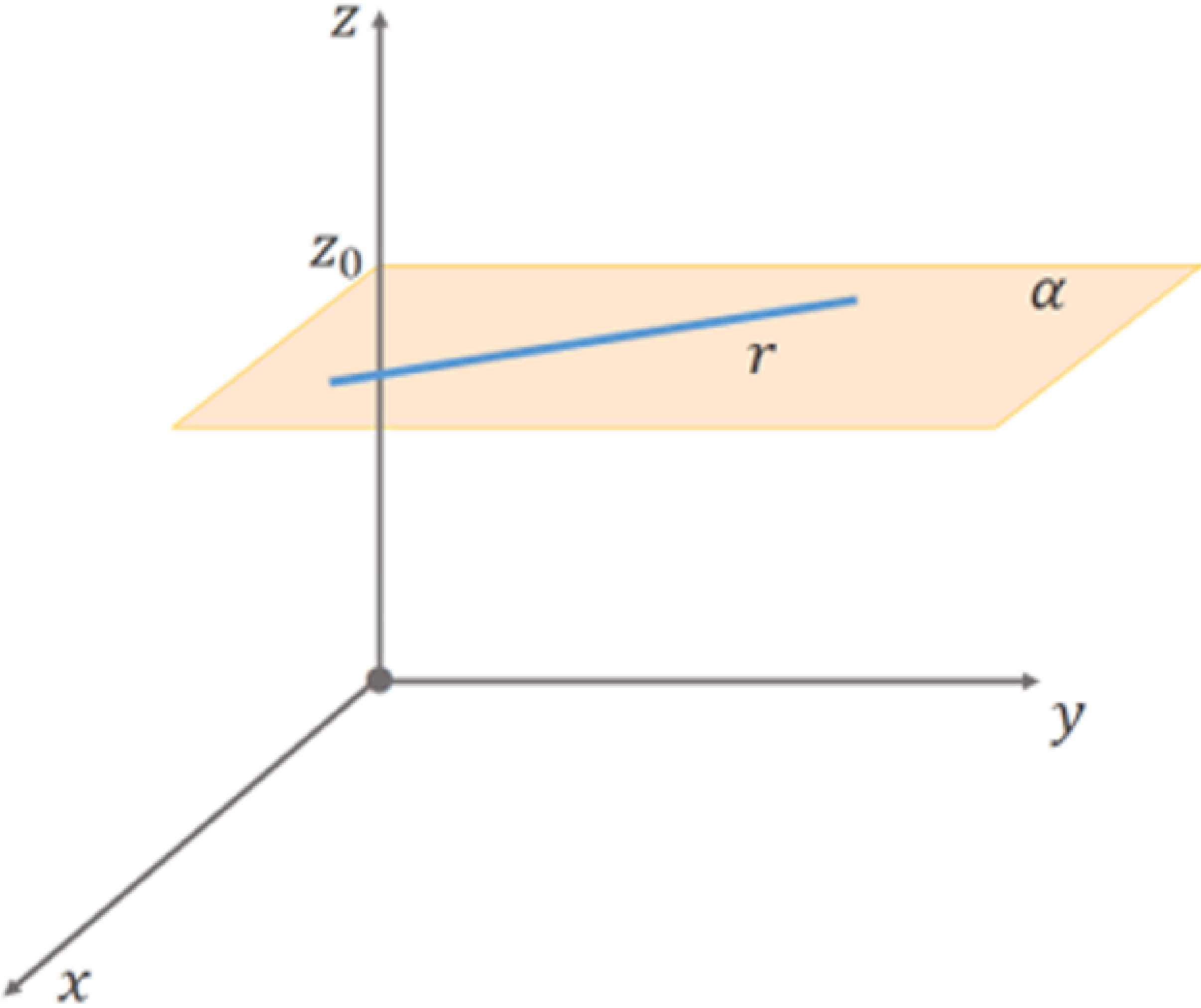


Figura 2 | Reta com
$c = 0$
. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 174).

$$c = 0$$

2. Se dois denominadores são nulos, a reta é paralela ao eixo cujo denominador é diferente de zero. Por exemplo, se
$a = 0$
e
$b = 0$
, então a reta é paralela ao eixo

z
, e terá equação:

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$z$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ \frac{z - z_0}{c} = t \end{cases} \quad \text{com } c \neq 0$$

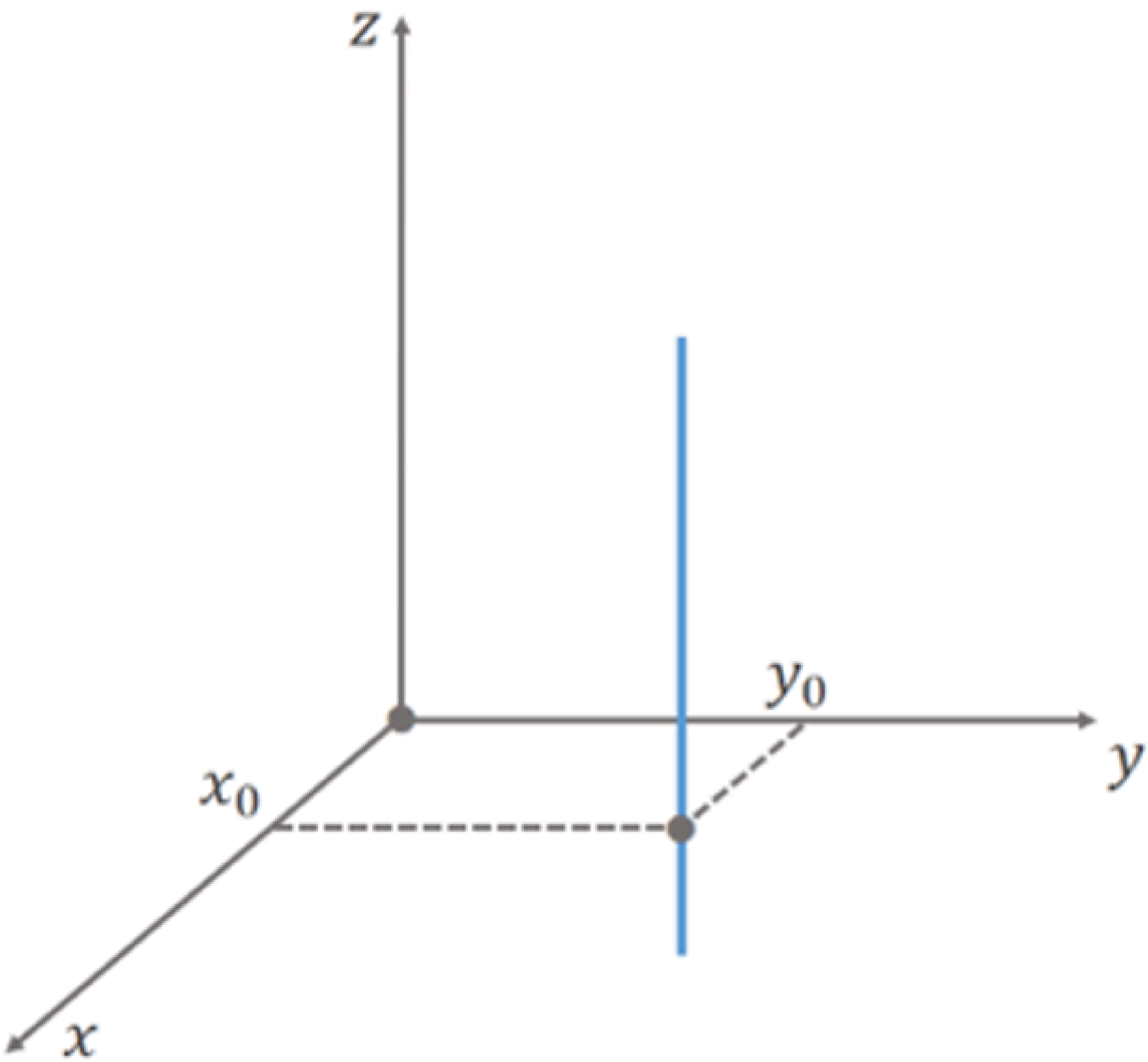


Figura 3 | Reta paramétrica com
$a = 0$
e
$b = 0$
. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 174).

$$a = 0$$

$$b = 0$$

Equação simétrica da reta por dois pontos

Sejam uma reta
r
e dois pontos dessa reta
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
e
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
, além de um ponto genérico,
$P(x, y, z)$
. A equação simétrica da reta é dada por:

$$r$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$P(x, y, z)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Siga em Frente...

Equação da reta determinada por dois pontos no plano

Sejam dois pontos distintos
$A(x_1, y_1)$
e

$$B(x_2, y_2)$$

. Podemos determinar a equação da reta que passa por esses pontos. Observe a Figura 4.

$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

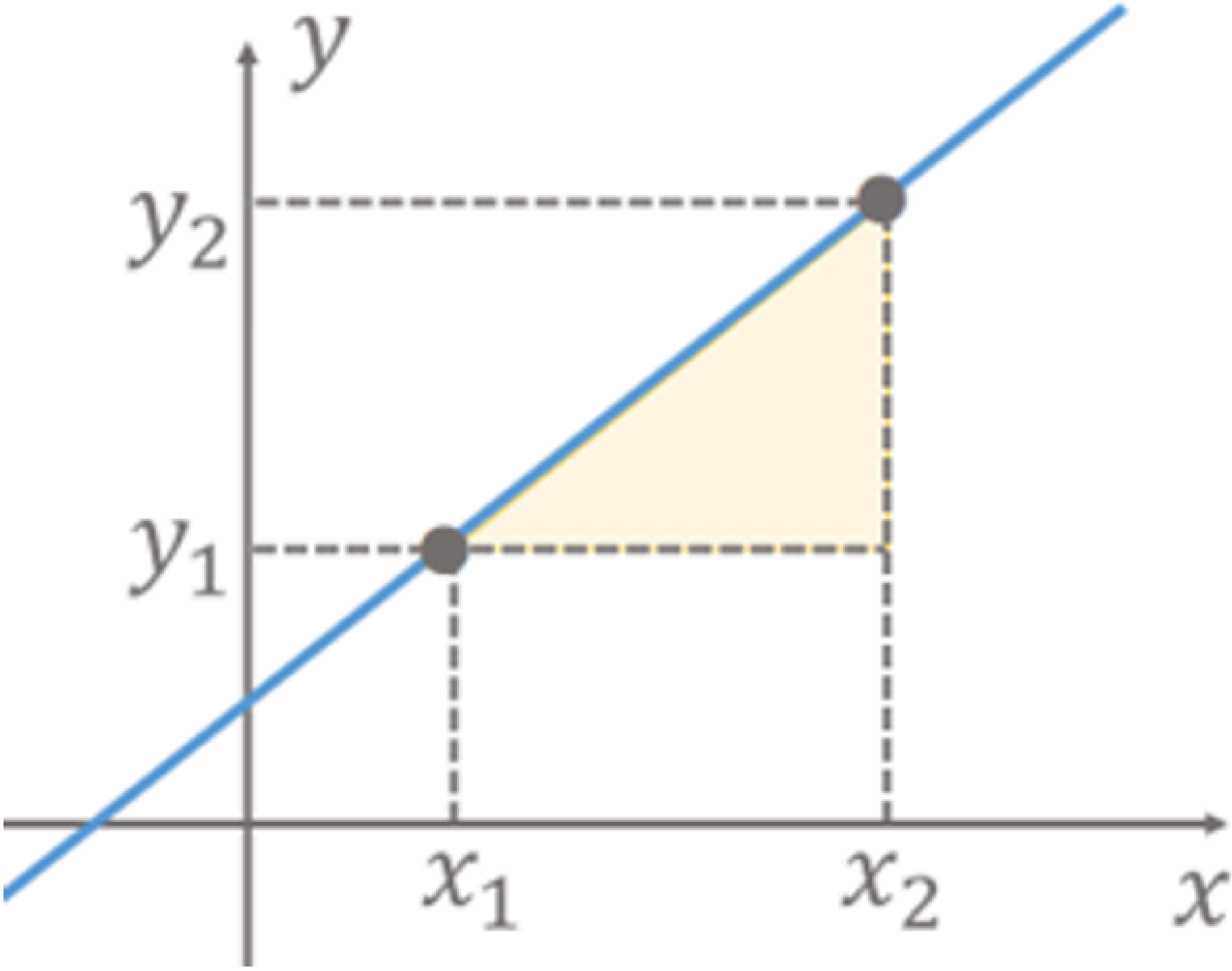


Figura 4 | Equação da reta. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 175).

Isolando o triângulo formado na Figura 4 e calculando a tangente do ângulo
θ
formado (veja Figura 5), temos:

$$\theta$$

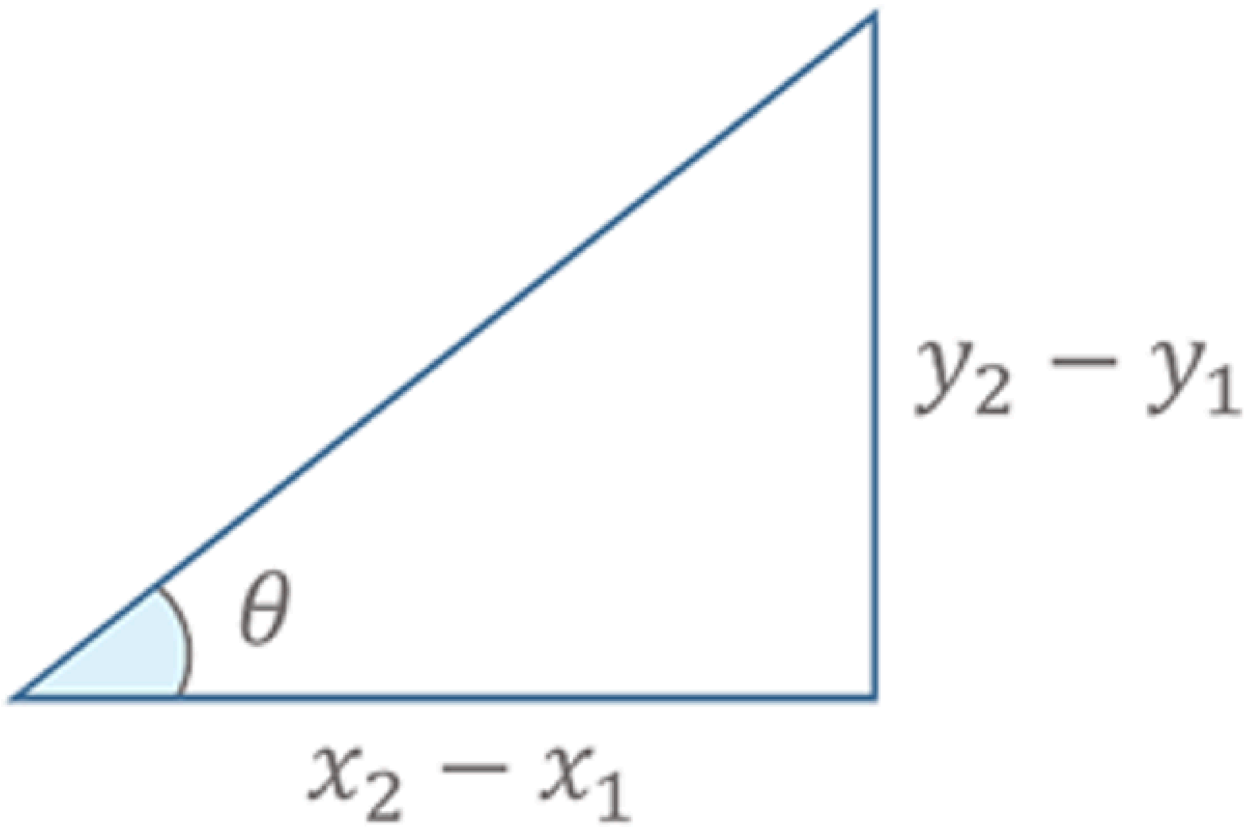


Figura 5 | Triângulo retângulo. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 176).

$$tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tomando $tg\theta = m$, em que m é chamado de coeficiente angular da reta, e ajeitando a equação, temos:

$$tg\theta = m$$

$$m$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Se um ponto $P(x, y)$ pertence a essa reta, temos que:

$$P(x, y)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = mx - mx_1$$

$$-mx + 1\,.\,y + (-y_1 + mx_1) = 0$$

Chamando
$-m = a$
,
$b = 1$
e
$c = -y_1 + m\_x_1$
, temos:

$$-m = a$$

$$b = 1$$

$$c = -y_1 + m\_x_1$$

$$ax + by + c = 0$$

Esse é denominada **equação geral da reta no plano**.

Exemplo: Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos
$A(1{,}4)$
e
$B(-2{,}5)$
.

$$A(1{,}4)$$

$$B(-2{,}5)$$

Resolução: Primeiro, encontramos o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{5-4}{-2-1} \quad \rightarrow \quad m = -\frac{1}{3}$$

Agora, escolhermos um dos pontos e, junto com o coeficiente angular, encontramos a equação da reta:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \rightarrow \quad -3y + 12 = x - 1 \quad \rightarrow \quad x + 3y - 13 = 0$$

Você pode escolher qualquer um dos pontos A ou B e substituir suas coordenadas no lugar de (x_1, y_1) ou (x_2, y_2), que a equação da reta obtida será a mesma.

$$A$$

$$B$$

$$(x_1, y_1)$$

$$(x_2, y_2)$$

Além disso, se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta r, $kax + kby + kc = 0$ também o é, para todo $k \neq 0$.

$$ax + by + c = 0$$

$$r$$

$$kax + kby + kc = 0$$

$$k \neq 0$$

Quando temos a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, para encontrar o coeficiente angular m, basta usarmos a expressão:

$$ax + by + c = 0$$

$$m$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

Cálculo da reta por meio de um determinante

Podemos encontrar a equação da reta por meio de um determinante. Uma das aplicações do determinante é a condição de alinhamento de pontos, ou seja, se o determinante contendo as coordenadas de três pontos for nulo, então, esses pontos estarão alinhados (sobre uma mesma reta).

Portanto, se a reta

$$r$$

$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$P(x, y)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos
$A(5, -4)$
e
$B(6, 2)$
.

$$A(5, -4)$$

$$B(6, 2)$$

Resolução: Substituindo as coordenadas dos pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (-4x + 10 + 6y) - (-24 + 2x + 5y)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (-4x + 10 + 6y) - (-24 + 2x + 5y)$$

$$-6x + y + 34 = 0 \;\rightarrow\; 6x - y - 34 = 0$$

$$-6x + y + 34 = 0 \;\rightarrow\; 6x - y - 34 = 0$$

Ângulo entre retas

Sejam r e s duas retas distintas que se interceptam, formando um ângulo θ entre elas, como mostra a Figura 6.

r

s

θ

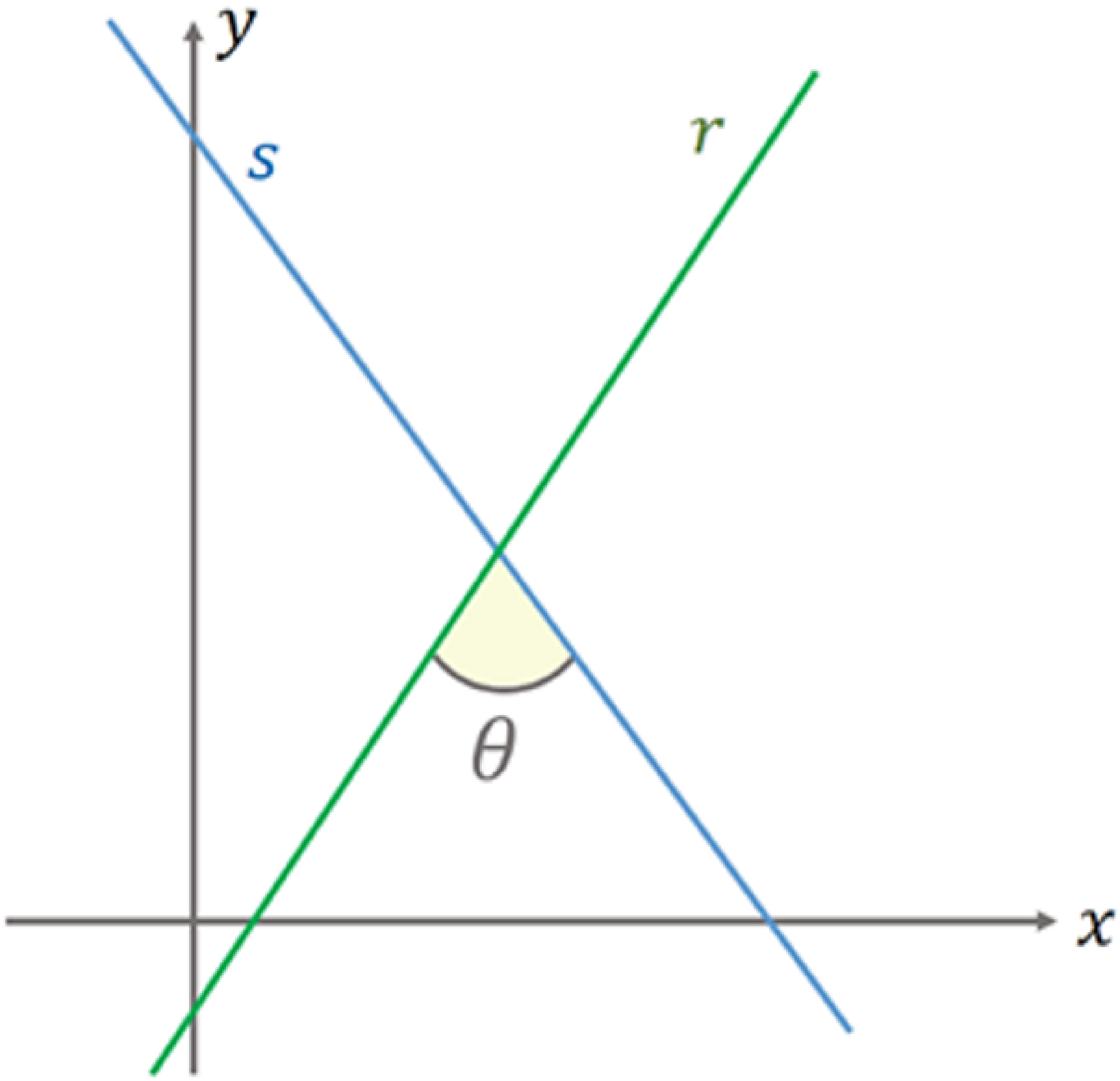


Figura 6 | Retas formando o ângulo

$$\theta$$

Sendo

$$\theta$$

$$r$$

$$s$$

$$tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$$

$$tg\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

em que
m_r
é o coeficiente angular da reta
r
e
m_s
é o coeficiente angular da reta
s
.

m_r

r

m_s

s

Podemos justificar a fórmula anterior por meio da geometria plana e da trigonometria, como na Figura 7.

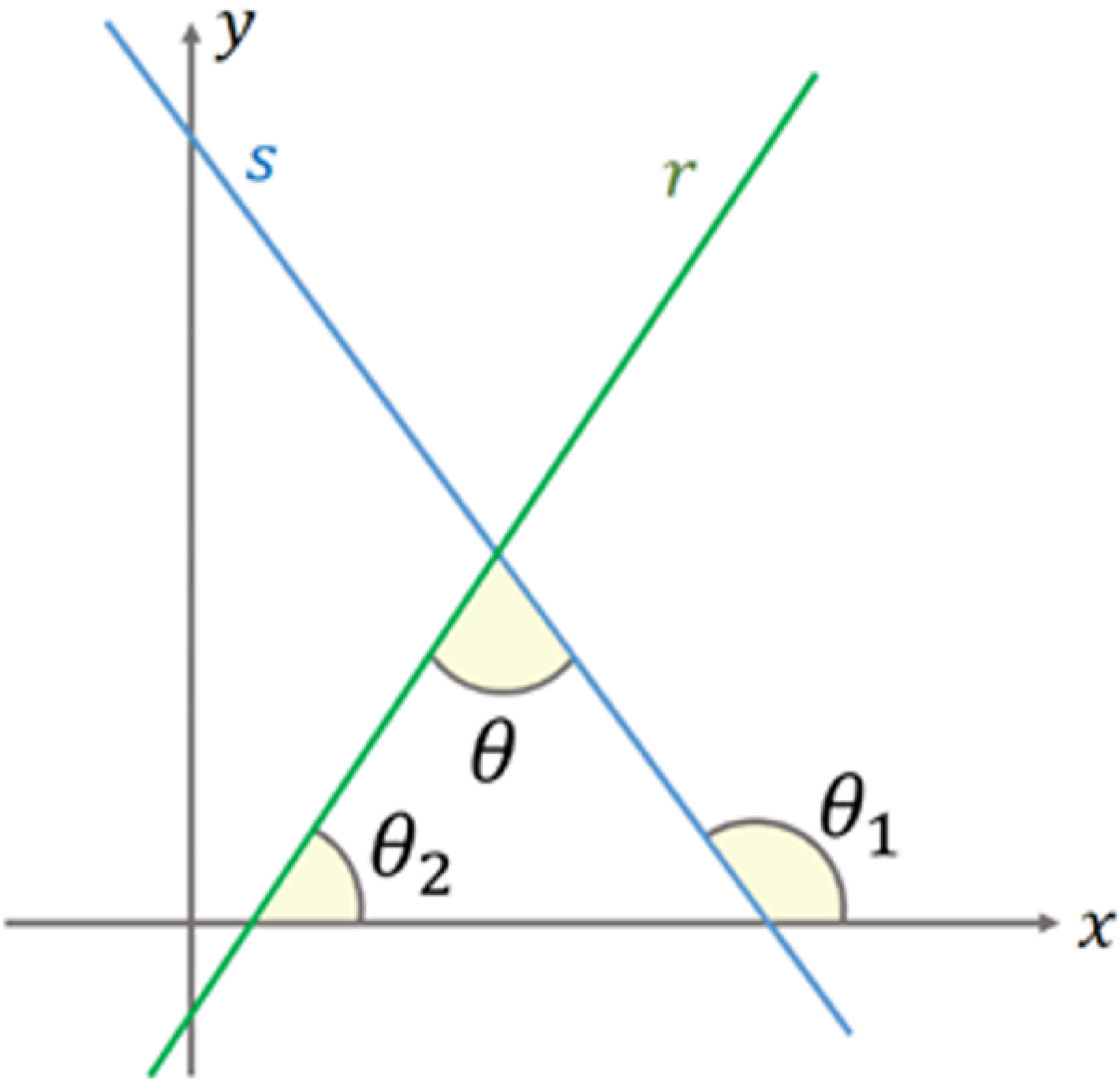


Figura 7 | Ângulo entre duas retas. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 179).

Observe que θ_1 é um ângulo externo do triângulo formado pelas retas r e s, e o eixo x. Logo, ele é a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, ou seja, $\theta_1 = \theta + \theta_2$ ou $\theta = \theta_1 - \theta_2$.

$$\theta_1$$

$$r$$

$$s$$

$$x$$

$$\theta_1 = \theta + \theta_2$$

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Como já visto, temos que
$m_r = tg\theta_2$
e
$m_s = tg\theta_1$
, então
$tg\theta = tg(\theta_1 - \theta_2)$
.

$$m_r = tg\theta_2$$

$$m_s = tg\theta_1$$

$$tg\theta = tg(\theta_1 - \theta_2)$$

Usando trigonometria:

$$tg\theta = tg(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg\theta_1 - tg\theta_2}{1 + tg\theta_1 tg\theta_2}$$

Substituindo
$m_r = tg\theta_2$
e
$m_s = tg\theta_1$
e colocando o módulo para garantir o menor ângulo formado pelas retas, temos:

$$m_r = tg\theta_2$$

$$m_s = tg\theta_1$$

$$tg\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

$$tg\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

como queríamos demonstrar.

Caso as retas tenham equações simétricas no espaço, então o ângulo formado entre elas é dado pela expressão:

$$cos\theta = \left| \frac{\vec{r}_1 . \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1\right| \left|\vec{r}_2\right|} \right|$$

em que
$\vec{r}_1$
e
$\vec{r}_2$
são vetores diretores das duas retas, respectivamente.

$$\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2$$

Exemplo: Sejam as retas
$r: \quad 3x - 5y + 11 = 0$
e
$s: \quad x + 4y - 9 = 0$
, encontre o menor ângulo formado por elas.

$$r: \quad 3x - 5y + 11 = 0$$

$$s: \quad x + 4y - 9 = 0$$

Resolução: Primeiro, vamos encontrar o coeficiente angular das retas:

$$m_r = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad m_r = -\frac{3}{-5} \quad \rightarrow \quad m_r = 0{,}6$$

$$m_r = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad m_r = -\frac{3}{-5} \quad \rightarrow \quad m_r = 0{,}6$$

$$m_s = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad m_s = -0{,}25$$

$$m_s = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad m_s = -0{,}25$$

Substituindo na equação da tangente:

$$tg\theta = \left|\frac{0{,}6-(-0{,}25)}{1+0{,}6.(-0{,}25)}\right| \rightarrow tg\theta = \frac{0{,}85}{0{,}85} \rightarrow tg\theta = 1$$

$$tg\theta = \left|\frac{0{,}6-(-0{,}25)}{1+0{,}6.(-0{,}25)}\right| \rightarrow tg\theta = \frac{0{,}85}{0{,}85} \rightarrow tg\theta = 1$$

Logo, o ângulo θ é o ângulo entre as retas r e s, cuja tangente vale 1. Portanto, $\theta = 45^\circ$.

θ

r

s

$\theta = 45^\circ$

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto inicialmente, lembre-se de que você precisa calcular a inclinação da placa instalada pela sua empresa.

Para isso, primeiramente, você precisa encontrar a equação da reta que serve como suporte para a sua placa. A Figura 1 mostra que, vista lateralmente, a placa pode ser entendida como uma reta que passa pelos pontos

$$(15{,}0, 68)$$

$$(40{,}0, 168)$$

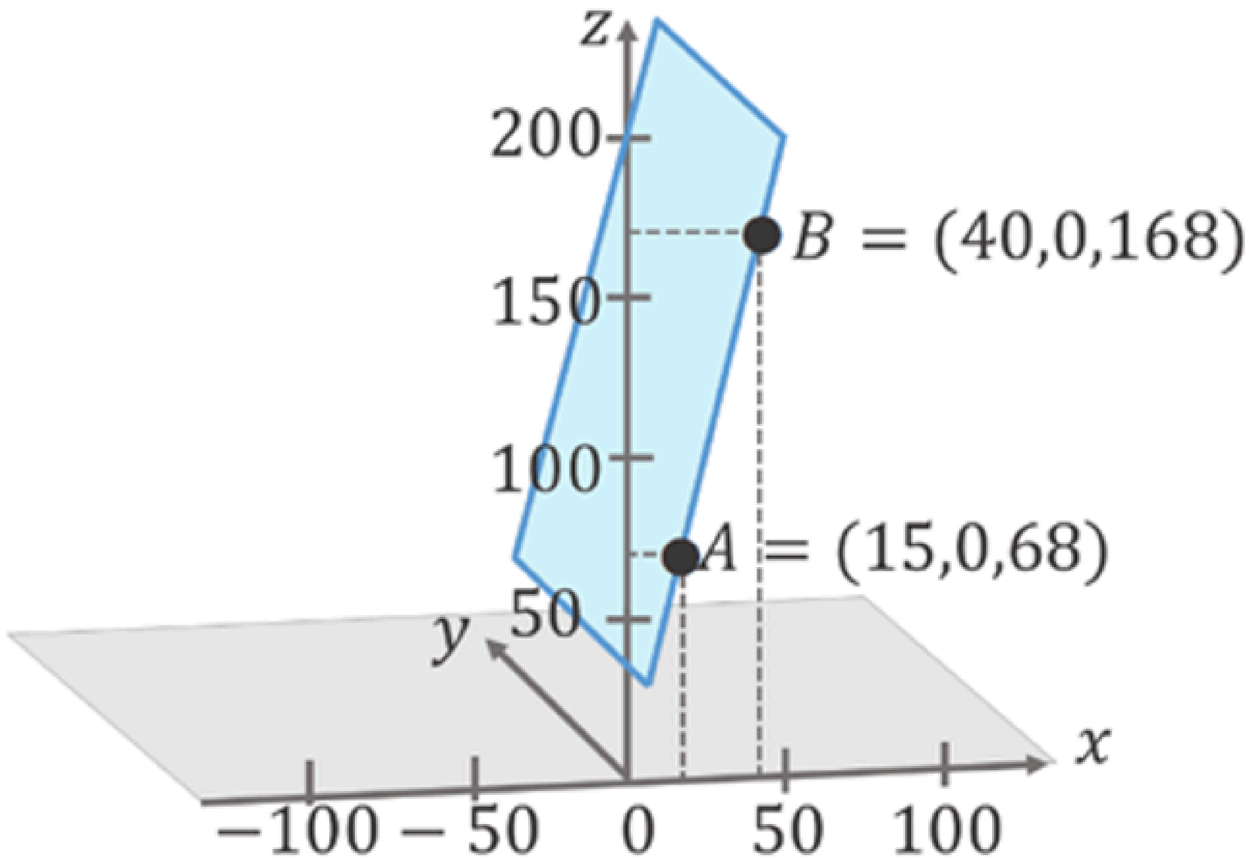


Figura 1 | Placa solar. Fonte: adaptada de Dias (c2024).

Para determinarmos a equação da reta que passa por esses pontos, primeiro precisamos determinar o vetor

$$\overrightarrow{AB}$$

:

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (40{,}0,168) - (15{,}0,68) = (25{,}0,100)$$

Escolhendo o ponto A e tendo o vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

, temos as equações paramétricas:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$r:\begin{cases} x = 15 + 25t \\ y = 0 \\ z = 68 + 100t \end{cases}$$

Como
$y = 0$
, a reta está sobre o plano
xz
, e sua sombra, ou projeção, sobre o plano horizontal
xz
, é a reta
$s:(0{,}0{,}0) + k\,\hat{i}$
, com
$k \in \mathbb{R}$
. Portanto, o ângulo formado entre as retas é o mesmo ângulo formado entre os seus vetores diretores, a saber:

$$y = 0$$

$$xz$$

$$xz$$

$$s:(0{,}0{,}0) + k\,\hat{i}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\,.\,\hat{i}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\hat{i}\right|}$$

$$cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\,.\,\hat{i}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\hat{i}\right|}$$

$$cos\theta = \frac{|(25{,}0{,}100).(1{,}0{,}0)|}{\sqrt{25^2+0^2+100^2}\,.\,\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$cos\theta = \frac{|(25{,}0{,}100).(1{,}0{,}0)|}{\sqrt{25^2+0^2+100^2}\,.\,\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$cos\theta = \frac{|25.1+0.0+100.0|}{\sqrt{225+10000}}$$

$$cos\theta = \frac{|25.1+0.0+100.0|}{\sqrt{225+10000}}$$

$$cos\theta = \frac{25}{103{,}1}$$

$$cos\theta = \frac{25}{103{,}1}$$

$$cos\theta \approx 0{,}242$$

$$cos\theta \approx 0{,}242$$

$$\theta = \arccos(0{,}242)$$

$$\theta = \arccos(0{,}242)$$

$$\theta \approx 76^\circ$$

$$\theta \approx 76^\circ$$

Assim, o ângulo de inclinação da placa é de, aproximadamente, 76°.

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Acesse o capítulo 3 do livro *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*, de Tuanny Maciel.

Acesse, também, a obra *Geometria analítica e vetorial*, de Daniel Miranda, Rafael Grisi e Sinuê Lodovici.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

DIAS, J. Placa solar. **GeoGebra,** c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/V23gnbGY. Acesso em: 30 out. 2024.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

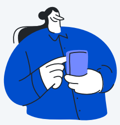
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 2

Equação Geral do Plano

Equação Geral do Plano



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer as equações do plano, e aprenderá a calcular posições relativas entre planos e a determinar o ângulo entre dois planos.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a equação do plano tem diversas aplicações em várias áreas, especialmente em geometria analítica, física, engenharia e computação gráfica. A capacidade de descrever geometricamente superfícies planas é fundamental em muitos contextos científicos e tecnológicos.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

A equação do plano tem diversas aplicações em várias áreas, especialmente em geometria analítica, física, engenharia e computação gráfica. A equação do plano é frequentemente utilizada para determinar a interseção entre diferentes objetos geométricos, como linhas, segmentos de reta e outros planos; na óptica, é usada para descrever a reflexão e refração da luz em superfícies planas; também em algoritmos geométricos para resolver problemas relacionados a geometria computacional, como detecção de colisão entre objetos; em engenharia civil e mecânica, é usada para modelar superfícies e planos de interesse em projetos de estruturas e máquinas. Essas são apenas algumas das muitas aplicações da equação do plano em diversas disciplinas.

Nesse contexto, suponha que sua empresa vai construir uma casa e precisa determinar a interseção de duas paredes, como na Figura 1.

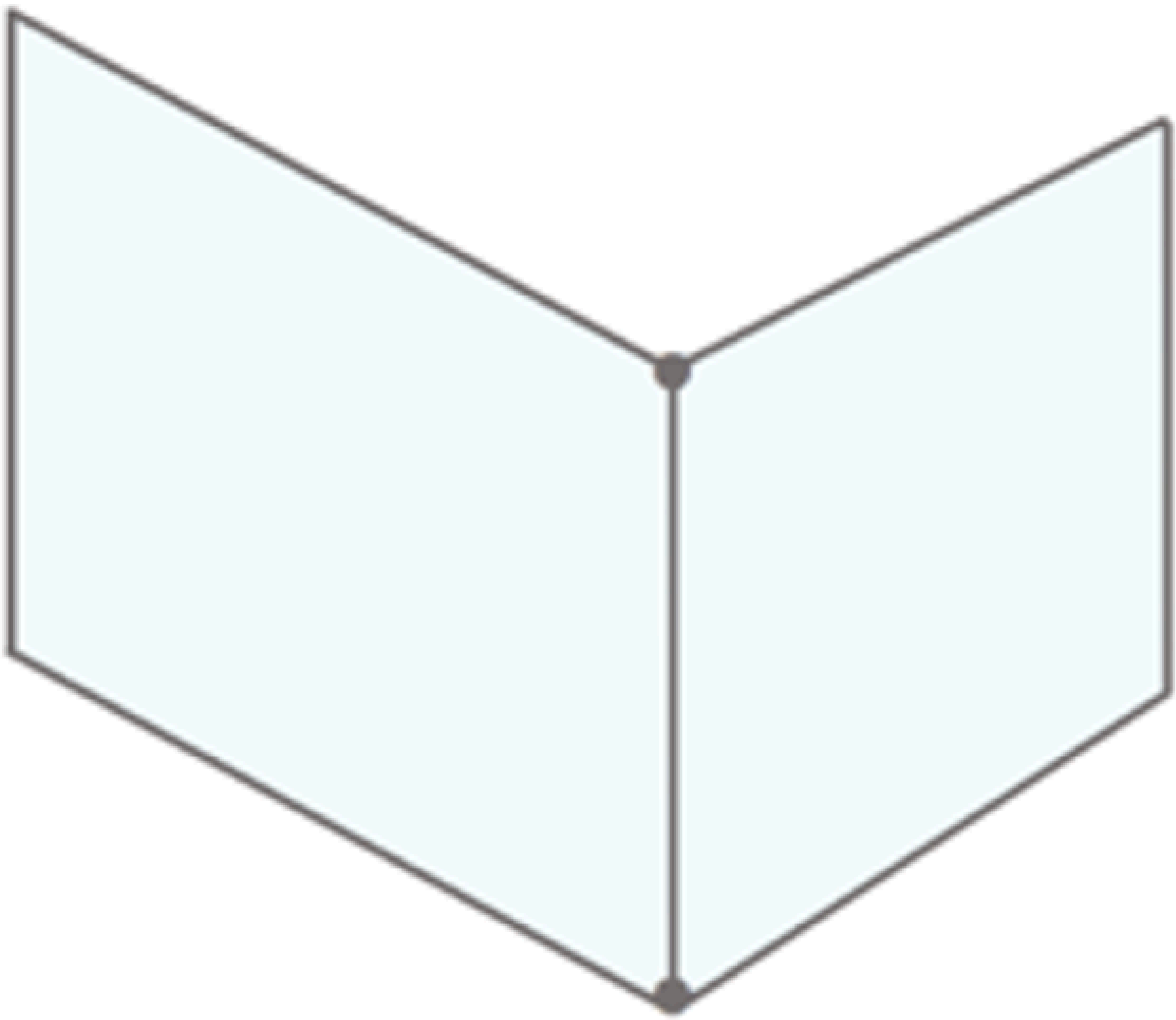


Figura 1 | Planos secantes têm, como interseção, uma reta. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 185).

Ao olhar a planta, você percebe que a primeira parede é um plano que passa pelos pontos $A(1{,}0,2)$

,
$B(4, -1,3)$
e
$C(3,5, 1)$
. Já em relação à segunda parede, você tem a equação do plano que a contém:
$3x - 6y + 8z + 1 = 0$
. Para determinar a interseção dessas duas paredes, você precisará de alguns conceitos.

$$A(1,0, 2)$$

$$B(4, -1,3)$$

$$C(3,5, 1)$$

$$3x - 6y + 8z + 1 = 0$$

Vamos lá?

Bons estudos.

Vamos Começar!

Equação geral do plano

Sejam
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
um ponto pertencente ao plano
α
, e
$\vec{n} = (a, b, c)$
um vetor normal ao plano. Tome um ponto genérico do plano
$P(x, y, z)$
, como na Figura 2.

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\alpha$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$P(x, y, z)$$

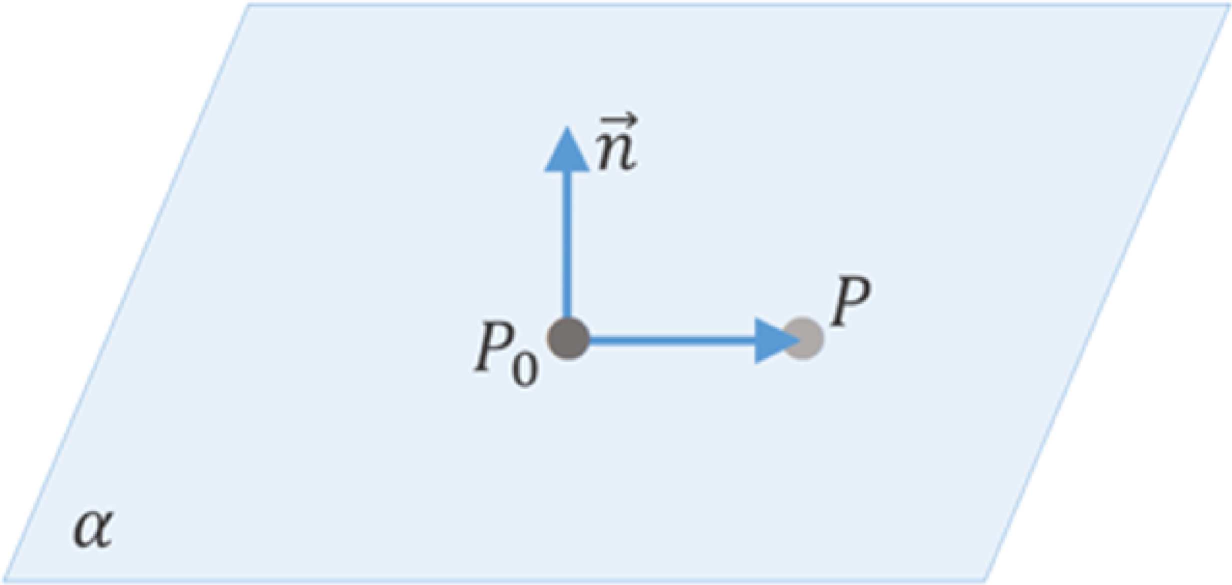


Figura 2 | Plano α e vetor $\vec{n} = (a, b, c)$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 186).

α

$\vec{n} = (a, b, c)$

Como $\vec{n}$ é normal ao plano e $P \in \alpha$, temos que $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{P_0P} = 0$. Portanto, temos $(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Dessa forma, obtemos a **equação geral do plano**:

$\vec{n}$

$P \in \alpha$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

$$\vec{n} \, . \, \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(a, b, c).\,(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + x(z - z_0) = 0$$

ou

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que:

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Essa mesma equação também pode ser obtida se tivermos dois pontos, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, e um vetor, $\vec{u} = (u_1, u_1, u_1)$:

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_1, u_1)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou, até mesmo, com três pontos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

como na Figura 3.

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

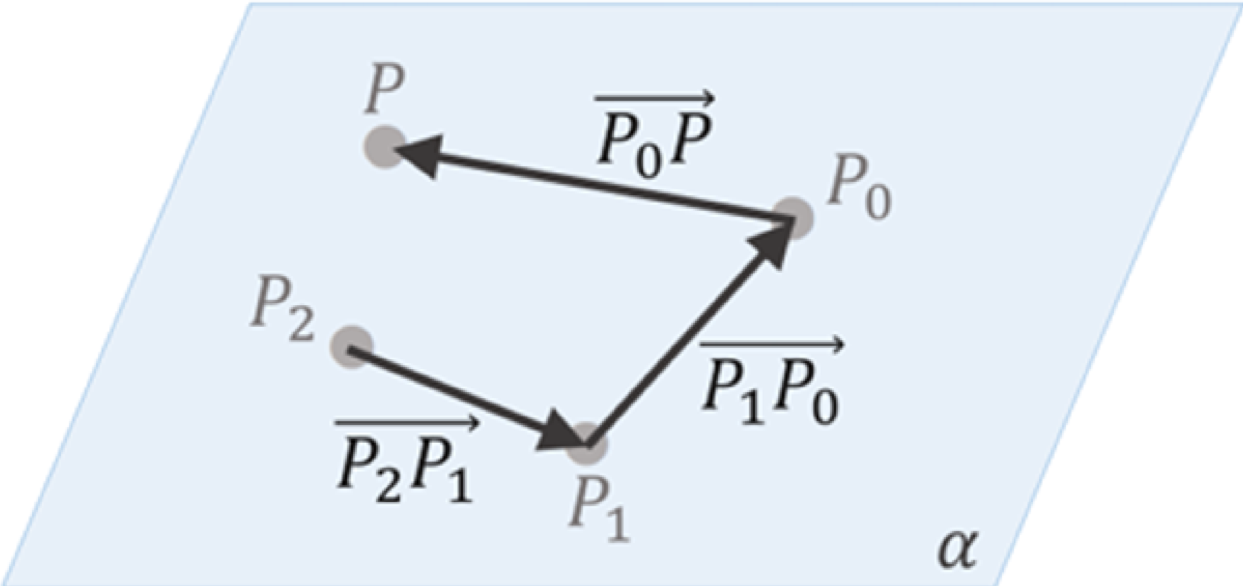


Figura 3 | Plano determinado por P_0, P_1 e P_2. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 187).

$$P_0$$

$$P_1$$

$$P_2$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Encontre a equação geral do plano que passa pelos pontos
$A(6{,}1, 5)$
,
$B(3{,}0, -4)$
e
$C(1{,}1, -3)$
.

$$A(6{,}1, 5)$$

$$B(3{,}0, -4)$$

$$C(1{,}1, -3)$$

Resolução: Para encontrar a equação do plano, basta substituirmos os valores dados:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} x - 6 & y - 1 & z - 5 \\ 6 - 3 & 1 - 0 & 5 + 4 \\ 3 - 1 & 0 - 1 & -4 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 6 & y - 1 & z - 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-x + 6 + 18y - 18 - 3z + 15) - (-9x + 54 - 3y + 3 + 2z - 10) = 0$$

$$8x + 21y - 5z - 44 = 0$$

Logo, a equação do plano é
$8x + 21y - 5z - 44 = 0$
. Observe que
$a = 8$
,
$b = 21$
,
$c = -5$
e
$d = -44$
.

$$8x + 21y - 5z - 44 = 0$$

$$a = 8$$

$$b = 21$$

$$c = -5$$

$$d = -44$$

Observação: Um ponto
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
pertencerá ao plano se satisfizer a equação
$ax + by + cz + d = 0$
quando substituirmos os valores de suas coordenadas, ou seja,
$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$
.

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Interseção do plano com eixos coordenados

Para determinar a interseção do plano com os eixos coordenados, igualamos duas das coordenadas a zero:

- Interseção com o eixo x: $y = z = 0$.
- Interseção com o eixo y: $x = z = 0$.
- Interseção com o eixo z: $x = y = 0$.

Equação vetorial do plano

Seja um plano que contém o ponto
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
e é paralelo aos vetores
$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$
e
$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$
, com
$\overrightarrow{u}$
e
$\overrightarrow{v}$

não paralelos. O ponto $P(x, y, z)$ pertencerá ao plano α se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem coplanares, ou seja, se estiverem no mesmo plano, como na Figura 4.

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$P(x, y, z)$$

$$\alpha$$

$$\overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

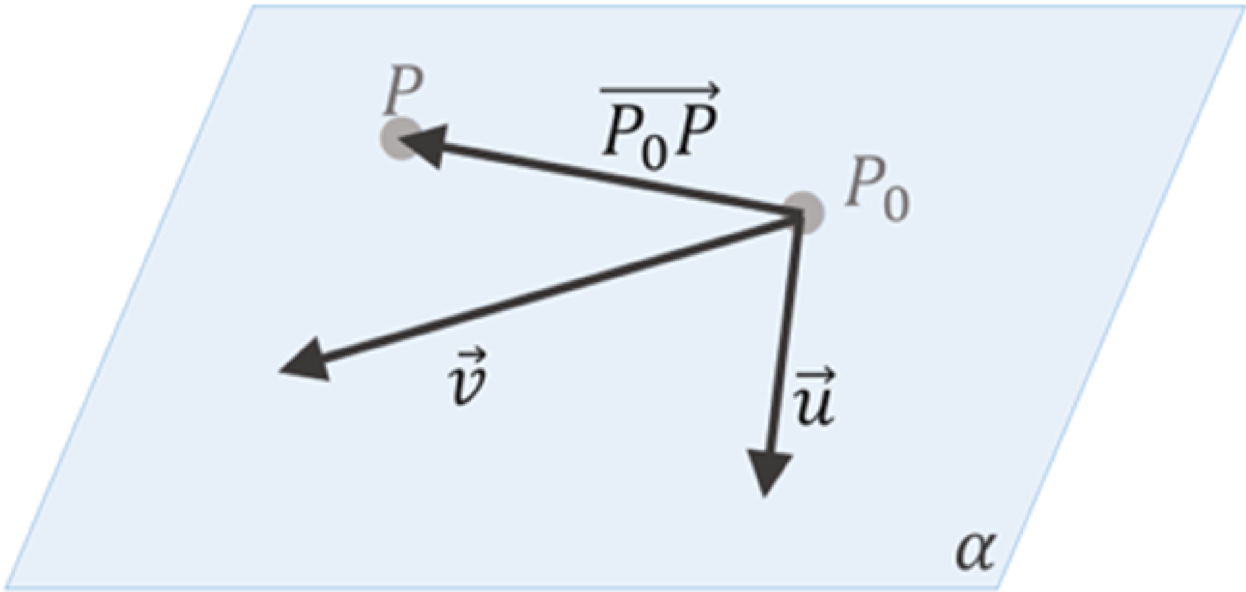


Figura 4 | Plano determinado por P_0, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 187).

P_0

$\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{v}$

Nesse caso, o determinante calculado com as coordenadas desses três vetores é nulo:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Como os vetores $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{u}$

e
$\vec{v}$
devem ser coplanares, o plano
α
também pode ser representado pela **equação vetorial do plano**, com
$t, h \in \mathbb{R}$
:

$$\overrightarrow{P_0P}$$

$$\vec{u}$$

$$\vec{v}$$

$$\alpha$$

$$t, h \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = P_0 + t\vec{v} + h\vec{u}$$

$$(x, y, z) = P_0 + t\vec{v} + h\vec{u}$$

Equação segmentária do plano

Para determinar a equação segmentária, suponha um plano
α
, como na Figura 5. O plano
α
intercepta os eixos nos pontos
$P(p, 0,0)$
,
$Q(0, q, 0)$
e
$R(0,0, r)$
.

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$P(p, 0,0)$$

$$Q(0, q, 0)$$

$R(0{,}0, r)$

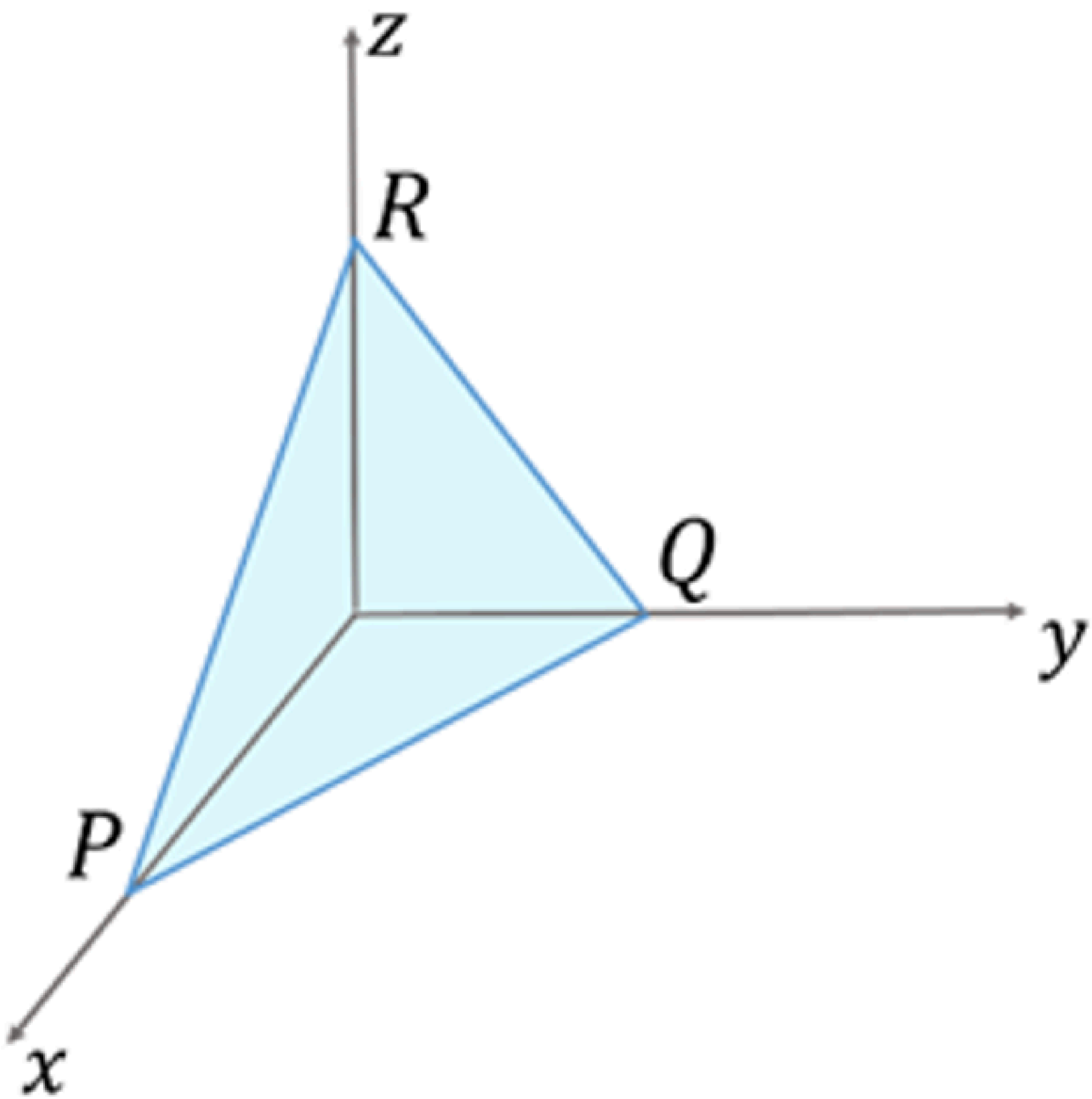


Figura 5 | Equação segmentária do plano. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 189).

Substituindo as coordenadas dos pontos na equação do plano, temos:

- Para o ponto $P(p, 0{,}0)$: $a.p + b.0 + c.0 + d = 0$, logo, $p = -d/a$.
- Para o ponto $Q(0, q, 0)$: $a.0 + b.q + c.0 + d = 0$, logo, $q = -d/b$.
- Para o ponto $R(0{,}0, r)$: $a.0 + b.0 + c.r + d = 0$, logo, $r = -d/c$.

Agora, na equação geral
$ax + by + cz + d = 0$
, dividindo tudo por
$(-d)$
, temos:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(-d)$$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} + \frac{d}{-d} = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} - 1 = 0$$

Substituindo por
p
,
q
e
r
, temos a **equação segmentária do plano**:

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Exemplo: Obtenha a equação segmentária do plano de equação geral
$5x + 10y - 8z - 40 = 0$
.

$$5x + 10y - 8z - 40 = 0$$

Resolução: Para encontrar a equação segmentária do plano, primeiro isolamos
d
e, depois, dividimos toda a equação por
$-d$
.

$$d$$

$$-d$$

$$\frac{5x}{40} + \frac{10y}{40} - \frac{8z}{40} - \frac{40}{40} = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{z}{8} + \frac{y}{4} - \frac{z}{5} = 1$$

$$\frac{5x}{40} + \frac{10y}{40} - \frac{8z}{40} - \frac{40}{40} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{z}{8} + \frac{y}{4} - \frac{z}{5} = 1$$

Equação do plano que passa por um ponto e é ortogonal a um vetor

Seja um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, pertencente ao plano α, e um vetor $\vec{u} = (a, b, c)$, ortogonal ao plano α como na Figura 6.

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\alpha$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\alpha$$

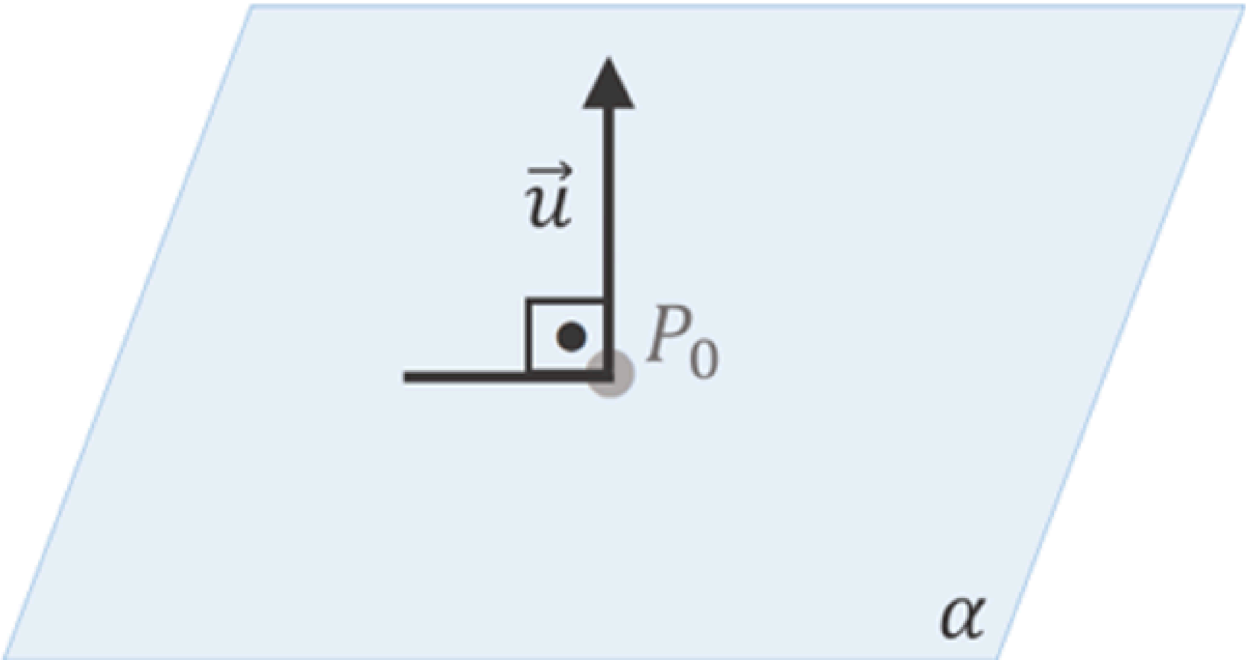


Figura 6 | Plano que passa por P_0

e é ortogonal a
$\overrightarrow{u}$
. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 190).

$$P_0$$

$$\overrightarrow{u}$$

Tomando um ponto
$P(x, y, z)$
qualquer de
α
, temos:

$$P(x, y, z)$$

$$\alpha$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (x - x_0)\,\hat{i} + (y - y_0)\,\hat{j} + (z - z_0)\,\widehat{k}$$

Os vetores
$\overrightarrow{P_0P}$
e
$\overrightarrow{u}$
são ortogonais, portanto, seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{P_0P}.\overrightarrow{u} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \rightarrow \quad ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 =$$

Fazendo
$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$
, temos a equação do plano procurada:

$$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Note que a, b e c são as coordenadas de um vetor ortogonal ao plano, ou ainda, normal ao plano α.

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$\alpha$$

Exemplo: Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $A(1,4,5)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{u} = (-3,1,4)$.

$$A(1,4,5)$$

$$\vec{u} = (-3,1,4)$$

Resolução: Primeiro vamos substituir as coordenadas do vetor na equação do plano:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \to \quad -3x + 1y + 4z + d = 0$$

Agora, como $A \in \alpha$, temos:
$$-3\ .\ 1 + 4 + 4\ .\ 5 + d = 0 \quad \to \quad d = -21$$

$$A \in \alpha$$

$$-3\ .\ 1 + 4 + 4\ .\ 5 + d = 0 \quad \to \quad d = -21$$

Logo, a equação do plano procurada é:

$$-3x + 1y + 4z - 21 = 0$$

Siga em Frente...

Posições relativas entre planos

Sejam os planos
$$\alpha : \ ax + by + cz + d = 0$$
e
$$\lambda : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
. Esses planos podem ser paralelos, ortogonais, secantes ou coincidentes.

$$\alpha : \ ax + by + cz + d = 0$$

$$\lambda : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Planos paralelos

Sejam os planos

$$\alpha : \ ax + by + cz + d = 0$$

$$\lambda : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\alpha$$

$$\lambda$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

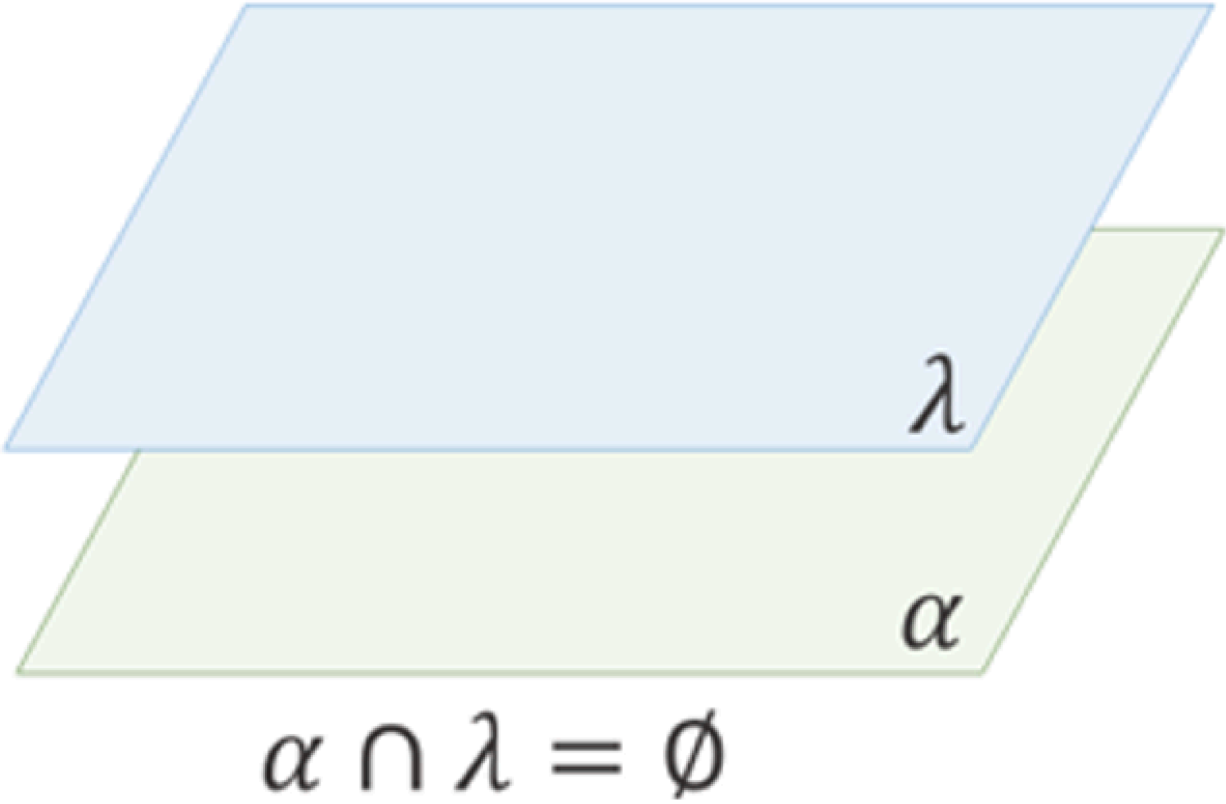


Figura 7 | Planos paralelos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 191).

Em particular, os planos α e λ serão coincidentes se:

α

λ

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$$

Planos ortogonais

Para os planos $\alpha: \ ax + by + cz + d = 0$ e $\lambda: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

, dizemos que
α
e
λ
são ortogonais se, e somente se:

$$\alpha : \; ax + by + cz + d = 0$$

$$\lambda : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\alpha$$

$$\lambda$$

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

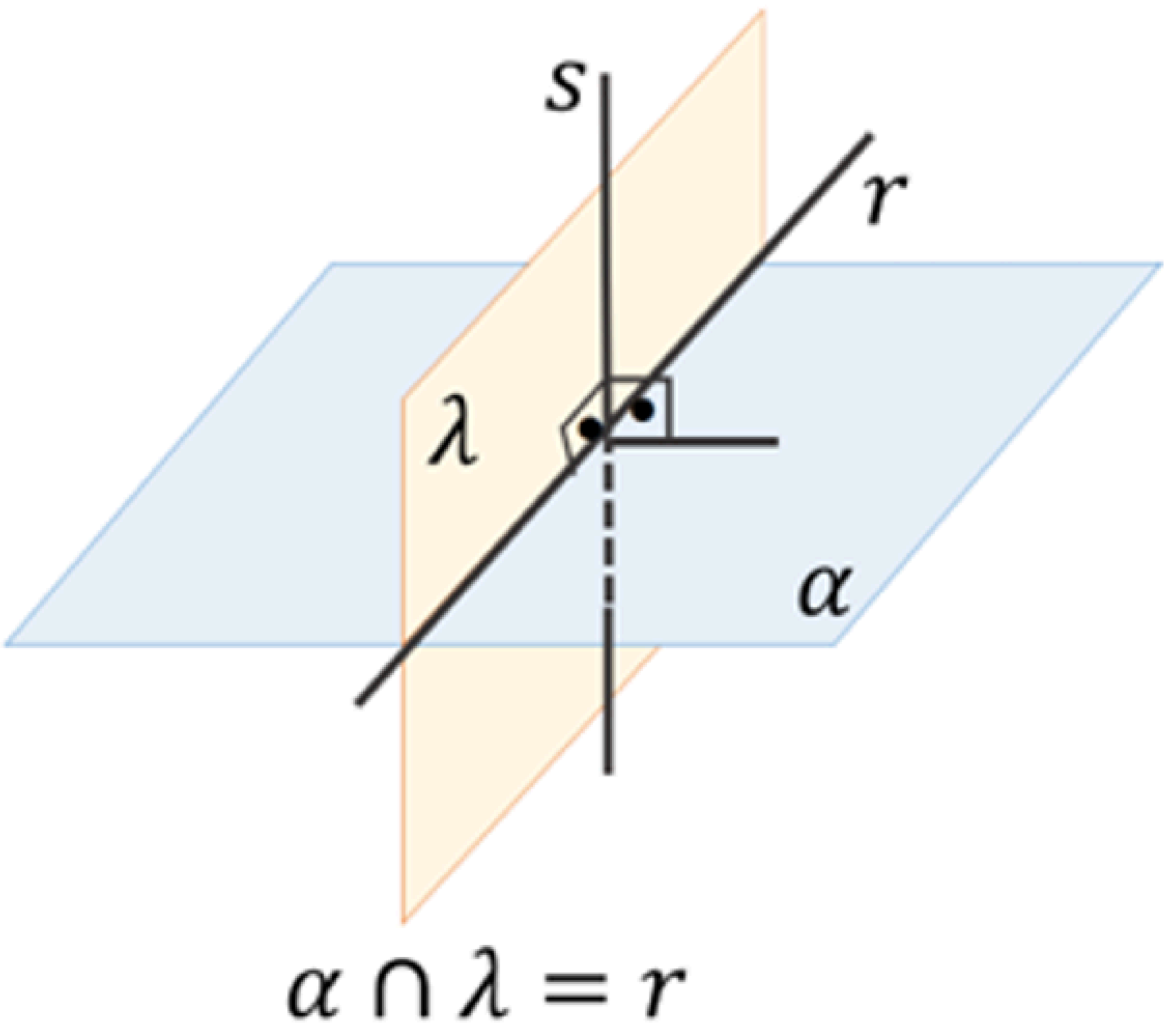


Figura 8 | Planos ortogonais. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 192).

Exemplo: Determine
m
e
n
para que os planos
$3x+8y+2z+14=0$
e
$(m-2)x+6y+(n-1)z+12=0$
sejam paralelos.

$$m$$

$$n$$

$$3x+8y+2z+14=0$$

$$(m-2)x+6y+(n-1)z+12=0$$

Resolução: Para que os planos sejam paralelos, devemos ter:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

Substituindo os valores dados:

$$\frac{3}{m-2}=\frac{8}{6}=\frac{2}{n-1}$$

Da primeira igualdade:

$$18=8m-16 \quad \rightarrow \quad 8m=34 \quad \rightarrow \quad m=\frac{34}{8} \quad \rightarrow \quad m=\frac{17}{4}$$

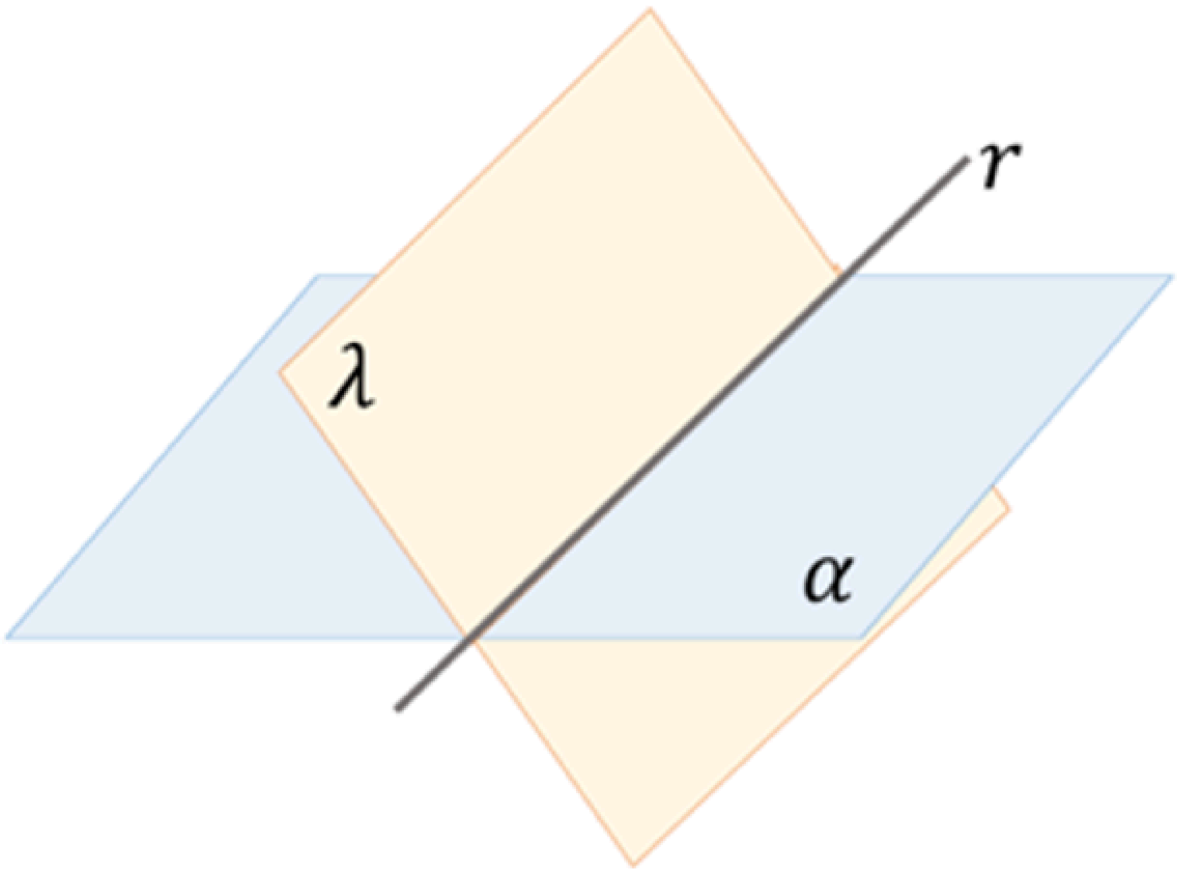
Da segunda igualdade:

$$8n-8=12 \quad \rightarrow \quad 8n=20 \quad \rightarrow \quad n=\frac{20}{8} \quad \rightarrow \quad n=\frac{5}{2}$$

$$8n-8=12 \quad \rightarrow \quad 8n=20 \quad \rightarrow \quad n=\frac{20}{8} \quad \rightarrow \quad n=\frac{5}{2}$$

Planos secantes

Os planos secantes têm, como interseção, uma reta. Um par de planos será secante quando eles não forem paralelos, e isso inclui o caso em que os planos são ortogonais.



$$\alpha \cap \lambda = r$$

Figura 9 | Planos secantes. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 192).

Dados dois planos secantes, tendo posse de suas equações, interessa-nos saber a equação da reta que corresponde à interseção deles. Para determiná-la, podemos proceder da seguinte forma.

Sejam os planos

$$\alpha: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

e

$$\lambda: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

. A interseção dos planos α e λ é uma reta que é obtida resolvendo o sistema a seguir nas variáveis x, y e

$$z$$
:

$$\alpha : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\lambda : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\alpha$$

$$\lambda$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Planos coincidentes

Dizemos que α e λ são coincidentes se $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 = d_2$.

$$\alpha$$

$$\lambda$$

$$a_1 = a_2$$

$$b_1 = b_2$$

$$c_1 = c_2$$

$$d_1 = d_2$$

Exemplo: Encontre a equação da interseção dos planos
$\alpha_1 : \; 5x - 2y + z + 7 = 0$
e
$\alpha_2 : \; 3x - 3y + z + 4 = 0$
.

$$\alpha_1 : \; 5x - 2y + z + 7 = 0$$

$$\alpha_2 : \; 3x - 3y + z + 4 = 0$$

Resolução: Para encontrar a equação da reta que é a interseção desses dois planos, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Temos duas equações e três variáveis, logo, temos um sistema indeterminado. Para resolver esse sistema, vamos atribuir um valor qualquer, genérico, para
x
. Fazendo
$x = \lambda$
, vamos resolver o sistema:

$$x$$

$$x = \lambda$$

1. Multiplicando a primeira equação por -1 e somando com a segunda equação, temos:
   $-2\lambda - y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -3 - 2\lambda$
2. Tomando o mesmo sistema e multiplicando, agora, a primeira equação por -3, a segunda equação por 2 e somando-as, obtemos:
   $-9\lambda - z - 13 = 0 \quad \rightarrow \quad z = -9\lambda - 13$
   Logo, a equação da reta que é a interseção dos planos α_1 e α_2 é:
   $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = -9\lambda - 13 \end{cases}$
   ou seja, os pontos que pertencem a essa reta são do tipo $(\lambda, \; -2\lambda - 3, -9\lambda - 13)$.

Ângulo entre dois planos

Sejam os planos
$\alpha_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

e
$$\alpha_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
e os vetores
$$\overrightarrow{u} = a_1\,\hat{i} + b_1\,\hat{j} + c_1\,\widehat{k}$$
e
$$\overrightarrow{v} = a_2\,\hat{i} + b_2\,\hat{j} + c_2\,\widehat{k}$$
, vetores normais aos planos
α_1
e
α_2
, respectivamente.

$$\alpha_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\alpha_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\overrightarrow{u} = a_1\,\hat{i} + b_1\,\hat{j} + c_1\,\widehat{k}$$

$$\overrightarrow{v} = a_2\,\hat{i} + b_2\,\hat{j} + c_2\,\widehat{k}$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_2$$

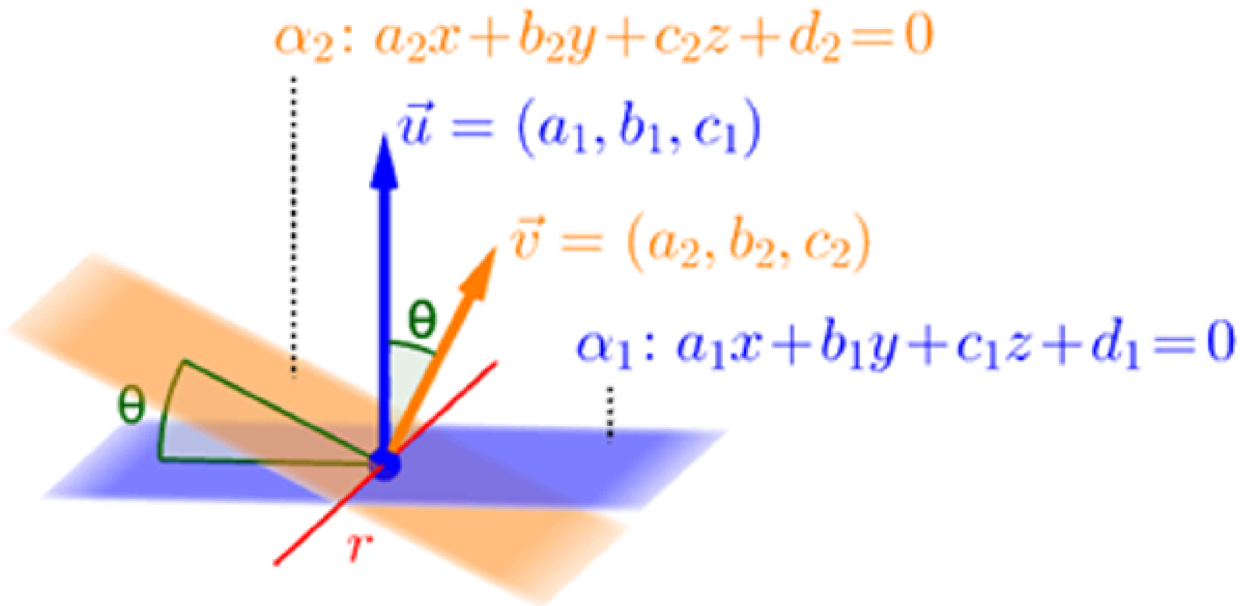


Figura 10 | Ângulo entre dois planos. Fonte: adaptada de Dias (c2024).

O ângulo
θ
formado pelos planos
α_1
e
α_2
, como na Figura 10, é dado por:

$$\theta$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_2$$

$$cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|} \quad \rightarrow \quad cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|} \quad \rightarrow \quad cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Observe que essa fórmula advém do produto escalar, com a especificidade de considerarmos sempre o menor ângulo formado entre os planos,
$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
, por isso, usa-se
$\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|$
em vez de
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
no numerador da razão que fornece o cosseno do ângulo.

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right|$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto inicialmente, lembre-se de que você precisa calcular a equação da reta que representa a interseção de dois planos, mas, para isso, primeiro você precisa encontrar a equação de um dos planos, visto que a outra é conhecida.

Considere
α_1
o plano que passa por
$A(1{,}0,2)$
,
$B(4,-1{,}3)$
e
$C(3{,}5,1)$
, e o plano
$\alpha_2 : 3x - 6y + 8z + 1 = 0$
. Para determinarmos a equação de
α_1
, podemos utilizar a expressão:

$$\alpha_1$$

$$A(1{,}0,2)$$

$$B(4,-1{,}3)$$

$$C(3{,}5,1)$$

$$\alpha_2 : 3x - 6y + 8z + 1 = 0$$

$$\alpha_1$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados e calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ 1 - 4 & 0 + 1 & 2 - 3 \\ 4 - 3 & -1 - 5 & 3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-4 & 0+1 & 2-3 \\ 4-3 & -1-5 & 3-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2x-2-y+18z-36)-(z-2-6y+6x-6)=0$$

$$(2x-2-y+18z-36)-(z-2-6y+6x-6)=0$$

$$-4x+5y+17z-30=0$$

$$-4x+5y+17z-30=0$$

Logo, a equação do plano
α_1
é
$-4x+5y+17z-30=0$
.

$$\alpha_1$$

$$-4x+5y+17z-30=0$$

Para encontrar a equação da reta que é a interseção desses dois planos, devemos resolver o problema:

$$\begin{cases} 3x-6y+8z+1=0 \\ -4x+5y+17z-30=0 \end{cases}$$

Temos duas equações e três variáveis, logo, temos um sistema indeterminado. Para resolver esse sistema, vamos atribuir um valor qualquer para
x
. Fazendo
$x=\lambda$
, temos:

$$x$$

$$x=\lambda$$

1. Multiplicando a primeira equação por 17, a segunda equação por -8 e somando, obtemos: $83\lambda-142y+257=0 \quad \rightarrow \quad y=\frac{83\lambda+257}{142}$
2. Tomando o mesmo sistema e multiplicando, agora, a primeira equação por 5, a segunda equação por 6 e somando-as, obtemos: $-9\lambda+142z-175=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{9\lambda+175}{142}$

Logo, a equação da reta que é a interseção dos planos
α_1
e
α_2
é:

α_1

α_2

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{83\lambda + 257}{142} \\ z = \frac{9\lambda + 175}{142} \end{cases}$$

Ou seja, os pontos que pertencem a essa reta são do tipo:

$$\left(\lambda,\ \frac{83\lambda + 257}{142},\ \frac{9\lambda + 175}{142}\right)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Acesse o capítulo 4 do livro *Vetores e geometria analítica: do seu jeito*, de Tuanny Maciel.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

DIAS, J. **Ângulo entre planos**. GeoGebra, c2024. Disponível em: https://goo.gl/bQNUPa. Acesso em: 30 jan. 2024.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

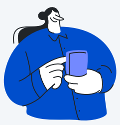
PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

Aula 3

Distância Entre dois Pontos

Distância entre dois pontos



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai saber como determinar a distância entre dois planos, conhecer o baricentro de um triângulo e a distância do ponto a uma reta.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional. A fórmula da distância entre dois pontos é amplamente utilizada em várias áreas da matemática e das ciências aplicadas. Na geometria analítica, essa fórmula é frequentemente usada para calcular comprimentos, distâncias e relações espaciais entre objetos geométricos. Falando do baricentro de um triângulo, a interpretação geométrica do baricentro é que ele é o "centro de massa" do triângulo, se considerarmos que a densidade é uniforme. Em outras palavras, é o ponto em que o triângulo poderia ser equilibrado se fosse feito de material uniforme e colocado sobre uma agulha.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Nesta aula, você vai aprender a calcular a distância entre dois pontos e entre ponto e reta. Começaremos nossos estudos com o primeiro tema: distância entre dois pontos.

A fórmula da distância entre dois pontos é amplamente utilizada em várias áreas da matemática e das ciências aplicadas. Em geometria analítica, é frequentemente usada para calcular comprimentos, distâncias e relações espaciais entre objetos geométricos. Já na física, é usada para calcular distâncias entre partículas, objetos ou pontos em um espaço tridimensional. Em geografia, é fundamental para calcular distâncias reais em mapas e sistemas de navegação. Essa aplicação é importante em logística, planejamento de rotas e geoprocessamento. Essas são apenas algumas das muitas aplicações da fórmula da distância entre dois pontos, demonstrando sua versatilidade em diversas disciplinas.

Suponha que sua empresa esteja terminando de montar uma casa. Para fazer uma instalação elétrica, você precisa determinar o tamanho do fio a ser usado e calcular o orçamento para o seu cliente. O fio a ser instalado sairá de um ponto de sua parede até uma viga de madeira. Na ocasião de fazer essa verificação, você estava sem sua trena, mas por meio de cálculos, você conseguiu determinar que a viga passava pelos pontos e , e que o ponto de onde partirá o fio é . O comprimento do fio é medido em metros e cada metro custa . Sabendo que, na instalação a ser feita, você gastará a mais de fio do que o comprimento real, qual será o orçamento a passar ao seu cliente?

Para calcular a distância do fio e fazer o orçamento, você vai precisar saber alguns novos conceitos.

Vamos lá?

Bons estudos!

Vamos Começar!

Distância entre dois pontos

Sejam os pontos
$P_1(x_1, y_1)$
e
$P_2(x_2, y_2)$
. Para calcular a distância entre os pontos
P_1
e
P_2
, aplicaremos o teorema de Pitágoras no triângulo da Figura 1.

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

P_1

P_2

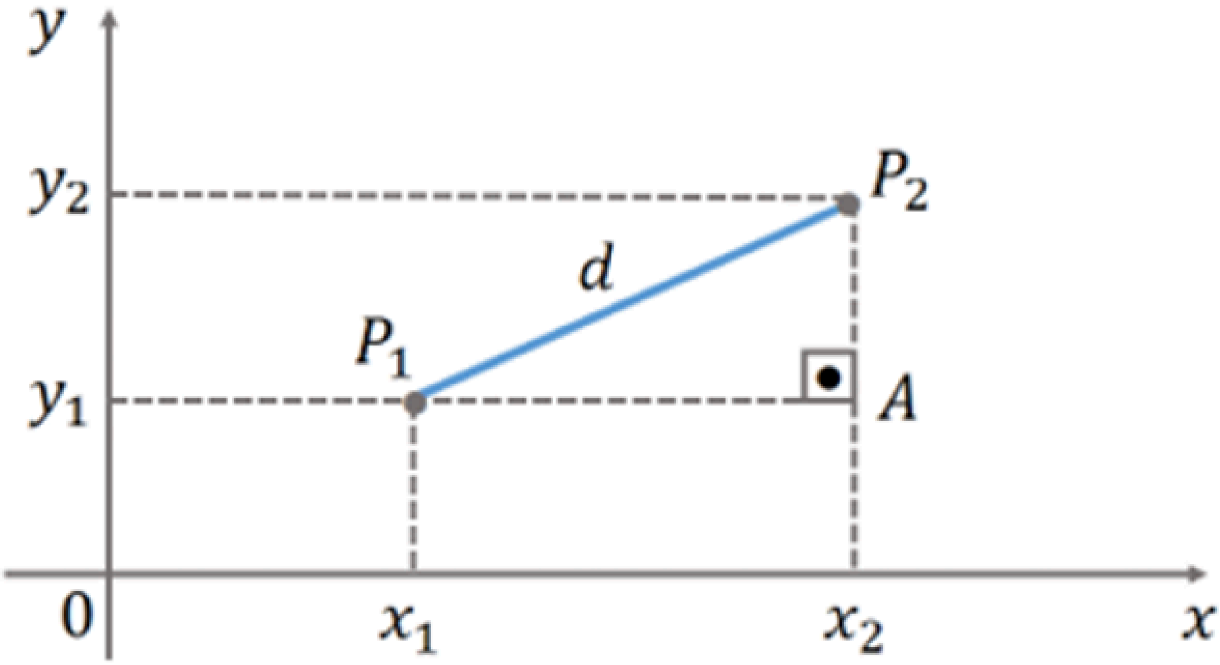


Figura 1 | Distância entre dois pontos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 200).

Observe que o triângulo
P_1AP_2
é retângulo em
A
e que seus catetos são
$\overline{P_1A} = x_2 - x_1$
e
$\overline{P_2A} = y_2 - y_1$
. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$P_1AP_2$$

$$A$$

$$\overline{P_1A} = x_2 - x_1$$

$$\overline{P_2A} = y_2 - y_1$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Logo:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo: Encontre a distância, em metros, entre os pontos
$A(5, -7)$
e
$B(3{,}8)$
.

$$A(5, -7)$$

$$B(3{,}8)$$

Resolução: Utilizando a fórmula de e substituindo os valores dados, temos:

$$d = \sqrt{(3-5)^2 + (8+7)^2} \;\rightarrow\; d = \sqrt{4+225} \;\rightarrow\; d = \sqrt{229} \;\rightarrow\; d = 15{,}13\ m$$

Logo, a distância entre os pontos
A
e
B
é, aproximadamente,
$15{,}13\ m$
.

$$A$$

$$B$$

$$15{,}13\ m$$

Distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^3$

Sejam os pontos
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
e
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
. A distância entre esses dois pontos no espaço é dada pela fórmula:

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo: Encontre a distância, em centímetros, entre os pontos $A(2{,}4, 7)$ e $B(4{,}6, -1)$.

$$A(2{,}4, 7)$$

$$B(4{,}6, -1)$$

Resolução: Utilizando a fórmula de d e substituindo os valores dados, temos:

$$d$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \rightarrow d = \sqrt{(4-2)^2 + (6-4)^2 + (-1-7)^2}$$

$$d = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} \rightarrow d = \sqrt{72} \rightarrow d = 8{,}49\ cm$$

Logo, a distância entre os pontos A e B é de, aproximadamente, $8{,}49\ cm$.

$$A$$

$$B$$

$$8{,}49\ cm$$

Pontos que dividem o segmento numa razão dada

Observe a Figura 2. Nela, temos o segmento de comprimento $\overline{P_1P_2}$, com $P_1(x_1, y_1)$

e
$P_2(x_2, y_2)$
.

$\overline{P_1P_2}$

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

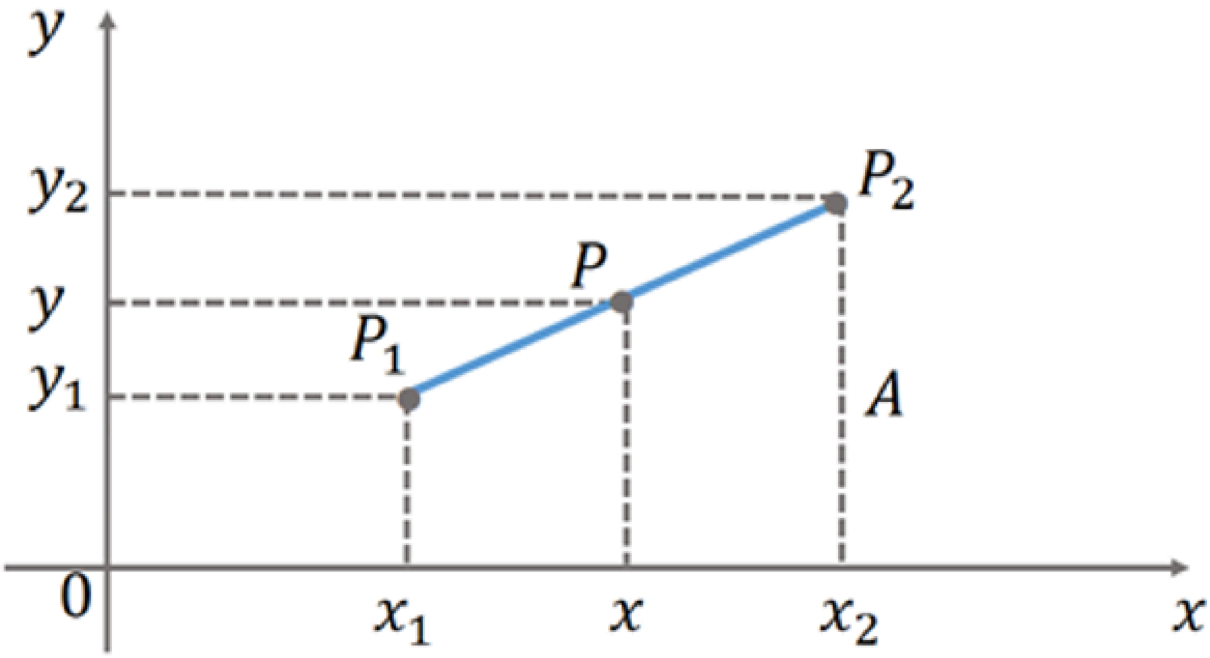


Figura 2 | Razão de segmentos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 201).

Seja um ponto que divide o segmento
$\overline{P_1P_2}$
na razão
k
, ou seja:

$\overline{P_1P_2}$

k

$$k = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}$$

$$k = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}$$

Então, temos:

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad k = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad k = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Isolando
x
e
y
nas equações mostradas, temos:

$$x$$

$$y$$

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \qquad y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$$

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \qquad y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$$

Observação: Se
$k = 1$
, então, o ponto
P
coincide com o ponto médio do segmento
$\overline{P_1P_2}$
, e as fórmulas para as **coordenadas do ponto médio** são:

$$k = 1$$

$$P$$

$$\overline{P_1P_2}$$

$$x = \frac{x_2 + x_1}{k+1} \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{k+1}$$

$$x = \frac{x_2 + x_1}{k+1} \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{k+1}$$

Siga em Frente...

Baricentro de um triângulo

Baricentro de um triângulo é o encontro de duas medianas. O baricentro, representado pela letra G, divide cada mediana em duas partes, como na Figura 3.

G

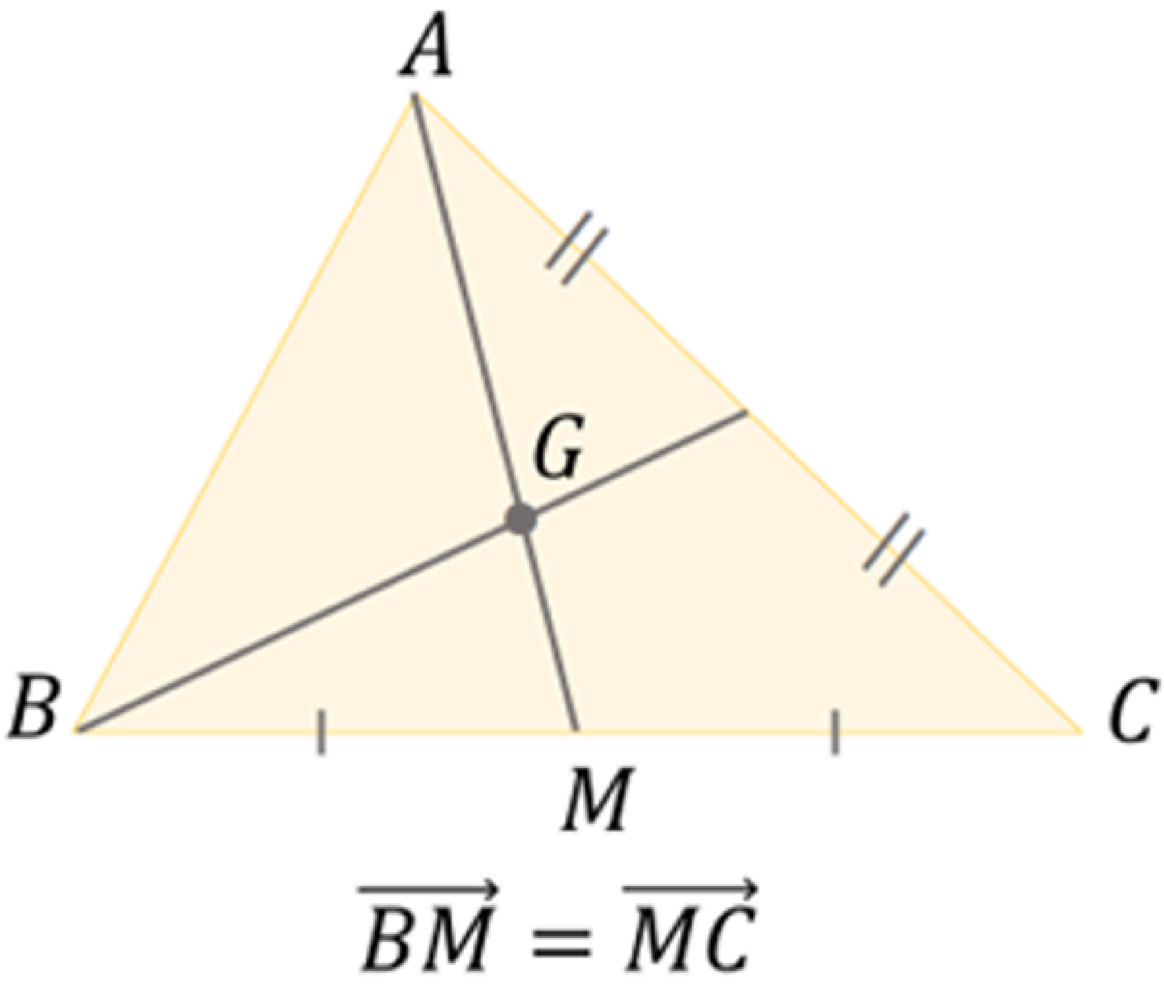


Figura 3 | Baricentro do triângulo. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 202).

O baricentro divide a mediana na proporção 2 para 1, ou seja, $\overline{AG}/\overline{MG} = 2$. Assim, temos:

$$\overline{AG}/\overline{MG} = 2$$

$$\frac{x_G + x_A}{x_M - x_G} = 2 \quad \rightarrow \quad x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3}$$

$$\frac{x_G+x_A}{x_M-x_G}=2 \quad \rightarrow \quad x_G=\frac{x_A+2x_M}{3}$$

Mas:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$$

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$$

Substituindo na expressão anterior, temos:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$

Analogamente, para a coordenada referente ao eixo
y
, temos:

$$y$$

$$y_G=\frac{y_A+2y_M}{3}$$

$$y_G=\frac{y_A+2y_M}{3}$$

Mas:

$$y_M=\frac{y_B+y_c}{2}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_c}{2}$$

Substituindo a segunda formula na primeira, temos:

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro do triângulo são dadas por:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \qquad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

O baricentro é o ponto
$G(x_G, y_G)$
.

$$G(x_G, y_G)$$

Observação: o baricentro também é conhecido como centro de massa. O centro de massa de um objeto, considerado como um ponto geométrico, é um ponto fictício onde toda a massa do objeto pode ser considerada concentrada para análise de movimento. A relação entre o centro de massa e o equilíbrio é frequentemente descrita pelo conceito de ponto de suspensão. Se um objeto é suspenso a partir de um ponto que passa pelo centro de massa, ele estará em equilíbrio estático.

Exemplo: Seja um triângulo cujos vértices estão nos pontos
$A(2{,}5)$
,
$B(7, -1)$
e
$C(4, -2)$
. Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo.

$$A(2{,}5)$$

$$B(7, -1)$$

$$C(4, -2)$$

Resolução: Para encontrar o baricentro de um triângulo, usamos as expressões para
x_G
e
y_G
dadas por:

$$x_G$$

$$y_G$$

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Substituindo os pontos dados, temos:

$$x_G = \frac{2+7+4}{3} \quad \rightarrow \quad x_G = \frac{13}{3} \quad \rightarrow \quad x_G = 4{,}33$$

$$y_G = \frac{5-1-2}{3} \ \rightarrow \ y_G = \frac{2}{3} \ \rightarrow \ y_G = 0{,}67$$

Logo, as coordenadas do baricentro são, aproximadamente,

$$G(4{,}33; 0{,}67)$$

Distância de ponto à reta

Seja um ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ e a reta r de equação $ax + by + c = 0$, como na Figura 4. Queremos encontrar a distância do ponto P à reta r.

$$P(x_0, y_0)$$

$$r$$

$$ax + by + c = 0$$

$$P$$

$$r$$

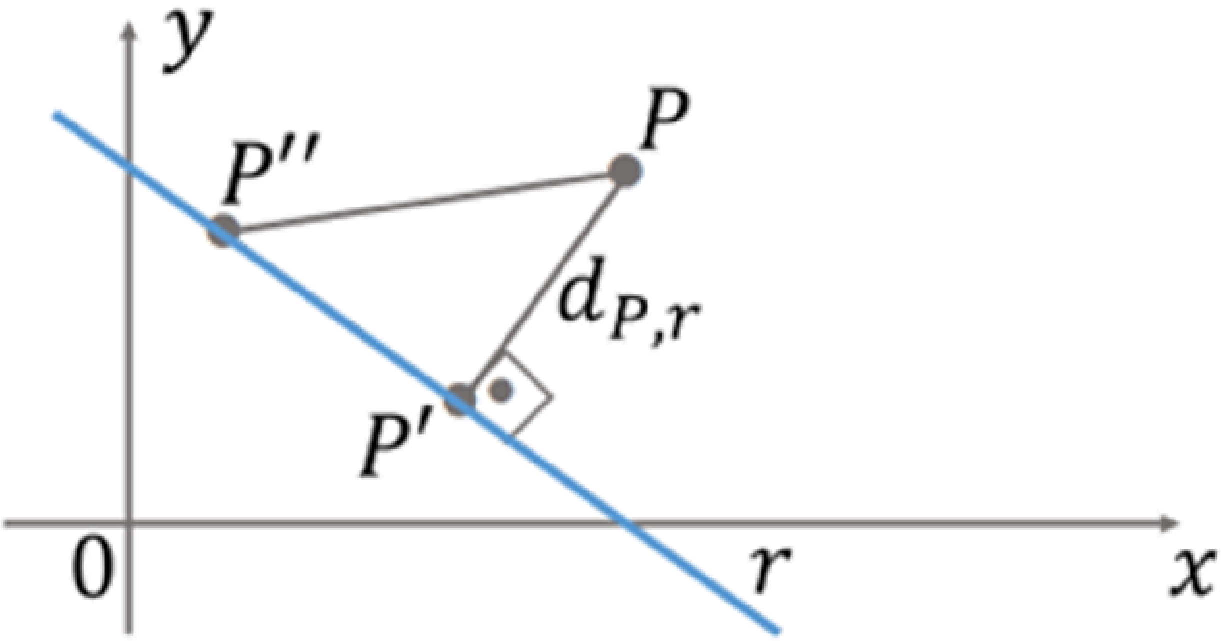


Figura 4 | Distância de ponto à reta. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 204).

Uma das maneiras de encontrar a expressão que determina essa distância procurada é por meio da área de um triângulo. Observe, na Figura 4, o triângulo

$P'PP''$

, em que

$P'(x_1, y_1)$

e

$P''(x_2, y_2)$

são pontos de

r

. Baseado no triângulo, temos que:

$$P'PP''$$

$$P'(x_1, y_1)$$

$$P''(x_2, y_2)$$

$$r$$

$$\acute{A}rea = \frac{d_{P,r} \,.\, d_{P'',P'}}{2} \quad \text{e} \quad \acute{A}rea = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

Com base nas igualdades:

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|(x_0 - x_1)y_2 + (x_2 - x_0)y_1 + (x_1 - x_2)y_0\right|$$

Como

$P'(x_1, y_1)$

e

$P''(x_2, y_2)$

pertencem à

r

,

$ax_1 + by_1 + c = 0$

e

$ax_2 + by_2 + c = 0$

e, ainda:

$$P'(x_1, y_1)$$

$$P''(x_2, y_2)$$

$$r$$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$by_1 = -ax_1 - c \quad \rightarrow \quad y_1 = \frac{-ax_1 - c}{b}$$

$$by_1 = -ax_1 - c \quad \rightarrow \quad y_1 = \frac{-ax_1 - c}{b}$$

$$by_2 = -ax_2 - c \quad \rightarrow \quad y_2 = \frac{-ax_2 - c}{b}$$

$$by_2 = -ax_2 - c \quad \rightarrow \quad y_2 = \frac{-ax_2 - c}{b}$$

Logo:

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|(x_0 - x_1)\left(\frac{-ax_2 - c}{b}\right) + (x_2 - x_0)\left(\frac{-ax_1 - c}{b}\right) + (x_1 - x_2)y_0\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|(x_0 - x_1)\left(\frac{-ax_2-c}{b}\right) + (x_2 - x_0)\left(\frac{-ax_1-c}{b}\right) + (x_1 - x_2)y_0\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left| - x_2y_0 + x_1y_0 - \frac{ax_0x_2}{b} - \frac{cx_2}{b} + \frac{ax_0x_1}{b} + \frac{cx_1}{b} \right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left| - x_2y_0 + x_1y_0 - \frac{ax_0x_2}{b} - \frac{cx_2}{b} + \frac{ax_0x_1}{b} + \frac{cx_1}{b} \right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|-\frac{(x_2-x_1)(c+by_o+ax_0)}{b}\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|-\frac{(x_2-x_1)(c+by_o+ax_0)}{b}\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|\frac{(x_2-x_1)(c+by_o+ax_0)}{b}\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \left|\frac{(x_2-x_1)(c+by_o+ax_0)}{b}\right|$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|}$$

$$d_{P,r}\ .\ d_{P'',P'} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|}$$

Temos, ainda, que

$$d_{P'',P'} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e

$$|b|^2 = b$$

.

$$d_{P'',P'} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|b|^2 = b$$

Da equação da reta, segue também que:

$$y_1 = \frac{-ax_1-c}{b} \quad \rightarrow \quad y_1 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{-c}{b}$$

$$y_1 = \frac{-ax_1-c}{b} \quad \rightarrow \quad y_1 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{-c}{b}$$

Mas:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad y_2 - y_1 = -\frac{a}{b}\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad y_2 - y_1 = -\frac{a}{b}\left(x_2 - x_1\right)$$

Logo:

$$y_2 - y_1 =$$

$$y_2 - y_1 =$$

$$d_{P,r} \cdot \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|}$$

$$d_{P,r} \cdot \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|}$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(-\frac{a}{b}\left(x_2-x_1\right)\right)^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(-\frac{a}{b}\left(x_2-x_1\right)\right)^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2 \cdot \left(1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|x_2-x_1|\sqrt{|b|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|b|\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2 \cdot \left(1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{|x_2-x_1||c+by_o+ax_0|}{|x_2-x_1|\sqrt{|b|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_2+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Assim, a distância do ponto
$P(x_0, y_0)$
à reta
$r: ax + by + c = 0$
é dada por:

$$P(x_0, y_0)$$

$$r: ax + by + c = 0$$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_2+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemplo: Encontre a distância, em
cm
, do ponto
$P(3{,}9)$
à reta
$r:\ 4x-3y+6=0$
.

$$cm$$

$$P(3{,}9)$$

$$r:\ 4x-3y+6=0$$

Resolução: Para encontrar a distância do ponto
P
à reta
r
, usamos a expressão:

$$P$$

$$r$$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_2+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_2+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$d_{P,r} = \frac{|4\ .\ 3+(-3)\ .\ 9+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \quad \rightarrow \quad d_{P,r} = \frac{|-9|}{\sqrt{25}} \quad \rightarrow \quad d_{P,r} = \frac{9}{5} \quad \rightarrow \quad d_{P,r} = 1{,}8$$

Logo, a distância do ponto
P
à reta
r
é de
$1{,}8\ cm$
.

$$P$$

$$r$$

$$1{,}8\ cm$$

A distância de um ponto
P
à reta
r
também pode ser obtida quando encontramos um vetor unitário
$\overrightarrow{n}$
com a mesma direção de
r
e um ponto
Q
pertencente à reta. A expressão que calcula essa distância é:

$$P$$

$$r$$

$$\overrightarrow{n}$$

$$r$$

$$Q$$

$$d_{P,r} = \left|(P - Q) \times \overrightarrow{n}\right|$$

Note que a fórmula pode ser usada tanto para o plano quanto para o espaço tridimensional. Além disso, se
$\overrightarrow{d_r}$
for o vetor diretor da reta
r
, não necessariamente unitário, a fórmula fica como segue:

$$\overrightarrow{d_r}$$

$$r$$

$$d_{P,r} = \left|(P - Q) \times \overrightarrow{n}\right| \ \rightarrow \ d_{P,r} = \left|(P - Q) \times \frac{\overrightarrow{d_r}}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}\right| \ \rightarrow \ d_{P,r} = \frac{\left|(P - Q) \times \overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

$$d_{P,r} = \left|(P - Q) \times \overrightarrow{n}\right| \ \rightarrow \ d_{P,r} = \left|(P - Q) \times \frac{\overrightarrow{d_r}}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}\right| \ \rightarrow \ d_{P,r} = \frac{\left|(P - Q) \times \overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

$$d_{P,r} = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

$$d_{P,r} = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

Exemplo: Determine a distância, em centímetros, do ponto $P(1, -2{,}5)$ à reta r dada a seguir.

$$P(1, -2{,}5)$$

$$r$$

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 8 - 3t \\ z = 6t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 8 - 3t \\ z = 6t \end{cases}$$

Resolução: Para encontrar a distância do ponto P à reta r, usamos a expressão a seguir, mas, primeiramente, observe que um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{d_r} = (1, -3{,}6)$.

$$P$$

$$r$$

$$r$$

$$\overrightarrow{d_r} = (1, -3{,}6)$$

$$d_{P,r} = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

Escolhemos, agora, um ponto qualquer da reta
r
, por exemplo, para
$t = 0$
temos
$Q(-7{,}8, 0)$
. Encontrando
$\overrightarrow{QP}$
:

$$r$$

$$t = 0$$

$$Q(-7{,}8, 0)$$

$$\overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{QP} = (1, -2{,}5) - (-7{,}8, 0) \;\; \rightarrow \;\; \overrightarrow{QP} = (8, -10{,}5)$$

Calculando
$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}$
:

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}$$

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -10 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = \left(-60\hat{i} + 5\hat{j} - 24\hat{k}\right) - \left(-15\hat{i} + 48\hat{j} - 10\hat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -10 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \;\; \rightarrow \;\; \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = \left(-60\hat{i} + 5\hat{j} - 24\hat{k}\right) - \left(-15\hat{i} + 48\hat{j} - 10\hat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = -45\hat{i} - 43\hat{k} - 14\hat{j} = (-45, -43, -14)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r} = -45\hat{i} - 43\hat{k} - 14\hat{j} = (-45, -43, -14)$$

Logo:

$$d_{P,r} = \frac{\sqrt{(-45)^2+(-43)^2+(-14)^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2+6^2}} \rightarrow d_{P,r} = \frac{6{,}38}{6{,}78} \rightarrow d_{P,r} = 9{,}41$$

$$d_{P,r} = \frac{\sqrt{(-45)^2+(-43)^2+(-14)^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2+6^2}} \rightarrow d_{P,r} = \frac{6{,}38}{6{,}78} \rightarrow d_{P,r} = 9{,}41$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é de, aproximadamente, $9{,}41\ cm$.

$$P$$

$$r$$

$$9{,}41\ cm$$

Vamos Exercitar?

Retomando o problema proposto no início desta aula, devemos encontrar, primeiramente, a equação da reta que representa a viga. Sabemos que a viga passa pelos pontos $A(10{,}12)$ e $B(9{,}18)$. Para encontrar a equação da reta, usamos a expressão:

$$A(10{,}12)$$

$$B(9{,}18)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados e calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & 12 & 1 \\ 9 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & 12 & 1 \\ 9 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(12x + 9y + 180) - (18x + 10y + 108) = 0$$

$$(12x + 9y + 180) - (18x + 10y + 108) = 0$$

$$-6x - y + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x + y - 72 = 0$$

$$-6x - y + 72 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x + y - 72 = 0$$

Logo, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $6x + y - 72 = 0$.

$$A$$

$$B$$

$$6x + y - 72 = 0$$

Agora, vamos determinar a distância entre o ponto P

e a reta
r
. Para isso, usamos a expressão:

$$P$$

$$r$$

$$d_{pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Substituindo as coordenadas do ponto
$P(8{,}6)$
e da reta
$r: 6x + y - 72 = 0$
, temos:

$$P(8{,}6)$$

$$r: 6x + y - 72 = 0$$

$$d_{pr} = \frac{|6\ .\ 8 + 1\ ,\ 6 - 72|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} \quad \rightarrow \quad d_{pr} = \frac{|-18|}{\sqrt{37}} \quad \rightarrow \quad d_{pr} \approx 2{,}96$$

A distância do ponto
P
, de onde sairá o fio até a viga, é de, aproximadamente,
$2{,}96\ m$
. Como serão gastos
20%
a mais de fio, teremos:

$$P$$

$$2{,}96\ m$$

$$20\%$$

$$2{,}96\ .\ 0{,}2 = 0{,}59\ m$$

$$2{,}96\ .\ 0{,}2 = 0{,}59\ m$$

Logo, será gasto um total de

$$2{,}96 + 0{,}59 = 3{,}55\ m$$

$$R\$ \ 38{,}56$$

$$38{,}56 \ . \ 3{,}55 = 136{,}89$$

$$R\$ \ 136{,}89$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Acesse o capítulo 2 do livro *Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear*, de Santos, Andrade e Garcia.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

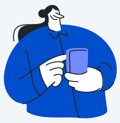
Aula 4

Distância entre Ponto à Plano e Plano à Plano

Distância entre ponto a plano e plano a plano

Disciplina

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai aprender como calcular distância entre ponto e plano, entre planos e entre retas.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois, em geometria analítica, o cálculo de distâncias entre pontos, retas e planos é uma parte fundamental, e esses conteúdos nos auxiliam em diversos cálculos da engenharia e da matemática.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Partida

Você se lembra de que estudou distância entre dois pontos? Você aprendeu também a calcular o ponto médio de um segmento e o baricentro de um triângulo. Nesta aula, você aprenderá a calcular a distância entre ponto a plano e entre plano a plano. Esses conteúdos nos auxiliam em diversos cálculos da engenharia e da matemática.

Suponha que, para finalizar a obra que sua empresa estava realizando em uma casa, você precise instalar placas de vidros nas janelas. Serão várias placas que, ao se abrirem, ficarão paralelas umas às outras. Você precisará determinar, exatamente, a distância entre elas e, para isso, terá que usar seus conhecimentos matemáticos.

Você já determinou as equações das placas a serem instaladas. Agora, precisará determinar a distância entre elas, quando abertas, como na Figura 1.

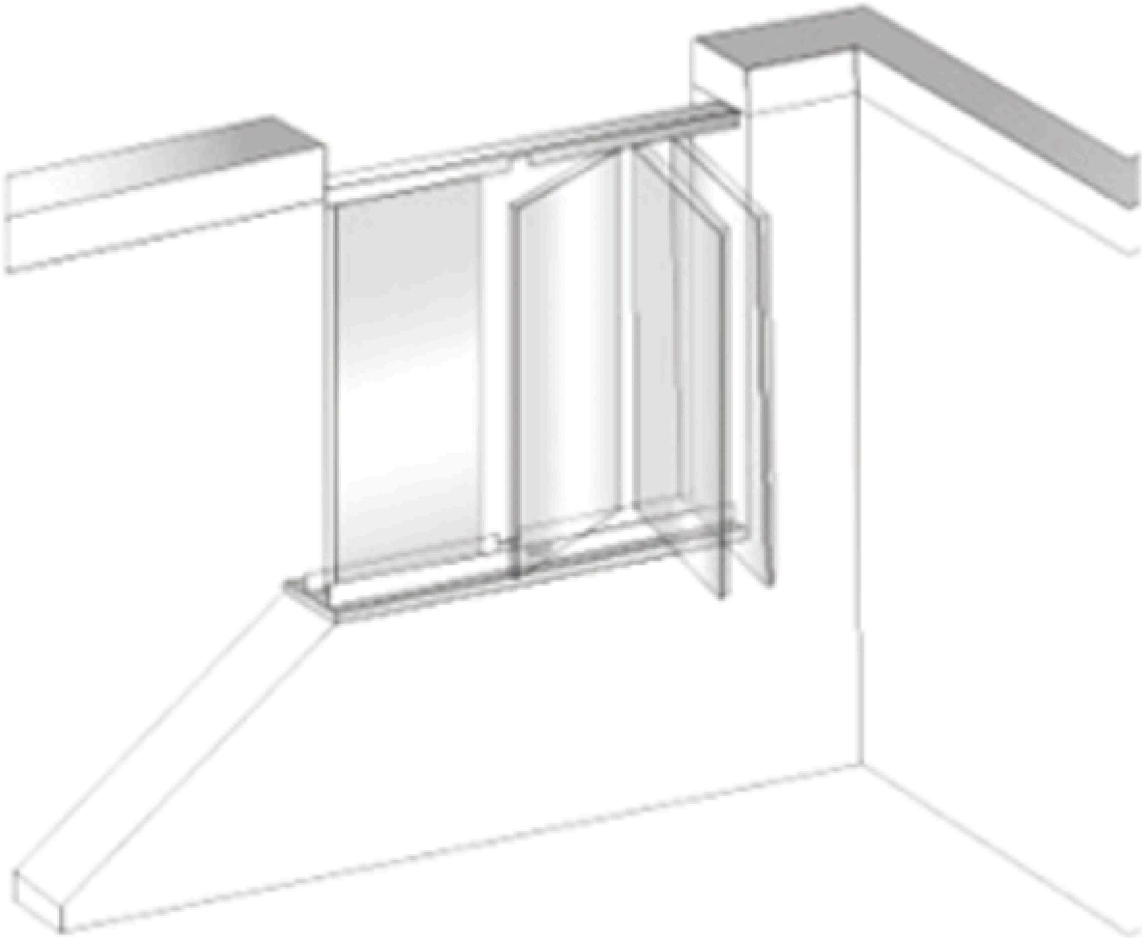


Figura 1 | Distância entre planos. Fonte: https://goo.gl/2BKS0H. Acesso em: 20 set. 2016.

Essa imagem foi gerada por programa de computador, e agora cabe a você determinar a distância entre as placas de vidro, em metros, sabendo que as equações dos planos que as representam são
 e

Vamos lá?

Bons estudos.

Vamos Começar!

Distância de um ponto P a um plano α

Sejam um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, tal que P esteja fora do plano α. Seja $Q(x, y, z)$ um ponto de α, e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ um vetor normal do plano α, como na Figura 2.

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$$P$$

$$\alpha$$

$$Q(x, y, z)$$

$$\alpha$$

$$\overrightarrow{n} = (a, b, c)$$

$$\alpha$$

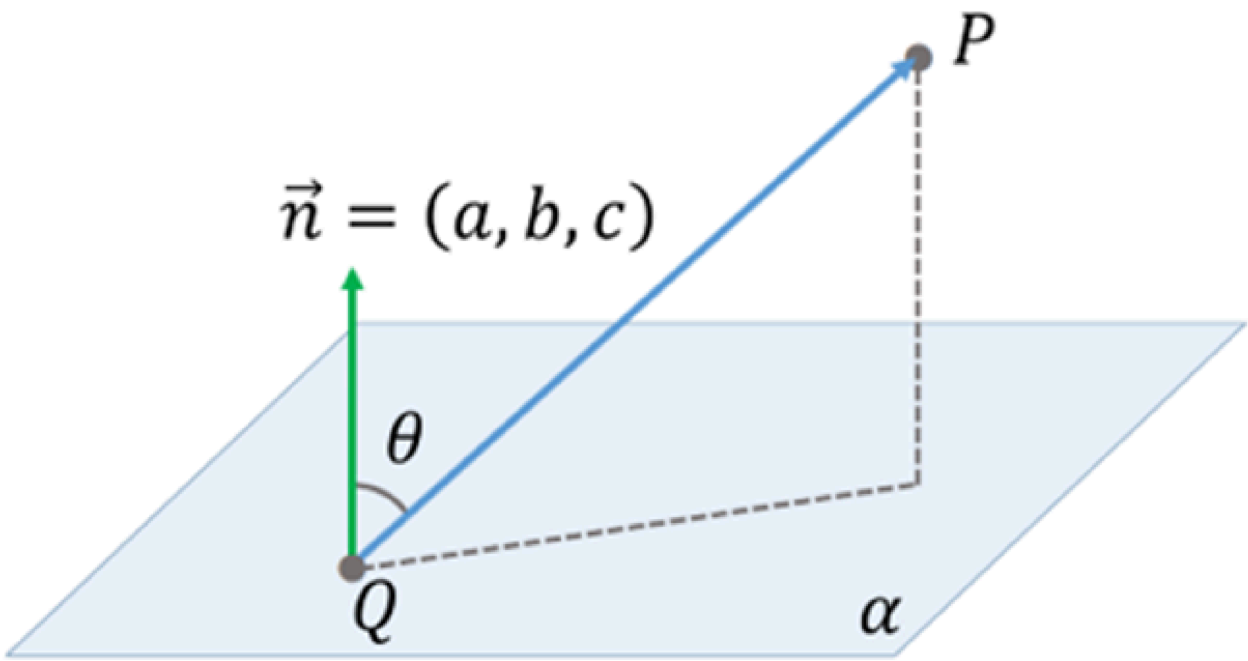


Figura 2 | Distância de um ponto ao plano. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 212).

Calculando o produto interno entre o vetor

$\overrightarrow{n}$

e o vetor

$\overrightarrow{QP}$

, temos:

$\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP} = \left|\overrightarrow{n}\right|, \left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\theta$$

Retirando da Figura 2 o triângulo retângulo em que

$\overrightarrow{QP}$

é a hipotenusa (veja Figura 3) temos:

$\overrightarrow{QP}$

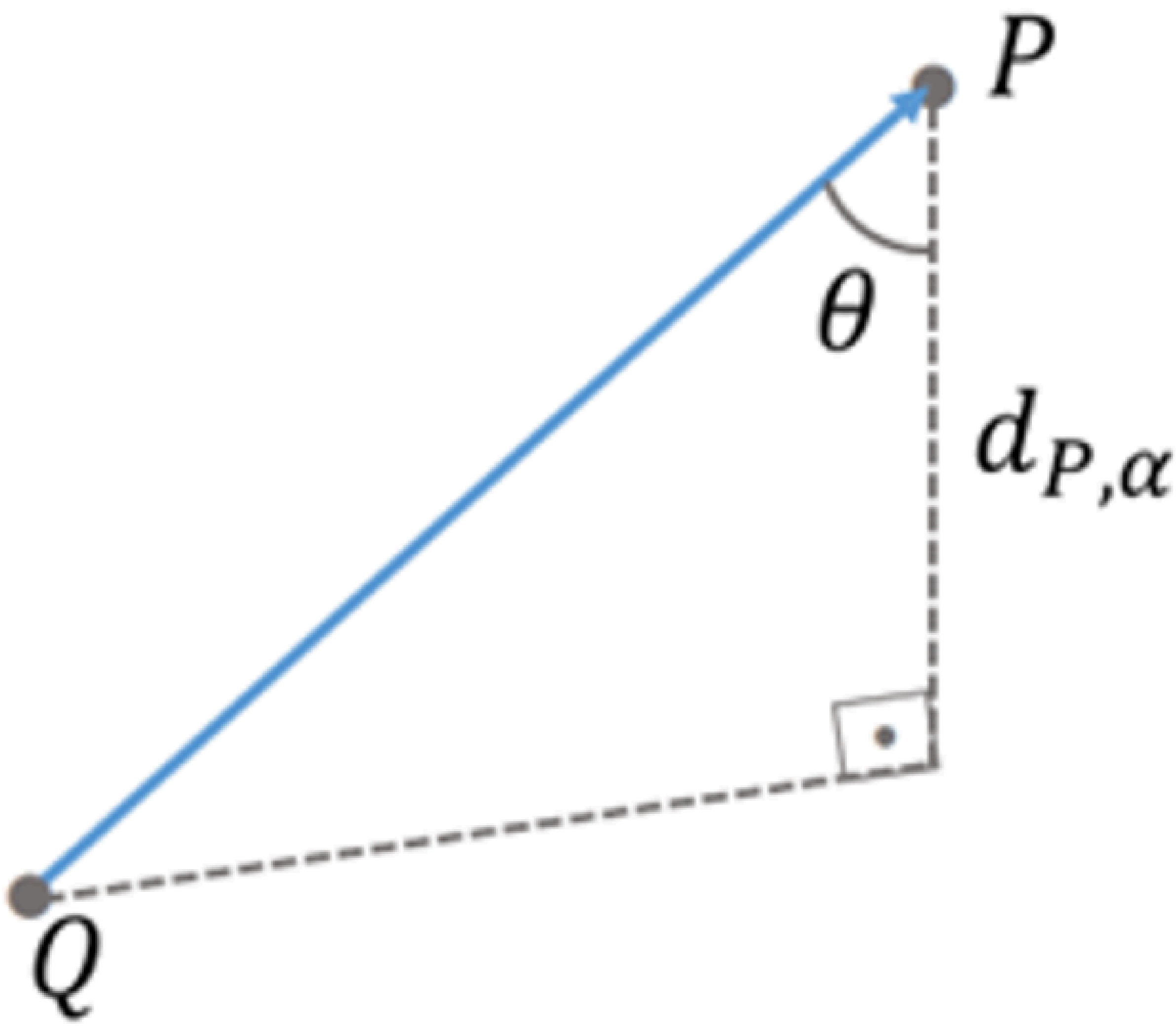


Figura 3 | Triângulo retângulo da Figura 2. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 212).

$$cos\theta = \frac{d_{P,\alpha}}{\left|\overrightarrow{QP}\right|}$$

Substituindo essa expressão no produto interno, temos:

$$\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{n}\right|, \left|\overrightarrow{QP}\right| \frac{d_{P,\alpha}}{\overrightarrow{QP}} \quad \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{n}\right|, d_{P,\alpha}$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$$

Sabendo que
$$\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
e

$$\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP} = (a,b,c).(x_0-x, y_0-y, z_0-z)$$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP} = -ax-by-cz+ax_0+by_0+cz_0$$

Lembrando que
$-ax-by-cz=d$
(equação do plano
α
), temos:

$$-ax-by-cz=d$$

$$\alpha$$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{QP} = ax_0+by_0+cz_0+d$$

Logo, a distância de
P
a
α
é:

$$P$$

$$\alpha$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|}$$

Exemplo: Sejam um ponto
$P(10{,}5,-4)$
e um plano
$\alpha: 2x+4y-6z+8=0$
. Determine a distância do ponto ao plano, medida em centímetros.

$$P(10{,}5,-4)$$

$$\alpha : 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

Resolução: Para determinar a distância do ponto
P
ao plano
α
, usamos a expressão a seguir:

P

α

$$d_{P,\alpha} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|}$$

Substituindo os valores, temos:

$$d_{P,\alpha} = \frac{|2\ .\ 10+4\ .\ 5+(-6).\ (-4)+8|}{\left|\sqrt{2^2+4^2+(-6)^2}\right|} \quad \rightarrow \quad d_{P,\alpha} = \frac{72}{\sqrt{56}} \quad \rightarrow \quad d_{P,\alpha} = 9{,}62$$

Logo, a distância do ponto
P
ao plano
α
é de, aproximadamente,
$9{,}62\ cm$
.

P

α

$9{,}62\ cm$

Distância de um plano α a um plano β

Sejam dois planos,
$\alpha : ax + by + cz + d = 0$
e
$\beta : a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$
. Para calcularmos a distância entre esses dois planos, primeiramente é necessário saber que isso só tem sentido se os planos forem paralelos.

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$$\beta : a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$$

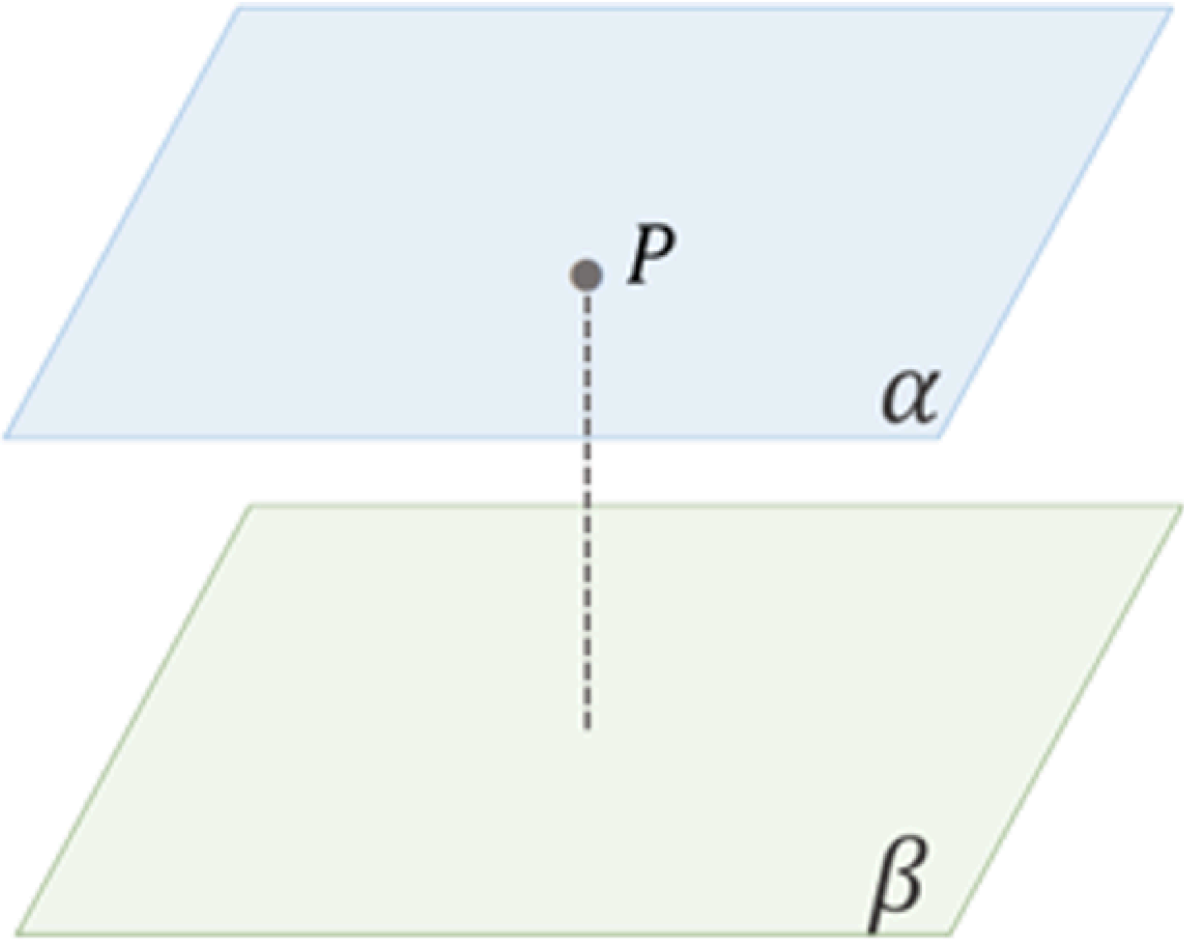


Figura 4 | Planos paralelos. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 214).

Para calcular essa distância, utilizaremos a mesma fórmula de distância de ponto a plano:

$$d_{P,\alpha} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|}$$

Para determinarmos essa distância, tomamos um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, tal que $P \in \alpha$. A distância $d_{P,\alpha} = d_{P,\beta}$, ou seja, a distância de um ponto qualquer de α ao plano β é igual à distância entre esses planos, como na Figura 4.

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$P \in \alpha$$

$$d_{P,\alpha} = d_{P,\beta}$$

$$\alpha$$

$$\beta$$

Exemplo: Sejam dois planos de equações
$\alpha : x + 2y - 2z + 1 = 0$
e
$\beta : 2x + 4y - 4z + 4 = 0$
. Determine a distância entre eles.

$$\alpha : x + 2y - 2z + 1 = 0$$

$$\beta : 2x + 4y - 4z + 4 = 0$$

Resolução: Para determinar a distância entre os planos dados, usamos a expressão:

$$d_{P,\alpha} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\left|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right|}$$

Primeiro, determinamos um ponto qualquer de um dos planos, por exemplo, o plano
α
. Tomemos
$P(3{,}0,2)$
, junto com a equação do plano
$\beta : 2x + 4y - 4z + 4 = 0$
, e substituímos os valores:

$$\alpha$$

$$P(3{,}0,2)$$

$$\beta : 2x + 4y - 4z + 4 = 0$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|2\ .\ 3 + 4\ .\ 0 + (-4).\ 2 + 4|}{\left|\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}\right|} \quad \rightarrow \quad d_{P,\alpha} = \frac{|6 - 8 + 4|}{\left|\sqrt{4 + 16 + 16}\right|} \quad \rightarrow \quad d_{P,\alpha} = \frac{2}{6}$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{1}{3}$$

Logo, a distância entre
α

e
β
é
$1/3$
de uma unidade de comprimento.

α

β

$1/3$

Siga em Frente...

Distância entre duas retas

1. Se duas **retas** são **concorrentes**, por definição, a distância entre elas é nula. O mesmo ocorre para os planos: quando se interceptam, a distância é nula.

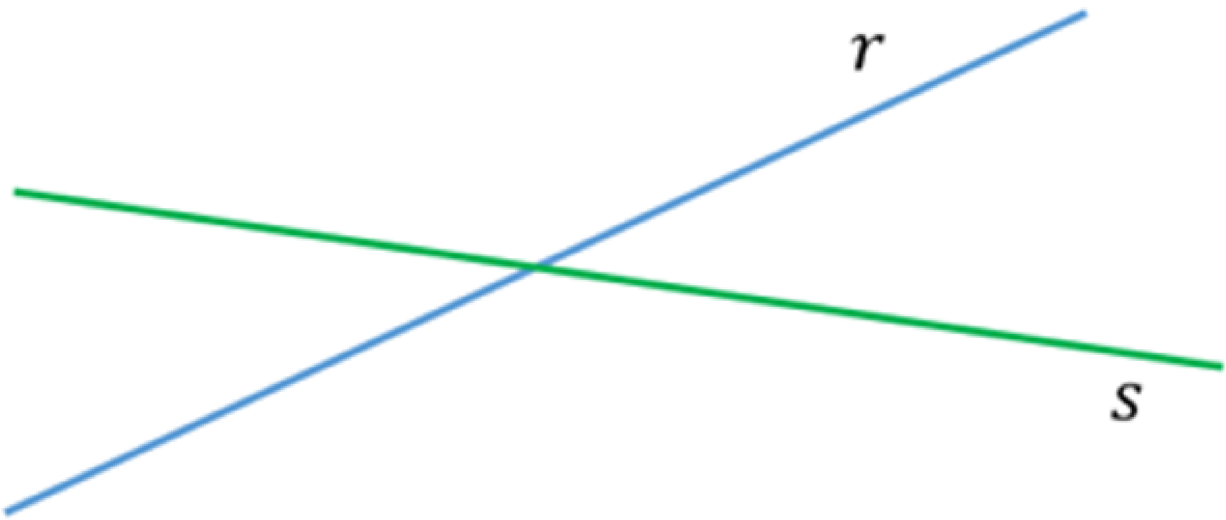


Figura 5 | Retas concorrentes. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 215).

2. Se duas **retas**
r
e
s
são **paralelas**, no
$\mathbb{R}^2$
, a distância entre as duas é calculada de maneira similar à distância entre dois planos.

r

s

$\mathbb{R}^2$

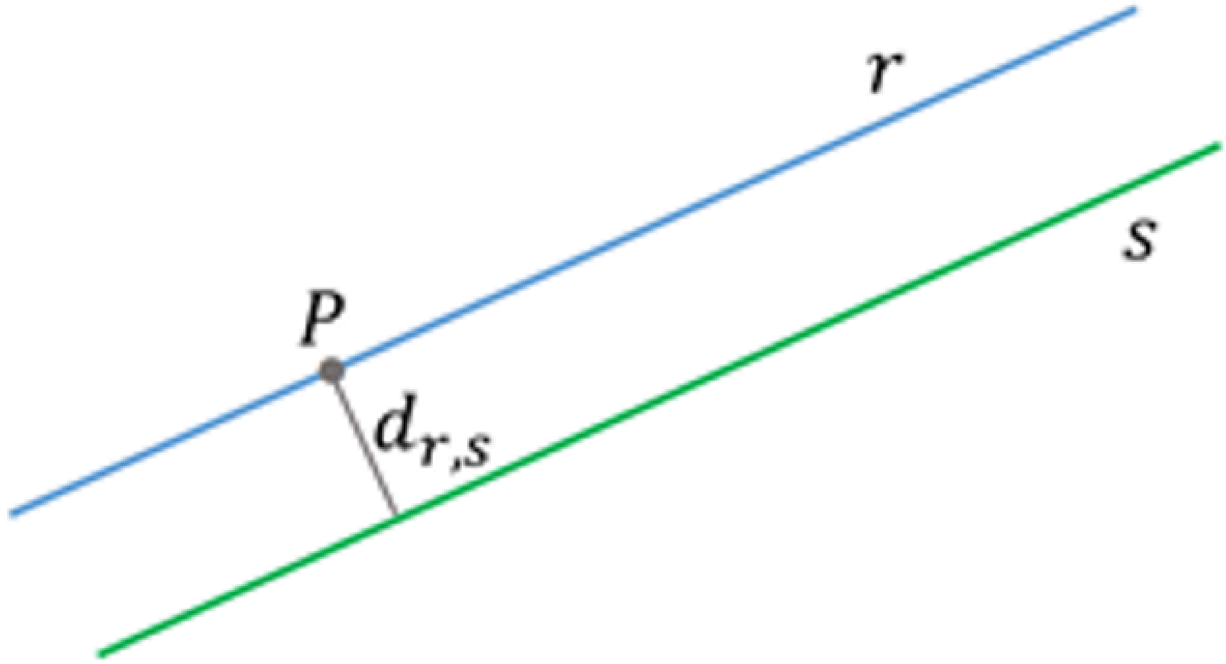


Figura 6 | Retas paralelas. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 216).

Tome um ponto $P \in r$. A distância entre $P(x_0, y_0)$ e $r: ax + by + c = 0$ será a distância entre r e s, que é dada por:

$P \in r$

$P(x_0, y_0)$

$r: ax + by + c = 0$

r

s

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|}$$

Caso as retas estejam no
$\mathbb{R}^3$
, usamos o mesmo processo, mas com a expressão referente ao
$\mathbb{R}^3$
:

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$

$$d_{P,r} = \frac{\left|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{d_r}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|}$$

3. Se as **retas** e são **reversas**.

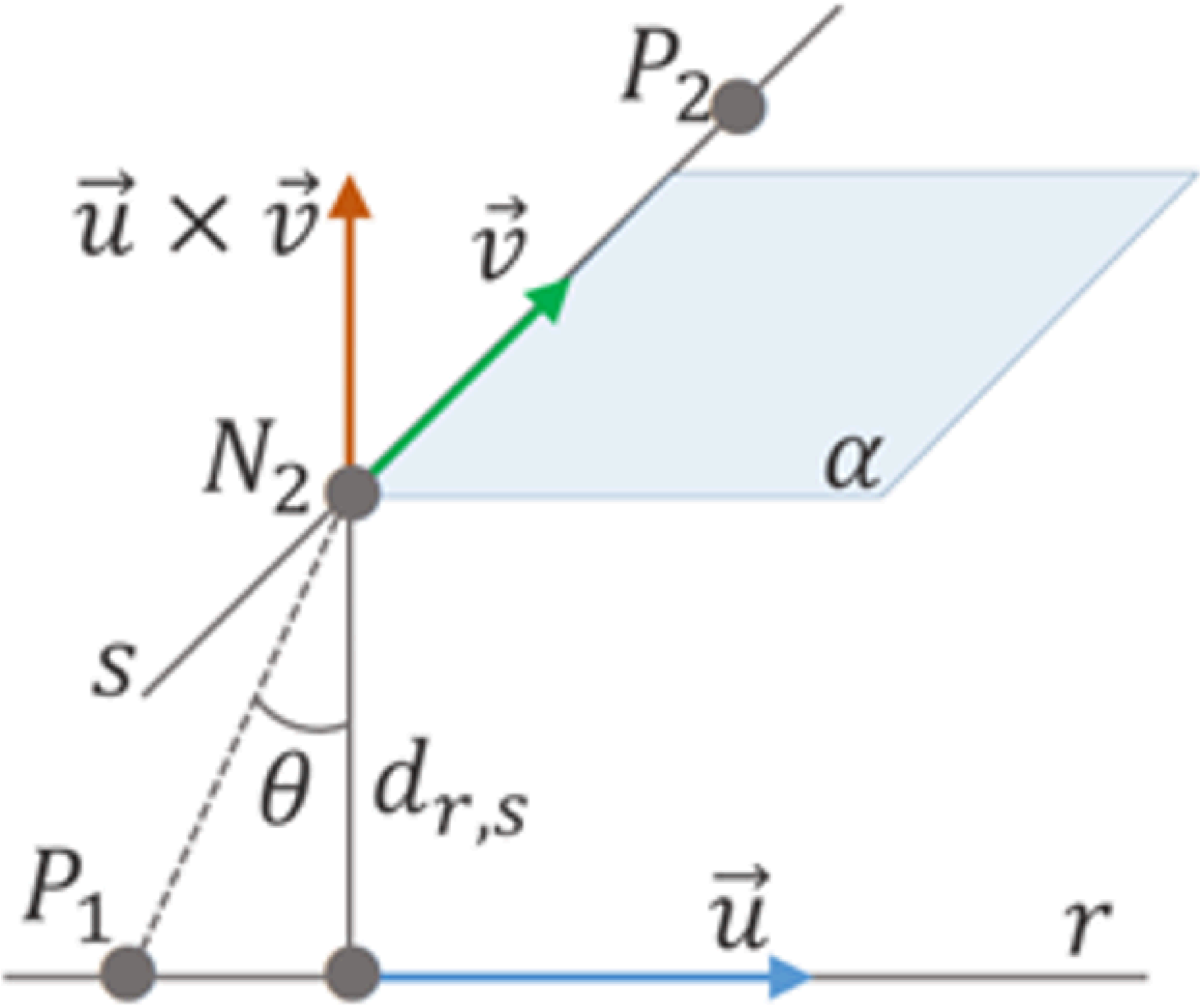


Figura 7 | Retas reversas. Fonte: adaptada de Portes e Farias (2016, p. 217).

Sejam a reta r, que contém o ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta s, que contém o ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Considere o plano α paralelo à reta r

, contendo a reta

s

. A distância de

r

a

s

é a mesma que a distância de

P_1

a

α

, ou seja,

$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha}$

.

r

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$

s

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$

α

r

s

r

s

P_1

α

$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha}$

Da trigonometria:

$$cos\theta = \frac{d_{r,s}}{\left|\overrightarrow{N_2P_1}\right|} \quad \rightarrow \quad d_{r,s} = \left|\overrightarrow{N_2P_1}\right| cos\theta$$

A igualdade não muda se multiplicarmos o segundo membro por 1, logo:

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left|\overrightarrow{N_2P_1}\right|, 1, cos\theta \;\; \rightarrow \;\; d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left|\overrightarrow{N_2P_1}\right|, \left|\overrightarrow{n}\right|, cos\theta$$

com

$$\overrightarrow{n} = -\frac{\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|}$$

Note que
$\overrightarrow{n}$
é o oposto do versor
$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$
e que a distância é sempre um valor não negativo. Portanto:

$$\overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left|\overrightarrow{N_2P_1}.\overrightarrow{n}\right|$$

Como
N_2
não foi especificado, tome
$N_2 = P_2$
. Com isso:

$$N_2$$

$$N_2 = P_2$$

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left|\overrightarrow{P_2P_1}.\overrightarrow{n}\right|$$

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \left|\frac{\overrightarrow{P_2P_1}\,.\,\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|}\right|$$

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \frac{\left|\overrightarrow{P_2P_1} \, . \, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right|}$$

$$d_{r,s} = d_{P_1,\alpha} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right|}$$

em que
$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]$$
é o produto misto dos vetores
$\overrightarrow{u}$
,
$\overrightarrow{v}$
e
$\overrightarrow{P_1P_2}$
.

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]$$

$$\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}$$

Exemplo: Determine a distância entre as retas
$r : (5{,}2, 1) + t(2, -2{,}3)$
e
$s : (1{,}2, 2) + m(1{,}5, -1)$
.

$$r : (5{,}2, 1) + t(2, -2{,}3)$$

$$s : (1{,}2, 2) + m(1{,}5, -1)$$

Resolução: As retas
r

e

s

são reversas. Encontrando um ponto em cada reta:

r

s

$$r:(5,2,1)+t(2,-2,3)\ \rightarrow$$

para

$$t=0\ \ \rightarrow\ \ P(5,2,1)$$

$$r:(5,2,1)+t(2,-2,3)\ \rightarrow$$

$$t=0\ \ \rightarrow\ \ P(5,2,1)$$

$$s:(1,2,2)+m(1,5,-1)\ \rightarrow$$

para

$$m=0\ \ \rightarrow\ \ Q(1,2,2)$$

$$s:(1,2,2)+m(1,5,-1)\ \rightarrow$$

$$m=0\ \ \rightarrow\ \ Q(1,2,2)$$

Sabemos, também, que os vetores diretores das retas são:

$$\overrightarrow{d_r}=(2,-2,3)$$

e

$$\overrightarrow{d_s}=(1,5,-1)$$

$$\overrightarrow{d_r}=(2,-2,3)$$

$$\overrightarrow{d_s}=(1,5,-1)$$

Determinamos, agora, o vetor

$$\overrightarrow{QP}$$

:

$$\overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{QP} = (5{,}2,1) - (1{,}2,2) \;\; \rightarrow \;\; \overrightarrow{QP} = (4{,}0,-1)$$

Calculando

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}$$

:

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}$$

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \widehat{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 10\widehat{k}\right) - \left(15\hat{i} - 2\hat{j} - 2\widehat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (-13{,}5,12)$$

Logo, substituindo os valores encontrados na expressão para calcular a distância entre as retas, temos:

$$d_{r,s} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{QP}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}\right|}$$

$$d_{r,s} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{QP}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}\right|}$$

$$d_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{(-13)^2 + 5^2 + 12^2}} \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$d_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{(-13)^2 + 5^2 + 12^2}} \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$d_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{338}} \left|(-10+8+0)-(60+2+0)\right|$$

$$d_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{338}} \left|(-10+8+0)-(60+2+0)\right|$$

$$d_{r,s} = \frac{64}{\sqrt{338}}$$

$$d_{r,s} = \frac{64}{\sqrt{338}}$$

$$d_{r,s} \approx 3{,}48$$

$$d_{r,s} \approx 3{,}48$$

Portanto, a distância entre as retas r e s é, aproximadamente, $3{,}48$.

r

s

$3{,}48$

Vamos Exercitar?

Vamos retomar o problema proposto no início desta aula. Sabemos que as placas de vidro são placas planas e que suas equações são, respectivamente, $\alpha : 3x - 2y + 5z + 1 = 0$ e $\beta : \; -6x + 4y - 10z - 1 = 0$. Logo, para determinarmos a distância entre elas, basta determinarmos a distância entre os planos α e β usando a expressão:

$$\alpha : 3x - 2y + 5z + 1 = 0$$

$$\beta : \; -6x + 4y - 10z - 1 = 0$$

$$\alpha$$

$$\beta$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Primeiro, determinamos um ponto qualquer de um dos planos, por exemplo, o plano α. Tomemos $P(2,1,-1) \in \alpha$. Agora, calculamos a distância do ponto P ao plano β. Substituindo os valores das coordenadas do ponto P da equação do plano β, temos:

$$\alpha$$

$$P(2,1,-1) \in \alpha$$

$$P$$

$$\beta$$

$$P$$

$$\beta$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|-6\ .\ 2+4\ .\ 1+(-10).\ (-1)+(-1)|}{\sqrt{(-6)^2+4^2+(-10)^2}}$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|-12+4+10-1|}{\sqrt{36+16+100}}$$

$$d_{P,\alpha} = \frac{|1|}{\sqrt{152}}$$

$$d_{P,\alpha} = 0{,}081$$

Logo, a distância entre

$$\alpha$$

$$\beta$$

$$0{,}081\ m$$

$$8{,}1\ cm$$

Saiba mais

Aprofunde seus conhecimentos!

Amplie seus conhecimentos em distância de ponto a plano acessando este material: *Capítulo VI - Distância*.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.

PORTES, L. A.; FARIAS, C. M. O. **Geometria analítica e álgebra vetorial.** Londrina: Editora Distribuidora Educacional S.A., 2016.

SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.

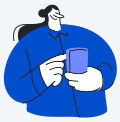
Aula 5

Encerramento da Unidade

Videoaula de Encerramento

Este conteúdo é um vídeo!

GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA VETORIAL



Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Dica para você

Aproveite o acesso para baixar os slides do vídeo, isso pode deixar sua aprendizagem ainda mais completa.

Olá, estudante! Nesta videoaula, você vai conhecer os conceitos e os fundamentos da geometria analítica e da álgebra vetorial que apoiem o desenvolvimento de uma visão geométrica e algébrica ampla para ser aplicada em problemas ligados às ciências.
Este conteúdo é importante para a sua prática profissional, pois a geometria analítica e a álgebra vetorial fornecem ferramentas poderosas para analisar e entender as propriedades geométricas de objetos matemáticos. Esses conceitos são fundamentais em diversas áreas, como física, engenharia e ciências computacionais.
Prepare-se para essa jornada de conhecimento! Vamos lá!

Ponto de Chegada

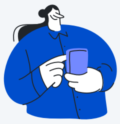
A geometria analítica e a álgebra vetorial fornecem ferramentas para analisar e entender as propriedades geométricas de objetos matemáticos. Esses conceitos são fundamentais em diversas áreas, como física, engenharia e ciências computacionais.

Nesta unidade, estudamos equações de retas e planos e distâncias envolvendo pontos, retas e planos. As retas são usadas para estudar propriedades geométricas, como inclinação, interseções e posições relativas entre retas. A equação do plano é essencial para descrever a posição e a orientação de superfícies planas em um espaço tridimensional. A distância entre pontos é uma medida fundamental que tem aplicações em várias disciplinas e contextos; por exemplo, em sistemas de navegação, a distância entre pontos é essencial para calcular a rota mais curta entre dois locais.

Perguntas e reflexões

1. Ao calcular a equação da reta, dados dois pontos A e B, você pode escolher qualquer um dos pontos A ou B e substituir suas coordenadas no lugar de (x_1, y_1) ou (x_2, y_2), que a equação da reta obtida será a mesma. Além disso, se $ax + by + cz = 0$ é a equação da reta r, $kax + kby + kc = 0$ também o é, para todo $k \neq 0$.
2. Um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertencerá ao plano se satisfizer a equação $ax + by + cz + d = 0$, quando substituímos os valores de suas coordenadas, ou seja, $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.
3. Considere a equação do plano $ax + by + cz = 0$. Os coeficientes a, b e c são as coordenadas de um vetor ortogonal ao plano, ou ainda, normal ao plano α.
4. Por que não convém calcular a distância entre dois planos se eles não forem paralelos?

É Hora de Praticar!



Este conteúdo é um vídeo!

Para assistir este conteúdo é necessário que você acesse o AVA pelo computador ou pelo aplicativo. Você pode baixar os vídeos direto no aplicativo para assistir mesmo sem conexão à internet.

Um engenheiro instalou duas pequenas placas planas dentro de uma máquina, de maneira que ambas não sejam paralelas. Ele precisa determinar o ângulo entre essas placas. A primeira tem equação $3x - y + z - 1 = 0$ e a segunda, equação $6x + 2y - 4z + 7 = 0$, ambas obtidas com base no esboço tridimensional do projeto, feito em computador. Qual é o ângulo encontrado pelo engenheiro?

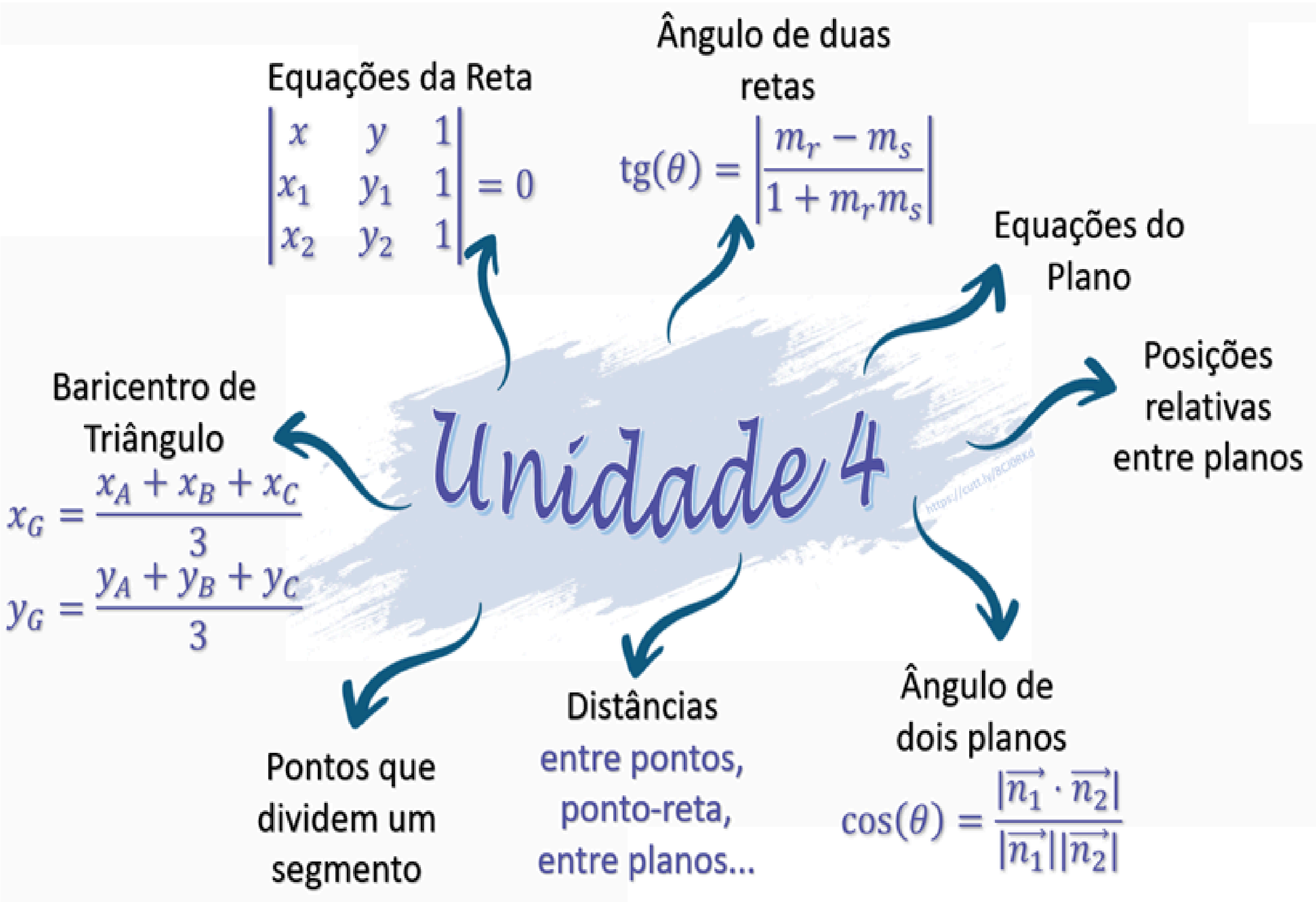
Como você responderia à questão apresentada? Se necessário revisite o conteúdo da unidade para solucioná-la!

Primeiramente, ele precisa considerar os vetores $\overrightarrow{u} = (3, -1{,}1)$ e $\overrightarrow{v} = (6{,}2, -4)$ normais às placas 1 e 2, respectivamente. Vamos começar determinando $\left|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right|$, $\left|\overrightarrow{u}\right|$ e $\left|\overrightarrow{v}\right|$.

$$\left|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right| = \left|3\ .\ 6 + (-1)\ .\ 2 + 1\ .\ (-4)\right.$$
$$\left|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right| = 12$$
$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}$$
$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{5}$$
$$\left|\overrightarrow{u}\right| = 3{,}32$$
$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2}$$
$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{56}$$
$$\left|\overrightarrow{v}\right| = 7{,}48$$
$$cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|}$$
$$cos\theta = \frac{12}{3{,}32\ .\ 7{,}48}$$
$$cos\theta = 0{,}48$$

$\theta = arcos(0{,}48)$
$\theta = 61{,}1^\circ$
Logo, θ é o arco cujo cosseno é de, aproximadamente $0{,}48$ e θ é de, aproximadamente, $61{,}1^\circ$.
Dessa forma, as placas formam, entre si, um ângulo aproximado de $61{,}1^\circ$.

O mapa mental a seguir sintetiza os principais conceitos abordados na Unidade. Você deve percorrê-lo da esquerda para a direita, a partir de "Equações da reta". Um mapa mental é uma representação gráfica e visual de ideias e conceitos, geralmente centrado em torno de uma palavra-chave ou ideia central. Ele é uma ferramenta eficaz para organizar informações, estimular a criatividade e facilitar o aprendizado.



Por sua vez, os quadros a seguir apresentam outros conteúdos estudados nesta unidade. Confira!

Equações da reta	
Ponto A = (x_1, y_1, z_1) e vetor diretor $\vec{v} = \left(a, b, c\right)$	
Equação vetorial	$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$

Equações paramétricas	$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$
Equações simétricas	$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$
Reta definida por dois pontos	$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$
Equação reduzida da reta	$y = mx + b$
Equação geral da reta no plano	$ax + by + c = 0$

Equações do plano	
3 pontos	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$
2 pontos e um vetor	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$
1 ponto e dois vetores	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

Equações do plano	
Ponto A = (x_1, y_1, z_1) e vetor diretor $\overrightarrow{n} = \left(a, b, c\right)$	
Equação geral ou cartesiana	$a(x - x_1) + (y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ $ax + by + cz + d = 0$
Equação vetorial	$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$
Equações paramétricas	$\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$

Equação segmentária	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

Distâncias	
Distância entre dois pontos	$d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$
Distância ponto a reta	$d_{p,r} = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Distância de ponto a plano	$d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Distância entre retas	$d = \frac{\lvert \left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2}\right) \rvert}{\lvert \vec{u} \times \vec{v} \rvert}$

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
MACIEL, T. **Vetores e geometria analítica:** do seu jeito. São Paulo: Blucher, 2022.
SANTOS, N. M.; ANDRADE, D.; GARCIA, N. M. G. **Vetores e matrizes:** uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thompson Learning, 2007.