Università degli Studi di Salerno

Teoria e Tecnica delle Telecomunicazioni
- 17 dicembre 2015 -

— PROVA IN ITINERE —

Quesito 1 Si consideri una sorgente di informazione senza memoria X con alfabeto discreto $\mathcal{X}$ e con pmf $p(x)$. Sia $\boldsymbol{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$ una generica sequenza di lunghezza n prodotta dalla sorgente (cioè una n-sequenza di variabili aleatorie iid, ciascuna con pmf $p(x)$).

a. Definire l'insieme tipico $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$.

b. Elencare e dimostrare le proprietà salienti dell'insieme tipico $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$.

Si consideri poi il caso binario: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, con $\mathbb{P}(X = 1) = a$, $0 < a < 1$.

c. Stabilire per quali valori di a si verifica la seguente relazione

$$\boldsymbol{x}^n \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - a \right| < 10^{-3}$$

Quesito 2 Si illustri, con dovizia di dettagli analitici, il metodo geometrico per giustificare le formule della capacità di canale in relazione a:

a. canale BSC con probabilità di errore ϵ (conteggio delle sequenze, approssimazione di Stirling);

b. canale gaussiano con vincolo di potenza P (tecnica di impacchettamento delle sfere).

Quesito 3 Un dado da gioco è stato truccato in modo che mostri faccia pari con probabilità doppia rispetto a faccia dispari. Qual è la distribuzione a massima entropia del dado compatibile con tale vincolo?

Quesito 4 Siano X_1, X_2, X_3, tre variabili aleatorie binarie definite sull'alfabeto $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Sia inoltre $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$. La variabile X_1 rappresenta l'ingresso di un canale BSC con probabilità di crossover $1/2$, la cui uscita è X_2. A sua volta X_2 rappresenta l'ingresso di un ulteriore canale BSC con probabilità di crossover ϵ, la cui uscita è X_3. Si consideri la sorgente di informazione $\mathcal{S}$ la cui uscita è il vettore $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Assumendo $1/2 < p < 2/3$, ed $\epsilon > 0$ piccolo a piacere:

a. calcolare l'entropia di sorgente $H(\boldsymbol{X})$;

b. progettare un codice di Huffman per la sorgente $\mathcal{S}$, e determinarne la lunghezza media $\mathcal{L}(p, \epsilon)$.

c. Ripetere l'esercizio assumendo questa volta $\epsilon = 0$.

Quesito 5 Calcolare la capacità del canale $X \to Y$ DMC binario $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$, con $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$, la cui matrice di transizione è

$$\begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ b & a & 1-a-b \end{pmatrix}$$

Discutere poi il caso particolare in cui $1 - a - b = b$.